RADIACIÓN

CONTENIDO

1.1 POTENCIALES ELECTROMAGNÉTICOS

- Ahora sabemos que, en general, los campos eléctrico y magnético quedan definidos por los potenciales electromagnéticos

$$\overrightarrow{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$$

- Consideremos las ecuaciones de Maxwell en el vacío junto con las definiciones de los campos

Tomando la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \overrightarrow{A}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Tomando la ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \left(\nabla \times \overrightarrow{A} \right) - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j}$$

$$\boxed{\nabla^2 \overrightarrow{A} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}}$$

1.2 INVARIANCIA DE NORMA

- De la definición que hemos visto de los potenciales podemos ver que no están definidos de manera única
  - Al potencial vectorial podemos agregarle el gradiente de una función y seguiremos obteniendo el mismo campo magnético
    - Si $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
      - Tomando

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda}$$

$\Longrightarrow$

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \Lambda) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Esto implica inmediatamente que

$$\boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}}$$

$\Longrightarrow$

$$\vec{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

1.2 INVARIANCIA DE NORMA

- La invariancia de norma nos dice que no importando la norma que utilicemos siempre vamos a obtener los mismos campos electromagnéticos
  - Podemos tomar ventaja de esto y resolver las ecuaciones para los potenciales de tal forma que se puedan simplificar
    - ¡Por la invariancia, podemos encontrar una solución factible y seguiremos obteniendo los mismo campos!
    - Esto es una ventaja matemática que debemos aprovechar

Las dos familias de normas más usadas son

- Norma de Coulomb

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} = 0$$

- Norma de Lorenz

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

1.2.1 NORMA DE COULOMB

- La norma de Coulomb se usa mayormente en problemas relacionados en física atómica, molecular y en materia condensada porque genera un potencial del tipo Coulombiano que amarra cargas opuestas en órbitas estables

- Usando la norma de Coulomb $\nabla \cdot \overrightarrow{A} = 0$ las ecuaciones de para los potenciales se reducen

$$\nabla^2 \phi_C = -\rho/\epsilon_0$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{A}_C - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \nabla \left(\frac{\partial \phi_C}{\partial t} \right)$$

1.2.2 NORMA DE LORENZ

- La norma de Lorenz se usa mayormente en problemas relacionados en radiación

  - Usando la norma de Lorenz

    $$\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

    las ecuaciones de para los potenciales se reducen

$$\nabla^2 \phi_L - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = -\rho / \epsilon_0$$

$$\nabla^2 \overrightarrow{A}_L - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}$$

1.3 FUNCIÓN DE GREEN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

- La progación de ondas en queda definida por una ecuación de onda con la estructura
$$\triangle \Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\vec{r}, t)$$
- Para resolver la ecuación resulta útil encontrar la función de Green
  - Es una función fundamental, $G(\vec{r}\,', \vec{r}, t', t)$, que nos ayuda a resolver una ecuación
    - Si consideramos como operador el D'Alambertiano
$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$
    - Con condiciones de frontera mixta del tipo Dirichlet y Neumann

La solución general es

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{V'} f(\overrightarrow{r'}, t')G(\vec{r}\,', \vec{r}, t', t)dV'dt' + \frac{1}{c^2}\int_{V'}\left[\Psi\frac{\partial G}{\partial t'} - G\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]_{t'=t_1}^{t'=t_2} dV'$$

La función debe cumplir

$$\Box\, G(\vec{r}\,', \vec{r}, t', t) = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\delta(t - t)$$

1.3 FUNCIÓN DE GREEN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

- Consideremos el caso donde no hay superficies de frontera

- Supongamos que la dependencia temporal puede removerse introduciendo una transformada de Fourier con respecto a la frecuencia

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\vec{r}, \omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, \omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

  - Con transformada inversa

$$\psi(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\vec{r}, t)e^{i\omega t}dt$$

$$f(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}t)e^{i\omega t}dt$$

- Para este caso, la ecuación de onda se transforma

$$\left[\triangle + k^2\right]\Psi(\vec{r}, \omega) = -4\pi f(\vec{r}, \omega)$$

  - Con $k^2 = \omega^2/c^2$

  - La ecuación depende de k, en particular, si $k = 0$, se reduce a la ecuación de Poisson

- La función de Green para esta ecuación debe cumplir con

$$\left[\triangle + k^2\right]G_k(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

1.3 FUNCIÓN DE GREEN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

- Como no hay superficies de frontera
  - La función de Green dependerá solamente de $\overrightarrow{R} = \vec{r} - \vec{r}'$
    - Debe tener simetría esférica
      - Entonces depende realmente de $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$
    - El Laplaciano se puede escribir en coordenadas esféricas

$$\frac{1}{R}\frac{d^2}{dR^2}\left(RG_k\right) + k^2 G_k = -4\pi\delta(\overrightarrow{R})$$

Esta ecuación es homogénea excepto en $R = 0$

$$\frac{d^2}{dR^2}\left(RG_k\right) + k^2\left(RG_k\right) = 0$$

con solución

$$RG_k(R) = Ae^{ikR} + Be^{-ikR}$$

con A y B constantes

En el límite que $R \to 0$ la ecuación tiene sentido pero se reduce a la ecuación de Poisson

$$\lim_{kR\to 0} G_k(R) = \frac{1}{R}$$

(sabemos esto por electrostática)

$$G_k^{\pm}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R}$$

1.3 FUNCIÓN DE GREEN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

- Recordando que la función de Green debe cumplir con la ecuación
$$\left[\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] G(\vec{r}, t; , \vec{r}', t') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t)$$

