

Dinâmica de um Vórtice num Perfil de Thomas-Fermi

Rafael Poliseli Teles

Resumo

Aqui fizemos uma implementação e o estudo de fases apropriadas para uma melhor descrição dos sistemas físico com o uso do método variacional de parâmetros variáveis. Em geral, as fases do condensado deverão ser polinômios de grau igual ou maior que dois. E então, com uma nova fase apropriada foi possível calcular os modos coletivos de um condensado contendo um vórtice ao longo do eixo axial (simetria cilíndrica), assim como a expansão do mesmo. Como resultado abrimos uma degenerescência em cada modo de oscilação já conhecido, monopolo (breathing) e quadrupolo, estando a degenerescência associada à oscilação do núcleo do vórtice em fase ou não com relação ao raio axial. Para dois valores específicos de anisotropia vemos dois dos modos degenerados.

Contents

I. Introduzindo o Problema	2
II. Engenharia de Fase	4
III. Calculando a Lagrangiana	6
IV. Equações de Movimento	9
V. Modos Coletivos	11
VI. Modulando o Comprimento de Espalhamento	12
VII. Expansão Livre	13
A. Duas Aproximações de perfil de Thomas-Fermi contendo um Vórtice	14
B. Calculo das Funções $A_i(\alpha)$	16
C. Solução da Equação Cúbica	17
D. Cross-Check	19
Referências	20

I. INTRODUZINDO O PROBLEMA

Estamos interessados em observar a dinâmica de um condensado armadilhado contendo um vórtice central do tipo linha, ou seja, queremos obter os modos de oscilação coletiva deste sistema. O interesse nesse problema está no fato de podemos medir estas oscilações ao deslocarmos a nuvem atômica de seu equilíbrio, utilizando a ressonância de Fesh-Bach para modular o comprimento de espalhamento. Do ponto de vista teórico estamos interessados em saber como é dada a oscilação do raio do vórtice com respeito aos modos coletivos em simetria cilíndrica (modo quadrupolar e modo de breathing). O modo quadrupolar é quando as componentes do condensado oscilam fora de fase, sendo este o modo com menor frequência de excitação. Já o modo que demanda maior energia para ser excitado é o modo de breathing, pois a alta densidade da nuvem atômica faz com que a mesma imponha uma maior resistência para sair do equilíbrio.

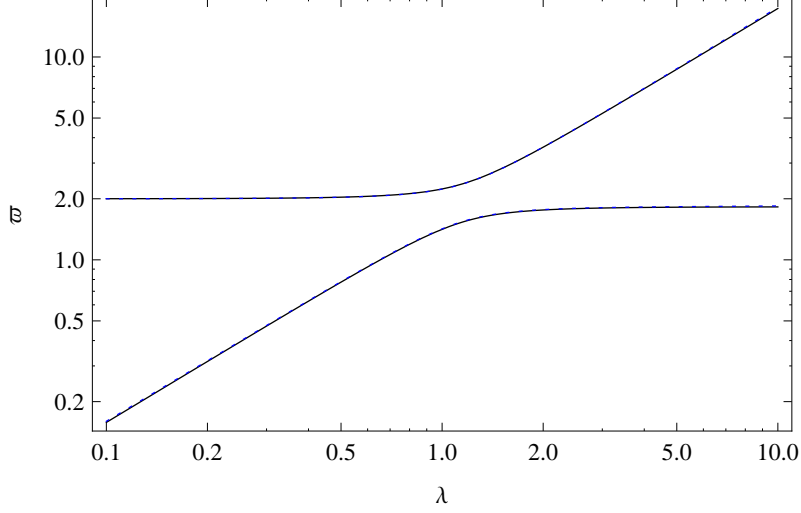


Figura 1: As linhas superiores dizem respeito à frequência do modo de breathing como uma função da anisotropia do potencial harmônico (armadilha), enquanto as linhas inferiores representam a frequência do modo quadrupolar. As linhas cheias (pretas) são para o caso de um TF sem vórtice, e as linhas pontilhadas (azuis) são para o caso com vórtice na aproximação Gaussiana. Essa aproximação se torna ruim acima de $\lambda \approx 1.5$, pois, apesar de ser imperceptível no gráfico, a linha da Gaussiana para o modo de breathing cruza a linha do TF. Necessariamente, a presença do vórtice deve abaixar a frequência do modo de breathing, o que não concorda com a região de condensados oblatos, e aumentar a frequência do modo quadrupolar, o que está de acordo, sendo esses os shifts das frequências. Note que ϖ está normalizado à frequência da direção radial ω_ρ .

Cálculos preliminares utilizando um Ansatz Gaussiano, o qual não leva em conta o tamanho do vórtice, mostram um pequeno shift nas frequências (Figura 1). Assim podemos esperar que a frequência do modo de breathing caia enquanto a frequência do quadrupolo aumente, na presença do vórtice.

Para calcular isso de uma forma mais coerente com a realidade física, usamos então um Ansatz Thomas-Fermi (TF),

$$\psi(\rho, \varphi, z, t) = A(t) \left[\frac{\rho^2}{\rho^2 + \xi(t)^2} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_\rho(t)^2} - \frac{z^2}{R_z(t)^2}} \exp \left[iB_\rho(t) \frac{\rho^2}{2} + iB_z(t) \frac{z^2}{2} \right], \quad (1)$$

e calculamos as equações de movimento para os parâmetros do condensado. Continuando com os cálculos linearizamos as mesmas obtendo uma relação de dispersão que resultou em frequências negativas, as quais não faziam sentido. Portanto, tínhamos as equações linearizadas dadas por

$$M\ddot{\delta} + V\delta = 0, \quad (2)$$

e sua relação de dispersão

$$\varpi^2 = \det(M^{-1}V) = \det M^{-1} \det V = \frac{\det V}{\det M}. \quad (3)$$

Para que tenhamos frequências positivas e com significado físico, ambos determinantes acima devem, necessariamente, ser positivos. O que, no caso, não estava acontecendo. Aqui temos que $\det M^{-1} < 0$, o que indica que há um problema com nosso Ansatz. Para reverter este problema temos de alterar a fase do mesmo. Para escolhermos uma fase adequada faremos um estudo da fase na próxima secção.

