

Dinâmica de um Vórtice num Perfil de Thomas-Fermi

Rafael Polisel Teles

Resumo

Aqui fizemos uma implementação e o estudo de fases apropriadas para uma melhor descrição dos sistemas físicos com o uso do método variacional de parâmetros variáveis. Em geral, as fases do condensado deverão ser polinômios de grau igual ou maior que dois. E então, com uma nova fase apropriada foi possível calcular os modos coletivos de um condensado contendo um vórtice ao longo do eixo axial (simetria cilíndrica), assim como a expansão livre deste. Como resultado abrimos uma degenerescência em cada modo de oscilação já conhecido, monopolo (breathing) e quadrupolo, estando a degenerescência associada à oscilação do núcleo do vórtice em fase ou não com relação ao raio axial. Sempre há pelo menos um modo degenerado no sistema, quando excitado apresenta um modo coletivo que é a soma dos dois modos de mesma energia.

Contents

I. Introduzindo o Problema	2
II. Engenharia de Fase	4
III. Calculando a Lagrangiana	7
IV. Equações de Movimento	9
V. Modos Coletivos e Estabilidade dos Vórtices	11
VI. Modulando o Comprimento de Espalhamento	13
VII. Expansão Livre	14
VIII. Conclusão	15
A. Duas Aproximações de perfil de Thomas-Fermi contendo um Vórtice	16
B. Calculo das Funções $A_i(\alpha)$	17
C. Solução da Equação Cúbica	19
D. Cross-Check	22
Referências	22

I. INTRODUZINDO O PROBLEMA

Estamos interessados em observar a dinâmica de um condensado armadilhado contendo um vórtice central do tipo linha, ou seja, queremos obter os modos de oscilação coletiva deste sistema. O interesse nesse problema está no fato de podemos medir estas oscilações ao deslocarmos a nuvem atômica de seu equilíbrio, utilizando a ressonância de Feshbach para modular o comprimento de espalhamento[1–5]. Essas oscilações também são usada em outros sistemas físicos como: duas espécies condensadas[6], BCS-BEC crossover[7–9] e Hélio superfluido[10]. Do ponto de vista teórico estamos interessados em saber como é dada a oscilação do raio do vórtice com respeito aos modos coletivos em simetria cilíndrica (modo quadrupolar e modo de breathing). O modo quadrupolar é quando as componentes do condensado oscilam fora de fase, sendo este o modo com menor frequência de excitação. Já o modo que demanda maior energia

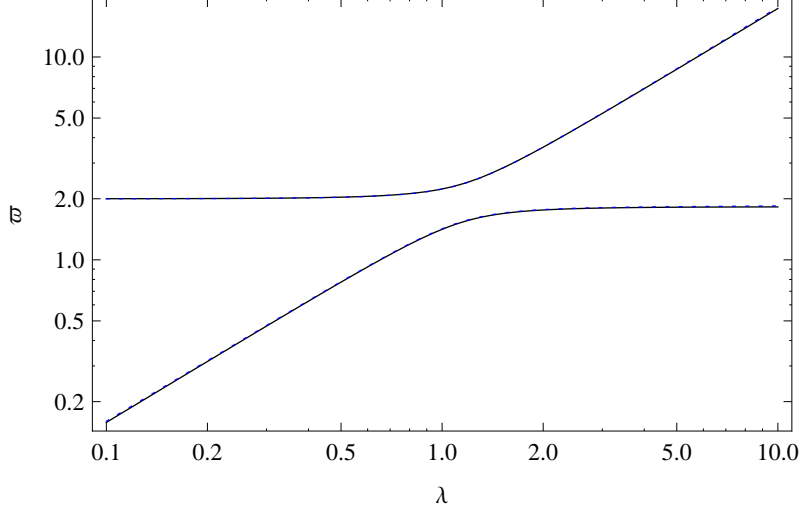


Figura 1: As linhas superiores dizem respeito à frequência do modo de breathing como uma função da anisotropia do potencial harmônico (armadilha), enquanto as linhas inferiores representam a frequência do modo quadrupolar. As linhas cheias (pretas) são para o caso de um TF sem vórtice, e as linhas pontilhadas (azuis) são para o caso com vórtice na aproximação Gaussiana. Essa aproximação se torna ruim acima de $\lambda \approx 1.5$, pois, apesar de ser imperceptível no gráfico, a linha da Gaussiana para o modo de breathing cruza a linha do TF. Necessariamente, a presença do vórtice deve abaixar a frequência do modo de breathing, o que não concorda com a região de condensados oblatos, e aumentar a frequência do modo quadrupolar, o que está de acordo, sendo esses os shifts das frequências. Note que ϖ está normalizado à frequência da direção radial ω_ρ .

para ser excitado é o modo de breathing, pois a alta densidade da nuvem atômica faz com que a mesma imponha uma maior resistência para sair do equilíbrio[11, 12].

A dinâmica dos modos normais de um vórtice foi estudada em modelos hidrodinâmica, os quais se focam no movimento do vórtice com relação ao centro de massa do condensado[13–15], sendo usado esse conceito no caso de duas componentes[16].

Cálculos preliminares utilizando um Ansatz Gaussiano com método variacional[3, 6, 16, 17], o qual não leva em conta o tamanho do vórtice, mostram um pequeno shift nas frequências (Figura 1), esse shift já foi obtidos via uma hidrodinâmica em [12] e [18]. Assim podemos esperar que a frequência do monopolo (breathing) caia enquanto a frequência do quadrupolo aumente, na presença do vórtice.

Para calcular isso de uma forma mais coerente com a realidade física, usamos então um

Ansatz Thomas-Fermi (TF)[19],

$$\psi(\rho, \varphi, z, t) = A(t) \left[\frac{\rho^2}{\rho^2 + \xi(t)^2} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_\rho(t)^2} - \frac{z^2}{R_z(t)^2}} \exp \left[iB_\rho(t) \frac{\rho^2}{2} + iB_z(t) \frac{z^2}{2} \right], \quad (1)$$

e calculamos as equações de movimento para os parâmetros do condensado. Continuando com os cálculos, linearizamos estas equações obtendo uma relação de dispersão que resultou em frequências negativas, as quais não faziam sentido. Portanto, tínhamos as equações linearizadas dadas por

$$M\ddot{\delta} + V\delta = 0, \quad (2)$$

e sua relação de dispersão

$$\varpi^2 = \det(M^{-1}V) = \det M^{-1} \det V = \frac{\det V}{\det M}. \quad (3)$$

Para que tenhamos frequências positivas e com significado físico, ambos determinantes acima devem, necessariamente, ser positivos. O que, no caso, não estava acontecendo. Aqui temos que $\det M^{-1} < 0$, o que indica que há um problema com nosso Ansatz. Como nos trabalhos já existente[15, 16, 20] eles não consideram a variação do núcleo do vórtice como um parâmetro variacional, esse problema não aparece. Para reverter este problema temos de alterar a fase deste Ansatz, então escolheremos uma fase adequada posteriormente à um estudo da fase, o qual se encontra na próxima seção.

II. ENGENHARIA DE FASE

Para avaliarmos possíveis fase e, posteriormente, construímos nossa função de onde, utilizaremos a equação da continuidade,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} [(\nabla n) \cdot (\nabla S) + n \nabla^2 S] = 0. \quad (5)$$

Desta maneira ao jogamos na equação acima a densidade referente ao nosso condensado podemos calcular a fazer do mesmo. Fazendo, primeiramente, o cálculo da fase para um condensado TF deslocado do centro de massa, o qual tem uma densidade da seguinte forma

$$n(r, t) = A(t) \left\{ 1 - \left[\frac{r - r_0(t)}{R(t)} \right]^2 \right\}, \quad (6)$$

onde r_0 é a distância do centro do potencial de aprisionamento. Obtemos uma equação para a fase dada por

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r - r_0}{R} \right)^2 \left[\frac{m \dot{R}}{\hbar R} + (r - r_0)^{-1} \left(\frac{m}{\hbar} \dot{r}_0 - \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r - r_0}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{m \dot{A}}{\hbar A} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Uma vez que estamos interessados numa fase que descreve o comportamento na borda do condensado, já que o gradiente no centro não terá variações significativas. Então podemos simplificar a equação acima para quando estamos exatamente em cima do raio do condensado, ou seja, $1 - (r - r_0)^2 / R^2 = 0$.