  - Usando la representación integral de la función Delta de Dirac
$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t - t')\omega} d\omega$$

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) e^{-i\omega(t - t')} d\omega$$

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm i(kR)}}{R} e^{i\omega(t - t')} d\omega$$

Es función sólo de la distancia relativa R y del tiempo relativo $t - t'$ entre la fuente y el punto de observación

Como $k = \omega/c \implies G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t' - t \mp R/c)} d\omega$

$$\boxed{G(R, \tau) = \frac{1}{R}\delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right) = \frac{\delta\left[t' - \left(t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)\right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

1.3 FUNCIÓN DE GREEN PARA LA ECUACIÓN DE ONDA

- La función $G^{(+)}$ es llamada función retardada de Green porque exhibe un comportamiento causal asociada con una perturbación
  - Un fenómeno que observador que se encuentra en el punto $\vec{r}$ en el tiempo t es causado por una acción de una fuente alejada a una distancia R en un tiempo $t' = t - R/c$
    - La diferencia de tiempo R/c es el tiempo que tarda en propagarse una perturbación de un punto $\vec{r}'$ al punto $\vec{r}$

- De manera similar, la función $G^{(-)}$ es llamada función avanzada de Green porque exhibe un comportamiento causal asociada con una perturbación

$$\Downarrow$$

Las situaciones más comunes en física son descritas por la función de Green retardada

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{V'} \frac{\left[f(\vec{r}', t')\right]_{ret}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

2.1 POTENCIALES RETARDADOS Y CAMPOS

- El campo eléctrico $\overrightarrow{E}(\vec{r},t)$ y magnético $\overrightarrow{B}(\vec{r},t)$ son funciones retardadas de densidades de carga y densidades de corriente que dependen del tiempo

$$\overrightarrow{E}(\vec{r},t) = -\nabla\phi(\vec{r},t) - \frac{\partial\overrightarrow{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{B}(\vec{r},t) = \nabla\times\overrightarrow{A}(\vec{r},t)$$

- Si consideramos la norma de Lorenz que satisfacen

$$\nabla^2\phi_L - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi_L}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0$$

$$\nabla^2\overrightarrow{A}_L - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j}$$

Las soluciones retardadas para estas ecuaciones

$$\phi_L(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

$$\overrightarrow{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

2.1 POTENCIALES RETARDADOS Y CAMPOS

- Las expresiones explícitas de los campos electromagnéticos se siguen de la definición a partir de los potenciales, usando $\overrightarrow{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $t_{ret} = t - R/c$ y $f(\vec{r}', t_{ret}) = f_{ret}(\vec{r}')$

$$\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\int\frac{\rho_{ret}(\overrightarrow{r'})}{R}dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{V'}\frac{\vec{j}_{ret}(\vec{r}')}{R}dV'$$

$$\overrightarrow{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int_{V'}\frac{\vec{j}_{ret}(\vec{r}')}{R}$$

- Debemos darnos cuenta que

$$\nabla\left[\frac{\rho(\vec{r}', t_{ret})}{R}\right] = \rho_{ret}\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial\rho_{ret}}{\partial t_{ret}}\nabla t_{ret} = -\frac{\rho_{ret}\overrightarrow{R}}{R^3} - \frac{\overrightarrow{R}}{cR^2}\frac{\partial\rho_{ret}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}', t_{ret})}{R}\right] = -\vec{j}_{ret}\times\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\nabla\times\vec{j}_{ret} = \vec{j}_{ret}\times\frac{\overrightarrow{R}}{R^3} + \frac{1}{R}\nabla t_{ret}\times\frac{\partial\vec{j}_{ret}}{\partial t_{ret}}$$

Las expresiones de los campos

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\left[\frac{\rho_{ret}\overrightarrow{R}}{R^3} + \frac{\overrightarrow{R}}{cR^2}\frac{\partial\rho_{ret}}{\partial t} - \frac{1}{c^2R}\frac{\partial\vec{j}_{ret}}{\partial t}\right]dV' \\ \overrightarrow{B}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\left[\frac{\vec{j}_{ret}}{R^3} + \frac{1}{cR^2}\frac{\partial\vec{j}_{ret}}{\partial t_{ret}}\right]\times\overrightarrow{R}\,dV'\end{aligned}}$$

2.1.1 POTENCIALES DE LIÉNARD-WIECHERT

- Consideremos los potenciales retardados

$$\phi_L(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

$$\overrightarrow{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

- Consideremos una partícula cargada con carga q que se mueve con una velocidad $\vec{v}(t)$

- La densidad de carga y la densidad de corriente de la partícula se puede escribir

$$\rho(\vec{r},t) = q\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = q\vec{v}(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

  - Además, podemos ver que $\overrightarrow{R}(t) = \vec{r}-\vec{r}_0(t) = R(t)\hat{R}(t)$

Usando la construcción hecha para definir los potenciales, podemos darnos cuenta que

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\int_{t'} \frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\delta(t'-t+|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)dt'dV'$$

$$\Downarrow$$

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\int_{t'} \frac{q\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\delta(t'-t+|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)dt'dV'$$