II. ENGENHARIA DE FASE

Para avaliarmos possíveis fase e, posteriormente, construímos nossa função de onde, utilizaremos a equação da continuidade,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\hbar}{m} [(\nabla n) (\nabla S) + n \nabla^2 S] = 0. \quad (5)$$

Desta maneira ao jogamos na equação acima a densidade referente ao nosso condensado podemos calcular a fase do mesmo. Fazendo, primeiramente, o cálculo da fase para um condensado TF deslocado do centro de massa, o qual tem uma densidade da seguinte forma

$$n(r, t) = A(t) \left\{ 1 - \left[\frac{r - r_0(t)}{R(t)} \right]^2 \right\}, \quad (6)$$

onde r_0 é a distância do centro do potencial de aprisionamento. Obtemos uma equação para a fase dada por

$$\begin{aligned} & \left(\frac{r - r_0}{R} \right)^2 \left[\frac{m \dot{R}}{\hbar R} + (r - r_0)^{-1} \left(\frac{m}{\hbar} \dot{r}_0 - \frac{\partial S}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r - r_0}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{m \dot{A}}{\hbar A} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Uma vez que estamos interessados numa fase que descreve o comportamento na borda do condensado, já que o gradiente no centro não terá variações significativas. Então podemos simplificar a equação acima para quando estamos exatamente em cima do raio do condensado,

ou seja, $1 - (r - r_0)^2 / R^2 = 0$.

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{m}{\hbar} \frac{\dot{R}}{R} (r - r_0) + \frac{m}{\hbar} \dot{r}_0 \quad (8)$$

$$S(r) = \frac{m}{\hbar} \left(\dot{r}_0 - r_0 \frac{\dot{R}}{R} \right) r + \frac{m}{\hbar} \frac{\dot{R}}{R} \frac{r^2}{2} \quad (9)$$

$$= \left(\frac{m}{\hbar} \dot{r}_0 - r_0 B_r \right) r + B_r \frac{r^2}{2} \quad (10)$$

Assim recuperamos as fases usadas em [1], onde podemos ver que o raio do condensado tem sua velocidade proporcional ao quadrado da respectiva coordenada. Sendo a posição r_0 proporcional à respectiva coordenada, sabemos que o movimento do centro de massa está desacoplado com a dinâmica dos raios do condensado. Dessa forma, a fase de um condensado deve ter $b(t)r^2/2$ para descrever a velocidade (curvatura da função de onda) dos raios do mesmo. Já um termo $a(t)r$ que descreve o movimento do centro de massa (inclinação da função de onda).

Agora faremos o mesmo cálculo para um densidade TF contendo um vórtice central ao longo do eixo z,

$$n(\rho, \varphi, z, t) = A(t) e^{i\ell\varphi} \left\{ 1 - \left[\frac{\xi(t)}{\rho} \right]^2 - \left[\frac{\rho}{R_\rho(t)} \right]^2 - \left[\frac{z}{R_z(t)} \right]^2 \right\}, \quad (11)$$

cujas equações de continuidade fica sendo

$$\begin{aligned} & \frac{m}{\hbar} \left(-\frac{\xi \dot{\xi}}{\rho^2} + \frac{\dot{R}_\rho}{R_\rho^3} \rho^2 + \frac{\dot{R}_z}{R_z^3} z^2 \right) + \left(\frac{\xi^2}{\rho^3} - \frac{\rho}{R_\rho^2} \right) \frac{\partial S}{\partial \rho} - \frac{z}{R_z^2} \frac{\partial S}{\partial z} \\ & + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \left(\frac{m}{\hbar} \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial \rho} \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Usando a mesma argumentação anterior para este caso, $1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} = 0$ (no caso de estamos tratando do limite do gás ideal, a densidade será uma gaussiana e os limites de borda são $\rho \rightarrow 0$ e $\rho \rightarrow \infty$).

$$\left(-\frac{\xi^2}{\rho^3} + \frac{\rho}{R_\rho^2} \right) \frac{\partial S}{\partial \rho} + \frac{z}{R_z^2} \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{m}{\hbar} \left(-\frac{\xi \dot{\xi}}{\rho^2} + \frac{\dot{R}_\rho}{R_\rho^3} \rho^2 + \frac{\dot{R}_z}{R_z^3} z^2 \right) = 0 \quad (13)$$

Resolvendo a equação acima temos

$$S(\rho, z) = \frac{m}{4\hbar} \left(\xi \dot{R}_\rho - R_\rho \dot{\xi} \right) \left[\ln \left(\frac{R_\rho \xi - \rho^2}{R_\rho \xi + \rho^2} \right) + \ln(-1) \right] + \frac{m}{\hbar} \frac{\dot{R}_\rho}{R_\rho} \frac{\rho^2}{2} + \frac{m}{\hbar} \frac{\dot{R}_z}{R_z} \frac{z^2}{2} \quad (14)$$

$$= \frac{m}{4\hbar} \left(\xi \dot{R}_\rho - R_\rho \dot{\xi} \right) \left[\ln \left(\frac{R_\rho \xi - \rho^2}{R_\rho \xi + \rho^2} \right) + i\pi \right] + B_\rho \frac{\rho^2}{2} + B_z \frac{z^2}{2}. \quad (15)$$

$$S(\rho, z) \simeq \frac{m}{2\hbar} \left(\xi \dot{R}_\rho - R_\rho \dot{\xi} \right) \left[i\pi - \frac{R\xi}{\rho^2} + O(\xi^3) \right] + B_\rho \frac{\rho^2}{2} + B_z \frac{z^2}{2} \quad (16)$$

$$S(\rho, z) \simeq \frac{m}{2\hbar} \left(\xi \dot{R}_\rho - R_\rho \dot{\xi} \right) \left[\frac{i\pi}{2} - \frac{\rho^2}{R\xi} + O(R^{-3}) \right] + B_\rho \frac{\rho^2}{2} + B_z \frac{z^2}{2} \quad (17)$$

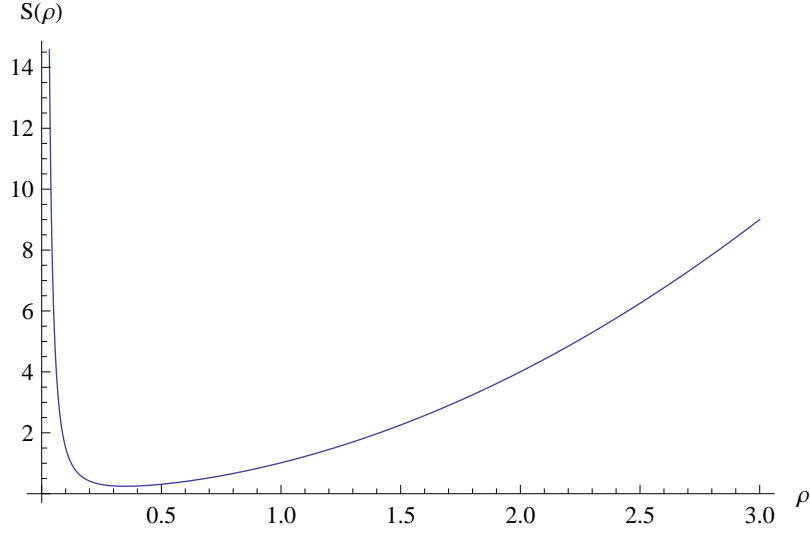


Figura 2: Esboço de (16) na direção radial.

