ECUACIONES DE MAXWELL

CONTENIDOS

1. Inducción electromagnética

2. Descripción de las ecuaciones de Maxwell

3. Leyes de conservación electromagnética

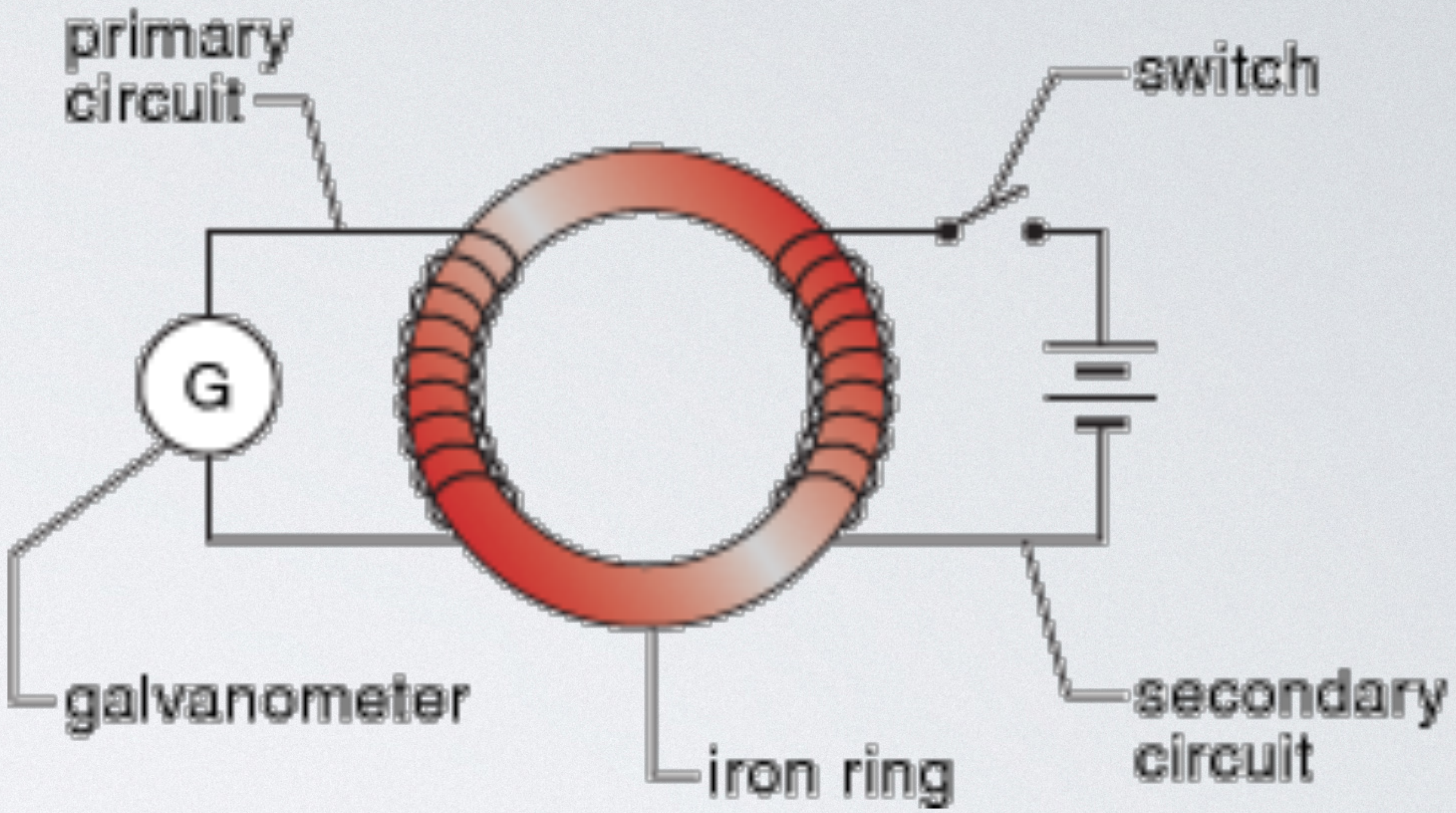
1.1 EL DESCUBRIMIENTO DE FARADAY

- H. C. Ørsted descubrió que los campos magnéticos son producidos por corrientes eléctricas

- M. Faraday estuvo interesado en encontrar si los campos magnéticos eran capaces de producir corrientes

    - Encontró que una corriente estacionaria no tenía un efecto detectable en un circuito cercano

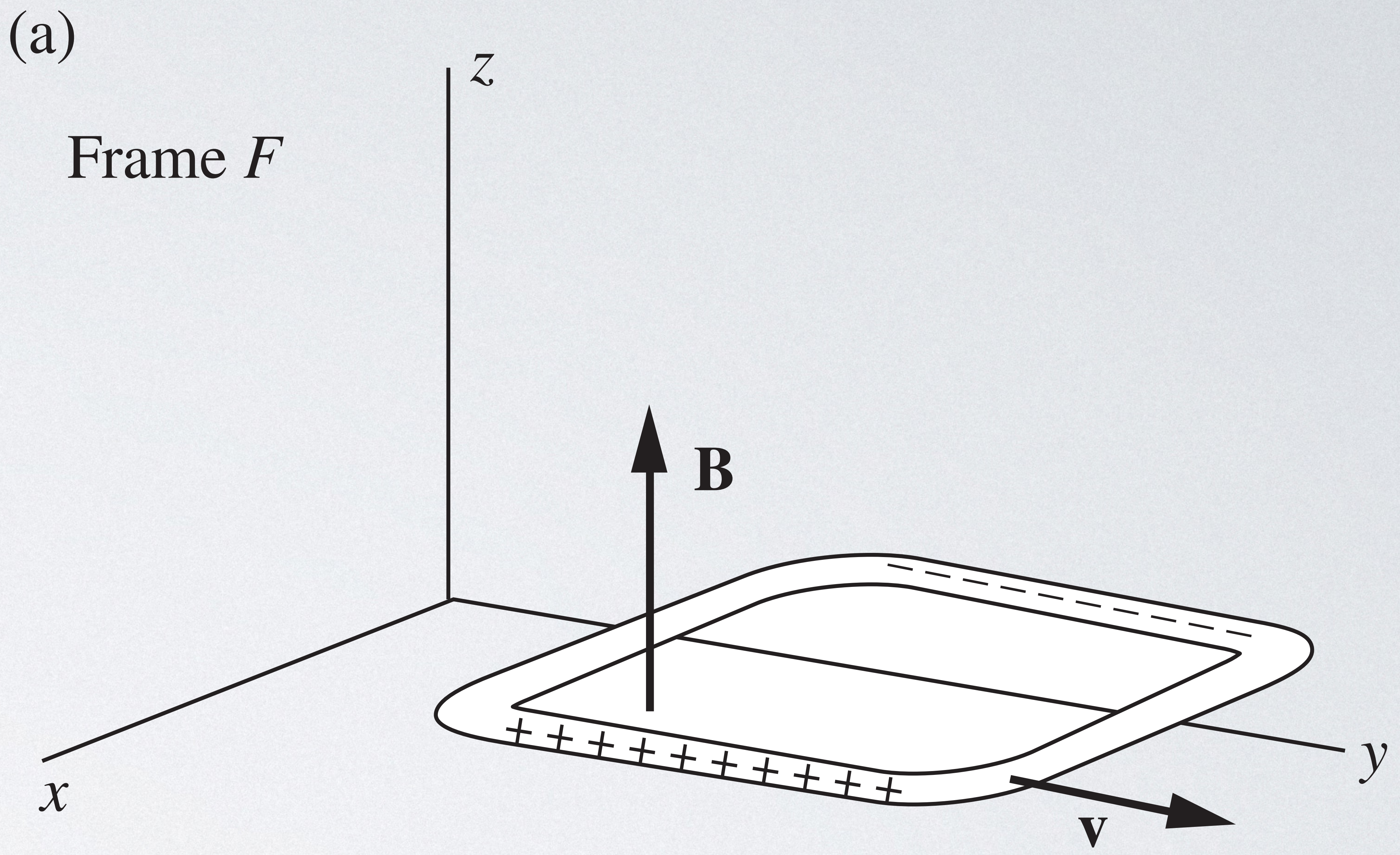
    - En un experimento notó un ligero cambio en marcado en el galvanómetro cuando el electroimán era conectado y otro cuando era desconectado



Estableció que las corrientes en conductores eran inducidas por corrientes cambiantes en el tiempo

1.2 CIRCUITO MOVIÉNDOSE EN UN CAMPO UNIFORME

- Consideremos un circuido rectangular moviéndose a velocidad constante a través de un campo magnético uniforme
  - De la fuerza de Lorenz podemos ver que los lados opuestos del rectángulo sólo adquirirán una carga
  - No hay otro fenómeno que se muestre (aburrido).