2.1.1 POTENCIALES DE LIÉNARD-WIECHERT

- Podemos integrar sobre coordenadas, entonces, el potencial se escribe
$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{t'} \frac{\delta(t'-t+R(t')/c)}{R(t')}dt'$$
  - La función delta del integrando es una composición de funciones
$$\delta\left[g(x)\right] = \sum_n \frac{1}{|\,g'(x_n)\,|}\delta(x-x_n), \quad g(x_n)=0,\ g'(x_n)\neq 0$$
  - La delta dentro del integrando cumple con tener ceros cuando $t' = t - \dfrac{R(t')}{c}$
  - Entonces,
$$g'(t') = \frac{d}{dt'}\left[t'-t+R(t')/c\right] = 1 + \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\sqrt{\overrightarrow{R}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')}$$

Fijándonos en la derivada del término en la raiz

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\sqrt{\overrightarrow{R}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')} = \frac{1}{c}\frac{\overrightarrow{R}\cdot\frac{d\overrightarrow{R}(t')}{dt'}}{\sqrt{\overrightarrow{R}(t')\cdot\overrightarrow{R}(t')}} = -\frac{\overrightarrow{R}\cdot\vec{v}/c}{R}$$

Definimos $\vec{\beta}(t') = \dfrac{\vec{v}}{c}$ $\qquad g'(t') = 1 - \vec{\beta}(t')\cdot\hat{R}$

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\vec{r},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{R(t)g'(t)}\right]_{t_{ret}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{R-\vec{\beta}\cdot\overrightarrow{R}}\right]_{ret}\\ \overrightarrow{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{q\vec{v}(t)}{R(t)g'(t)}\right]_{t_{ret}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{q\vec{v}}{R-\vec{\beta}\cdot\overrightarrow{R}}\right]_{ret}\end{aligned}}$$

Potenciales de Liénard-Wiechert

2.1.2 CAMPOS DE LIÉNARD-WIECHERT

- A partir de las definiciones de los potenciales podemos encontrar los campos electromagnéticos

$$\overrightarrow{E}(\vec{r},t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\int_{t'}\frac{\delta(t'-t+R(t')/c)}{R(t')} - \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{t'}\frac{\vec{v}(t')\delta(t'-t+R(t')/c)}{R(t')}dt'$$

- Usando

$$\nabla\delta(t'-t+R(t')/c) = -\frac{\partial}{\partial t}\delta(t'-t+R(t')/c)\frac{\hat{R}}{c}$$

- El campo eléctrico se puede escribir

$$\overrightarrow{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{t'}\delta(t'-t+R(t')/c)\frac{\hat{R}}{R^2}dt' + \frac{\partial}{\partial t}\int_{t'}\delta(t'-t+R(t')/c)\frac{\hat{R}-\vec{\beta}}{cR}dt'\right]$$

Los campos electromagnéticos

$$\overrightarrow{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\hat{R}}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{R})R^2}\right]_{ret} + \frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{d}{dt}\left[\frac{\hat{R}-\vec{\beta}}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{R})cR}\right]_{ret}$$

$$\overrightarrow{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left[\frac{\vec{v}\times\hat{R}}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{R})R^2}\right]_{ret} + \frac{\mu_0 q}{4|pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{v}\times\hat{R}}{(1-\vec{\beta}\cdot\hat{R})cR}\right]_{ret}$$

2.1.2 CAMPOS DE LIÉNARD-WIECHERT

- Realizando la derivada con respecto del tiempo

$$\frac{dR}{dt} = -c\hat{R}\cdot\vec{\beta}$$

$$\frac{dt}{dt_{ret}} = 1 + \frac{1}{c}\frac{dR_{ret}}{dt_{ret}} = \left[1 - \vec{\beta}\cdot\hat{R}\right]_{ret}$$

$$\frac{d\hat{R}}{dt} = \frac{c}{R}\hat{R}\times\left(\hat{R}\times\vec{\beta}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(1-\vec{\beta}\cdot\hat{R}\right) = -\left[\frac{d\hat{R}}{dt}\cdot\vec{\beta} + \hat{R}\cdot\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right]$$

- Definimos $g = 1 - \vec{\beta}\cdot\hat{R}$ y $\dot{\vec{\beta}} = \dfrac{d\vec{\beta}}{dt}$

$$\overrightarrow{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\left(\hat{R}-\vec{\beta}\right)\left(1-\beta^2\right)}{g^3R^2} + \frac{\hat{R}\times\left[\left(\hat{R}-\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{\beta}}\right]}{cg^3R}\right\}_{ret}$$

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left\{\frac{\left(\vec{v}\times\hat{R}\right)\left(1-\beta^2\right)}{g^3R^2} + \frac{\left(\vec{v}\times\hat{R}\right)\left(\dot{\vec{\beta}}\cdot\hat{R}\right) + g\dot{\vec{\beta}}\times\hat{R}}{g^3R}\right\}_{ret}$$

$\Downarrow$ cumplen con

$$c\overrightarrow{B} = \hat{R}_{ret}\times\overrightarrow{E}$$

2.1.2 CAMPOS DE LIÉNARD-WIECHERT

- Ejemplo: Consideremos una partícula cargada con carga q que viaja con velocidad uniforme $\vec{v}$

  - Como la velocidad es constante, entonces, $\dot{\vec{\beta}} = \vec{0}$

  - La expresión del campo eléctrico se reduce a $\overrightarrow{E} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{\left(\hat{R} - \vec{\beta}\right)\left(1 - \beta^2\right)}{g^3R^2}\right]_{ret}$

