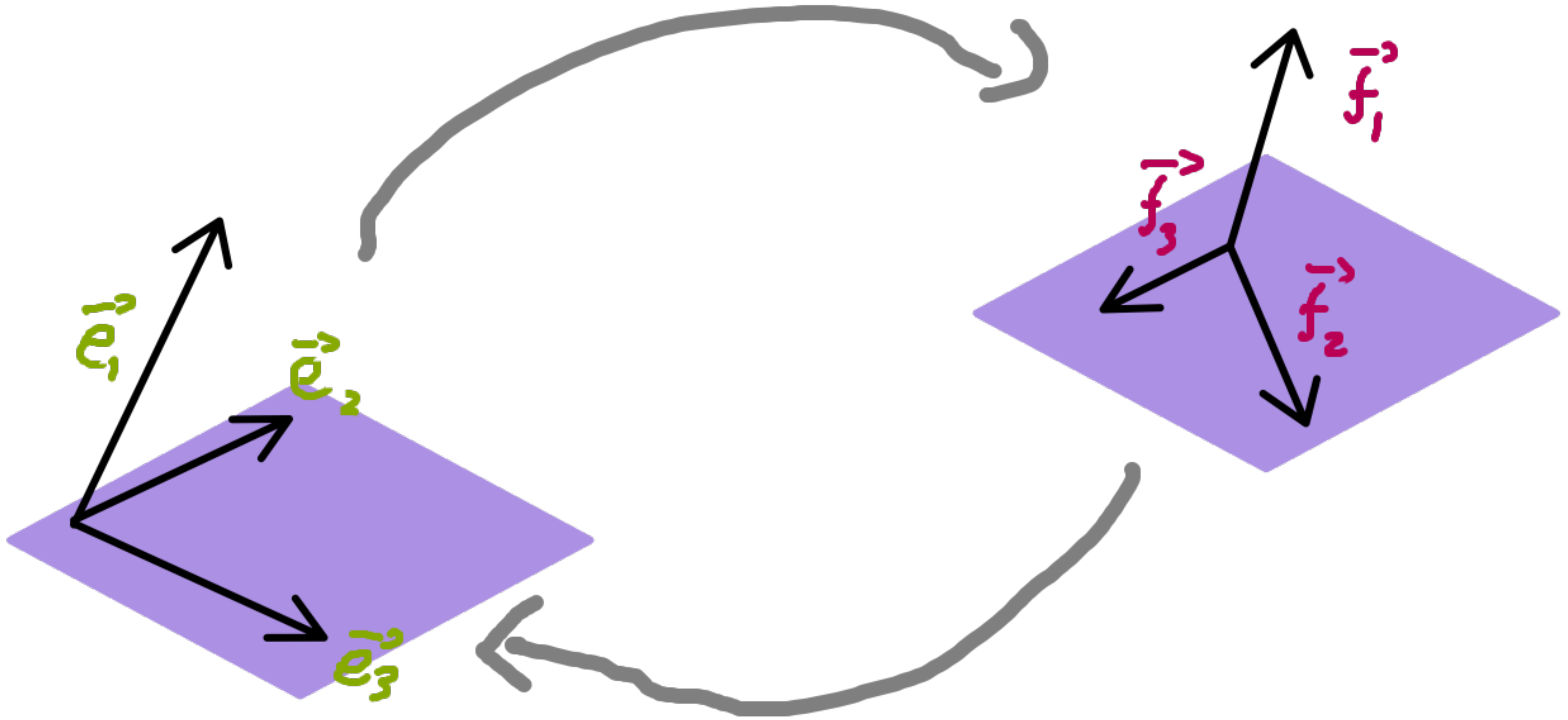
Geometria Analítica



Aula 8: mudança de base

Conteúdo

Mudança de Base

- Motivação
- Matriz mudança de base
- Proposições
- Corolário

Motivação

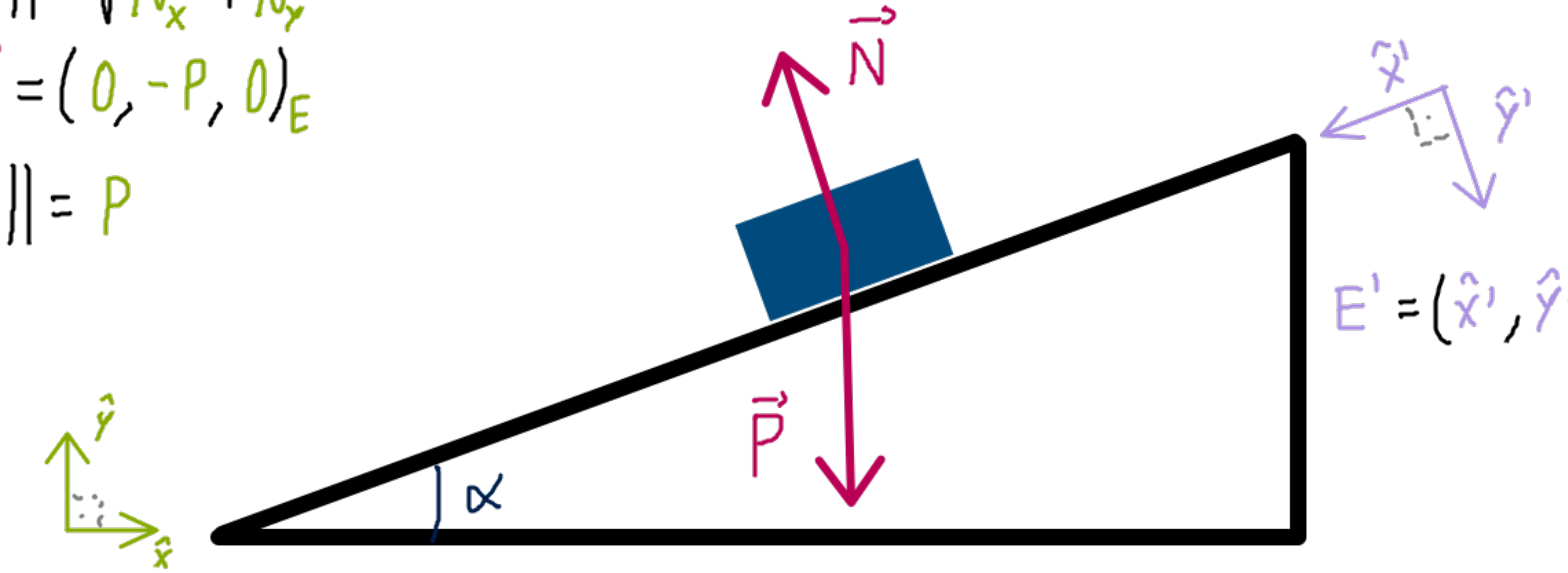
Plano inclinado

$\vec{N} = (-N_x, N_y, 0)_E$

$\|\vec{N}\| = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$

$\vec{P} = (0, -P, 0)_E$

$\|\vec{P}\| = P$



$E' = (\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$

$E = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$

$\vec{N} = (-N_x, N_y, 0)_E$

$\vec{P} = (0, -P, 0)_E$

$\vec{N} = (0, -N, 0)_{E'}$

$\|\vec{N}\| = N$

$\vec{P} = (P_x, P_y, 0)_{E'}$

$\|\vec{P}\| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$

$$\left.\begin{aligned} -N_x &= N \sin(\alpha + \pi) \\ N_y &= N \cos\alpha \end{aligned}\right\} N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P \sin\alpha \\ P_y &= P \cos\alpha \end{aligned}\right\} P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

Matriz mudança de base

Relacionando as bases

Bases $\begin{cases} E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \end{cases}$

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3$$
$$\vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3$$
$$\vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$$

Aplicação

$$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$$
$$\vec{u} = (y_1, y_2, y_3)_F$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_E = M_{EF} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_F$$

Definição

Dadas as bases E e F consideremos as coordenadas de $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ e $\vec{f}_3$ na base E, ou seja, os números reias a_{ij}. A matriz

$$M_{EF} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

é a matriz mudança de base, de E para F.

Proposições

Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ e $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ são bases, então

$$M_{EF} M_{FG} = M_{EG}$$

Toda matriz mudança de base possui matriz inversa.

$$M_{EF}^{-1} [\ \ ]_E = \underbrace{M_{EF}^{-1} M_{EF}}_{\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} [\ \ ]_F$$

matriz identidade

Corolário

A matriz mudança de base de F para E é a matriz inversa da matriz mudança de base de E para F, ou seja,

$$M_{FE} = M_{EF}^{-1}$$