Ao usar uma fase proporcional à ρ^{-2} (Figura 2), temos um bom resultado caso estivermos tratando de um condensado em duas dimensões. Como estamos querendo uma descrição tri-dimensional do problema em questão, esta fase trás problemas de convergência no cálculo da Lagrangiana. Com uma fase do tipo $C(t)\rho^{-1}$, aparecerá termos imaginários na Lagrangiana o que acarretará em termos imaginários, também, nas equações de movimento, e não queremos isso. A fase $C(t)\ln\rho$ não é simples de se usar com um TF-Ansatz, sua complicação está na parte temporal da Lagrangiana,

$$L_{temp} = \frac{i\hbar}{2} \int d^3r \left[\psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + c.c. \right]. \quad (18)$$

Portanto, a fase terá de ser um polinômio de quarto grau,

$$S(\rho, z, t) = B_\rho(t) \frac{\rho^2}{2} + C(t) \frac{\rho^4}{4} + B_z(t) \frac{z^2}{2}, \quad (19)$$

podendo assim descrever aproximadamente a parte radial de (16).

III. CALCULANDO A LAGRANGIANA

Após esse estudo de fases, calcularemos a Lagrangiana do sistema usando uma fase polinomial com o número de parâmetros variacionais apropriados em nosso Ansatz, o qual fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & \sqrt{\frac{N}{\pi R_\rho(t)^2 R_z(t) A_0(t)}} \left[\frac{\rho^2}{\rho^2 + \xi(t)^2} \right]^{\frac{1}{2}} e^{i\ell\varphi} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_\rho(t)^2} - \frac{z^2}{R_z(t)^2}} \\ & \times \exp \left[iB_\rho(t) \frac{\rho^2}{2} + iC(t) \frac{\rho^4}{4} + iB_z(t) \frac{z^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

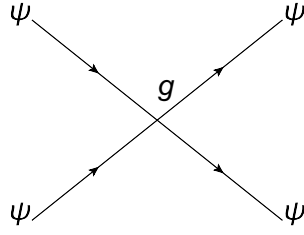


Figura 3: Diagrama de Feynman da interação atômica dos condensados.

onde $A_0[2]$, que é determinada pela condição de normalização

$$N = \int \psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (21)$$

é uma função de $\alpha(t) \equiv \xi(t)/R_\rho(t)$, sendo $\xi(t)$ o raio do vórtice, $R_\rho(t)$ o raio do condensado na direção de $\hat{\rho}$ e $R_z(t)$ o raio do condensado na direção axial (\hat{z}). Essa função de onda tem os limites de integração determinados por $1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \geq 0$, ou seja, esta função de onda é aproximadamente uma parábola invertida, desconsiderando o vórtice central, cuja sua extensão na região dos valores negativos é nula. Estamos tratando de um condensado com uma densidade dada por uma parábola invertida, o que significa que temos um potencial harmônico em coordenadas cilíndricas descrito por $V(\rho, z) = \frac{1}{2}m\omega_\rho^2(\rho^2 + \lambda^2 z^2)$, com uma anisotropia dada por $\lambda = \omega_z/\omega_\rho$, ou seja, para cada valor de λ temos um formato diferente de armadilha magneto-ótica (MOT). Para λ igual à unidade, o potencial harmônico será isotrópico. Já para valores de $\lambda < 1$ teremos um potencial com formato prolato, alongado em \hat{z} ; em $\lambda > 1$ sua forma será uma oblato, achatado em \hat{z} . O formato do potencial, obviamente, define o formato do condensado. Lembrando, quando definimos um valor de λ , necessariamente maior que zero, é como se estivessemos preparando nosso condensado regulando o nosso valor de ω_z e mantendo constante o ω_ρ .

A interação atômica será $V_{int} = g|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ (Figura 3), cujo significado físico é o de espalhamento de onda-s, isto é, espalhamento de baixa energia. Por conta disso, o parâmetro de interação é proporcional ao comprimento de espalhamento a_s , o que é $g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}$.

A densidade de Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{temp} + \mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_{pot} + \mathcal{L}_{int}, \quad (22)$$

tem quatro componentes: tempotal, cinética, potencial, e potencial de interação. Da mesma forma poderemos dividir nossa Lagrangiana,

$$L = \int \mathcal{L} d\mathbf{r}. \quad (23)$$

Seguindo esse caminho, então vamos calcular todas as partes da Lagrangiana agora.

Parte tempotal:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{temp} &= \frac{i\hbar}{2} \left[\psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \\ L_{temp} &= -\frac{N\hbar}{2} \left(D_1 \dot{B}_\rho R_\rho^2 + D_2 \dot{B}_z R_z^2 + \frac{1}{2} D_3 \dot{C} R_\rho^4 \right).\end{aligned}\quad (24)$$

Parte cinética:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cin} &= -\frac{\hbar^2}{2m} [\nabla \psi^*(\mathbf{r}, t)] [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \\ L_{cin} &= -\frac{N\hbar^2}{2m} [D_1 B_\rho^2 R_\rho^2 + D_2 B_z^2 R_z^2 + 2D_3 B_\rho C R_\rho^4 + D_4 (\ell^2 R_\rho^{-2} + R_\rho^2 \alpha^4) + D_5 C^2 R_\rho^6].\end{aligned}\quad (25)$$

Parte potencial (armadilha harmônica):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{pot} &= -\frac{1}{2} m \omega_\rho^2 (\rho^2 + \lambda^2 z^2) \psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \\ L_{pot} &= -\frac{N}{2} m \omega_\rho^2 (D_1 R_\rho^2 + \lambda^2 D_2 R_z^2).\end{aligned}\quad (26)$$

Parte do potencial de interação atômica:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= -\frac{g}{2} [\psi^*(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t)]^2 \\ L_{int} &= -\frac{N^2 g D_6}{2\pi R_\rho^2 R_z}.\end{aligned}\quad (27)$$

As funções de α , D_i , são: $D_i = A_i/A_0$, com exceção de $D_6 = A_6/A_0^2$. Assim nossa Lagrangiana será a soma de cada contribuição, $L = L_{temp} + L_{cin} + L_{pot} + L_{int}$. Por questões de simplicidade, podemos reescalar a Lagrangiana para que os parâmetros fiquem adimensionais, que seria as seguintes mudanças:

$$\begin{aligned}R_\rho(t) &\rightarrow a_{osc} r_\rho(t), \\ R_z(t) &\rightarrow a_{osc} r_z(t), \\ \xi(t) &\rightarrow a_{osc} r_\xi(t), \\ B_\rho(t) &\rightarrow a_{osc}^{-2} \beta_\rho(t), \\ B_z(t) &\rightarrow a_{osc}^{-2} \beta_z(t), \\ C(t) &\rightarrow a_{osc}^{-4} \zeta(t)\end{aligned}$$

e

$$t \rightarrow \omega_\rho^{-1} \tau;$$

com o comprimento do oscilador harmônico $a_{osc} = \sqrt{\hbar/m\omega_\rho}$ e o parâmetro adimensional de interação será $\gamma = Na_s/a_{osc}$. Assim nossa Lagrangiana ficará sendo

$$\begin{aligned}L &= -N\hbar\omega_\rho \left[D_1 r_\rho^2 (\dot{\beta}_\rho + \beta_\rho^2 + 1) + D_2 r_z^2 (\dot{\beta}_z + \beta_z^2 + \lambda^2) \right. \\ &\quad \left. + D_3 r_\rho^4 \left(\frac{1}{2} \dot{\zeta} + 2\beta_\rho \zeta \right) + D_4 r_\rho^{-2} (\ell^2 + r_\rho^4 \alpha^4) + D_5 \zeta^2 r_\rho^6 + \frac{4D_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z} \right].\end{aligned}\quad (28)$$