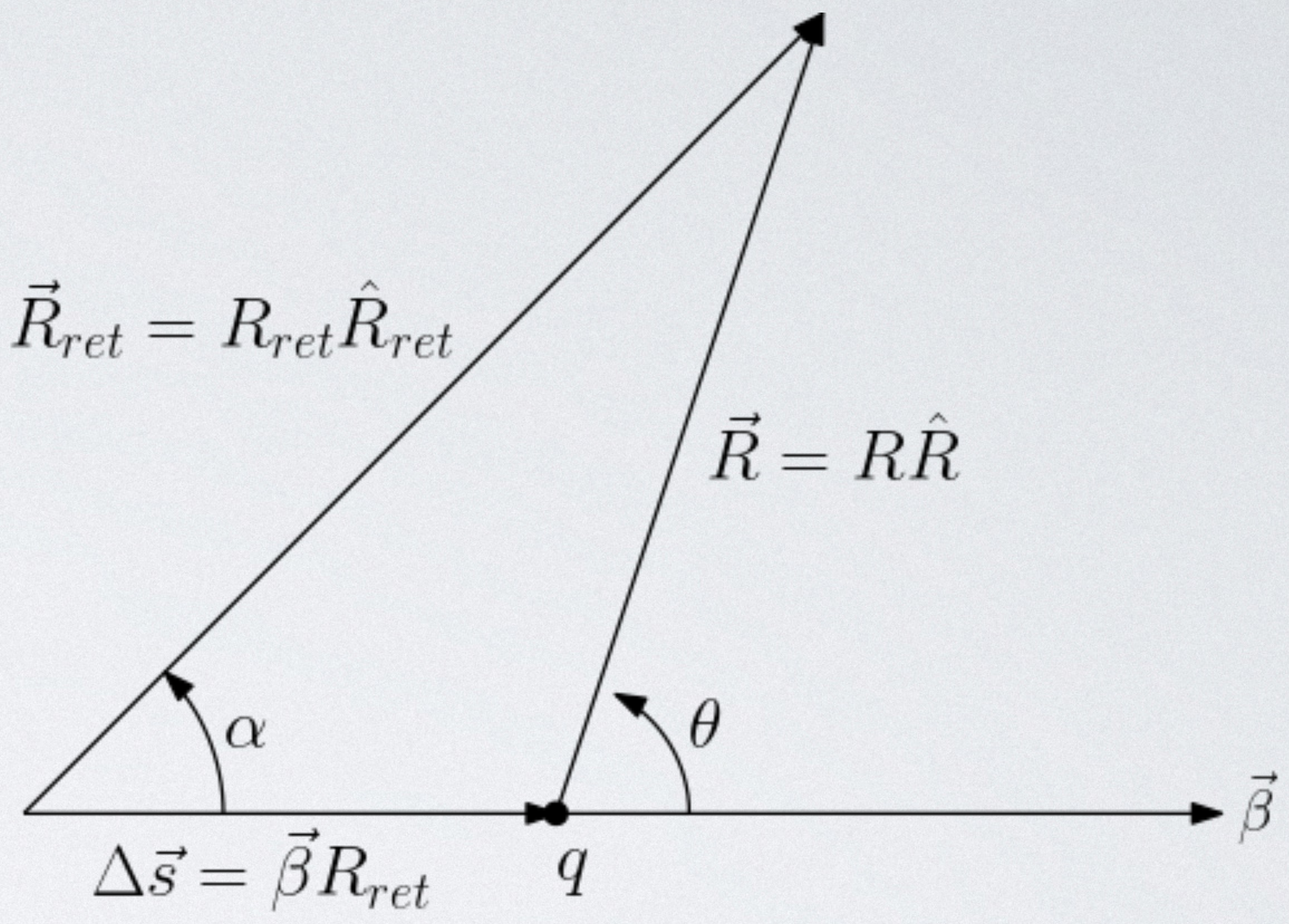
    - Debemos recordar que

$$R(t) = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$$

$$R(t_{ret}) = \vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret})$$

$$t_{ret} = t - \frac{R(t_{ret})}{c}$$

$$g = 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{R}$$



Podemos ver que

$$\Delta\vec{s} = \overrightarrow{R}_{ret} - \overrightarrow{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t_{ret}) - \left[\vec{r} - \vec{r}_0(t)\right] = \vec{r}_0(t) - \vec{r}_0(t_{ret}) = \vec{v}(t - t_{ret})$$