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{m \dot{R}}{\hbar R} (r - r_0) + \frac{m}{\hbar} \dot{r}_0 \quad (8)$$

$$S(r) = \frac{m}{\hbar} \left(\dot{r}_0 - r_0 \frac{\dot{R}}{R} \right) r + \frac{m \dot{R}}{\hbar R} \frac{r^2}{2} \quad (9)$$

$$= \left(\frac{m}{\hbar} \dot{r}_0 - r_0 B_r \right) r + B_r \frac{r^2}{2} \quad (10)$$

Assim recuperamos as fases usadas em [17], onde podemos ver que o raio do condensado tem sua velocidade proporcional ao quadrado da respectiva coordenada. Sendo a posição r_0 proporcional à respectiva coordenada, sabemos que o movimento do centro de massa está desacoplado com a dinâmica dos raios do condensado. Dessa forma, a fase de um condensado deve ter $b(t)r^2/2$ para descrever a velocidade (curvatura da função de onda) dos raios do mesmo. Já um termo $a(t)r$ que descreve o movimento do centro de massa (inclinação da função de onda).

Agora faremos o mesmo cálculo para um densidade TF contendo um vórtice central ao longo do eixo z ,

$$n(\rho, \varphi, z, t) = A(t) e^{i\ell\varphi} \left\{ 1 - \left[\frac{\xi(t)}{\rho} \right]^2 - \left[\frac{\rho}{R_\rho(t)} \right]^2 - \left[\frac{z}{R_z(t)} \right]^2 \right\}, \quad (11)$$

cuja equação de continuidade fica sendo

$$\begin{aligned} & \frac{m}{\hbar} \left(-\frac{\xi \dot{\xi}}{\rho^2} + \frac{\dot{R}_\rho}{R_\rho^3} \rho^2 + \frac{\dot{R}_z}{R_z^3} z^2 \right) + \left(\frac{\xi^2}{\rho^3} - \frac{\rho}{R_\rho^2} \right) \frac{\partial S}{\partial \rho} - \frac{z}{R_z^2} \frac{\partial S}{\partial z} \\ & + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \left(\frac{m \dot{A}}{\hbar A} + \frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial \rho} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Usando a mesma argumentação anterior para este caso, $1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} = 0$ (no caso de estamos tratando do limite do gás ideal, a densidade será uma gaussiana e os limites de borda são $\rho \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$).

$$\left(-\frac{\xi^2}{\rho^3} + \frac{\rho}{R_\rho^2} \right) \frac{\partial S}{\partial \rho} + \frac{z}{R_z^2} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{m}{\hbar} \left(-\frac{\xi \dot{\xi}}{\rho^2} + \frac{\dot{R}_\rho}{R_\rho^3} \rho^2 + \frac{\dot{R}_z}{R_z^3} z^2 \right) = 0 \quad (13)$$

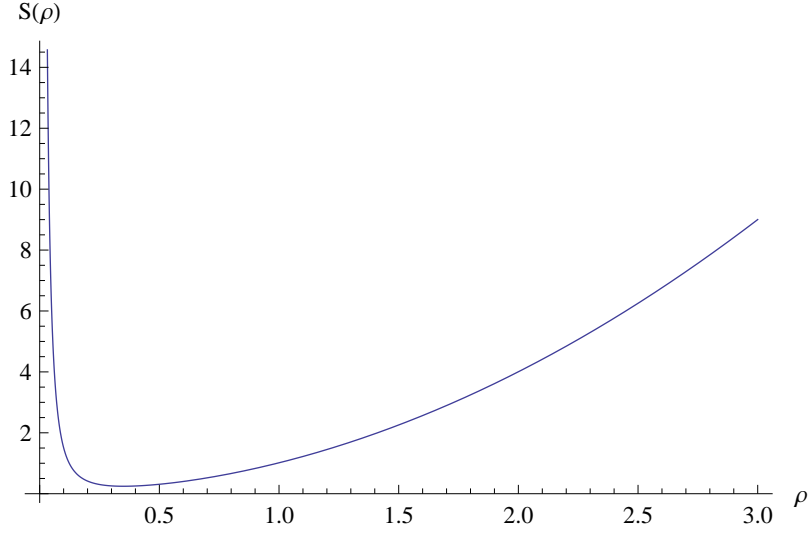


Figura 2: Esboço de (16) na direção radial.

Resolvendo a equação acima temos

$$S(\rho, z) = \frac{m}{4\hbar} (\xi \dot{R}_\rho - R_\rho \dot{\xi}) \left[\ln \left(\frac{R_\rho \xi - \rho^2}{R_\rho \xi + \rho^2} \right) + \ln(-1) \right] + \frac{m}{\hbar} \frac{\dot{R}_\rho}{R_\rho} \frac{\rho^2}{2} + \frac{m}{\hbar} \frac{\dot{R}_z}{R_z} \frac{z^2}{2} \quad (14)$$

$$= \frac{m}{4\hbar} (\xi \dot{R}_\rho - R_\rho \dot{\xi}) \left[\ln \left(\frac{R_\rho \xi - \rho^2}{R_\rho \xi + \rho^2} \right) + i\pi \right] + B_\rho \frac{\rho^2}{2} + B_z \frac{z^2}{2}. \quad (15)$$

$$S(\rho, z) \simeq \frac{m}{2\hbar} (\xi \dot{R}_\rho - R_\rho \dot{\xi}) \left[i\pi - \frac{R\xi}{\rho^2} + O(\xi^3) \right] + B_\rho \frac{\rho^2}{2} + B_z \frac{z^2}{2} \quad (16)$$

$$S(\rho, z) \simeq \frac{m}{2\hbar} (\xi \dot{R}_\rho - R_\rho \dot{\xi}) \left[\frac{i\pi}{2} - \frac{\rho^2}{R\xi} + O(R^{-3}) \right] + B_\rho \frac{\rho^2}{2} + B_z \frac{z^2}{2} \quad (17)$$

Ao usar uma fase proporcional à ρ^{-2} (Figura 2), temos um bom resultado caso estivermos tratando de um condensado em duas dimensões. Como estamos querendo uma descrição tri-dimensional do problema em questão, esta fase trás problemas de convergência no cálculo da Lagrangiana. Com uma fase do tipo $C(t)\rho^{-1}$, aparecerá termos imaginários na Lagrangiana o que acarretará em termos imaginários, também, nas equações de movimento, e não queremos isso. A fase $C(t)\ln\rho$ não é simples de se usar com um TF-Ansatz, sua complicação está na parte temporal da Lagrangiana,

$$L_{temp} = \frac{i\hbar}{2} \int d^3r \left[\psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + c.c. \right]. \quad (18)$$

Portanto, a fase terá de ser um polinômio de quarto grau,

$$S(\rho, z, t) = B_\rho(t) \frac{\rho^2}{2} + C(t) \frac{\rho^4}{4} + B_z(t) \frac{z^2}{2}, \quad (19)$$

podendo assim descrever aproximadamente a parte radial de (15). Isso quer dizer que o problema em (1) é decorrente do número de parâmetros usados na densidade e na fase, os quais eram diferentes. Como a corrente está ligada à variação de densidade é preciso que ambos, densidade e fase, tenham o mesmo número de parâmetros. Assim temos parâmetros suficientes para que descreva as flutuações na densidade.