IV. EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Tomando as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (29)$$

para cada um dos seis parâmetros variacionais, ficando então seies equações diferenciais:

$$\beta_\rho - \frac{\dot{r}_\rho}{r_\rho} - \frac{D'_1 \dot{\alpha}}{2D_1} + \frac{D_3 r_\rho^2 \zeta}{D_1} = 0 \quad (30)$$

$$\beta_z - \frac{\dot{r}_z}{r_z} - \frac{D'_2 \dot{\alpha}}{2D_2} = 0 \quad (31)$$

$$\zeta - \frac{D_3 \dot{r}_\rho}{D_5 r_\rho} - \frac{D_3 \dot{\alpha}}{4D_5 r_\rho^2} + \frac{D_3 \beta_\rho}{D_5 r_\rho^2} = 0 \quad (32)$$

$$D_1 r_\rho \left(\dot{\beta}_\rho + \beta_\rho^2 + 1 \right) + D_3 r_\rho^3 \left(\dot{\zeta} + 4\beta_\rho \zeta \right) + D_4 \left(r_\rho \alpha^4 - \ell^2 r_\rho^{-3} \right) + 3D_5 \zeta^2 r_\rho^5 - \frac{4D_6 \gamma}{r_\rho^3 r_z} = 0 \quad (33)$$

$$D_2 r_z \left(\dot{\beta}_z + \beta_z^2 + \lambda^2 \right) - \frac{2D_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z^2} = 0 \quad (34)$$

$$D'_1 r_\rho^2 \left(\dot{\beta}_\rho + \beta_\rho^2 + 1 \right) + D'_2 r_z^2 \left(\dot{\beta}_z + \beta_z^2 + \lambda^2 \right) + D'_3 r_\rho^4 \left(\frac{1}{2} \dot{\zeta} + 2\beta_\rho \zeta \right) + D'_4 r_\rho^{-2} \left(\ell^2 + r_\rho^4 \alpha^4 \right) + 4D_4 r_\rho^2 \alpha^3 + D'_5 \zeta^2 r_\rho^6 - \frac{4D'_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z} = 0. \quad (35)$$

Resolvendo as equações para os parâmetros advindos das fases, os quais estão relacionados à variação da curvatura da função de onda, teremos:

$$\beta_\rho = \frac{\dot{r}_\rho}{r_\rho} + F_1 \dot{\alpha}, \quad (36)$$

$$\beta_z = \frac{\dot{r}_z}{r_z} + F_2 \dot{\alpha} \quad (37)$$

e

$$\zeta = F_3 \frac{\dot{\alpha}}{r_\rho^2}; \quad (38)$$

onde

$$F_1 = \frac{D'_3 D_3 - 2D'_1 D_5}{4(D_3^2 - D_1 D_5)}, \quad (39)$$

$$F_2 = \frac{D'_2}{2D_2} \quad (40)$$

e

$$F_3 = \frac{2D'_1 D_3 - D_1 D'_3}{4(D_3^2 - D_1 D_5)}. \quad (41)$$

Substituindo (36), (37) e (38) nas equações (33), (34) e (35), reduzimos nossas seis equações acopladas em três equações, igualmente acopladas, as quais são:

$$D_1 (\ddot{r}_\rho + r_\rho) + G_1 r_\rho \ddot{\alpha} + G_2 r_\rho \dot{\alpha}^2 + G_3 \dot{r}_\rho \dot{\alpha} + G_4 r_\rho - \frac{D_4 \ell^2}{r_\rho^3} - \frac{4D_6 \gamma}{r_\rho^3 r_z} = 0 \quad (42)$$

$$D_2 (\ddot{r}_z + \lambda^2 r_z) + G_5 r_z \ddot{\alpha} + G_6 r_z \dot{\alpha}^2 + G_7 \dot{r}_z \dot{\alpha} - \frac{2D_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z^2} = 0 \quad (43)$$

$$D'_1 r_\rho (\ddot{r}_\rho + r_\rho) + D'_2 r_z (\ddot{r}_z + \lambda^2 r_z) + (G_8 r_\rho^2 + G_9 r_z^2) \ddot{\alpha} + (G_{10} r_\rho^2 + G_{11} r_z^2) \dot{\alpha}^2 + (G_{12} r_\rho \dot{r}_\rho + G_{13} r_z \dot{r}_z) \dot{\alpha} + G_{14} r_\rho^2 + \frac{D'_4 \ell^2}{r_\rho^3} + \frac{4D'_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z} = 0, \quad (44)$$

com

$$G_1 = D_1 F_1 + D_3 F_3 \quad (45)$$

$$G_2 = D_1 (F_1^2 + F_1') + D_3 (4F_1 F_3 + F_3') + 3D_5 F_3^2 \quad (46)$$

$$G_3 = 2(D_1 F_1 + D_3 F_3) = 2G_1 \quad (47)$$

$$G_4 = D_4 \alpha^4 \quad (48)$$

$$G_5 = D_2 F_2 \quad (49)$$

$$G_6 = D_2 (F_2^2 + F_2') \quad (50)$$

$$G_7 = 2D_2 F_2 = 2G_5 \quad (51)$$

$$G_8 = D'_1 F_1 + \frac{1}{2} D'_3 F_3 \quad (52)$$

$$G_9 = D'_2 F_2 \quad (53)$$

$$G_{10} = D'_1 (F_1^2 + F_1') + D'_3 \left(\frac{1}{2} F_3' + 2F_1 F_3 \right) + D'_5 F_3^2 \quad (54)$$

$$G_{11} = D'_2 (F_2^2 + F_2') \quad (55)$$

$$G_{12} = 2D'_1 F_1 + D'_3 F_3 \quad (56)$$

$$G_{13} = 2D'_2 F_2 = 2G_9 \quad (57)$$

$$G_{14} = 4D_4 \alpha^3 + D'_4 \alpha^4. \quad (58)$$

Os termos $D_1 r_\rho$, $D_2 \lambda^2 r_z$, $D'_1 r_\rho^2$ e $D'_2 r_z^2$ são os responsáveis pelo aprisionamento do condensado, os quais se forem jogados fora resulta nas equações para a expansão livre. Os termos proporcionais ao parâmetro γ dá a contribuição do potencial de interação atômica, enquanto os termos proporcionais ao ℓ^2 é resultado da contribuição cinética do vórtice, cujo efeito foi adicionar uma pressão quântica. Já os demais termos representa o efeito de acoplamento entre os raios do condensado e o raio do vórtice.