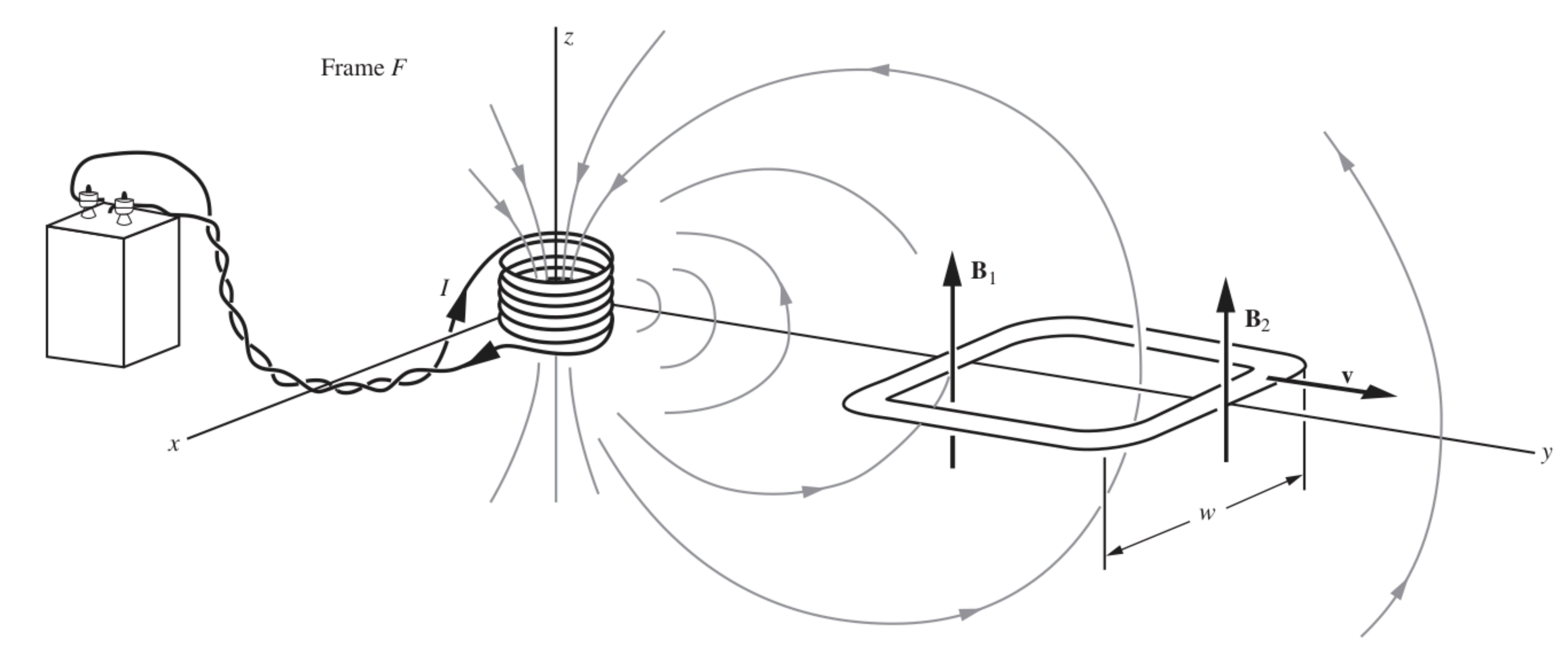


1.3 CIRCUITO MOVIÉNDOSE A TRAVÉS DE UN CAMPO MAGNÉTICO NO UNIFORME

- Consideremos un circuito rectangular moviéndose a una velocidad constante a través de un campo magnético no uniforme

  - A un un instante de tiempo t el campo sobre cada carga el campo magnético B_1 ejerce una fuerza en el lado izquierdo del circuito mientras que el campo magnético B_2 ejerce una fuerza en lado derecho

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



- La fuerza es una función de la posición sobre el circuito a un instante del tiempo

- Entonces el trabajo de mover una carga es $\int \vec{f} \cdot d\vec{l} = qv(B_1 - B_2)w$

- Pero el trabajo para mover una carga a través de un circuito cerrado es una FEM

$$\mathscr{E} \equiv \frac{1}{q}\int \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

1.3 CIRCUITO MOVIÉNDOSE A TRAVÉS DE UN CAMPO MAGNÉTICO NO UNIFORME

- Formalmente podemos escribir este resultado considerando el siguiente planteamiento

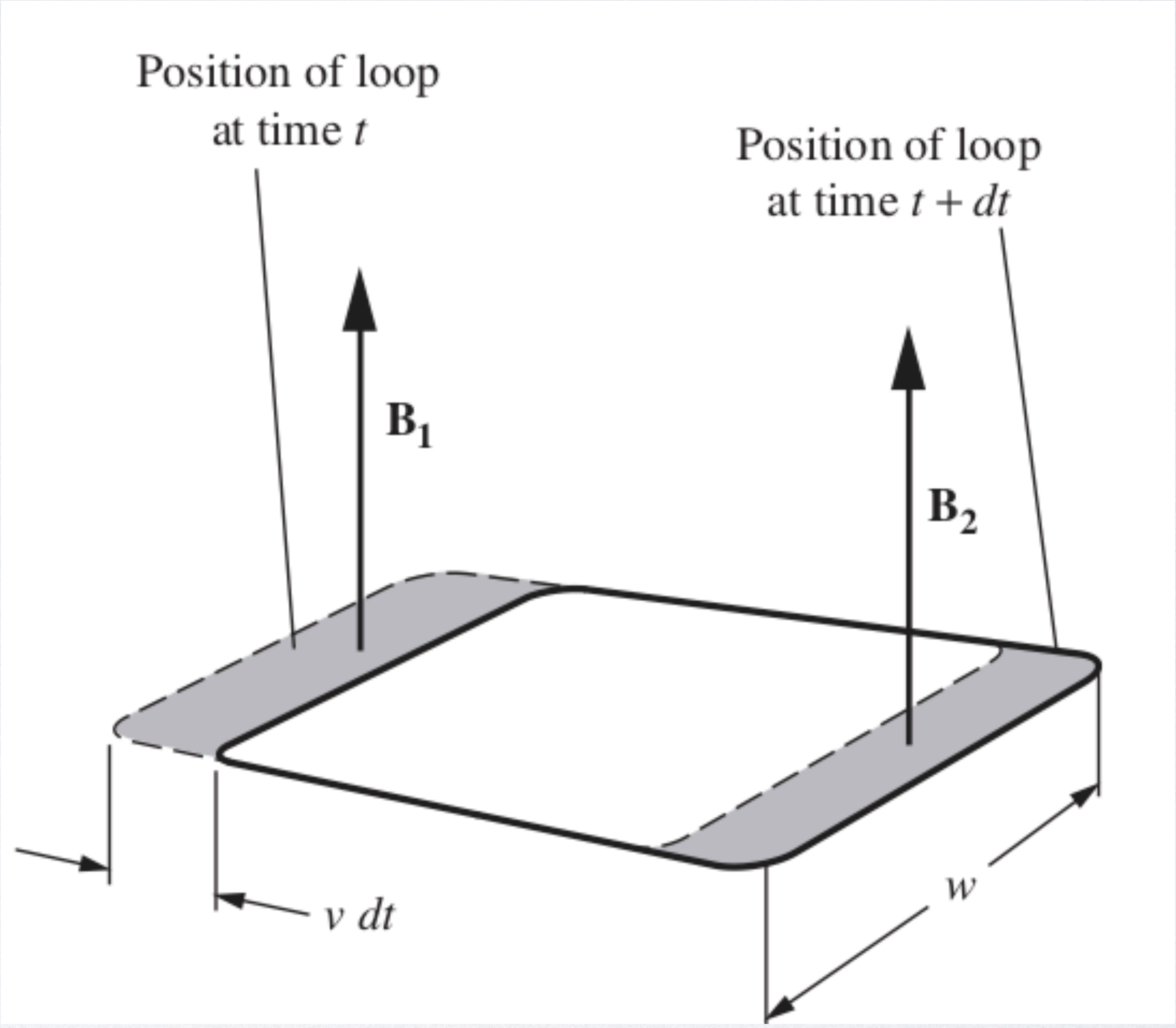
  - El flujo de un campo magnético a través del circuito en un instante $t + \Delta t$

    - De manera muy general, tanto el campo como la superficie pudieron modificarse, tal que

      $$\Phi(t+\Delta t) = \int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(t+\Delta t) \cdot d\vec{S}(t+\Delta t)$$

    - La diferencia entre flujos a tiempos t y $t + dt$ se puede escribir como

      $$\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t) = \int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(t+\Delta t) \cdot d\vec{S}(t+\Delta t) - \int_{S(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}(t)$$

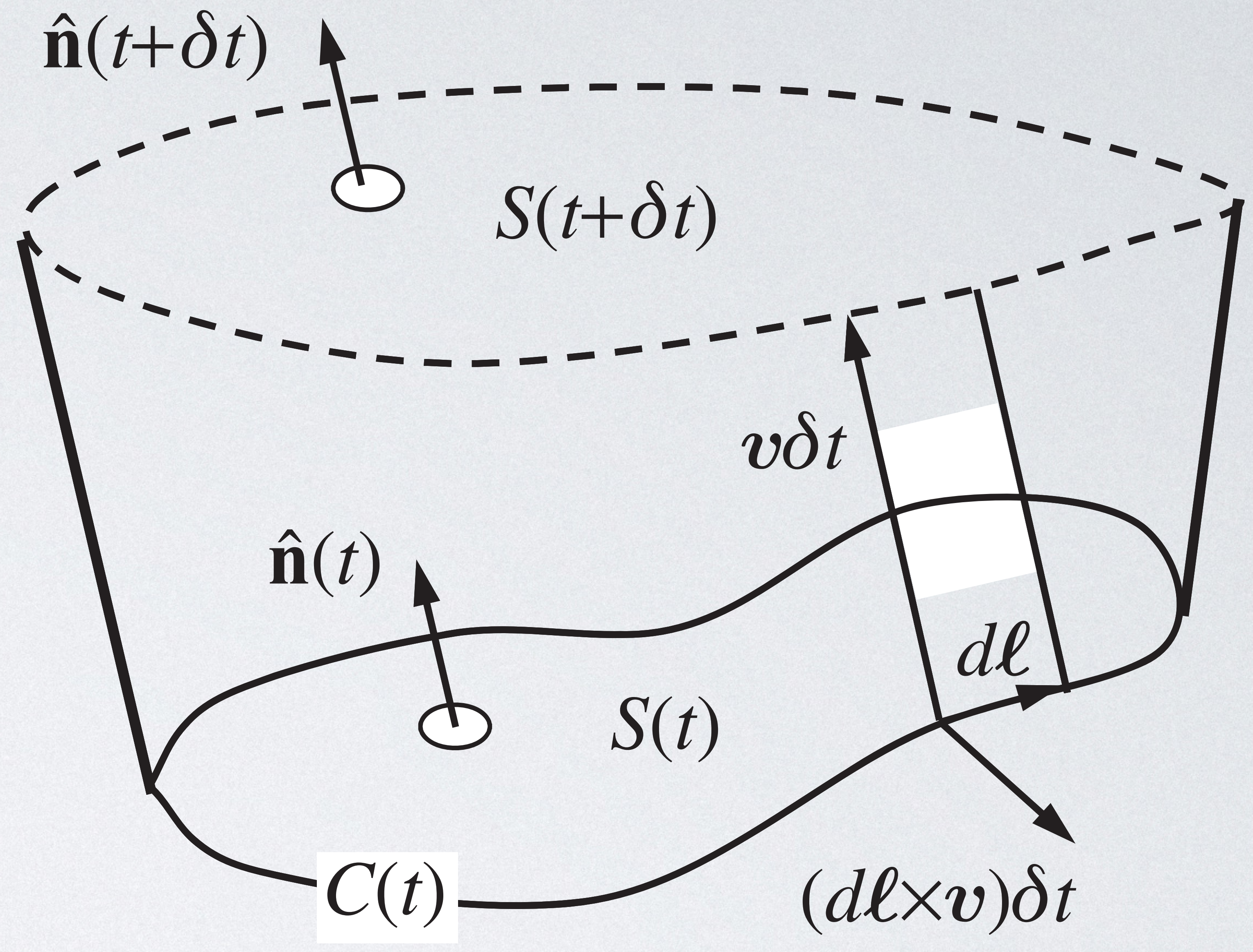


Entonces, el cambio de flujo como función del tiempo lo podemos definir como

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}$$

1.3 CIRCUITO MOVIÉNDOSE A TRAVÉS DE UN CAMPO MAGNÉTICO NO UNIFORME

- Entonces, el cambio del flujo a través de una superficie como función del tiempo se puede escribir como
  $$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{d}{dt}\int_{S(t)} \vec{B}(t)\cdot d\vec{S}(t)$$
  - Siguiendo la regla integral de Leibniz, la expresión anterior se puede definir como
    $$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \int_S \left[\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} + \vec{v}\nabla\cdot\vec{B} + \nabla\times\left(\vec{B}\times\vec{v}\right)\right]\cdot d\vec{S}$$
    - con $\vec{v}$ la velocidad con la que se traslada la superficie
  - Como se debe cumplir que $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, y usando el teorema de Stokes, finalmente tenemos que la relación que deben cumplir es
    $$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \oint_C \left(\vec{B}\times\vec{v}\right)\cdot d\vec{l}$$