III. CALCULANDO A LAGRANGIANA

Após esse estudo de fases, calcularemos a Lagrangiana do sistema usando uma fase polinomial com o número de parâmetros variacionais apropriados em nosso Ansatz, o qual fica da seguinte forma:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{N}{\pi R_\rho(t)^2 R_z(t) A_0(t)}} \left[\frac{\rho^2}{\rho^2 + \xi(t)^2} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\ell\varphi} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_\rho(t)^2} - \frac{z^2}{R_z(t)^2}} \times \exp \left[iB_\rho(t) \frac{\rho^2}{2} + iC(t) \frac{\rho^4}{4} + iB_z(t) \frac{z^2}{2} \right], \quad (20)$$

onde A_0 [22], que é determinada pela condição de normalização

$$N = \int \psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (21)$$

é uma função de $\alpha(t) \equiv \xi(t)/R_\rho(t)$, sendo $\xi(t)$ o raio do vórtice, $R_\rho(t)$ o raio do condensado na direção de $\hat{\rho}$ e $R_z(t)$ o raio do condensado na direção axial (\hat{z}). Essa função de onda tem os limites de integração determinados por $1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \geq 0$, ou seja, esta função de onda é aproximadamente uma parábola invertida, desconsiderando o vórtice central, cuja sua extensão na região dos valores negativos é nula. Estamos tratando de um condensado com uma densidade dada por uma parábola invertida, o que significa que temos um potencial harmônico em coordenadas cilíndricas descrito por $V(\rho, z) = \frac{1}{2}m\omega_\rho^2(\rho^2 + \lambda^2 z^2)$, com uma anisotropia dada por $\lambda = \omega_z/\omega_\rho$, ou seja, para cada valor de λ temos um formato diferente de armadilha magneto-ótica (MOT). Para λ igual à unidade, o potencial harmônico será isotrópico. Já para valores de $\lambda < 1$ teremos um potencial com formato prolato, alongado em \hat{z} ; em $\lambda > 1$ sua forma será uma oblato, achatado em \hat{z} . O formato do potencial, obviamente, define o formato do condensado. Lembrando, quando definimos um valor de λ , necessariamente maior que zero, é como se estivéssemos preparando nosso condensado regulando o nosso valor de ω_z e mantendo constante o ω_ρ .

A interação atômica será $V_{int} = g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ (Figura 3), cujo significado físico é o de espalhamento de onda-s, isto é, espalhamento de baixa energia. Por conta disso, o parâmetro de interação é proporcional ao comprimento de espalhamento a_s , o que é $g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}$.

A densidade de Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{temp} + \mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_{pot} + \mathcal{L}_{int}, \quad (22)$$

tem quatro componentes: temporal, cinética, potencial, e potencial de interação. Da mesma forma poderemos dividir nossa Lagrangiana,

$$L = \int \mathcal{L} d\mathbf{r}. \quad (23)$$

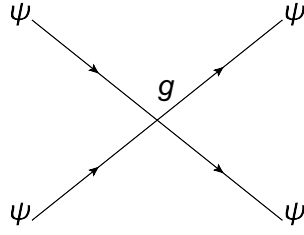


Figura 3: Diagrama de Feynman da interação atômica dos condensados.

Seguindo esse caminho, então vamos calcular todas as partes da Lagrangiana agora.

Parte temporal:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{temp} &= \frac{i\hbar}{2} \left[\psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \\ L_{temp} &= -\frac{N\hbar}{2} \left(D_1 \dot{B}_\rho R_\rho^2 + D_2 \dot{B}_z R_z^2 + \frac{1}{2} D_3 \dot{C} R_\rho^4 \right).\end{aligned}\quad (24)$$

Parte cinética:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cin} &= -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla \psi^*(\mathbf{r}, t)] [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \\ L_{cin} &= -\frac{N\hbar^2}{2m} [D_1 B_\rho^2 R_\rho^2 + D_2 B_z^2 R_z^2 + 2D_3 B_\rho C R_\rho^4 + R_\rho^{-2} (\ell^2 D_4 + D_5) + D_6 C^2 R_\rho^6].\end{aligned}\quad (25)$$

Parte potencial (armadilha harmônica):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{pot} &= -\frac{1}{2} m \omega_\rho^2 (\rho^2 + \lambda^2 z^2) \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \\ L_{pot} &= -\frac{N}{2} m \omega_\rho^2 (D_1 R_\rho^2 + \lambda^2 D_2 R_z^2).\end{aligned}\quad (26)$$

Parte do potencial de interação atômica:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= -\frac{g}{2} [\psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)]^2 \\ L_{int} &= -\frac{N^2 g D_7}{2\pi R_\rho^2 R_z}.\end{aligned}\quad (27)$$

As funções de α , D_i , são: $D_i = A_i/A_0$, com exceção de $D_7 = A_7/A_0^2$. Assim nossa Lagrangiana será a soma de cada contribuição, $L = L_{temp} + L_{cin} + L_{pot} + L_{int}$. Por questões de simplicidade, podemos escalar a Lagrangiana para que os parâmetros fiquem adimensionais, que seria as seguintes mudanças:

$$\begin{aligned}R_\rho(t) &\rightarrow a_{osc} r_\rho(t), \\ R_z(t) &\rightarrow a_{osc} r_z(t), \\ \xi(t) &\rightarrow a_{osc} r_\xi(t), \\ B_\rho(t) &\rightarrow a_{osc}^{-2} \beta_\rho(t), \\ B_z(t) &\rightarrow a_{osc}^{-2} \beta_z(t), \\ C(t) &\rightarrow a_{osc}^{-4} \zeta(t)\end{aligned}$$

e

$$t \rightarrow \omega_\rho^{-1} \tau;$$

com o comprimento do oscilador harmônico $a_{osc} = \sqrt{\hbar/m\omega_\rho}$ e o parâmetro adimensional de interação será $\gamma = Na_s/a_{osc}$. Assim nossa Lagrangiana ficará sendo

$$L = -N\hbar\omega_\rho \left[D_1 r_\rho^2 \left(\dot{\beta}_\rho + \beta_\rho^2 + 1 \right) + D_2 r_z^2 \left(\dot{\beta}_z + \beta_z^2 + \lambda^2 \right) + D_3 r_\rho^4 \left(\frac{1}{2} \dot{\zeta} + 2\beta_\rho \zeta \right) + r_\rho^{-2} (\ell^2 D_4 + D_5) + D_6 \zeta^2 r_\rho^6 + \frac{4D_7 \gamma}{r_\rho^2 r_z} \right]. \quad (28)$$

IV. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Tomando as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (29)$$

para cada um dos seis parâmetros variacionais, ficando então seis equações diferenciais:

$$\beta_\rho - \frac{\dot{r}_\rho}{r_\rho} - \frac{D'_1 \dot{\alpha}}{2D_1} + \frac{D_3 r_\rho^2 \zeta}{D_1} = 0 \quad (30)$$

$$\beta_z - \frac{\dot{r}_z}{r_z} - \frac{D'_2 \dot{\alpha}}{2D_2} = 0 \quad (31)$$

$$\zeta - \frac{D_3 \dot{r}_\rho}{D_6 r_\rho} - \frac{D_3 \dot{\alpha}}{4D_6 r_\rho^2} + \frac{D_3 \beta_\rho}{D_6 r_\rho^2} = 0 \quad (32)$$

$$D_1 r_\rho \left(\dot{\beta}_\rho + \beta_\rho^2 + 1 \right) + D_3 r_\rho^3 \left(\dot{\zeta} + 4\beta_\rho \zeta \right) - r_\rho^{-3} (\ell^2 D_4 + D_5) + 3D_6 \zeta^2 r_\rho^5 - \frac{4D_7 \gamma}{r_\rho^3 r_z} = 0 \quad (33)$$

$$D_2 r_z \left(\dot{\beta}_z + \beta_z^2 + \lambda^2 \right) - \frac{2D_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z^2} = 0 \quad (34)$$

$$D'_1 r_\rho^2 \left(\dot{\beta}_\rho + \beta_\rho^2 + 1 \right) + D'_2 r_z^2 \left(\dot{\beta}_z + \beta_z^2 + \lambda^2 \right) + D'_3 r_\rho^4 \left(\frac{1}{2} \dot{\zeta} + 2\beta_\rho \zeta \right) + r_\rho^{-2} (\ell^2 D'_4 + D'_5) + D'_6 \zeta^2 r_\rho^6 - \frac{4D'_7 \gamma}{r_\rho^2 r_z} = 0. \quad (35)$$