Fazendo as velocidades (\dot{r}_ρ , \dot{r}_z e $\dot{\alpha}$) e acelerações (\ddot{r}_ρ , \ddot{r}_z e $\ddot{\alpha}$) iguais à zero então temos as

equações para a solução estacionária.

$$(D_1 + G_4) \rho_0 = \frac{D_4 \ell^2}{\rho_0^3} + \frac{4D_6 \gamma}{\rho_0^3 z_0} \quad (59)$$

$$D_2 \lambda^2 z_0 = \frac{2D_6 \gamma}{\rho_0^2 z_0^2} \quad (60)$$

$$(D'_1 + G_{14}) \rho_0^2 + D'_2 \lambda^2 z_0^2 = -\frac{D'_4 \ell^2}{\rho_0^3} - \frac{4D'_6 \gamma}{\rho_0^2 z_0} \quad (61)$$

Lembrando que agora as funções de α se tornam funções de α_0 . Para resolver as equações acima, é preciso utilizar métodos numéricos, no caso o método de Newton.

V. MODOS COLETIVOS

Para tirar das equações de movimento uma resposta do condensado sujeito a uma perturbação externa, faremos uma linearização dessas equações o que é equivalente a calcularmos o espectro de Bogoliubov. Para tanto, dizemos que o condensado está levemente deslocado de sua posição de equilíbrio, ou seja, $r_\rho(t) \rightarrow \rho_0 + \delta_\rho(t)$, $r_z(t) \rightarrow z_0 + \delta_z(t)$ e $\alpha(t) \rightarrow \alpha_0 + \delta_\alpha(t)$. Seguindo essas mudanças e negligenciando termos de segunda ordem temos:

$$D_1 \ddot{\delta}_\rho + G_1 \rho_0 \ddot{\delta}_\alpha + \left(D_1 + G_4 + \frac{3D_4 \ell^2}{\rho_0^4} + \frac{12D_6 \gamma}{\rho_0^4 z_0} \right) \delta_\rho + \left(\frac{4D_6 \gamma}{\rho_0^3 z_0^2} \right) \delta_z + \left(D'_1 \rho_0 + G'_4 \rho_0 - \frac{D'_4 \ell^2}{\rho_0^3} - \frac{4D'_6 \gamma}{\rho_0^3 z_0} \right) \delta_\alpha = 0 \quad (62)$$

$$D_2 \ddot{\delta}_z + G_5 z_0 \ddot{\delta}_\alpha + \left(\frac{4D_6 \gamma}{\rho_0^3 z_0^2} \right) \delta_\rho + \left(D_2 \lambda^2 + \frac{4D_6 \gamma}{\rho_0^2 z_0^3} \right) \delta_z + \left(D'_2 \lambda^2 z_0 - \frac{2D'_6 \gamma}{\rho_0^2 z_0^2} \right) \delta_\alpha = 0 \quad (63)$$

$$D'_1 \rho_0 \ddot{\delta}_\rho + D'_2 z_0 \ddot{\delta}_z + (G_8 \rho_0^2 + G_9 z_0^2) \ddot{\delta}_\alpha + \left(2D'_1 \rho_0 + 2G_{14} \rho_0 - \frac{2D'_4 \ell^2}{\rho_0^3} - \frac{8D'_6 \gamma}{\rho_0^3 z_0} \right) \delta_\rho + \left(2D'_4 \lambda^2 z_0 - \frac{4D'_6 \gamma}{\rho_0^2 z_0^2} \right) \delta_z + \left(D''_1 \rho_0^2 + G'_{14} \rho_0^2 + D''_2 \lambda^2 z_0^2 + \frac{D''_4 \ell^2}{\rho_0^2} + \frac{4D''_6 \gamma}{\rho_0^2 z_0} \right) \delta_\alpha = 0, \quad (64)$$

note que as funções de α são funções de α_0 como, anteriormente, no caso estacionário. Os termos que não dependem dos δ_i formam a solução estacionária sumindo das equações acima. Com essas equações podemos escreve-las como matrizes,

$$M \ddot{\delta} + V \delta = 0 \quad (65)$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\delta}_\rho \\ \ddot{\delta}_z \\ \ddot{\delta}_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\rho \\ \delta_z \\ \delta_\alpha \end{pmatrix} = 0, \quad (66)$$

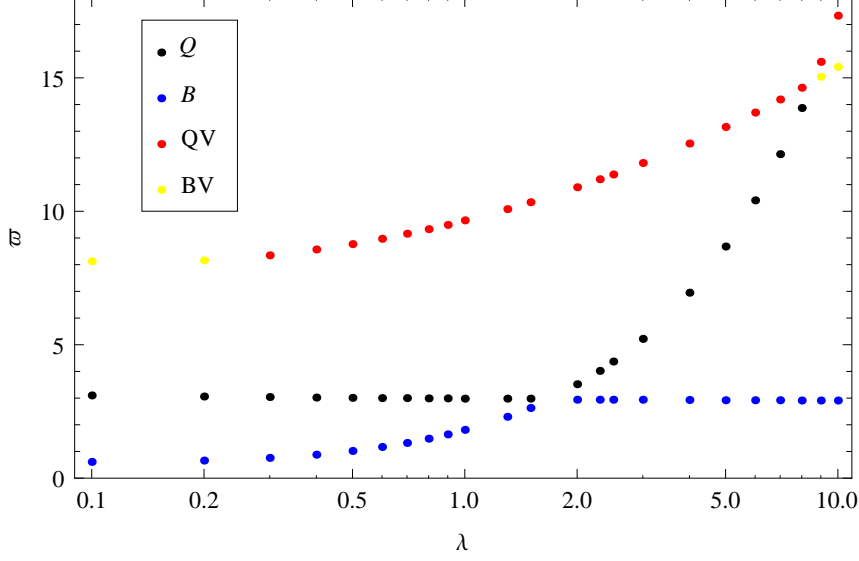


Figura 4: Frequência dos modos de oscilações de um condensado contendo um vórtice central.

e calcularemos a relação de dispersão,

$$\det (M^{-1}V - \varpi^2 I) = 0, \quad (67)$$

o que resulta nas frequências dos modos coletivos. O resultado do determinante será uma equação cubica de ϖ^2 , isto é,

$$-\varpi^6 + b\varpi^4 - c\varpi^2 + d = 0, \quad (68)$$

cuja solução está no Apêndice C. Agora os determinantes $\det M$ e $\det V$ são, ambos, positivos para $\ell = 1$. O que significa que estamos no estado de menor energia para o caso de um vórtice central num condensado de Bose-Einstein, portanto as frequências ϖ^2 também serão positivas. Segundo este resultado teremos três frequências as quais não poderão ser relacionadas a apenas um modo de oscilação respectivo, ou seja, temos três frequências e quatro modos de oscilação no total, sendo que apenas três modos podem ser observados de acordo com a anisotropia do potencial harmônico como é representado na Figura 4. Os quatro modos de oscilação serão dois tipos de monopolo (breathing) e dois tipos de quadrupolo. Os dois primeiros são quando o núcleo do vórtice está em fase com o raio da direção ρ (B e Q da figura 4), e os dois ultimos terão os núcleo do vórtice em fase com o raio axial. Note que para um $\lambda \approx 1.9$ os modos de monopolo e quadrupolo são degenerados, assim como outros dois modos são degenerados em $\lambda \approx 8$.