Si el campo no varía como función del tiempo, entonces

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = -\oint_C \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l} = -\mathscr{E}$$

1.3 CIRCUITO MOVIÉNDOSE A TRAVÉS DE UN CAMPO MAGNÉTICO NO UNIFORME

- Entonces, si el campo magnético no uniforme, en un sistema de referencia inercial, es constante en el tiempo y un circuito, de cualquier forma, se está moviendo de alguna manera, se genera una FEM alrededor del circuito relacionada con el cambio de flujo magnético Φ

$$\boxed{\mathscr{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}}$$

Ley de Lenz

La dirección de la FEM inducida es tal que induce una corriente que genera un campo magnético que se opone al cambio de flujo

Observación: Esto debe ser igualmente válido si ahora el campo está variando en el tiempo y el circuito permanece inmóvil que es la observación hecha por Faraday

1.4 CIRCUITO ESTACIONARIO CON CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE

- De nuevo consideramos que el circuito está en reposo y el campo magnético está variando
  - Una corriente es inducida sobre el sistema
    - Podemos interpretar la existencia de una FEM con la presencia de un campo eléctrico inducido, no conservativo, $\vec{E}_{ind}$

      $$\mathscr{E} = \oint \left(\vec{E}_c + \vec{E}_{ind} \right) \cdot d\vec{l}$$

    - El campo eléctrico total puede escribirse como $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_{ind}$

$$\mathscr{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

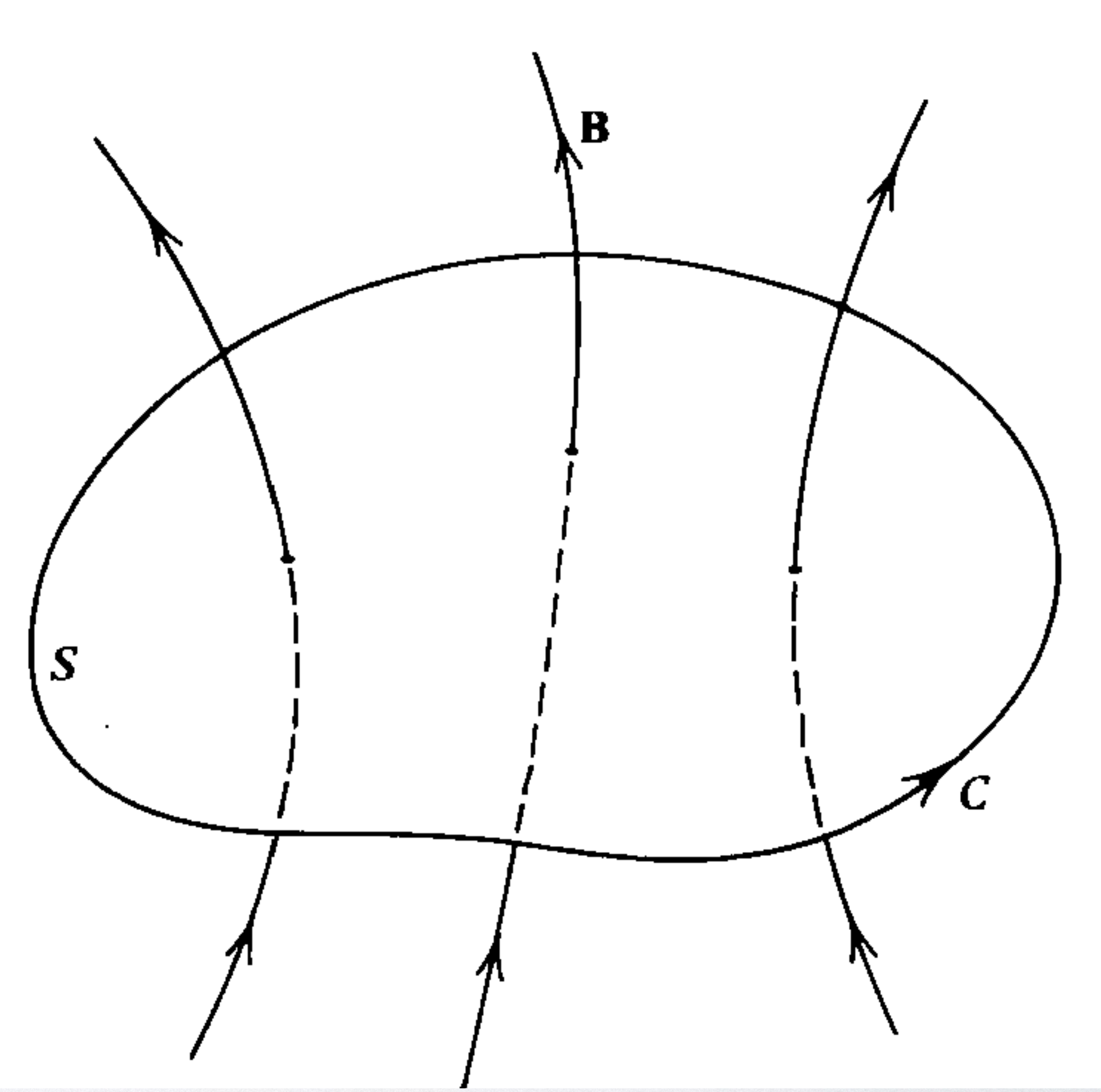
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{Ley de Faraday diferencial}$$

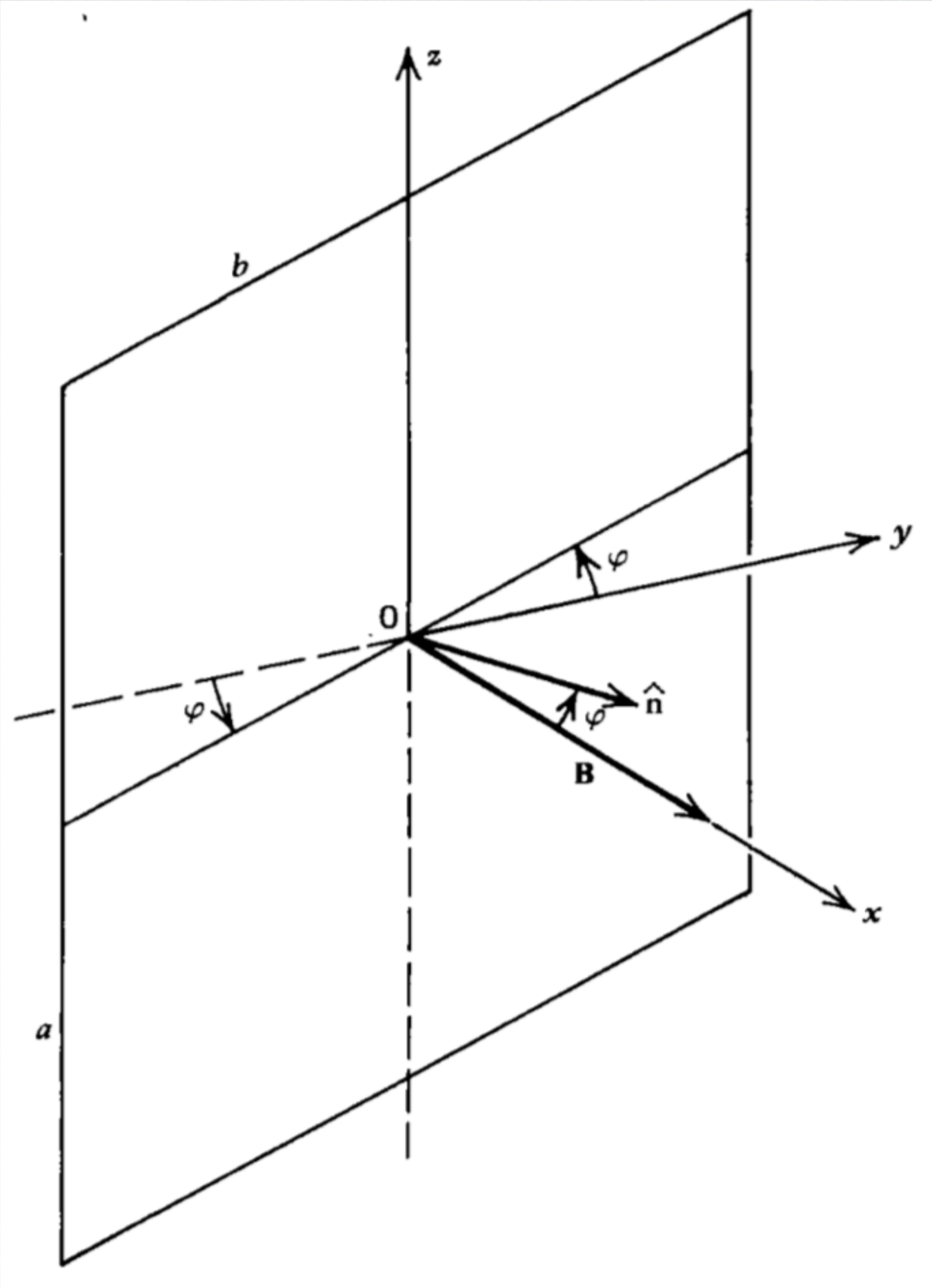
1.5 ENUNCIADO DE LA LEY DE FARADAY

Ley de Faraday

Sea C una curva cerrada y S es una superficie interior generada por la curva C. Si un campo magnético $\overrightarrow{B}(\vec{r}, t)$ es medido en $\vec{r}$ a cualquier tiempo t, entonces se cumple $\mathscr{E} = \int_C \overrightarrow{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{d\Phi}{dt}$



1.5 ENUNCIADO DE LA LEY DE FARADAY



- Example: Considere un circuito estacionario de lados a y b. El plane del circuito hace un ángulo φ con el plano yz de tal forma que la normal del plano está en el plano xy. El circuito está en presencia de un campo magnético $\overrightarrow{B}$ dirigido a lo largo del eje x dado por la expresión $\overrightarrow{B} = \hat{x}B_0\cos(\omega t + \alpha)$. Encuentre la FEM inducida

Solución:

$$\mathscr{E} = \int_C \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$d\overrightarrow{S} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} dudv$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{E} = \omega B_0 ab \cos\varphi \sin(\omega t + \alpha)$$

Entonces, el flujo magnético es

$$\int_S \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} B_0 \cos\varphi \cos(\omega t + \alpha) dudv = abB_0 \cos\varphi \cos(\omega t + \alpha)$$

1.5 ENUNCIADO DE LA LEY DE FARADAY

- Ejemplo: Considere un cilindro infinito que contiene un campo magnético dado de la siguiente manera $\vec{B} = \begin{cases} B_o \cos(\omega t + \alpha), & \rho \leq a \\ 0, & \rho > a \end{cases}$

  Determine el campo eléctrico total.