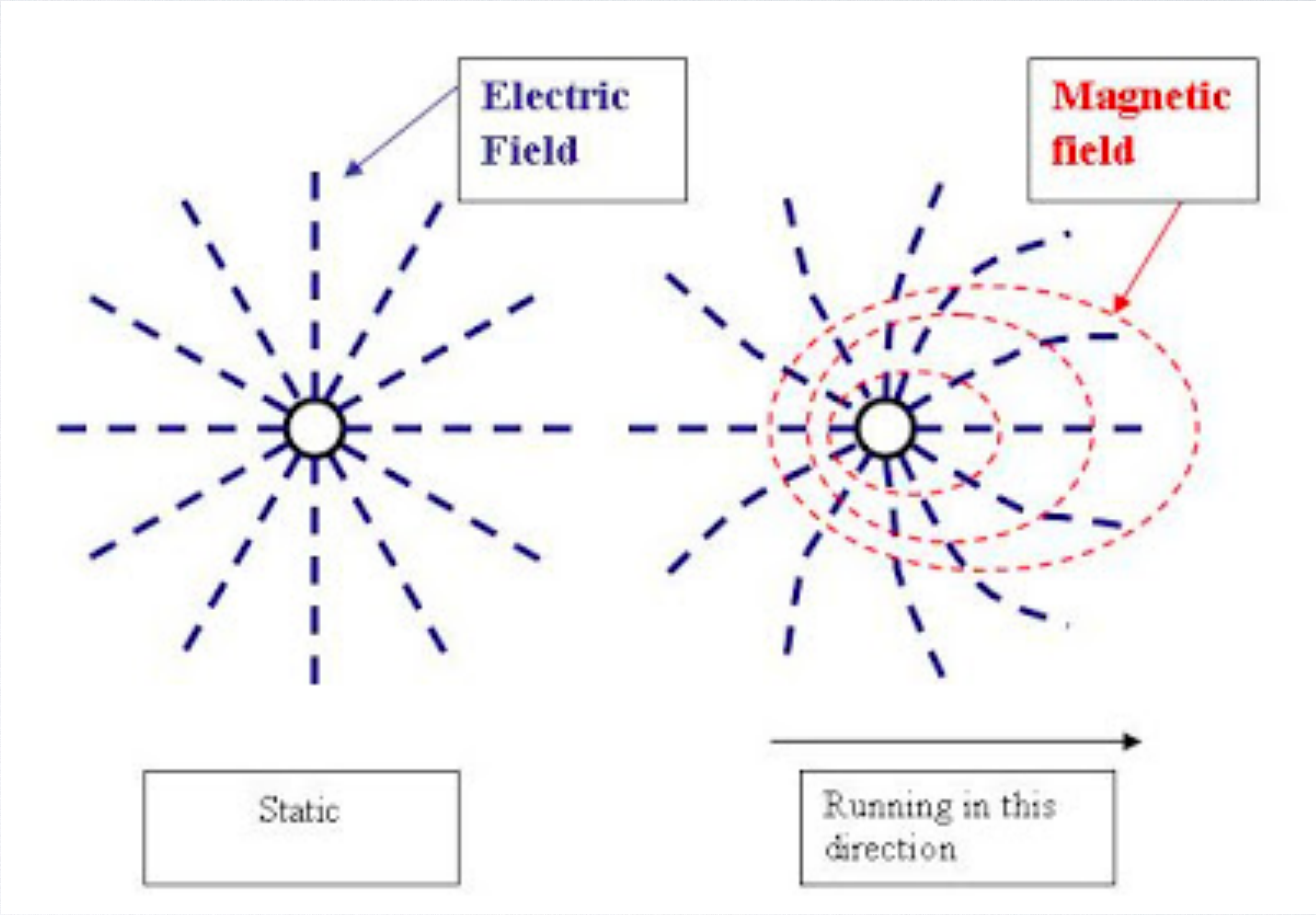
$$\Delta\vec{s} = \vec{v}\frac{R(t_{ret})}{c} = \vec{\beta}R_{ret} \quad \Rightarrow \quad \hat{R}_{ret} - \vec{\beta} = \frac{\overrightarrow{R}}{R_{ret}}$$

$$[gR]^2_{ret} = R^2(1 - \beta^2\sin^2\theta)$$

2.1.2 CAMPOS DE LIÉNARD-WIECHERT

- Entonces, el campo eléctrico se escribe
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{R}(1-\beta^2)}{[gR]^3_{ret}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{R}}{R^3}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}$$

- El campo eléctrico
$$\vec{B} = \frac{\hat{R}}{c}\times\vec{E} = \frac{1}{c}\left[\beta + \frac{R}{R_{ret}}\right]\times\vec{E} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$$



2.2 CAMPOS Y RADIACIÓN DE FUENTES LOCALIZADAS OSCILANTES

- Consideremos un sistema de cargas o densidades de carga, y densidades de corriente que varían sinusoidalmente con el tiempo

  $\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}$

  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t}$

  - Además, podemos pedir que las fuentes están confinadas a una región pequeña del espacio (pequeña comparada con la longitud de onda λ)

- Si las dimensiones de la fuente son de orden d y la longitud de onda es $\lambda = 2\pi c/\omega$, entonces tenemos tres regiones espaciales de interés

Región cercana (estática): $d \ll r \ll \lambda$

Región intermedia (inducción): $d \ll r \sim \lambda$

Región lejana (radiación): $d \ll \lambda \ll r$

2.2 CAMPOS Y RADIACIÓN DE FUENTES LOCALIZADAS OSCILANTES

- Región cercana $d \ll r \ll \lambda$
  - Para la región cercana podemos considerar que $r \ll \lambda$ o $kr \ll 1$
  - En ese caso, la función de Green,
    $$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{e^{ikr}}{R}$$
    se reduce debido a que $e^{ikr} \approx 1$
    $$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \approx \frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
  - Los resultados se reducen a los encontrados en electrostática y magnetostática

$$\lim_{kr\to 0} \overrightarrow{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \int_{V'} \vec{j}(\vec{r}') Y^*_{lm}(\theta', \varphi') dV'$$

$$\lim_{kr\to 0} \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{l} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r^{l+1}} \int \rho(\vec{r}') r'^{l} Y^*_{lm}(\Omega') dV'$$

2.2 CAMPOS Y RADIACIÓN DE FUENTES LOCALIZADAS OSCILANTES

- Región lejana $d \ll \lambda \ll r$
  - Para la región cercana podemos considerar que $r \gg \lambda$ o $kr \gg 1$
  - Para este caso la exponencial e^{ikr} oscila rápidamente y determina el comportamiento de los potenciales
  - Es posible hacer una aproximación del término que contiene $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$