VI. MODULANDO O COMPRIMENTO DE ESPALHAMENTO

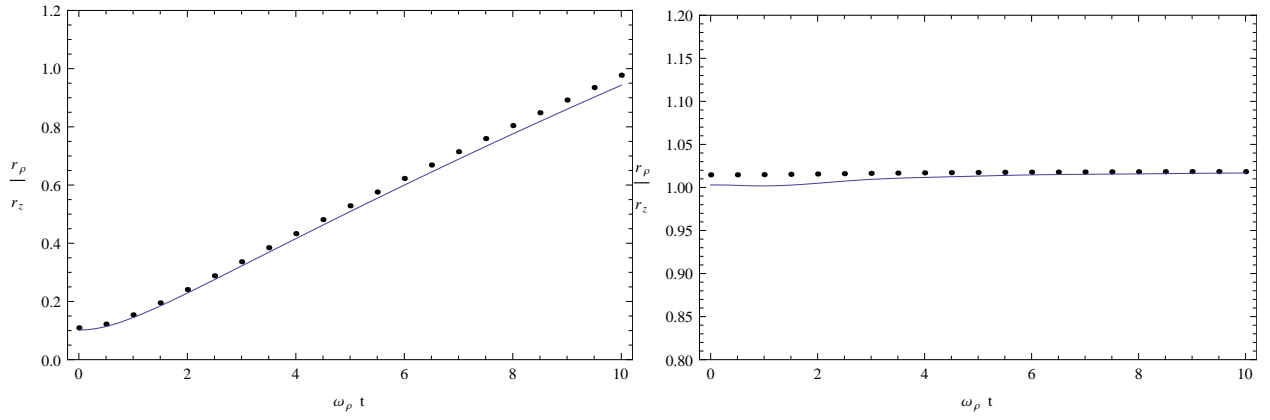


Figura 5: Ambos gráfcos mostram a expansão do aspect ratio do condensado com vórtice ($\ell = 1$), inicialmente armadilhado num potencial com anisotropia igual à $\lambda = 0.1$ (esquerda) e $\lambda = 1$ (direita). Calculamos para uma interação de $\gamma = 800$, o que corresponde ao valor aproximado no caso de um condensado como experimento BEC-I. A linha pontilhada representa os dados da simulação numérica, e a linha continua é resultado do método varacional.

Para excitarmos os modos coletivos descritos na secção anterior é feita uma modulação no comprimento de espalhamento, isto é,

$$a_s(t) = a_0 + \delta a \cos(\Omega t), \quad (69)$$

o que é equivalente à fazermos $\gamma \rightarrow \gamma(t)$ com a mesma cara de $a_s(t)$, ou seja,

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \delta\gamma \cos(\Omega t). \quad (70)$$

Onde γ_0 é o background do nosso parâmetro de interação, $\delta\gamma$ uma amplitude de modulação e Ω a frequência com a qual excitamos os modos.

VII. EXPANSÃO LIVRE

O interesse na expansão livre vem do fato de só podermos fazer medidas dos condensados após desligado o potencial de aprisionamento. Para este fim, como mencionado anteriormente, basta usamos as equações de movimento (42), (43) e (44) sem os termos vindos do portencial

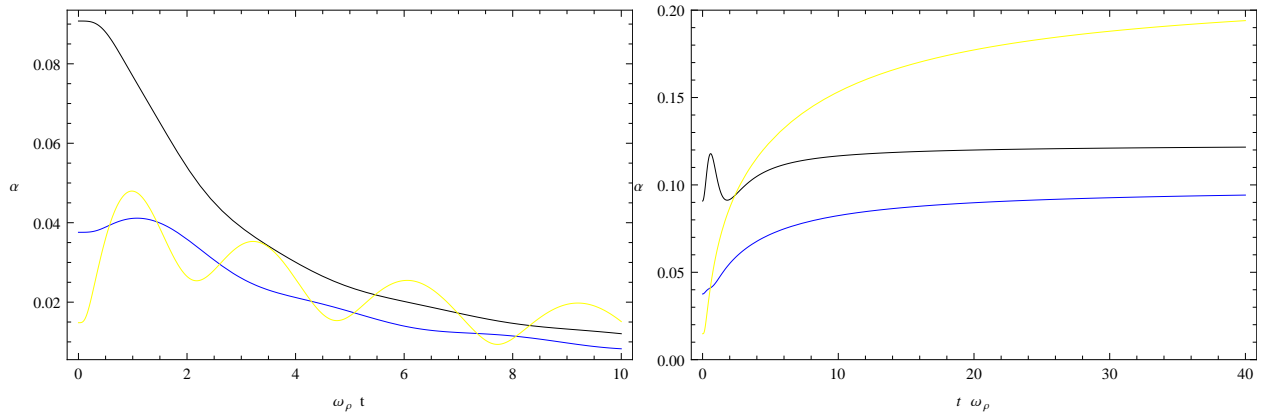


Figura 6: Ambos gráficos são da expansão de $\alpha(t) = \xi(t)/R_\rho(t)$, sendo a linha preta referente à uma anisotropia tipo prolato ($\lambda = 0.1$), a azul o caso isotrópico ($\lambda = 1$) e a amarela para um condensado tipo oblato ($\lambda = 10$). As curvas da esquerda são os resultados sem desconsiderar um termo da equação que aparenta ser um termo de potencial harmônico para o vórtice, já as curvas da direita são sem esse termo.

