a

Proof: $\mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}}] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]}$ for $r \leq \ln 2$

$$\mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}}] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]}$$

by independence of x_is:

$$\Longleftarrow \prod_i \mathbb{E}[e^{r\mathsf{X}_i}] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]}$$

by $e^x > 1 + x + x^2$, for $x \leq \ln 2$, since $r \leq \ln 2$ and $\mathsf{X}_i \leq 1 \implies r\mathsf{X}_i \leq r$:

$$\Longleftarrow \prod_i \mathbb{E}[1 + (r\mathsf{X}_i) + (r\mathsf{X}_i)^2] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}]}$$

$$\Longleftarrow \prod_i \mathbb{E}[1 + (r\mathsf{X}_i) + (r\mathsf{X}_i)^2] \leq \prod_i e^{(r+r^2)\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

because $a_i \leq b_i \implies \prod_i a_i \leq \prod_i b_i$:

$$\Longleftarrow \forall i, \mathbb{E}[1 + (r\mathsf{X}_i) + (r\mathsf{X}_i)^2] \leq e^{(r+r^2)\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

$$\Longleftarrow \forall i, \mathbb{E}[1 + (r\mathsf{X}_i) + r^2\mathsf{X}_i^2] \leq e^{(r+r^2)\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

because $\mathsf{X}_i \leq 1 \implies \mathsf{X}_i \geq \mathsf{X}_i^2$

$$\Longleftarrow \forall i, \mathbb{E}[1 + r\mathsf{X}_i + r^2\mathsf{X}_i] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

by linearity of expectation:

$$\Longleftarrow \forall i, 1 + r\mathbb{E}[\mathsf{X}_i] + r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}_i] \leq e^{r\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]+r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]}$$

by $1 + x \leq e^x$ for **all** x (still needs to be proved):

$$\Longleftarrow \forall i, 1 + x \leq e^x, x = r\mathbb{E}[\mathsf{X}_i] + r^2\mathbb{E}[\mathsf{X}_i]$$