Como $r' \leq d \lll r$ podemos hacer un desarrollo de Taylor alrededor de $r' \sim 0$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = r - \vec{r}' \cdot \hat{r} - \frac{1}{2}\frac{(\vec{r}' \cdot \hat{r})}{r} + \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left(\vec{r}' \cdot \nabla\right)^2\frac{1}{r} - \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2}(\hat{r} \cdot \hat{r}') + \left(\frac{r'^2}{r^3}\right)\frac{3(\hat{r} \cdot \hat{r}')^2 - 1}{2} + \cdots$$

2.2 CAMPOS Y RADIACIÓN DE FUENTES LOCALIZADAS OSCILANTES

- Entonces, en la región de radiación es suficiente con considerar los primeros dos términos de la expansión

$$R \approx r - \hat{r}\cdot\vec{r}\,'$$

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,'\cdot\vec{r}}{r^3}$$

  - El segundo término de la expansión en $1/R$ puede despreciarse debido a que decae muy rápidamente

- Recordando la forma de los potenciales para este caso

$$\phi_L(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,',t-R/c)}{R}dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')e^{-i\omega(t-R/c)}}{R}dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t-R/c)}{R}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')e^{-i\omega(t-R/c)}}{R}dV'$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{kr\to\infty}\phi_L(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}e^{-i\omega t}\displaystyle\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')e^{i\omega R/c}}{R}dV' \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}e^{i(kr-\omega t)}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}}{r}dV' \\ \lim\limits_{kr\to\infty}\vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}e^{-i\omega t}\displaystyle\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')e^{-i\omega R/c}}{R}dV'' \approx \frac{\mu_0}{4\pi}e^{i(kr-\omega t)}\int_{V'}\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}}{r}dV' \end{cases}$$

Nota: en esta aproximación los potenciales muestran un comportamiento de onda esférica

$$\psi \sim \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

2.2 CAMPOS Y RADIACIÓN DE FUENTES LOCALIZADAS OSCILANTES

- Podemos hacer una siguiente aproximación, considerando que

$$e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ik)^j}{j!}(\hat{r}\cdot\vec{r})^j$$

- Entonces los potenciales se pueden escribir

$$\lim_{kr\to\infty} \phi_L(\vec{r},t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-ik)^l}{l!}\int_{V'}\rho(\vec{r}')(\hat{r}\cdot\vec{r}')^l dV'$$

$$\lim_{kr\to\infty} \overrightarrow{A}(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-ik)^l}{l!}\int_{V'}\vec{j}(\vec{r}')(\hat{r}\cdot\vec{r}')^l dV'$$

  - Debemos notar que la magnitud de $r' \leq d$ y que es muy pequeño comparado con r, entonces $\vec{r}'\cdot\hat{r} \ll 1$

  - El primer término diferente de cero es el que rige el comportamiento en la región de radiación

Debemos notar que el término de monopolo tendrá que ser cero ya que si tenemos una fuente localizada por definición no hay carga fluyendo dentro o fuera de la fuente:

$\Longrightarrow$ la carga total $q(t)$ debe conservarse y es independiente del tiempo

$\Longrightarrow$ El potencial y los campos de un monopolo deben ser estáticos

2.2 CAMPOS Y RADIACIÓN DE FUENTES LOCALIZADAS OSCILANTES

- Finalmente podemos calcular los campos electromagnéticos para la zona de radiación pero hay que notar que por definición tenemos que

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \overrightarrow{A}$$

- Fuera de la fuente el campo eléctrico cumple con la ley de Ampère- Maxwell

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{E}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = -\, i\epsilon_0 \omega \overrightarrow{E}$$

Usando $\omega = kc = k\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = -\, ik\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\overrightarrow{E} = -\, ik\frac{1}{Z_0}\overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{E} = \frac{iZ_0}{k}\nabla \times \overrightarrow{H}$$

Entonces, basta con conocer el campo magnético para encontrar los campos
$\Longrightarrow$ Que basta con tener el potencial vectorial para definir $\overrightarrow{E}(\vec{r},t)$ y $\overrightarrow{H}(\vec{r},t)$

3.1 CAMPOS DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

- El potencial vectorial en la zona de radiación se puede considerar

$$\lim_{kr\to\infty} \overrightarrow{A}(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-ik)^l}{l!}\int_{V'}\vec{j}(\vec{r}')(\hat{r}\cdot\vec{r}')^l dV'$$

  - Si tomamos sólo el primer término de la expansión ya que es el que tendría más peso, tenemos

$$\overrightarrow{A}(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\int_{V'}\vec{j}(\vec{r}')dV'$$

Podemos darnos cuenta que

$$\int_{V'}\vec{j}(\vec{r}')dV' = -\int_{V'}\vec{r}'\left(\nabla\cdot\vec{j}\right)dV'$$

Usando la ecuación de continuidad

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Recordando que son fuentes oscilantes localizadas, tenemos,

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = -\,i\omega\rho(\vec{r},t)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{V'}\vec{j}(\vec{r}')dV' = -\int_{V'}\vec{r}'\left(\nabla\cdot\vec{j}\right)dV' = -\,i\omega\int_{V'}\vec{r}'\rho(\vec{r}')dV'$$

3.1 CAMPOS DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

- Tomando la definición de momento dipolar eléctrico,

$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{r}'\rho(\vec{r}')dV'$$

- Entonces, el potencial vectorial es

$$\overrightarrow{A}(\vec{r}, t) = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi}\vec{p}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

- Los campos electromagnéticos son

$$\overrightarrow{H}(\vec{r}, t) = \frac{ck^2}{4\pi}\left(\hat{r}\times\vec{p}\right)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)$$

$$\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{k^2\left(\hat{r}\times\vec{p}\right)\times\hat{r}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} + \left[3\hat{r}\left(\hat{r}\cdot\vec{p}\right)-\vec{p}\right]\left(\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\right)e^{i(kr-\omega t)}\right\}$$