Solución:

Usando ley de Faraday $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Tomando coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$$

Tomando la simetría azimutal e invariancia de traslación en z

$$\vec{E} = \vec{E}(\rho) = E_\rho(\rho)\hat{\rho} + E_\varphi(\rho)\hat{\varphi}$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(\rho E_\varphi\right)}{\partial \rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi}\right] = \omega B_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

$$E_\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega B_0 \rho \sin(\omega t + \alpha), & \rho \leq a \\ \dfrac{f(t)}{\rho}, & \rho > a \end{cases}$$

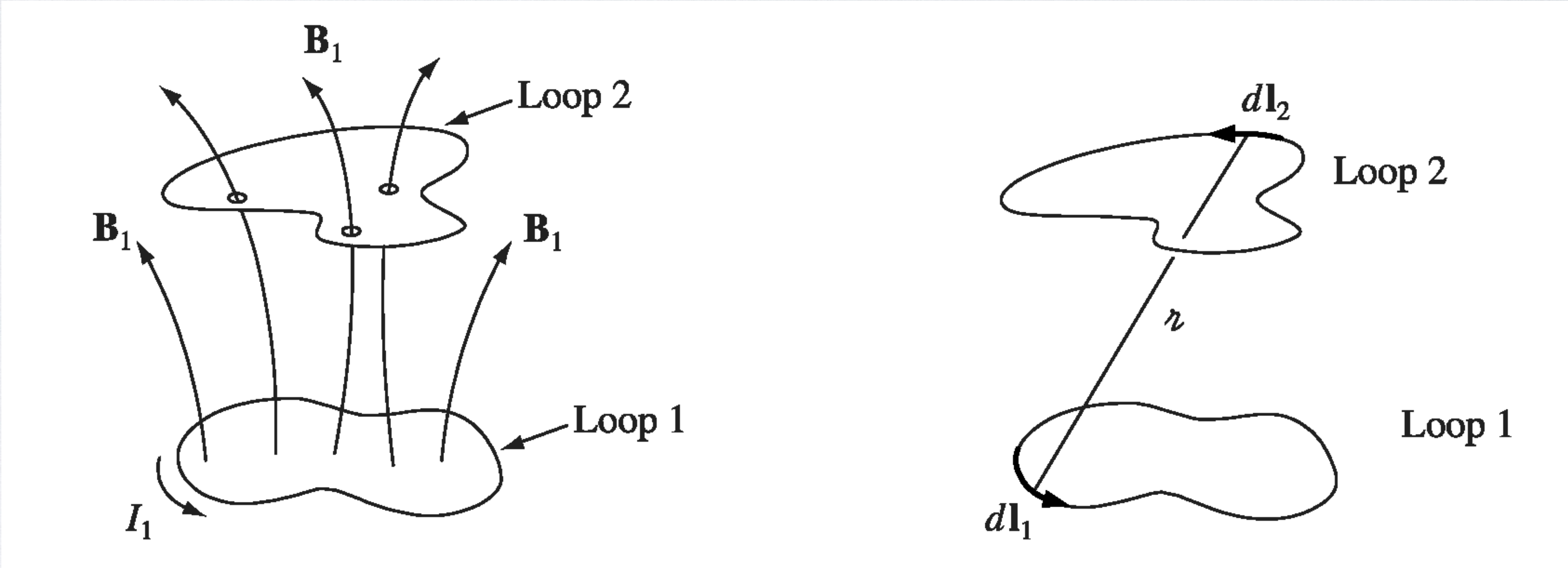
Usando condiciones de frontera

$$\left.\frac{f(t)}{\rho}\right|_{\rho=a} = \left.\frac{1}{2}\omega B_0 \rho \sin(\omega t + \alpha)\right|_{\rho=a}$$

$$E_\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega B_0 \rho \sin(\omega t + \alpha), & \rho \leq a \\ \frac{1}{2}\omega B_0 \frac{a^2}{\rho} \sin(\omega t + \alpha), & \rho > a \end{cases}$$

1.6 INDUCTANCIA MUTUA

- Supongamos que tenemos dos circuitos C_j y C_k con corrientes I_j y I_k, respectivamente
  - La corriente estacionaria I_j produce un campo magnético $\overrightarrow{B}_j$
    - Las líneas de campo de $\overrightarrow{B}_j$ pasan a través del circuito k
    - Por la ley de Biot-Savart podemos calcular el campo magnético y el flujo a través del circuito k (usando el potencial vectorial)



$$\overrightarrow{B}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} I_j \oint \frac{d\vec{l}_j \times (\vec{r} - \vec{l})}{|\vec{r} - \vec{l}|^3}$$

$$\Phi_{j\to k} = \oint_{C_k} \overrightarrow{A}_j(\vec{r}_k) \cdot d\vec{l}_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_k} \oint_{C_j} \frac{I_j d\vec{l}_k \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}$$

1.6 INDUCTANCIA MUTUA

- Podemos definir una propiedad geométrica del sistema conocida com inductancia
  - La inductancia está relacionada con la capacidad de producir una FEM por medio de un campo magnético
  - El cambio en la corriente de un circuito afecta al segundo circuito y viceversa
  - La inductancia mutua puede ser positiva o negativa dependiendto de la orientación de los circuitos

$$\Phi_{j\to k} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_k}\oint_{C_j}\frac{I_j d\vec{l}_k \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \Rightarrow \Phi_{j\to k} = I_j M_{kj}$$

con

$$M_{kj} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_k}\oint_{C_j}\frac{d\vec{l}_k \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} = M_{jk}$$

Inductancia mutua de los circuitos j y k

$$\Downarrow$$

$$\mathscr{E}_{j\to k} = -\frac{d\Phi_{j\to k}}{dt} = -M_{kj}\frac{dI_j}{dt}$$

Si hay más de un circuito produciendo un campo magnético total $\vec{B}$, entonces

$$\Phi_k = \sum_j \Phi_{j\to k} = \sum_j I_k M_{kj}$$

$$\Downarrow$$

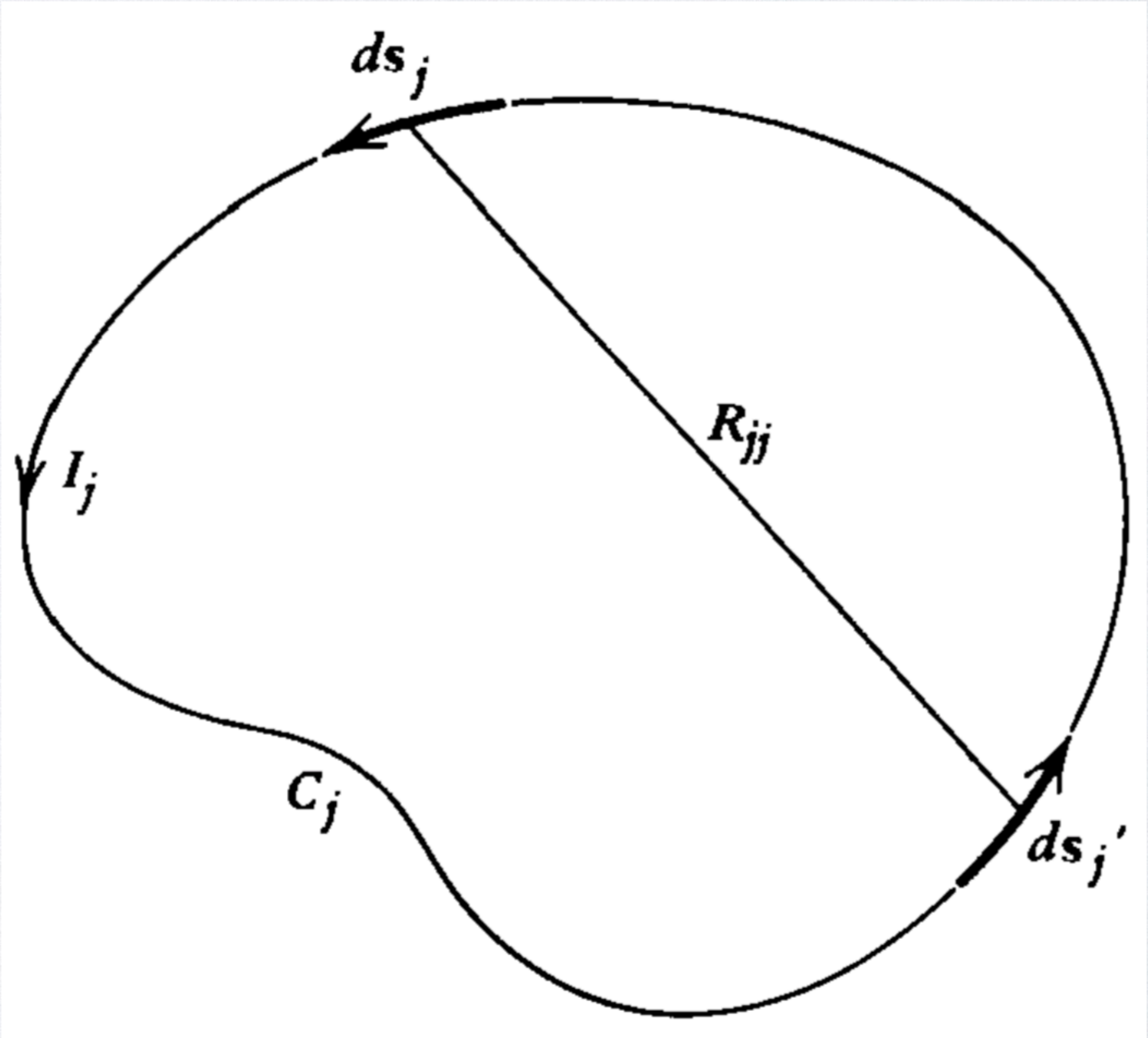
$$\mathscr{E}_{k,mutua} = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -\sum_j M_{kj}\frac{dI_j}{dt}$$