harmônico, isto é,

$$D_1 \ddot{r}_\rho + G_1 r_\rho \ddot{\alpha} + G_2 r_\rho \dot{\alpha}^2 + G_3 \dot{r}_\rho \dot{\alpha} + G_4 r_\rho - \frac{D_4 \ell^2}{r_\rho^3} - \frac{4D_6 \gamma}{r_\rho^3 r_z} = 0 \quad (71)$$

$$D_2 \ddot{r}_z + G_5 r_z \ddot{\alpha} + G_6 r_z \dot{\alpha}^2 + G_7 \dot{r}_z \dot{\alpha} - \frac{2D_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z^2} = 0 \quad (72)$$

$$D'_1 r_\rho \ddot{r}_\rho + D'_2 r_z \ddot{r}_z + (G_8 r_\rho^2 + G_9 r_z^2) \ddot{\alpha} + (G_{10} r_\rho^2 + G_{11} r_z^2) \dot{\alpha}^2 + (G_{12} r_\rho \dot{r}_\rho + G_{13} r_z \dot{r}_z) \dot{\alpha} + G_{14} r_\rho^2 + \frac{D'_4 \ell^2}{r_\rho^3} + \frac{4D'_6 \gamma}{r_\rho^2 r_z} = 0, \quad (73)$$

cujas condições iniciais são dadas pela solução estacionária. O que concordou muito bem com a simulação numérica como pode ser vista na Figura 5, contudo a expansão do vórtice não fez o menor sentido (Figura 6, gráfico da esquerda). Esse resultado para a expansão do vórtice sugere que haja um termo nas equações, o qual representa o efeito de uma armadilha harmônica para o vórtice. Assim, retiraremos os termos $G_4 r_\rho$ e $G_{14} r_\rho^2$, que se assemelham com termos de potencial. E então a expansão fica bem descrita, gráfico à direita na Figura 6, apesar de uma oscilação inicial, para o caso em que $\lambda = 0.1$, a qual não deveria existir. Isso me faz pensar que deve ser por causa da fase usada, pois minha intuição diz que esta seria uma fase para o caso de termos um potencial quártico, $V(\mathbf{r}) \propto r^4$.

Apêndice A: Duas Aproximações de perfil de Thomas-Fermi contendo um Vórtice

Duas aproximações para o perfil de densidade podem ser obtidas da EGP para um vór-

tice central. Primeiramente, vamos escrever a EGP independente do tempo em coordenadas cilíndricas,

$$\mu\psi(\rho, z) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_{\rho,z}^2\psi(\rho, z) + \frac{\hbar^2\ell^2}{2m\rho^2}\psi(\rho, z) + V(\rho, z)\psi(\rho, z) + g|\psi(\rho, z)|^2\psi(\rho, z), \quad (\text{A1})$$

onde $\nabla_{\rho,z}^2$ é o Laplaciano com respeito às coordenadas ρ e z . Tomemos então o potencial efetivo muito maior que a energia cinética, numa armadilha harmônica e anisotrópica,

$$\mu = \frac{\hbar^2\ell^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}m\omega_\rho^2(\rho^2 + \lambda^2 z^2) + gn(\rho, z), \quad (\text{A2})$$

sendo $n(\rho, z) = |\psi(\rho, z)|^2$. Agora podemos fazer de duas maneiras diferentes, a primeira e mais usual será apenas isolar $n(\rho, z)$, ficando

$$n(\rho, z) = \frac{\mu}{g} \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \Theta \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right), \quad (\text{A3})$$

com Θ sendo a função passo e os raios de TF são:

$$R_\rho = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_\rho^2}}, \quad R_z = \sqrt{\frac{2\mu}{m\lambda^2\omega_\rho^2}} \quad \text{e} \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar^2\ell^2}{2m\mu}}. \quad (\text{A4})$$

E a função de onde é dada com uma fase em φ ,

$$\psi(\rho, \varphi, z) = e^{i\ell\varphi} \left(\frac{\mu}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2}}, \quad (\text{A5})$$

na região em que $1 - \frac{\xi^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \geq 0$.

A segunda aproximação é similar à essa, contudo, ela é razoavelmente mais simples para se trabalhar quando estamos tratando de um condensado em três dimensões. Em (A2) usamos a relação para o comprimento de coerência,

$$\frac{\hbar^2\ell^2}{2m\xi^2} = gn(\rho, z), \quad (\text{A6})$$

tornando-a da seguinte forma:

$$\mu = \frac{1}{2}m\omega_\rho^2(\rho^2 + \lambda^2 z^2) + \left(\frac{\xi^2}{\rho^2} + 1 \right) gn(\rho, z). \quad (\text{A7})$$

Agora isolemos a densidade $n(\rho, z)$, então temos

$$n(\rho, z) = \frac{\mu}{g} \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \xi^2} \right) \left(1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \Theta \left(1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right), \quad (\text{A8})$$

onde os raios são dados como da forma acima, exceto pelo raio do vórtice que não dependerá de μ . Nessa descrição o raio do vórtice está associado ao parâmetro de interação g , ou seja, este pode variar de acordo com a razão de μ/g . A mesma fase tem de ser acrescentada quando vamos usar a função de onda. A segunda vantagem dessa segunda forma de escrever um perfil

de densidade TF está no fato de podermos separar a densidade de vórtice da densidade de background. Chamaremos de

$$n_{TF}(\rho, z) = \frac{\mu}{g} \left(1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \Theta \left(1 - \frac{\rho^2}{R_\rho^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right) \quad (\text{A9})$$

e agora faremos

$$\begin{aligned} n(\rho, z) &= \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \xi^2} \right) n_{TF}(\rho, z) \\ &= \left(1 - \frac{\xi^2}{\rho^2 + \xi^2} \right) n_{TF}(\rho, z) \\ &= n_{bg}(\rho, z) + n_v(\rho, z), \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

onde $n_{bg}(\rho, z) = n_{TF}(\rho, z)$ e

$$n_v(\rho, z) = \left(-\frac{\xi^2}{\rho^2 + \xi^2} \right) n_{TF}(\rho, z). \quad (\text{A11})$$

A diferença entre as energias calculadas com ambas aproximações é menor que 1%.

Apêndice B: Cálculo das Funções $A_i(\alpha)$

As funções A_i são resultados das integrais de TF, sendo cada uma referente a uma parte da Lagrangiana, exceto o A_0 que vem da condição de normalização. Começando por este, que estará mais detalhado, pois o procedimento será o mesmo. Fazendo $\rho \rightarrow \rho R_\rho$ e $z \rightarrow z R_z$, a integral de normalização será

$$A_0(\alpha) = 2\pi \int \int \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + \alpha^2} \right) (1 - \rho^2 - z^2) \rho d\rho dz. \quad (\text{B1})$$

Agora faremos uma mudança de variáveis, indo de coordenadas cilíndricas para coordenadas esféricas, isto é, $\rho = r \sin \theta$ e $z = r \cos \theta$. Dessa maneira os limites de interação são simplificados.