Resolvendo as equações para os parâmetros advindos das fases, os quais estão relacionados à variação da curvatura da função de onda, teremos:

$$\beta_\rho = \frac{\dot{r}_\rho}{r_\rho} + F_1 \dot{\alpha}, \quad (36)$$

$$\beta_z = \frac{\dot{r}_z}{r_z} + F_2 \dot{\alpha} \quad (37)$$

e

$$\zeta = F_3 \frac{\dot{\alpha}}{r_\rho^2}; \quad (38)$$

onde

$$F_1 = \frac{D'_3 D_3 - 2D'_1 D_6}{4(D_3^2 - D_1 D_6)}, \quad (39)$$

$$F_2 = \frac{D'_2}{2D_2} \quad (40)$$

e

$$F_3 = \frac{2D'_1 D_3 - D_1 D'_3}{4(D_3^2 - D_1 D_6)}. \quad (41)$$

Substituindo (36), (37) e (38) nas equações (33), (34) e (35), reduzimos nossas seis equações acopladas em três equações, igualmente acopladas, as quais são:

$$D_1 (\ddot{r}_\rho + r_\rho) + G_1 r_\rho \ddot{\alpha} + G_2 r_\rho \dot{\alpha}^2 + G_3 \dot{r}_\rho \dot{\alpha} - \frac{G_4}{r_\rho^3} - \frac{4D_7 \gamma}{r_\rho^3 r_z} = 0 \quad (42)$$

$$D_2 (\ddot{r}_z + \lambda^2 r_z) + G_5 r_z \ddot{\alpha} + G_6 r_z \dot{\alpha}^2 + G_7 \dot{r}_z \dot{\alpha} - \frac{2D_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z^2} = 0 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} D'_1 r_\rho (\ddot{r}_\rho + r_\rho) + D'_2 r_z (\ddot{r}_z + \lambda^2 r_z) + (G_8 r_\rho^2 + G_9 r_z^2) \ddot{\alpha} + (G_{10} r_\rho^2 + G_{11} r_z^2) \dot{\alpha}^2 \\ + (G_{12} r_\rho \dot{r}_\rho + G_{13} r_z \dot{r}_z) \dot{\alpha} + \frac{G_{14}}{r_\rho^2} + \frac{4D'_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

com

$$G_1 = D_1 F_1 + D_3 F_3 \quad (45)$$

$$G_2 = D_1 (F_1^2 + F_1') + D_3 (4F_1 F_3 + F_3') + 3D_6 F_3^2 \quad (46)$$

$$G_3 = 2(D_1 F_1 + D_3 F_3) = 2G_1 \quad (47)$$

$$G_4 = \ell^2 D_4 + D_5 \quad (48)$$

$$G_5 = D_2 F_2 \quad (49)$$

$$G_6 = D_2 (F_2^2 + F_2') \quad (50)$$

$$G_7 = 2D_2 F_2 = 2G_5 \quad (51)$$

$$G_8 = D'_1 F_1 + \frac{1}{2} D'_3 F_3 \quad (52)$$

$$G_9 = D'_2 F_2 \quad (53)$$

$$G_{10} = D'_1 (F_1^2 + F_1') + D'_3 \left(\frac{1}{2} F_3' + 2F_1 F_3 \right) + D'_6 F_3^2 \quad (54)$$

$$G_{11} = D'_2 (F_2^2 + F_2') \quad (55)$$

$$G_{12} = 2D'_1 F_1 + D'_3 F_3 \quad (56)$$

$$G_{13} = 2D'_2 F_2 = 2G_9 \quad (57)$$

$$G_{14} = \ell^2 D'_4 + D'_5. \quad (58)$$

Os termos $D_1 r_\rho$, $D_2 \lambda^2 r_z$, $D'_1 r_\rho^2$ e $D'_2 r_z^2$ são os responsáveis pelo aprisionamento do condensado, os quais se forem jogados fora resulta nas equações para a expansão livre. Os termos proporcionais ao parâmetro γ dá a contribuição do potencial de interação atômica, enquanto os

termos proporcionais à r_ρ^{-2} e r_ρ^{-3} são resultado da contribuição cinética do vórtice, cujo efeito foi adicionar uma pressão quântica. Já os demais termos representa o efeito de acoplamento entre os raios do condensado e o raio do vórtice.

Fazendo as velocidades (\dot{r}_ρ , \dot{r}_z e $\dot{\alpha}$) e acelerações (\ddot{r}_ρ , \ddot{r}_z e $\ddot{\alpha}$) iguais à zero então temos as equações para a solução estacionária.

$$D_1 \rho_0 = \frac{G_4}{\rho_0^3} + \frac{4D_7\gamma}{\rho_0^3 z_0} \quad (59)$$

$$D_2 \lambda^2 z_0 = \frac{2D_7\gamma}{\rho_0^2 z_0^2} \quad (60)$$

$$D'_1 \rho_0^2 + D'_2 \lambda^2 z_0^2 = -\frac{G_{14}}{\rho_0^3} - \frac{4D'_7\gamma}{\rho_0^2 z_0} \quad (61)$$

Lembrando que agora as funções de α se tornam funções de α_0 . Para resolver as equações acima, é preciso utilizar métodos numéricos, no caso o método de Newton. O parâmetro de interação que será usado é $\gamma = 800$, o qual está bem próximo ao valor do experimento com Rb[21].

V. MODOS COLETIVOS E ESTABILIDADE DOS VÓRTICES

A introdução do vórtice no sistema quebra uma simetria na fase, o que leva abrir uma degenerescência nos modos coletivos do condensado. Assim esperamos encontrar dois modos equivalentes ao monopolo (breathing), e outros dois equivalentes ao quadrupolo. Para retirar das equações de movimento uma resposta do condensado sujeito a uma perturbação externa, faremos uma linearização dessas equações o que é equivalente a calcularmos o espectro de Bogoliubov. Para tanto, dizemos que o condensado está levemente deslocado de sua posição de equilíbrio, ou seja, $r_\rho(t) \rightarrow \rho_0 + \delta_\rho(t)$, $r_z(t) \rightarrow z_0 + \delta_z(t)$ e $\alpha(t) \rightarrow \alpha_0 + \delta_\alpha(t)$. Seguindo essas mudanças e negligenciando termos de segunda ordem temos:

$$D_1 \ddot{\delta}_\rho + G_1 \rho_0 \ddot{\delta}_\alpha + \left(D_1 + \frac{3G_4}{\rho_0^4} + \frac{12D_7\gamma}{\rho_0^4 z_0} \right) \delta_\rho + \left(\frac{4D_7\gamma}{\rho_0^3 z_0^2} \right) \delta_z + \left(D'_1 \rho_0 - \frac{G'_4}{\rho_0^3} - \frac{4D'_7\gamma}{\rho_0^3 z_0} \right) \delta_\alpha = 0 \quad (62)$$

$$D_2 \ddot{\delta}_z + G_5 z_0 \ddot{\delta}_\alpha + \left(\frac{4D_7\gamma}{\rho_0^3 z_0^2} \right) \delta_\rho + \left(D_2 \lambda^2 + \frac{4D_7\gamma}{\rho_0^2 z_0^3} \right) \delta_z + \left(D'_2 \lambda^2 z_0 - \frac{2D'_7\gamma}{\rho_0^2 z_0^2} \right) \delta_\alpha = 0 \quad (63)$$

$$D'_1 \rho_0 \ddot{\delta}_\rho + D'_2 z_0 \ddot{\delta}_z + (G_8 \rho_0^2 + G_9 z_0^2) \ddot{\delta}_\alpha + \left(2D'_1 \rho_0 - \frac{2G_{14}}{\rho_0^3} - \frac{8D'_7\gamma}{\rho_0^3 z_0} \right) \delta_\rho + \left(2D'_4 \lambda^2 z_0 - \frac{4D'_7\gamma}{\rho_0^2 z_0^2} \right) \delta_z + \left(D''_1 \rho_0^2 + D''_2 \lambda^2 z_0^2 + \frac{G'_{14}}{\rho_0^2} + \frac{4D''_7\gamma}{\rho_0^2 z_0} \right) \delta_\alpha = 0, \quad (64)$$