1.7 AUTO-INDUCTANCIA

- Es posible que un circuito produzca un flujo que pasa por él mismo.
  - El coeficiente de proporcionalidad que surge es llamado auto-inductancia o, simplemente, inductancia
    $\Phi_{j\to j} = L_{jj} I_l$
    con

$$L_{jj} = L_j = L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_j} \oint_{C_j} \frac{d\vec{l}_j \cdot d\vec{l}'_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}'_j|}$$

- Como la corriente I_j varía en el tiempo, entonces, hay una FEM inducida en el circuito pro su propio cambio de flujo
  - Esto es llamado FEM de auto-inductancia $\mathscr{E} = -L\frac{dI_j}{dt}$



1.8 ENERGÍA DE UN SISTEMA DE CARGAS LIBRES

- Consideremos un sistemas de corrientes sobre un grupo de circuitos
  - La corriente sobre cada circuito C_j es I_j
  - La densidad de corriente de cargas móviles es $\vec{j}(\vec{r}) = \sum q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$
  - En un determinado tiempo δt el un agente externo genera una variación en la posición $\delta\vec{r} = \vec{v}\delta t$
  - El trabajo sobre los cargas q_i es

$$\delta W_{ext} = -\sum_i q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i \delta t = -\int_V \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}\delta t dV = -I\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}\delta t$$

Tomando la ley de Faraday: $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\delta W_{ext,j} = -I_j \int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) \cdot d\vec{S}\delta t$$

$$= I_j \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}\delta t = I_j \frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\delta t$$

Identificando con la energía

$$\delta W_{ext} = \delta U_m = \sum_j I_j \delta\Phi_j \quad \text{con} \quad \delta\Phi_k = \sum_j M_{kj}\delta I_k$$

$$\delta U_m = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M_{kj} I_j \delta I_k$$

1.8 ENERGÍA DE UN SISTEMA DE CARGAS LIBRES

- Ahora podemos asumir que en un instante t, cada corriente tiene una misma fracción λ y se incrementa quasi estáticamente de cero hasta su valor final I

$$I(\lambda) = \lambda I, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$U_m = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} M_{kj} I_j I_k \int_0^1 \lambda d\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} M_{kj} I_j I_k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2} \sum_j I_j \Phi_j}$$

Usando, de nuevo, que $\Phi = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$ y $I = \int_S \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U_B = \frac{1}{2} \int \vec{j} \cdot \vec{A} dV \;\Rightarrow\; U_B = \frac{\mu}{8\pi} \int_V \int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' dV}$$

Ahora usando ley de Ampère: $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}$

$$\Downarrow$$

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \left(\nabla \times \vec{B} \right) \cdot \vec{A} dV$$

$$\Downarrow \quad \vec{A} \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right) = \vec{B} \cdot \left(\nabla \times \vec{A} \right) - \nabla \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B} \right)$$

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV - \frac{1}{2\mu_0} \int_S \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{S} \;\Rightarrow\; \boxed{U_B = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} B^2 dV}$$

Energía magnética

2.1 ECUACIONES DE ELECTROMAGNETISMO

- Hasta este punto hemos encontrado las ecuaciones que rigen la electrostática y magnetostática
  - Con las restricciones
    - Densidades de carga libre independientes del tiempo $\rho_f = \rho_f(\vec{r})$
    - Densidades de corriente libre estacionarias $\nabla \cdot \vec{j}_f = 0$

Ecuaciones de electromagnetismo		
Ley	Forma diferencial	Forma integral
Gauss	$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \rho_f$	$\int_S \overrightarrow{D} \cdot d\overrightarrow{S} = Q_f$
Gauss magnética	$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$	$\int \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{S} = 0$
Ley de Ampére	$\nabla \times \overrightarrow{H} = \vec{j}_f$	$\oint_C \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} = I_f$
Ley de Faraday	$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B}$	$\int_C \overrightarrow{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\Phi$

2.1 ECUACIONES DE ELECTROMAGNETISMO

- Algo interesante resulta cuando se consideran densidades de carga y de corriente que están variando como función del tiempo
  - Nuevos fenómenos surgen con estas suposiciones
  - Las ecuaciones del electromagnetismo quedan invariantes
  - Ahora, es necesario considerar la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{j}_f(\vec{r},t) + \frac{\partial \rho_f(\vec{r},t)}{\partial t} = 0$$

Esto nos lleva a un comportamiento muy interesante.

Tomemos la divergencia de la ley de Ampére

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \overrightarrow{H} \right) = \nabla \cdot \vec{j}_f = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

¡¡¡¿inconsistencia?!!!

2.2 ECUACIÓN DE AMPÈRE-MAXWELL

- Para arreglar esa situación, Maxwell consideró la validez de la ecuación de continuidad considerando que era necesario agregar un término

  - Tomando $\nabla \times \overrightarrow{H} = \vec{j}_f + \vec{j}_d$ y

    $$\nabla \cdot \vec{j}_f(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho_f(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$$

- Consideremos de nuevo la divergencia de la ley de Ampère

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \overrightarrow{H} \right) = \nabla \cdot \vec{j}_f + \nabla \cdot \vec{j}_d = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_d = 0$$

Ahora considerando válida la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \rho_f$$

$$-\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_d = -\frac{\partial \left(\nabla \cdot \overrightarrow{D} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_d = 0$$

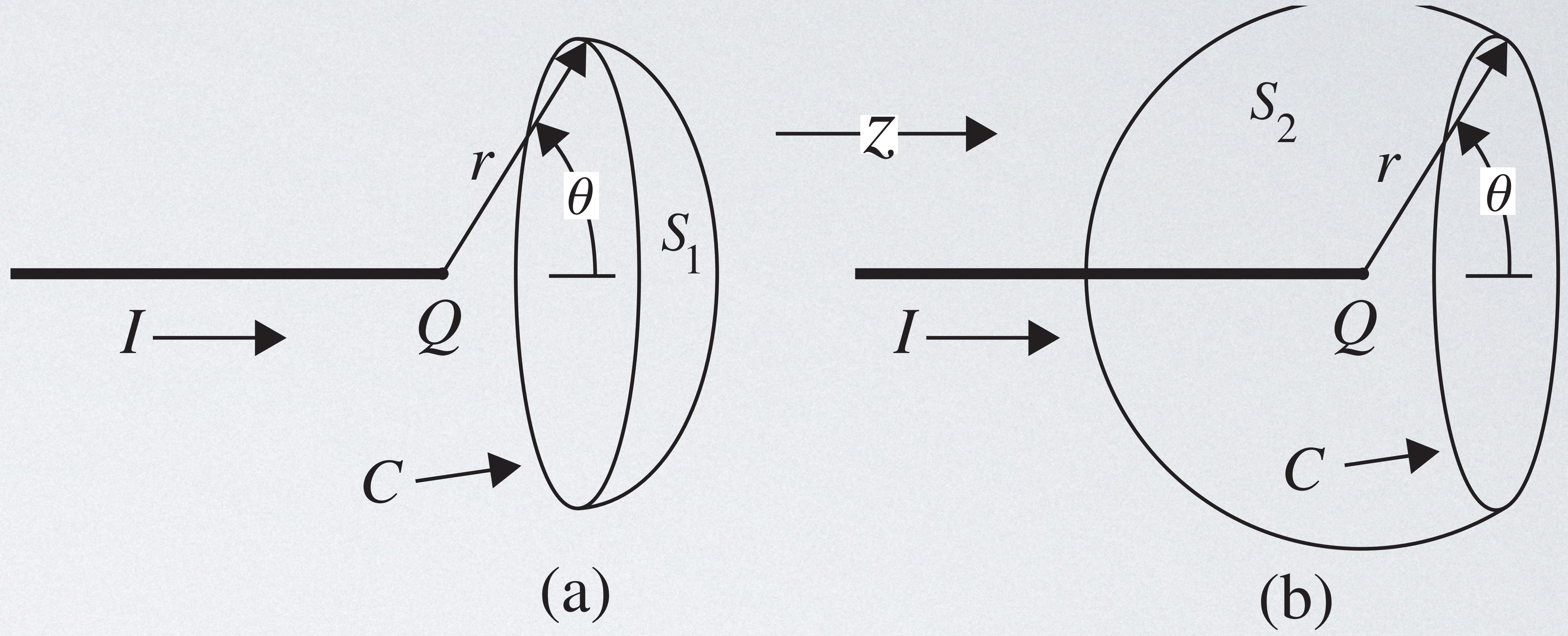
$$\nabla \cdot \left(-\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} + \vec{j}_d \right) = 0$$

$$\boxed{\vec{j}_d = \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} + \begin{cases} \nabla \times \overrightarrow{G} \\ \overrightarrow{C}, \ \text{vector constante} \end{cases}}$$

Corriente de desplazamiento

2.2 ECUACIÓN DE AMPÈRE-MAXWELL

- Consideremos un circuito por el que fluye una corriente y hay un capacitor
  - Tomando un circuito amperiano dentro capacitor
    - El circuito es la frontera de una superficie
      - Entonces puede tomarse de dos formas la superficie: (a) una que está entre el capacitor; (b) u otra por la que pasa la corriente
  - Sabemos que la corriente fluye, en el caso (b), por Ampère, podemos encontrar explícitamente el valor de la corriente, en el caso (a) no podríamos hacerlo según las ley de Ampère sin correcciones, pero debe seguir siendo válida la ecuación de continuidad
  - La corriente de desplazamiento nos da la corrección para que siga siendo válida las ecuaciones de continuidad