$$\begin{aligned} A_0(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1 - r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{45} \left[3 + 20\alpha^2 + 15\alpha^4 - 15\alpha^2 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Notemos a seguinte relação:

$$\operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) = -\frac{1}{4} \log \left[\frac{(1 - \sqrt{1 + \alpha^2})^2}{(1 + \sqrt{1 + \alpha^2})^2} \right], \quad (\text{B3})$$

cuja utilidade é fixar $\alpha \in \text{Reais}$, impedindo que A_i seja imaginário. Proseguindo, os proximos A_i serão:

$$\begin{aligned} A_1(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^4 \sin^4 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{315} \left[6 - 7\alpha^2 (3 + 20\alpha^2 + 15\alpha^4) + 105\alpha^4 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

$$\begin{aligned} A_2(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{1575} \left[15 + 7\alpha^2 (23 + 35\alpha^2 + 15\alpha^4) - 105\alpha^2 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

$$\begin{aligned} A_3(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^6 \sin^6 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{945} \left[8 - 18\alpha^2 + 63\alpha^4 + 420\alpha^6 + 315\alpha^8 - 315\alpha^6 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

$$\begin{aligned} A_4(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= -\frac{8}{9} \left[4 + 3\alpha^2 - 3(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

$$\begin{aligned} A_5(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^8 \sin^8 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right) (1-r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{8}{10395} \left[48 - 11\alpha^2 (8 - 18\alpha^2 + 63\alpha^4 + 420\alpha^6 + 315\alpha^8) + 3465\alpha^8 (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

$$\begin{aligned} A_6(\alpha) &= 2\pi \int_0^\pi \int_0^1 \left(\frac{r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + \alpha^2} \right)^2 (1-r^2)^2 r^2 \sin \theta dr d\theta \\ &= \frac{16}{1575} \left[30 + 749\alpha^2 + 1680\alpha^4 + 945\alpha^6 - 105\alpha^2 (4 + 9\alpha^2) (1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}} \operatorname{acoth} \left(\sqrt{1 + \alpha^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

Apêndice C: Solução da Equação Cúbica

A forma canônica da equação cúbica é

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (\text{C1})$$

com $a \neq 0$. Como solução usual faremos uma transformação no x , $x \rightarrow t + h$.

$$a(t+h)^3 + b(t+h)^2 + c(t+h) + d = 0 \quad (\text{C2})$$

$$a(t^3 + 3ht^2 + 3h^2t + h^3) + b(t^2 + 2ht + h^2) + c(t+h) + d = 0 \quad (\text{C3})$$

$$at^3 + (3ah + b)t^2 + (3ah^2 + 2bh + c)t + d + ah^3 + bh^2 + ch = 0 \quad (\text{C4})$$

$$t^3 + \left(3h + \frac{b}{a} \right) t^2 + \left(3h^2 + 2h\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right) t + \frac{d}{a} + h^3 + \frac{b}{a}h^2 + \frac{c}{a}h = 0 \quad (\text{C5})$$

Escolhendo $h = -\frac{b}{3a}$, reduzimos o grau da equação acima.

$$t^3 + pt + q = 0, \quad (C6)$$

onde

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \quad (C7)$$

e

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}. \quad (C8)$$

Se exprimimos $t = u + v$, a equação (C6) transformar-se-á em

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0, \quad (C9)$$

cuja solução é dada em termos de um sistema de u e v

$$\begin{cases} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3 v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{cases} \quad (C10)$$

então condusimos o sistema para uma solução da qual sabemos a soma de dois números $S = u^3 + v^3 = -q$ e o produto dos mesmos $P = u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$, ou seja, uma equação quadrática

$$Y^2 - SY + P = 0. \quad (C11)$$

Podemos escrever sem perda de generalidade,

$$u^3 = Y_+ = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \quad (C12)$$

$$v^3 = Y_- = \frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}. \quad (C13)$$

Assim já temos a primeira solução

$$t_1 = \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (C14)$$

Conhecida a solução t_1 podemos obter as outras duas decompondo (C6) como o produto de todas soluções, isto é,

$$(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = t^3 + pt + q. \quad (C15)$$

$$t^3 - (t_1 + t_2 + t_3)t^2 + (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)t - t_1 t_2 t_3 = t^3 + pt + q \quad (C16)$$

Os dois polinómios são equivalentes de tiverem coeficientes homólogos iguais:

$$\begin{cases} t_2 + t_3 &= -t_1 \\ t_2 t_3 &= -\frac{q}{t_1} \end{cases} \quad (C17)$$

da mesma maneira que foi feito anteriormente, temos uma soma e um produto de dois números o que é equivalente a uma equação do segundo grau,

$$Z^2 + t_1 Z - \frac{q}{t_1} = 0. \quad (\text{C18})$$

Assim a solução que faltava é

$$t_1 = Z_+ = -\frac{t_1}{2} + \sqrt{\frac{t_1}{4} + \frac{q}{t_1}} \quad (\text{C19})$$

$$t_2 = Z_- = -\frac{t_1}{2} - \sqrt{\frac{t_1}{4} + \frac{q}{t_1}}. \quad (\text{C20})$$

Portanto, as três soluções da equação cúbica (C1), no caso de discriminante $p > 0$, são

$$x_i = t_i - \frac{b}{3a} \quad (\text{C21})$$

para $i = 1, 2, 3$.

No caso de discriminante negativo $p < 0$ convertamos os complexos conjugados Y_+ e Y_- à sua forma trigonométrica

$$Y_+ = |Y_+| \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{C22})$$

$$Y_- = |Y_-| \cos \theta - i \sin \theta. \quad (\text{C23})$$

O que no fim das contas resultará na seguinte solução:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) \right] - \frac{b}{3a} \quad (\text{C24})$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) + \frac{2\pi}{3} \right] - \frac{b}{3a} \quad (\text{C25})$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] - \frac{b}{3a}. \quad (\text{C26})$$

Apêndice D: Cross-Check

Para verificarmos, em partes, se estamos indo pelo caminho certo, precisamos fazer um cross-check. No caso, isso seria validar as equações quando $\ell = 0$ e $\alpha \rightarrow 0$, assim as equações de movimento (42), (43) e (44) se tornarão

$$\ddot{r}_\rho + r_\rho = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4D_6(\alpha)\gamma}{D_1(\alpha)r_\rho^3 r_z} \quad (\text{D1})$$

$$\ddot{r}_z + \lambda^2 r_z = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2D_6(\alpha)\gamma}{D_2(\alpha)r_\rho^2 r_z^2}, \quad (\text{D2})$$

ou seja,

$$\ddot{r}_\rho + r_\rho = \frac{15\gamma}{r_\rho^3 r_z} \quad (\text{D3})$$

$$\ddot{r}_z + \lambda^2 r_z = \frac{15\gamma}{r_\rho^2 r_z^2}. \quad (\text{D4})$$

É fácil de perceber que (59), (60) e (61) são reduzidas à

$$\rho_0 = \frac{15\gamma}{\rho_0^3 z_0} \quad (\text{D5})$$

$$\lambda^2 z_0 = \frac{15\gamma}{\rho_0^2 z_0^2}, \quad (\text{D6})$$

já que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_4 = 0$.

-
- [1] PÉREZ-GARCÍA, V. M. et al. Dynamics of bose-einstein condensates: variational solutions of the gross-pitaevskii equations. *Physical Review A*, v. 56, n. 2, p. 1424–1432, August 1997.
- [2] Todas as funções de A_i de $\alpha(t)$ estão calculadas no Apêndice B.