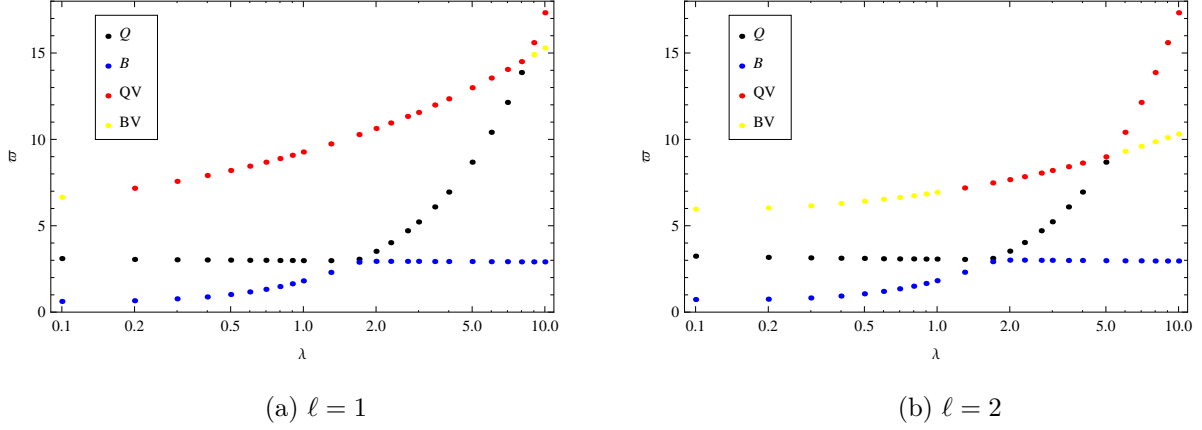


Figura 4: Freqüência dos modos de oscilações de um condensado contendo um vórtice central.

note que as funções de α são funções de α_0 como, anteriormente, no caso estacionário. Os termos que não dependem dos δ_i formam a solução estacionária sumindo das equações acima. Com essas equações podemos escreve-las como matrizes,

$$M\ddot{\delta} + V\delta = 0 \quad (65)$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\delta}_\rho \\ \ddot{\delta}_z \\ \ddot{\delta}_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\rho \\ \delta_z \\ \delta_\alpha \end{pmatrix} = 0, \quad (66)$$

e calcularemos a relação de dispersão,

$$\det(M^{-1}V - \varpi^2 I) = 0, \quad (67)$$

o que resulta nas freqüências dos modos coletivos. O resultado do determinante será uma equação cubica de ϖ^2 , isto é,

$$-\varpi^6 + b\varpi^4 - c\varpi^2 + d = 0, \quad (68)$$

cuja solução está no Apêndice C. Agora os determinantes $\det M$ e $\det V$ são, ambos, positivos para $\ell = 1$. O que significa que estamos no estado de menor energia para o caso de um vórtice central num condensado de Bose-Einstein, portanto as freqüências ϖ^2 também serão positivas. Segundo este resultado teremos três freqüências as quais não poderão ser relacionadas a apenas um único modo de oscilação, ou seja, temos três freqüências e quatro modos de oscilação no total, sendo que apenas três modos podem ser observados de acordo com a anisotropia do potencial harmônico como é representado na Figura 4a. Os quatro modos de oscilação serão dois tipos de monopolo (breathing) e dois tipos de quadrupolo. Os dois primeiros são quando o núcleo do vórtice está em fase com o raio da direção ρ (B e Q da Figura 4a), e os dois últimos

terão os núcleos do vórtice em fase com o raio axial. Note que para um $\lambda \approx 1.9$ os modos de monopolo e quadrupolo são degenerados, assim como outros três modos (Q, QV e BV) são degenerados em $\lambda \approx 8.5$. Prestando uma atenção maior, para $\lambda < 8.5$ sempre os modos BV e QV estarão degenerados, acima deste valor Q e QV que se tornam degenerados.

Extrapolando esses cálculos para uma situação ideal onde $\gamma = 0$, pode observar que o resultado se inverte. O modo quadrupolar Q se torna menos energético que o modo de monopolo B quando a simetria do condensado é prolato. Quando este mesmo é esférico, o modo menos energético só tem uma oscilação na direção axial, e os modos subseqüentes, em escala energética, são: Q, e BV. Já numa simetria oblato há dois modos de oscilação (os menos energéticos) que apresentam uma ausência de oscilação em \hat{z} , sendo o menos energético deles uma espécie de quadrupolo. Nessa simetria o modo quadrupolar QV é o mais energético. Este resultado anômalo é consequência de negligenciarmos uma parte da energia cinética.

Este modelo também pode ser usado para verificar a estabilidade de vórtices multicarregados. E assim calculamos as frequências quando a carga é $\ell = 2$, sendo o condensado estável para $\gamma = 800$. Na figura 4b mostra que o aumento da vorticidade culmina numa alteração das regiões do QV e BV, além de diminuir uma das frequências em comparação à figura 4a. Com o intuito de verificar o efeito de grandes vórtices, calculamos o efeito nas frequências quando $\ell = 20$. No caso esférico este é instável, sendo estável e sem grandes modificações com a figura 4 quando oblato. No entanto, resultando nos mesmos valores de frequências do caso sem interação atômica $\gamma = 0$. Sendo a frequência do quadrupolo Q uma ordem de grandeza menor que as outras duas.

VI. MODULANDO O COMPRIMENTO DE ESPALHAMENTO

O mecanismo de excitação dos modos coletivos descritos na seção anterior é via uma modulação no comprimento de espalhamento, isto é,

$$a_s(t) = a_0 + \delta a \cos(\Omega t), \quad (69)$$

o que é equivalente à fazermos $\gamma \rightarrow \gamma(t)$ com a mesma cara de $a_s(t)$, ou seja,

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \delta\gamma \cos(\Omega t). \quad (70)$$

Onde γ_0 é o nosso parâmetro de interação médio, $\delta\gamma$ uma amplitude de modulação e Ω a frequência com a qual excitamos os modos.

Na Figura 5 foi excitado, através das equações não-lineares, o modo degenerado para um condensado com anisotropia $\lambda = 0.1$. Pode ser visto que sua oscilação é similar à um batimento

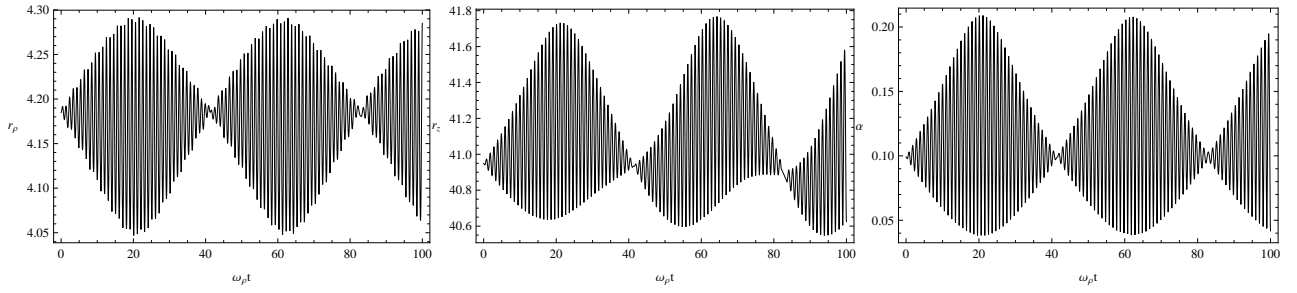


Figura 5: Excitação coletiva para $\gamma_0 = 800$, $\delta\gamma = 24$, $\lambda = 0.1$ e $\Omega = 6.1$.