Definimos la corriente de desplazamiento

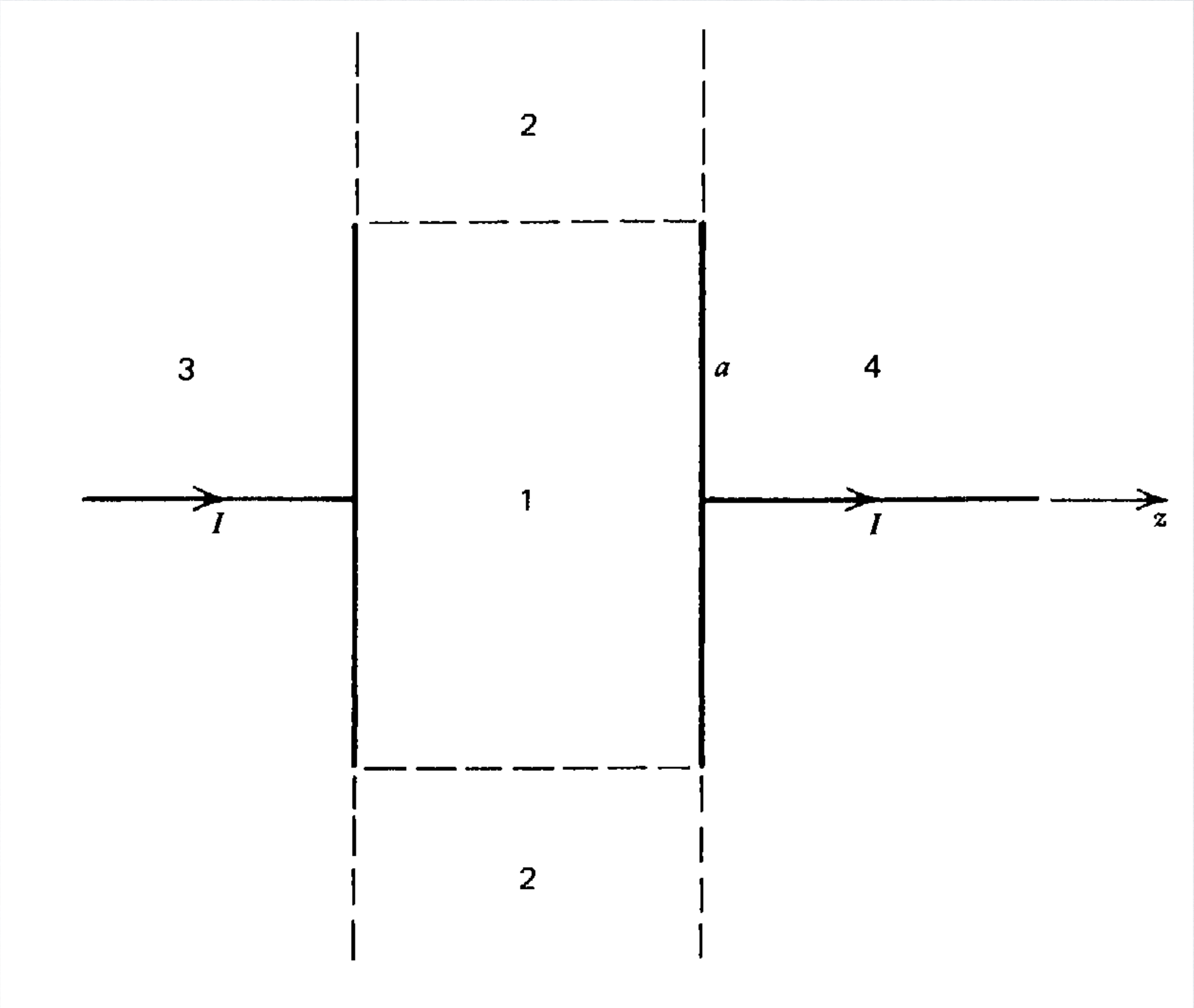
$$\boxed{\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Ecuación de Ampère-Maxwell

2.2 ECUACIÓN DE AMPÈRE-MAXWELL

- Ejemplo: Consideremos un capacitor de placas paralelas circulares, de radio $R = a$, que se está cargando. Encuentre el campo magnético en todo el espacio.



Solución:

Consideremos que el campo entre las placas del capacitor es constante. Además, consideremos que todo está en el vacío.

$$\overrightarrow{D} = \epsilon_0 \overrightarrow{E} = \frac{\sigma}{2}\hat{z} = \frac{q}{\pi a^2}\hat{z}$$

$$\vec{j}_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{I}{\pi a^2}\hat{z}$$

Por la simetría axial, tenemos

$$\overrightarrow{H} = H_\varphi(\rho)\hat{\varphi}$$

Usando la ley de Ampère tenemos que $H_\varphi(\rho) = \dfrac{I_f + I_d}{2\pi\rho}$

$$H_\varphi(\rho) = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi\rho}, & \text{zona 3 y 4} \\ \dfrac{I\rho}{2\pi a^2}, & \text{zona 1} \\ \dfrac{I}{2\pi\rho}, & \text{zona 2, } \rho > a \end{cases}$$

2.3 ECUACIONES DE MAXWELL GENERALIZADAS

- Las ecuaciones de Maxwell que rigen la electrodinámica, en forma diferencial, son

Gauss	$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \rho_f$
Gauss magnética	$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$
Ley de Ampére-Maxwell	$\nabla \times \overrightarrow{H} = \vec{j}_f + \dfrac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$
Ley de Faraday	$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B}$

2.3 ECUACIONES DE MAXWELL GENERALIZADAS

- Además de la ecuaciones de Maxwell debemos tener en cuenta las siguientes relaciones, aunque que ya estén incluidas de forma implícita

$$\overrightarrow{D} = \epsilon_0 \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$$ Vector de desplazamiento eléctrico

$$\overrightarrow{H} = \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}$$ Campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$ Ecuación de continuidad

2.4 CONDICIONES DE FRONTERA PARA LAS ECUACIONES DE MAXWELL GENERALIZADAS

- Las ecuaciones de Maxwell definen las siguientes condiciones de frontera

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \sigma_f$$

Componentes del vector desplazamiento eléctrico paralelas a la normal a superficie tienen una discontinuidad la densidad superficial

$$\hat{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$$

Componentes del campo eléctrico perpendiculares a la normal a la superficie son continuas

$$\hat{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

Componentes del campo de inducción magnética paralelas a la normal a la superficie son continuas

$$\hat{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{K}_f$$

Componentes del campo magnético perpendiculares a la normal a superficie tienen una discontinuidad igual a la densidad de corriente superficial

2.5 POTENCIALES ELECTROMAGNÉTICOS

- Los potenciales electromagnéticos son fundamentales en la electrodinámica
  - Debido a que se la ley de Gauss magnética, $\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$, se vale en todo momento, se sigue cumpliendo que $\overrightarrow{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \overrightarrow{A}(\vec{r}, t)$
  - Si tomamos la derivada parcial con respecto del tiempo a ambos lados y tomamos la ecuación de la ley de Faraday, tenemos

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \nabla \times \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \implies -\nabla \times \overrightarrow{E} = \nabla \times \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

$$\implies 0 = \nabla \times \left(\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right)$$

Esto implica que

$$\overrightarrow{E} + \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = -\nabla \phi(\vec{r}, t)$$

Si el potencial vectorial no depende del tiempo debemos recuperar el caso electrostático

Podemos definir sin ninguna duda

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\nabla \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}}$$

¡Esto nos dice que podemos encontrar los campos magnéticos y eléctricos usando únicamente los potenciales!

2.5 POTENCIALES ELECTROMAGNÉTICOS

- Lo anterior nos lleva a concluir que bastan 4 funciones para definir todos los campos, tres del potencial vectorial $\overrightarrow{A}(\vec{r},t)$, y una del potencial escalar $\phi(\vec{r},t)$

  - Esto lo podemos ver reduciendo las cuatro ecuaciones de Maxwell a sólo dos 4 Ecs. $\rightarrow$ 2 Ecs

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell en el vacío

Tomando la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \overrightarrow{A}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Tomando la ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \left(\nabla \times \overrightarrow{A}\right) - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\boxed{\nabla^2 \overrightarrow{A} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}}$$

2.6 INVARIANCIA DE NORMA

- De la definición que hemos visto de los potenciales podemos ver que no están definidos de manera única
  - Al potencial vectorial podemos agregarle el gradiente de una función y seguiremos obteniendo el mismo campo magnético
    - Si $\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$
      - Tomando

$$\boxed{\overrightarrow{A}' = \overrightarrow{A} + \nabla \Lambda}$$

$\implies$

$$\nabla \times \overrightarrow{A}' = \nabla \times (\overrightarrow{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$$

Esto implica inmediatamente que

$$\boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}}$$

$\implies$

$$\overrightarrow{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \overrightarrow{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} = \overrightarrow{E}$$

2.6 INVARIANCIA DE NORMA

- La invariancia de norma nos dice que no importando la norma que utilicemos siempre vamos a obtener los mismos campos electromagnéticos
  - Podemos tomar ventaja de esto y resolver las ecuaciones para los potenciales de tal forma que se puedan simplificar
    - ¡Por la invariancia, podemos encontrar una solución factible y seguiremos obteniendo los mismo campos!
    - Esto es una ventaja matemática que debemos aprovechar

Las dos familias de normas más usadas son

- Norma de Coulomb

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} = 0$$

- Norma de Lorenz

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

2.6.1 NORMA DE COULOMB

- La norma de Coulomb se usa mayormente en problemas relacionados en física atómica, molecular y en materia condensada porque genera un potencial del tipo Coulombiano que amarra cargas opuestas en órbitas estables

  - Usando la norma de Coulomb $\nabla \cdot \overrightarrow{A} = 0$ las ecuaciones de para los potenciales se reducen

$$\nabla^2 \phi_C = -\rho/\epsilon_0$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{A}_C - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \nabla \left(\frac{\partial \phi_C}{\partial t} \right)$$

2.6.2 NORMA DE LORENZ

- La norma de Lorenz se usa mayormente en problemas relacionados en radiación

- Usando la norma de Lorenz

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

las ecuaciones de para los potenciales se reducen

$$\nabla^2 \phi_L - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{A}_L - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}$$

3.1 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

- Consideremos la razón de cambio en que los campos eléctrico $\overrightarrow{E}(\vec{r},t)$ y magnéticos $\overrightarrow{B}(\vec{r},t)$ hacen trabajo mecánico sobre una colección de partículas con densidad de carga $\rho(\vec{r},t)$ y densidad de corriente $\vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\overrightarrow{v}(\vec{r},t)$ dentro de un volumen V

  - Debemos recordar que la fuerza magnética no hace trabajo

  - Todo el trabajo es realizado por la fuerza eléctrica

$$\frac{dW_{mec}}{dt} = \int_C \overrightarrow{F}_L \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_V \left(\rho\overrightarrow{E} + \vec{j}\times\overrightarrow{B}\right)\cdot\overrightarrow{v}\,dV = \int_V \vec{j}\cdot\overrightarrow{E}\,dV$$

Tomando la ecuación de Ampère-Maxwell

$$\frac{dW_{mec}}{dt} = \int_V \left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\overrightarrow{B} - \epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{E}\,dV$$

usando la relación

$$\nabla\cdot(\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{B}\cdot(\nabla\times\overrightarrow{E}) - \overrightarrow{E}\cdot(\nabla\times\overrightarrow{B}) = -\overrightarrow{B}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} - \overrightarrow{E}\cdot(\nabla\times\overrightarrow{B})$$

$$\boxed{\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\epsilon_0}{2}\left(\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{E} + \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}\right)\right]dV = -\int_V \vec{j}\cdot\overrightarrow{E}\,dV - \int_V \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{B})}$$

3.2 EL VECTOR DE POYNTING

- De la expresión anterior podemos identificar la energía electromagnética total

$$U_{EM} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_V \left[\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{E} + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} \right] dV$$

