a

Proof: $\mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}}] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]}$ for $r \leq \ln 2$

$$\mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}}] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]}$$

by independence of x_is:

$$\Longleftarrow \prod_i \mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}_i}] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]}$$

by $e^x > 1 + x + x^2$, for $x \leq \ln 2$, since $r \leq \ln 2$ and $\mathsf{X}_i \leq 1 \implies r\mathsf{X}_i \leq r$:

$$\Longleftarrow \prod_i \mathbb{E}[1 + (r\mathsf{X}_i) + (r\mathsf{X}_i)^2] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]}$$

$$\Longleftarrow \prod_i \mathbb{E}[1 + (r\mathsf{X}_i) + (r\mathsf{X}_i)^2] \leq \prod_i e^{(r+r^2)\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

because $a_i \leq b_i \implies \prod_i a_i \leq \prod_i b_i$:

$$\Longleftarrow \forall i, \mathbb{E}[1 + (r\mathsf{X}_i) + (r\mathsf{X}_i)^2] \leq e^{(r+r^2)\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

$$\Longleftarrow \forall i, \mathbb{E}[1 + (r\mathsf{X}_i) + r^2\mathsf{X}_i^2] \leq e^{(r+r^2)\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

because $\mathsf{X}_i \leq 1 \implies \mathsf{X}_i \geq \mathsf{X}_i^2$:

$$\Longleftarrow \forall i, \mathbb{E}[1 + r\mathsf{X}_i + r^2\mathsf{X}_i] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

by linearity of expectation:

$$\Longleftarrow \forall i, 1 + r\mathbb{E}[\mathsf{X}_i] + r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}_i] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

by $1 + x \leq e^x$ for all x:

$$\Longleftarrow \forall i, 1 + x \leq e^x, x = r\mathbb{E}[\mathsf{X}_i] + r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]$$

b

Part a used independence of the X_is when we were able to rewrite $\mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}}]$ as the product of $\mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}_i}]$ for i.

c

i

$$
\begin{aligned}
&\Pr[\mathsf{X} \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]] && && (1)\\
&= \Pr[e^{r\mathsf{X}} \geq e^{r(1+\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}] && (r \geq 0) && (2)\\
&\leq \frac{\mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}}]}{e^{r(1+\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}} && \text{(Markov's inequality)} && (3)\\
&\leq \frac{e^{(r+r^2)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}}{e^{r(1+\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}} && (\text{Part a, } r \leq \ln 2) && (4)\\
&= e^{(r+r^2-r-r\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]} && && (5)\\
&= e^{(r^2-r\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]} && && (6)\\
&= e^{-\epsilon^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]/4} && (r = \frac{\epsilon}{2}) && (7)
\end{aligned}
$$

We then have

$$\Pr[\mathsf{X} \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]]$$

for

$$0 \leq \epsilon/2 \leq \ln 2 \implies 0 \leq \epsilon \leq \ln 4$$

ii

$$
\begin{aligned}
&\Pr[\mathsf{X} \geq (1+\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]] && && (8)\\
&= \Pr[e^{r\mathsf{X}} \geq e^{r(1+\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}] && (r \geq 0) && (9)\\
&\leq \frac{\mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}}]}{e^{r(1+\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}} && \text{(Markov's inequality)} && (10)\\
&\leq \frac{e^{(r+r^2)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}}{e^{r(1+\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}} && (\text{Part a, } r \leq \ln 2) && (11)\\
&= e^{(r+r^2-r-r\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]} && && (12)\\
&= e^{(r^2-r\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]} && && (13)\\
&= e^{((\ln 2)^2-\epsilon\ln 2)\mathbb{E}[\mathsf{X}]} && (r = \ln 2) && (14)\\
&= 2^{(\ln 2-\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]} && && (15)\\
&\leq 2^{-\epsilon\mathbb{E}[\mathsf{X}]/2} && (\epsilon \geq \ln 4) && (16)
\end{aligned}
$$

iii

$$
\begin{aligned}
&\Pr[\mathsf{X} \leq (1-\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]] && && (17)\\
&= \Pr[e^{-r\mathsf{X}} \geq e^{-r(1-\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}] && (r \geq 0) && (18)\\
&\leq \frac{\mathbb{E}[e^{-r\mathsf{X}}]}{e^{-r(1-\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}} && \text{(Markov's inequality)} && (19)\\
&\leq \frac{e^{(-r+(-r)^2)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}}{e^{-r(1-\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]}} && (\text{Part a, } -r \leq \ln 2 \implies r \geq -\ln 2) && (20)\\
&= e^{(-r+r^2+r-r\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]} && && (21)\\
&= e^{(r^2-r\epsilon)\mathbb{E}[\mathsf{X}]} && && (22)\\
&= e^{-\epsilon^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]/4} && (r = \frac{\epsilon}{2}) && (23)
\end{aligned}
$$

So for $r = \frac{\epsilon}{2} \geq 0 \implies \epsilon \geq 0$, the claim holds.

iv

$$
\begin{aligned}
&\Pr[\mathsf{X} - \mathbb{E}[\mathsf{X}] \geq \epsilon n] && && (24)\\
&\Pr[\mathsf{X} - \mathbb{E}[\mathsf{X}] \geq \frac{\epsilon n \mathbb{E}[\mathsf{X}]}{\mathbb{E}[\mathsf{X}]}] && && (25)\\
&\Pr[\mathsf{X} \geq \frac{\epsilon n \mathbb{E}[\mathsf{X}]}{\mathbb{E}[\mathsf{X}]} + \mathbb{E}[\mathsf{X}]] && && (26)\\
&\Pr[\mathsf{X} \geq (\frac{\epsilon n}{\mathbb{E}[\mathsf{X}]} + 1)\mathbb{E}[\mathsf{X}]] && && (27)\\
&\leq e^{-(\frac{\epsilon n}{\mathbb{E}[\mathsf{X}]})^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]/4} && (\text{Part i,} \frac{\epsilon n}{\mathbb{E}[\mathsf{X}]} \leq \ln 4) && (28)\\
&= e^{-\frac{\epsilon^2 n^2}{\mathbb{E}[\mathsf{X}]^2}\mathbb{E}[\mathsf{X}]/4} && && (29)\\
&= e^{-\frac{\epsilon^2 n^2}{\mathbb{E}[\mathsf{X}]}/4} && && (30)\\
&\leq e^{-\epsilon^2 n/4} && (n \geq \mathbb{E}[\mathsf{X}]) && (31)\\
& && && (32)\\
&\leq 2^{-\frac{\epsilon n}{\mathbb{E}[\mathsf{X}]}\mathbb{E}[\mathsf{X}]/2} && (\text{Part ii, } \frac{\epsilon n}{\mathbb{E}[\mathsf{X}]} \geq \ln 4) && (33)\\
&= 2^{-\epsilon n/2} && && (34)\\
&\leq e^{-\epsilon^2 n/4} && && (35)\\
& && && (36)
\end{aligned}
$$