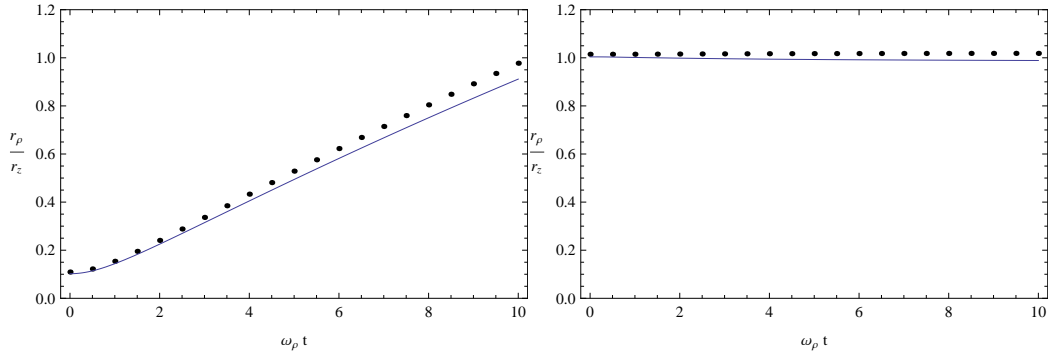


Figura 6: Ambos gráficos mostram a expansão do aspect ratio do condensado com vórtice ($\ell = 1$), inicialmente armadilhado num potencial com anisotropia igual à $\lambda = 0.1$ (esquerda) e $\lambda = 1$ (direita). Calculamos para uma interação de $\gamma = 800$, o que corresponde ao valor aproximado no caso de um condensado como experimento BEC-I. A linha pontilhada representa os dados da simulação numérica, e a linha continua é resultado do método variacional.

de ondas, pois temos os três modos de oscilação simultaneamente, isto é, nosso batimento está contido a frequência do batimento mais a frequência predominante (a frequência próxima da ressonância) e as outras duas frequências, como também, seus harmônicos.

VII. EXPANSÃO LIVRE

O interesse na expansão livre vem do fato de só podermos fazer medidas dos condensados após desligado o potencial de aprisionamento. Para este fim, como mencionado anteriormente, basta usamos as equações de movimento (42), (43) e (44) sem os termos vindos do potencial

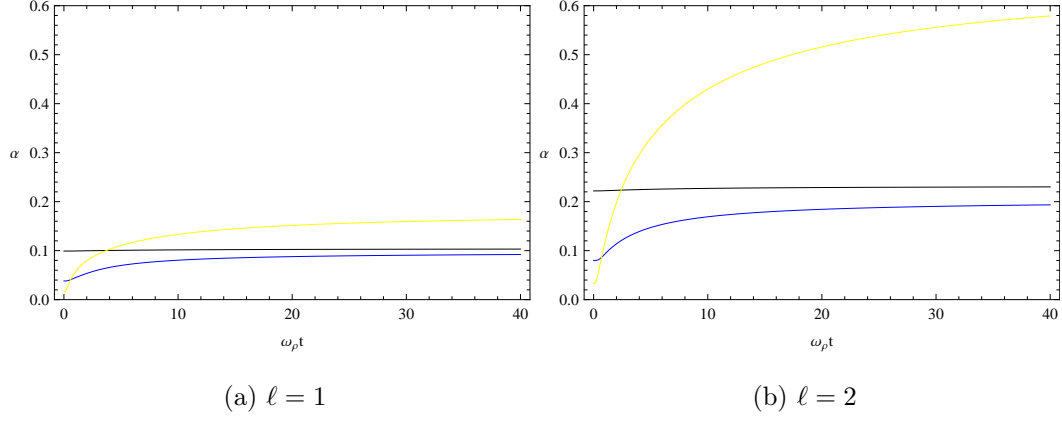


Figura 7: Este gráfico mostra a expansão livre de $\alpha(t) = \xi(t)/R_\rho(t)$, sendo a linha preta referente à uma anisotropia tipo prolato ($\lambda = 0.1$), a azul o caso isotrópico ($\lambda = 1$) e a amarela para um condensado tipo oblato ($\lambda = 8$).

harmônico, isto é,

$$D_1 \ddot{r}_\rho + G_1 r_\rho \ddot{\alpha} + G_2 r_\rho \dot{\alpha}^2 + G_3 \dot{r}_\rho \dot{\alpha} - \frac{G_4}{r_\rho^3} - \frac{4D_7 \gamma}{r_\rho^3 r_z} = 0 \quad (71)$$

$$D_2 \ddot{r}_z + G_5 r_z \ddot{\alpha} + G_6 r_z \dot{\alpha}^2 + G_7 \dot{r}_z \dot{\alpha} - \frac{2D_7 \gamma}{r_\rho^2 r_z^2} = 0 \quad (72)$$

$$\begin{aligned} D'_1 r_\rho \ddot{r}_\rho + D'_2 r_z \ddot{r}_z + (G_8 r_\rho^2 + G_9 r_z^2) \ddot{\alpha} + (G_{10} r_\rho^2 + G_{11} r_z^2) \dot{\alpha}^2 \\ + (G_{12} r_\rho \dot{r}_\rho + G_{13} r_z \dot{r}_z) \dot{\alpha} + \frac{G_{14}}{r_\rho^3} + \frac{4D'_7 \gamma}{r_\rho^2 r_z} = 0, \end{aligned} \quad (73)$$

cujas condições iniciais são dadas pela solução estacionária. Esse resultado concorda com a simulação numérica como pode ser vista na Figura 6, e expansão do núcleo do vórtice é dado na Figura 7.

VIII. CONCLUSÃO

Nesse trabalho propusemos uma alteração na fase usada no método variacional para corrigir as frequências negativas dos modos coletivos quando temos um parâmetro que descreve a dinâmica do núcleo do vórtice. Essa alteração foi para que tivéssemos uma flutuação adequada da densidade atômica.

Concluimos, com base na equação de continuidade, que devemos ter um parâmetro variacional na fase, respectivamente, para cada parâmetro na densidade. Com isso ao calcular as frequências para o vórtice com carga $\ell = 1$, estas mesmas deram positivas. Dessa maneira foi observado que o vórtice abre uma degenerescência nos modos coletivos, a qual depende

da anisotropia da armadilha e do parâmetro de interação atômica. Esta degenerescência está vinculada à oscilação do núcleo do vórtice, o qual precisa de muita energia para defasar sua oscilação com relação à componente radial da nuvem atômica.

Quando a carga do vórtice é $\ell \geq 2$ pode aparecer frequências negativas, pois o sistema não está mais no seu mínimo de energia. Em decorrência disso, podemos estudar a instabilidade de vórtices multi-carregados. Observando a região de estabilidade de vórtices com carga maior que $\ell = 1$, suas frequências são praticamente as mesmas conforme temos maiores cargas. No limite de vórtices gigantes o movimento das componentes, radial e axial, acabam por depender apenas das oscilações do núcleo do vórtice.

Também fizemos a expansão livre deste sistema, podendo avaliar o núcleo do vórtice para $\ell > 2$, diferentemente ao trabalho anterior que só nos permitia calcular a expansão deste raio em $\ell = 1$. Por esse Ansatz mantemos a relação logarítmica para a energia do vórtice.