En la aproximación del régimen de la zona de radiación, $r \to \infty$

$$\overrightarrow{H}(\vec{r}, t) = \frac{ck^2}{4\pi}\left(\hat{r}\times\vec{p}\right)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

$$\overrightarrow{E}(\vec{r}, t) = Z_0\overrightarrow{H}\times\hat{r}$$

3.1 CAMPOS DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

- Nos interesa saber cuál es la potencia irradiada por la fuente en un elemento diferencial de ángulo sólido $d\Omega$ si $\vec{r}$ se encuentra un elemento de superficie esférico $r^2 d\Omega$ y el vector de Poynting, $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$

  no da un valor cero para
  $dP(t) = \lim_{r\to\infty} \hat{r} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) r^2 d\Omega$

  - La distribución angular de la potencia radiada está dada por
    $$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \hat{r} \cdot \left(\vec{E}_{rad} \times \vec{H}_{rad} \right)$$

En otras palabras $P(t)$ es el flujo del vector de Poynting a través de una superficie esférica en el límite cuando el radio tiende a infinito

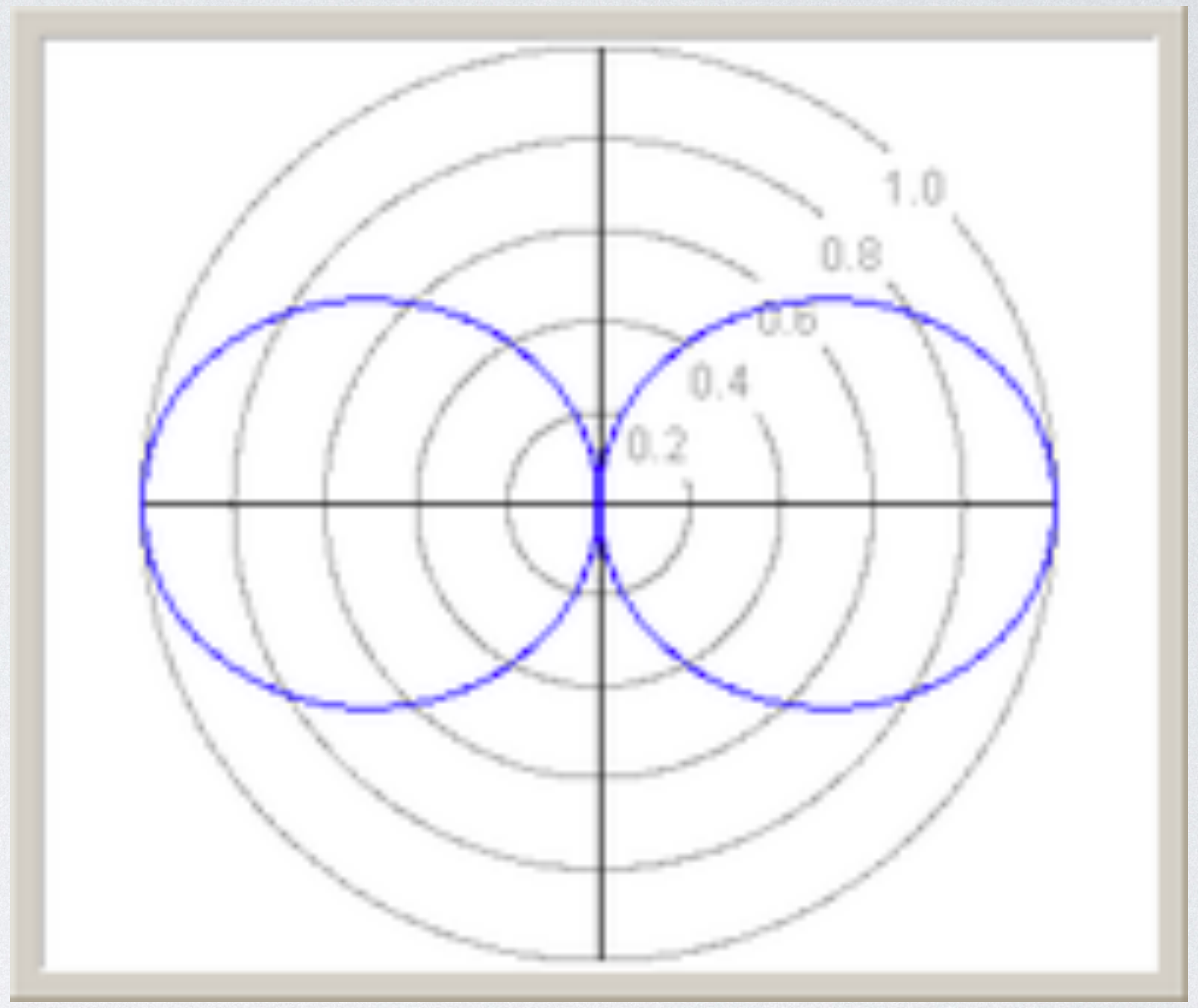
$$P(t) = \lim_{r\to\infty} \int_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

En el caso de una fuente que oscila armónicamente, nos interesa el promedio temporal de la potencia irradiada

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ r^2 \hat{r} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}^* \right) \right\}$$