  - Definimos el vector de Poynting

$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}$$

- Entonces,

$$\frac{dU_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}(U_{mec} + U_{EM}) = -\int_V \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}) dV = -\int_A \overrightarrow{S} \cdot d\overrightarrow{A}$$

Podemos interpretar el vector de Poynting como la densidad de corriente de energía

$\Downarrow$

La energía total en un volumen cambia sólo si la energía electromagnética fluye hacia dentro o hacia fuera del volumen a través de su superficie A

$\Downarrow$

La normal apunta hacia afuera, la energía fluye hacia afuera (dentro) de V cuando $\overrightarrow{S}$ es paralelo (antiparalelo) a $\hat{n}$

3.2 EL VECTOR DE POYNTING

- Podemos definir la densidad de energía electromagnética contenida en el volumen V

  $$u_{EM} = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\vec{E}\cdot\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\vec{B}\cdot\vec{B}\right)$$

  - Como la relación obtenida es válida para cualquier volumen arbitrario, se cumple la relación

    $$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

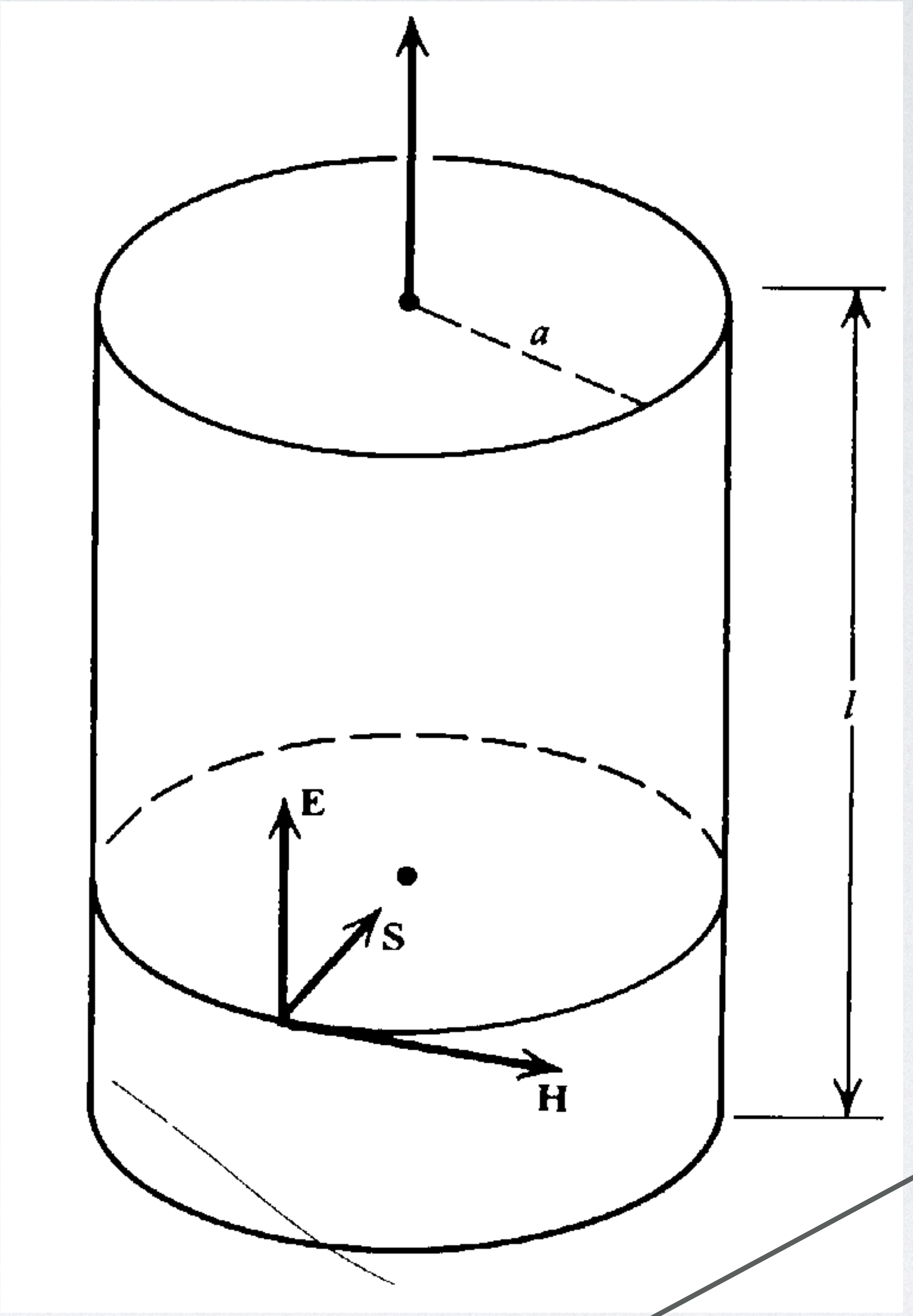
    - Esto nos dice que el término $-\vec{j}\cdot\vec{E}$ es un sumidero (fuente) que transfiere energía de (hacia) el campo electromagnético hacia (de) las partículas cargadas que interactúan con el campo

    - La energía mecánica de la partículas aumenta (disminuye) de acuerdo al sentido

El vector de Poynting apunta en la dirección del flujo instantáneo de energía

3.2 EL VECTOR DE POYNTING

- Ejemplo: Consideremos un cilindro de radio a con una longitud l. Suponemos una corriente constante I a lo largo del eje del cilindro.



Solución:

Consideremos que se vale la ley de Ohm, entonces

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{\sigma} j_f \hat{z}$$

Campo magnético fuera del cilindro es:

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 j_f a^2}{2\rho}\hat{\varphi}$$

$$\overrightarrow{S} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B} = \left(\frac{1}{\sigma} j_f \hat{z}\right) \times \left(\frac{\mu_0 j_f a^2}{2\rho}\hat{\varphi}\right) = -\frac{j_f^2 a^2}{2\sigma\rho}\hat{\rho}$$

Justo sobre la superficie se cumple $\overrightarrow{S} = -\dfrac{j_f^2 a}{2\sigma}\hat{\rho}$

La energía fluye dentro del sistema

El cambio de energía en el volumen es

$$-\int_A \overrightarrow{S} \cdot d\overrightarrow{A} = \frac{j_f^2 \pi a^2 l}{\sigma} = \frac{I^2 l}{\pi a^2 \sigma} = I^2 R_{resis}$$

El flujo de energía es igual a la energía disipada por calentamiento de Joule. Esto es cierto para mantener una densidad de corriente estacionaria

3.3 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

- Consideremos la fuerza electromagnética sobre una densidad de carga y una corriente (fuerza de Lorentz)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} = \int_V \left(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B}\right) dV$$

  - Usando la ley de Gauss y la ecuación de Ampère- Maxwell, podemos sustituir

$$\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = \epsilon_0\vec{E}\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) + \vec{B}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right)$$

    - Ahora escribimos

$$\vec{B}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) + \vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

    - Ahora añadiendo un término cero

$$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right) = 0$$

- Entonces, $\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} = \epsilon_0\vec{E}\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right) - \vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\times\left(\nabla\times\vec{B}\right) - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$

- Entonces el cambio del momento mecánico puede escribirse $\frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V \epsilon_0\vec{E}\times\vec{B}\,dV = \epsilon_0\int_V\Big[\vec{E}(\nabla\cdot\vec{E}) - \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) + \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\vec{B}(\nabla\cdot\vec{B}) - \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})\Big]dV$

- Esto nos lleva a definir un momento electromagnético

$$\boxed{\vec{g} = \epsilon_0\mu_0\vec{S} = \epsilon_0\vec{E}\times\vec{B}}$$

3.3 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

- Entonces, el momento lineal electromagnético es

$$\boxed{\vec{P}_{EM} = \int_V \vec{g}\, dV = \epsilon_0 \int_V \vec{E} \times \vec{B}\, dV}$$

- Ahora revisemos los otros términos de la integral
  - Tomando las componentes correspondientes al campo eléctrico

$$\left[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})\right]_i = E_i \partial_j E_j - \epsilon_{ijk} E_j \epsilon_{klm} \partial_l E_m$$

$$= E_i \partial_j E_j - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} E_j \partial_l E_m = E_i \partial_j E_j - \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) E_j \partial_l E_m$$

$$= E_i \partial_j E_j - \left(E_j \partial_i E_j - E_j \partial_j E_i\right)$$

$$= E_i \partial_j E_j + E_j \partial_j E_i - E_j \partial_i E_j$$

$$= \partial_j \left(E_i E_j\right) - \frac{1}{2}\partial_i \left(E_j E_j\right)$$

$$= \partial_j \left(E_i E_j - \frac{1}{2} E_j E_j \delta ij\right)$$

Por analogía, los términos para el campo magnéticos se escriben

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}\left[\vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B})\right]_i = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}\partial_j \left(B_i B_j - \frac{1}{2} B_j B_j \delta ij\right)$$

Definimos el Tensor de esfuerzos de Maxwell

$$\boxed{T_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i E_j + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}\left(E_j E_j + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} B_j B_j\right)\delta_{ij}\right]}$$

$$\boxed{\mathbf{T} = \epsilon_0 \left[\vec{E} \otimes \vec{E} + c^2 \vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2}\left(\vec{E} \cdot \vec{E} + c^2 \vec{B} \cdot \vec{B}\right)\mathbf{I}\right]}$$

3.3 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

- El Tensor de Esfuerzos de Maxwell es simétrico

- Finalmente, tenemos que la expresión para la fuerza total sobre un volumen se puede escribir
$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{mec} + \vec{P}_{EM}\right)_i = \int_V \partial_j T_{ij} dV$$

  - Definimos la divergencia de un tensor como $div(\mathbf{T}) = \partial_i T_{ij} \hat{e}_j$

- Entonces, podemos usar el teorema de la divergencia y escribir, finalmente $\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{mec} + \vec{P}_{EM}\right) = \int_S \mathbf{T}\hat{n} dS$

- Finalmente podemos ver que también se cumple una ley de conservación con el momento
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + div\,(-\mathbf{T}) = -\vec{f}_{mec}$$