Apêndice A: Duas Aproximações de perfil de Thomas-Fermi contendo um Vórtice

Duas aproximações para o perfil de densidade podem ser obtidas da EGP para um vórtice central. Primeiramente, vamos escrever a EGP independente do tempo em coordenadas cilíndricas,

$$\mu\psi(\rho, z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\rho,z}^2\psi(\rho, z) + \frac{\hbar^2\ell^2}{2m\rho^2}\psi(\rho, z) + V(\rho, z)\psi(\rho, z) + g|\psi(\rho, z)|^2\psi(\rho, z), \quad (\text{A1})$$

onde $\nabla_{\rho,z}^2$ é o Laplaciano com respeito às coordenadas ρ e z . Tomemos então o potencial efetivo muito maior que a energia cinética, numa armadilha harmônica e anisotrópica,

$$\mu = \frac{\hbar^2\ell^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\omega_\rho^2(\rho^2 + \lambda^2 z^2) + gn(\rho, z), \quad (\text{A2})$$

sendo $n(\rho, z) = |\psi(\rho, z)|^2$. Agora podemos fazer de duas maneiras diferentes, a primeira e mais usual será apenas isolar $n(\rho, z)$, ficando

$$n(\rho, z) = \frac{\mu}{g} \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \Theta \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right), \quad (\text{A3})$$

com Θ sendo a função passo e os raios de TF são:

$$R_\rho = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_\rho^2}}, R_z = \sqrt{\frac{2\mu}{m\lambda^2\omega_\rho^2}} \text{ e } \xi = \sqrt{\frac{\hbar^2\ell^2}{2m\mu}}. \quad (\text{A4})$$

E a função de onde é dada com uma fase em φ ,

$$\psi(\rho, \varphi, z) = e^{i\ell\varphi} \left(\frac{\mu}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2}}, \quad (\text{A5})$$

na região em que $1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \geq 0$.

A segunda aproximação é similar à essa, contudo, ela é razoavelmente mais simples para se trabalhar quando estamos tratando de um condensado em três dimensões. Em (A2) usamos a relação para o comprimento de coerência,

$$\frac{\hbar^2 \ell^2}{2m\xi^2} = gn(\rho, z), \quad (\text{A6})$$

tornando-a da seguinte forma:

$$\mu = \frac{1}{2}m\omega_\rho^2(\rho^2 + \lambda^2 z^2) + \left(\frac{\xi^2}{\rho^2} + 1\right)gn(\rho, z). \quad (\text{A7})$$

Agora isolemos a densidade $n(\rho, z)$, então temos

$$n(\rho, z) = \frac{\mu}{g} \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \xi^2} \right) \left(1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \Theta \left(1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right), \quad (\text{A8})$$

onde os raios são dados como da forma acima, exceto pelo raio do vórtice que não dependerá de μ . Nessa descrição o raio do vórtice está associado ao parâmetro de interação g , ou seja, este pode variar de acordo com a razão de μ/g . A mesma fase tem de ser acrescentada quando vamos usar a função de onda. A segunda vantagem dessa segunda forma de escrever um perfil de densidade TF está no fato de podermos separar a densidade de vórtice da densidade de background. Chamaremos de

$$n_{TF}(\rho, z) = \frac{\mu}{g} \left(1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \Theta \left(1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \quad (\text{A9})$$

e agora faremos

$$\begin{aligned} n(\rho, z) &= \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \xi^2} \right) n_{TF}(\rho, z) \\ &= \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2 + \xi^2} \right) n_{TF}(\rho, z) \\ &= n_{bg}(\rho, z) + n_v(\rho, z), \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

onde $n_{bg}(\rho, z) = n_{TF}(\rho, z)$ e

$$n_v(\rho, z) = \left(-\frac{\xi^2}{\rho^2 + \xi^2} \right) n_{TF}(\rho, z). \quad (\text{A11})$$

A diferença entre as energias calculadas com ambas aproximações é menor que 1%.

Apêndice B: Calculo das Funções $A_i(\alpha)$

As funções A_i são resultados das integrais de TF, sendo cada uma referente a uma parte da Lagrangiana, exceto o A_0 que vem da condição de normalização. Começando por este, que estará mais detalhado, pois o procedimento será o mesmo. Fazendo $\rho \rightarrow \rho R_\rho$ e $z \rightarrow z R_z$, a integral de normalização será

$$A_0(\alpha) = 2\pi \int \int \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \alpha^2} \right) (1 - \rho^2 - z^2) \rho d\rho dz. \quad (\text{B1})$$

Agora faremos uma mudança de variáveis, indo de coordenadas cilíndricas para coordenadas esféricas, isto é, $\rho = r \sin \theta$ e $z = r \cos \theta$. Dessa maneira os limites de interação são simplificados.

$$\begin{aligned} A_0(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1 - r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{45} \left[3 + 20\alpha^2 + 15\alpha^4 - 15\alpha^2 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Notemos a seguinte relação:

$$\operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) = -\frac{1}{4} \log \left[\frac{(1 - \sqrt{1 + \alpha^2})^2}{(1 + \sqrt{1 + \alpha^2})^2} \right], \quad (\text{B3})$$

cuja utilidade é fixar $\alpha \in \text{Reais}$, impedindo que A_i seja imaginário. Prosseguindo, os próximos

A_i serão:

$$\begin{aligned} A_1(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^4 \sin^4 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{315} \left[6 - 7\alpha^2 (3 + 20\alpha^2 + 15\alpha^4) + 105\alpha^4 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

$$\begin{aligned} A_2(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{1575} \left[15 + 7\alpha^2 (23 + 35\alpha^2 + 15\alpha^4) - 105\alpha^2 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

$$\begin{aligned} A_3(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^6 \sin^6 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{945} \left[8 - 18\alpha^2 + 63\alpha^4 + 420\alpha^6 + 315\alpha^8 - 315\alpha^6 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

$$\begin{aligned} A_4(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= -\frac{8}{9} \left[4 + 3\alpha^2 - 3(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

$$A_5(\alpha) = 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (\text{B8})$$

$$= \frac{3}{2} - \alpha^2 + \alpha^4 (1 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \quad (\text{B9})$$

$$\begin{aligned} A_6(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^8 \sin^8 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{10395} \left[48 - 11\alpha^2 (8 - 18\alpha^2 + 63\alpha^4 + 420\alpha^6 + 315\alpha^8) + 3465\alpha^8 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

$$\begin{aligned} A_7(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right)^2 (1-r^2)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{16}{1575} \left[30 + 749\alpha^2 + 1680\alpha^4 + 945\alpha^6 - 105\alpha^2 (4 + 9\alpha^2) (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

Apêndice C: Solução da Equação Cúbica

A forma canônica da equação cúbica é

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (\text{C1})$$

com $a \neq 0$. Como solução usual faremos uma transformação no x , $x \rightarrow t + h$.

$$a(t+h)^3 + b(t+h)^2 + c(t+h) + d = 0 \quad (C2)$$

$$a(t^3 + 3ht^2 + 3h^2t + h^3) + b(t^2 + 2ht + h^2) + c(t+h) + d = 0 \quad (C3)$$

$$at^3 + (3ah + b)t^2 + (3ah^2 + 2bh + c)t + d + ah^3 + bh^2 + ch = 0 \quad (C4)$$

$$t^3 + \left(3h + \frac{b}{a}\right)t^2 + \left(3h^2 + 2h\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)t + \frac{d}{a} + h^3 + \frac{b}{a}h^2 + \frac{c}{a}h = 0 \quad (C5)$$

Escolhendo $h = -\frac{b}{3a}$, reduzimos o grau da equação acima.

$$t^3 + pt + q = 0, \quad (C6)$$

onde

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \quad (C7)$$

e

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}. \quad (C8)$$

Se exprimimos $t = u + v$, a equação (C6) transformar-se-á em

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0, \quad (C9)$$

cuja solução é dada em termos de um sistema de u e v

$$\begin{cases} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{cases} \quad (C10)$$

então conduzimos o sistema para uma solução da qual sabemos a soma de dois números $S = u^3 + v^3 = -q$ e o produto dos mesmos $P = u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$, ou seja, uma equação quadrática

$$Y^2 - SY + P = 0. \quad (C11)$$

Podemos escrever sem perda de generalidade,

$$u^3 = Y_+ = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \quad (C12)$$

$$v^3 = Y_- = \frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}. \quad (C13)$$

Assim já temos a primeira solução

$$t_1 = \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (C14)$$

Conhecida a solução t_1 podemos obter as outras duas decompondo (C6) como o produto de todas soluções, isto é,

$$(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = t^3 + pt + q. \quad (C15)$$

$$t^3 - (t_1 + t_2 + t_3)t^2 + (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1)t - t_1t_2t_3 = t^3 + pt + q \quad (C16)$$

Os dois polinômios são equivalentes de tiverem coeficientes homólogos iguais:

$$\begin{cases} t_2 + t_3 &= -t_1 \\ t_2t_3 &= -\frac{q}{t_1} \end{cases} \quad (C17)$$

da mesma maneira que foi feito anteriormente, temos uma soma e um produto de dois números o que é equivalente a uma equação do segundo grau,

$$Z^2 + t_1Z - \frac{q}{t_1} = 0. \quad (C18)$$

Assim a solução que faltava é

$$t_1 = Z_+ = -\frac{t_1}{2} + \sqrt{\frac{t_1}{4} + \frac{q}{t_1}} \quad (C19)$$

$$t_2 = Z_- = -\frac{t_1}{2} - \sqrt{\frac{t_1}{4} + \frac{q}{t_1}}. \quad (C20)$$

Portanto, as três soluções da equação cúbica (C1), no caso de discriminante $p > 0$, são

$$x_i = t_i - \frac{b}{3a} \quad (C21)$$

para $i = 1, 2, 3$.

No caso de discriminante negativo $p < 0$ convertemos os complexos conjugados Y_+ e Y_- à sua forma trigonométrica

$$Y_+ = |Y_+| \cos \theta + i \sin \theta \quad (C22)$$

$$Y_- = |Y_-| \cos \theta - i \sin \theta. \quad (C23)$$

O que no fim das contas resultará na seguinte solução:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) \right] - \frac{b}{3a} \quad (C24)$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) + \frac{2\pi}{3} \right] - \frac{b}{3a} \quad (C25)$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] - \frac{b}{3a}. \quad (C26)$$

Apêndice D: Cross-Check

Para verificarmos, em partes, se estamos indo pelo caminho certo, precisamos fazer um cross-check. No caso, isso seria validar as equações quando $\ell = 0$ e $\alpha \rightarrow 0$, assim as equações de movimento (42), (43) e (44) se tornarão

$$\ddot{r}_\rho + r_\rho = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4D_6(\alpha)\gamma}{D_1(\alpha)r_\rho^3 r_z} \quad (\text{D1})$$

$$\ddot{r}_z + \lambda^2 r_z = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2D_6(\alpha)\gamma}{D_2(\alpha)r_\rho^2 r_z^2}, \quad (\text{D2})$$

ou seja,

$$\ddot{r}_\rho + r_\rho = \frac{15\gamma}{r_\rho^3 r_z} \quad (\text{D3})$$

$$\ddot{r}_z + \lambda^2 r_z = \frac{15\gamma}{r_\rho^2 r_z^2}. \quad (\text{D4})$$

É fácil de perceber que (59), (60) e (61) são reduzidas à

$$\rho_0 = \frac{15\gamma}{\rho_0^3 z_0} \quad (\text{D5})$$

$$\lambda^2 z_0 = \frac{15\gamma}{\rho_0^2 z_0^2}, \quad (\text{D6})$$

já que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_4 = 0$.

-
- [1] POLLACK, S. E. et al. Collective excitation of a bose-einstein condensate by modulation of the atomic scattering length. *Physical Review A*, v. 81, n. 5, p. 053627, 2010.
 - [2] STRINGARI, S. Collective excitation of a trapped bose-einstein-condensad gas. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 12, p. 2360, September 1996.
 - [3] PÉREZ-GARCÍA, V. M. et al. Low energy excitations of a bose-einstein condensate: a time-dependent variational analysis. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 27, p. 5320–5323, December 1996.
 - [4] DALFOVO, F. et al. Theory of bose-einstein condensate in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*, v. 71, n. 3, p. 463–512, April 1999.
 - [5] COURTEILLE, P. W.; BAGNATO, V. S.; YUKALOV, V. I. Bose-einstein condensation of trapped atomic gases. *Laser Physics*, v. 11, n. 6, p. 659–800, 2001.
 - [6] BUSCH, T. et al. Stability and collective excitations of a two-component bose-einstein condensad gas: A moment approach. *Physical Review A*, v. 56, n. 4, p. 2978, October 1997.

- [7] ZHANG, Z.; LIU, W. V. Finite-temperature damping of collective modes of a bcs-bec crossover superfluid. *Physical Review A*, v. 83, n. 2, p. 023617, 2011.
- [8] HEISELBERG, H. Collective modes of trapped gases at the bec-bcs crossover. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 4, p. 040402, July 2004.
- [9] ALTMAYER, A. et al. Precision measurements of collective oscillations in the bec-bcs crossover. *Physical Review Letters*, v. 98, n. 4, p. 040401, January 2007.
- [10] ČLOVEČKO, M. et al. New non-goldstone collective mode of bec of magnons in superfluid $^3\text{He-B}$. *Physical Review Letters*, v. 100, n. 15, p. 155301, April 2008.
- [11] PETHICK, C. J.; SMITH, H. *Bose-einstein condensation in dilute gases*. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [12] PITAEVSKII, L. P.; STRINGARI, S. *Bose-Einstein Condensation*. First edition. [S.l.]: Oxford University Press Inc, 2003.
- [13] SVIDZINSKY, A. A.; FETTER, A. L. Dynamics of a vortex in a trapped bose-einstein condensate. *Physical Review A*, v. 62, p. 063617, November 2000.
- [14] SVIDZINSKY, A. A.; FETTER, A. L. Stability of a vortex in a trapped bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, v. 84, n. 26, p. 5919–5923, 2000.
- [15] LINN, M.; FETTER, A. L. Small-amplitude normal modes of a vortex in a trapped bose-einstein condensate. *Physical Review A*, v. 61, p. 063603, May 2000.
- [16] PÉREZ-GARCÍA, V. M.; GARCÍA-RIPOLL, J. J. Two-mode theory of vortex stability in multi-component bose-einstein condensates. *Physical Review A*, v. 62, p. 033601, August 2000.
- [17] PÉREZ-GARCÍA, V. M. et al. Dynamics of bose-einstein condensates: variational solutions of the gross-pitaevskii equations. *Physical Review A*, v. 56, n. 2, p. 1424–1432, August 1997.
- [18] SVIDZINSKY, A. A.; FETTER, A. L. Normal modes of a vortex in a trapped bose-einstein condensate. *Physical Review A*, v. 58, n. 4, p. 3168, October 1998.
- [19] O'DELL, D. H. J.; EBERLEIN, C. Vortex in a trapped bose-einstein condensate with dipole-dipole interactions. *Physical Review A*, v. 75, n. 1, p. 013604, 2007.
- [20] DALFOVO, F.; MODUGNO, M. Free expansion of bose-einstein condensates with quantized vortices. *Physical Review A*, v. 61, n. 2, p. 023605, January 2000.
- [21] HENN, E. A. de L. *Produção experimental de excitações topológicas em um condensado de Bose-Einstein*. 2008. 129p. Tese (Doutorado) — Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- [22] Todas as funções de A_i de $\alpha(t)$ estão calculadas no Apêndice B.