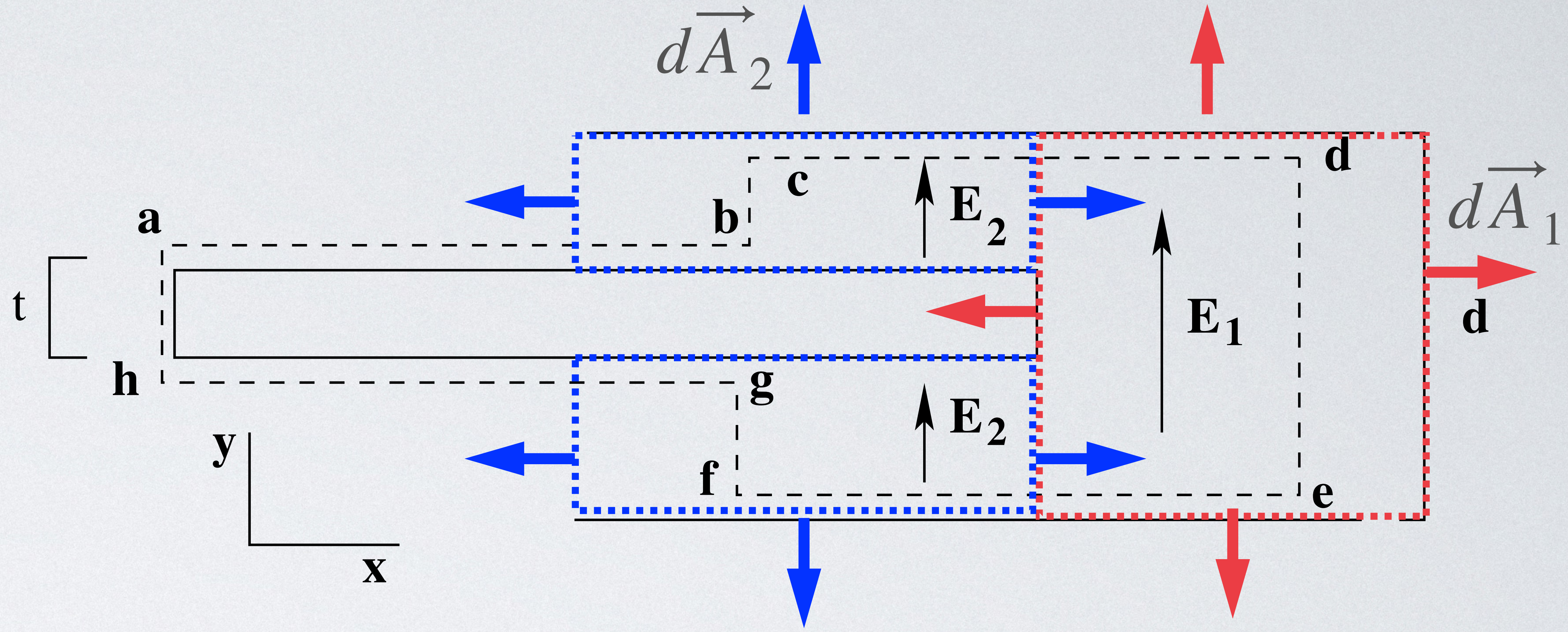
Esto representa la conservación de momento lineal. Nos da el flujo por unidad de área del momento a través de una superficie S que encierra un volumen V.

Es la fuerza por unidad de área transmitida a través de la superficie S que actúa sobre el sistema combinado de partículas y campos dentro de V

Las componentes T_{ij} es la razón a la cual la componente j-ésima del momento fluje a través del elemento de área $\hat{n}_i dS$

3.3 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

- Ejemplo: Encontrar la fuerza que siente una hoja conductora dentro de un capacitor de placas paralelas.



Solución:

Supongamos que la placa conductora tiene un alto t

El campo eléctrico es $\vec{E} = \hat{z}\begin{cases} \frac{V}{d}, & \text{zona 1} \\ \frac{V}{d-t} & \text{zona 2} \end{cases}$

No hay campo magnético $\vec{S} = \vec{0}$

$$\implies \vec{F}_{mec} = \int_S \mathbf{T}\cdot\hat{n}dS$$

El tensor se esfuerzos se escribe

$$T_{ij} = \epsilon_0\left(E_iE_j - |\vec{E}|^2\delta ij\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_z^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}E_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}E_z^2 \end{pmatrix}$$

Integrando sobre las superficies definidas

$$\vec{F}_{mec} = \frac{\epsilon_0 V^2 wt}{2d(d-t)}\hat{x}$$

3.4 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

- Debemos notar que por las definiciones los campos electromagnéticos también tienen momento angular
  - En el caso de partículas con momento lineal $\overrightarrow{p}$ el momento angular es $\overrightarrow{L} = \vec{r} \times \overrightarrow{p}$
- Entonces la densidad de momento angular de un campo electromagnético se puede definir como: $\vec{r} \times \overrightarrow{g}$

- Esto lo podemos ver usando la definición de torca mecánica dada por
$$\vec{\tau}_{mec} = \frac{d\overrightarrow{L}_{mec}}{dt} = \int_V \vec{r} \times \vec{f}_{mec} dV = \int_V \vec{r} \times \left(\rho \overrightarrow{E} + \vec{j} \times \overrightarrow{B}\right) dV$$
$$\Longrightarrow \vec{\tau}_{mec} = \int_V \vec{r} \times \left(-\frac{\partial \overrightarrow{g}}{\partial t} + div\mathbf{T}\right) dV$$
  - Suponiendo que el vector posición no cambia como función del tiempo
    - Esto se puede considerar así ya que estamos midiendo las contribuciones que tendrían cada volumen infinitesimal
  - Finalmente, se puede demostrar que se cumple
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r} \times \overrightarrow{g}\right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{T} \times \vec{r}\right) = -\vec{r} \times \vec{f}_{mec}$$

3.4 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

- Definimos la densidad de corriente del momento angular como $\mathbf{M} = \mathbf{T} \times \vec{r}$

- Entonces, la torca mecánica a la que es sometida un volumen arbitrario V es
$$\vec{\tau}_{mec} = \frac{d\overrightarrow{L}_{mec}}{dt} = -\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r} \times \overrightarrow{g}\right) + div\mathbf{M}\right] dV$$

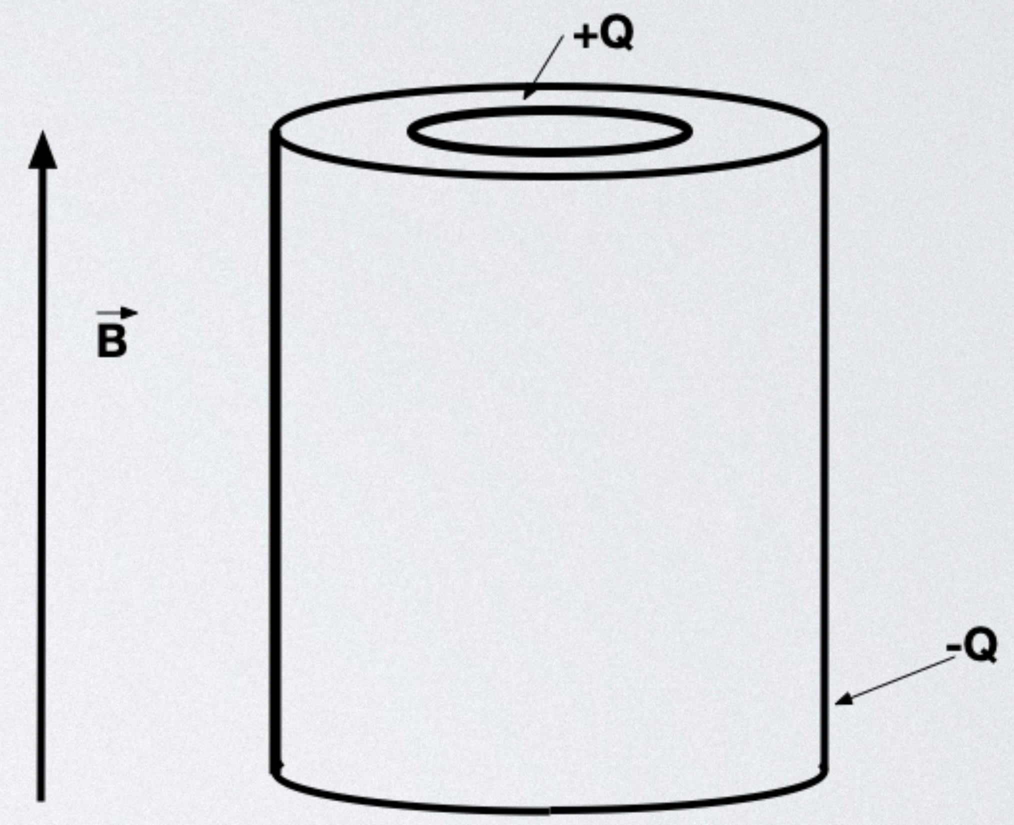
- El momento angular electromagnético es
$$\overrightarrow{L}_{EM} = \int_V \vec{r} \times \overrightarrow{g} dV$$

- Esto nos lleva a la expresión de conservación de momento angular
$$\frac{d\overrightarrow{L}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{L}_{mec} + \overrightarrow{L}_{EM}\right) = -\int_V div\mathbf{M}dV = -\int_S \mathbf{M}\hat{n}dS$$

3.4 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

- Ejemplo: Considere un capacitor cilíndrico de longitud L con carga $+Q$ en su radio interior, $R_i = a$, y una carga $-Q$ en su radio exterior, $R_o = b$. El capacitor está lleno con un dieléctrico con constante $\kappa = 1$. El capacitor está localizado en un campo magnético $\overrightarrow{B}$. De alguna forma el capacitor falla y se genera una corriente entre las placas del capacitor. Debido al campo magnético, el capacitor sufre una torca y comienza a rotar. Después que el capacitor se descarga, ¿cuál es la magnitud y dirección de la velocidad angular?. El momento de inercia del capacitor es I_c.

Solución:



El momento angular electromagnético del sistema es

$$\overrightarrow{L}_{EM} = \int_V \vec{r} \times \overrightarrow{g} dV$$

El campo eléctrico es

$$\overrightarrow{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\rho}\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{L}_{EM} = -\frac{\lambda B}{2}\left(b^2 - a^2\right)\hat{z}$$

Cuando se descarga $\overrightarrow{E} = 0$

Por conservación del momento angular

$$\Rightarrow \overrightarrow{\omega} = \frac{\overrightarrow{L}}{I} = -\frac{\lambda B}{2I}\left(b^2 - a^2\right)\hat{z}$$

3.5 LEYES DE CONSERVACIÓN EN MATERIA

- Vamos a considerara materiales lineales simples, tanto para dieléctricos com magnéticos

- Al igual que en el vacío se pueden encontrar expresiones para la conservación de energía, momento lineal y momento angular

Vector de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

Conservación de la energía

$$\frac{d}{dt}\left(U_{mec} + U_{EM}\right) = -\int_A \vec{A} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Conservación de momento lineal

$$\int_V \vec{f}_M = \int_V div\mathbb{T} - \int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D} \times \vec{B}\right) dV$$

con $\mathbb{T}_{ij} = D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}\right)$

$$\vec{g}_M = \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon\mu\vec{S}$$