3.1 CAMPOS DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

- Usando los campo encontrados para el dipolo eléctrico en la zona de radiación $\dfrac{dP}{d\Omega} = \dfrac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 \left| \left(\hat{r} \times \vec{p} \right) \times \hat{r} \right|^2$
  - El estado de la radiación está dada por los campos
    $$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\omega^2 \left[\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{p})\right] \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$
    $$\vec{H} = \frac{\omega^2}{4\pi c}(\hat{r} \times \vec{p})\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$
  - Si las componentes de $\vec{p}$ tienen la misma fase, la distribución angular está dada por
    $$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^2 Z_0}{32\pi^2} k^4 |\vec{p}|^2 \sin^2\theta$$
    - El ángulo θ está medido con respecto a la dirección de $\vec{p}$



Entonces, la potencial total de radiación

$$P = \frac{c^2 Z_0 k^4}{12\pi} |\vec{p}|^2$$

3.1 CAMPOS DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

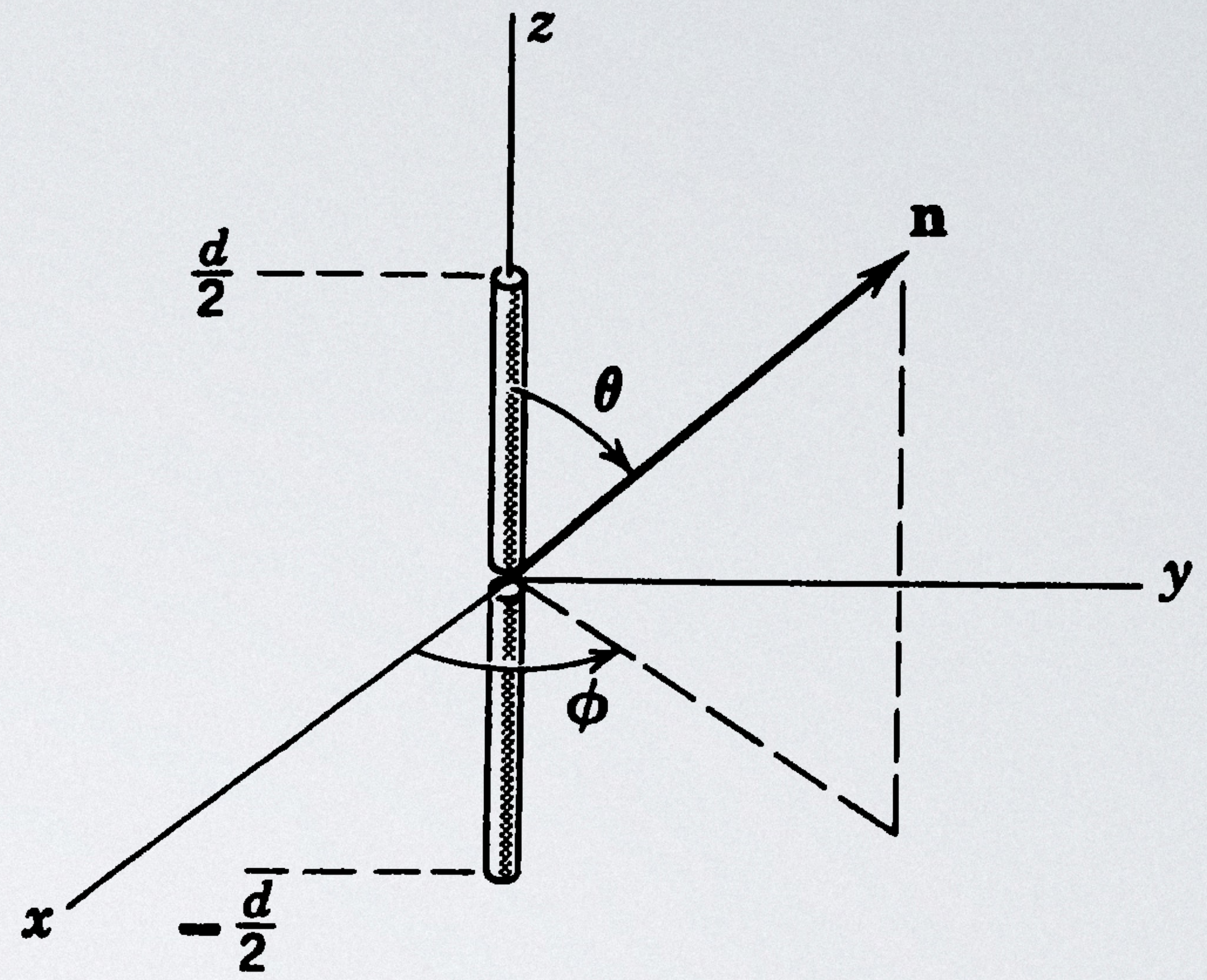
- Como ejemplo consideremos una antena lineal de longitud d mucho menor que la longitud de onda, $d \ll \lambda$

- La antena está orientada a lo largo del eje z, de $z = -d/2$ a $z = d/2$ con una pequeña apertura en el centro (a medida de alimentación)

- Se tiene una corriente que se alimenta en el centro y decae linealmente en los extremos

$$I(z,t) = I(z)e^{-i\omega t} = I_0\left(1 - \frac{2|z|}{d}\right)e^{-i\omega t}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = I_0\left(1 - \frac{2|z|}{d}\right)e^{-i\omega t}\delta(\rho)\frac{\delta(\varphi)}{\rho}\hat{z}$$



Por la ecuación de continuidad

$$-i\omega\rho(\vec{r},t) = \nabla\cdot\vec{j}(\vec{r},t)$$

$$\rho_f(\vec{r},t) = sign(z)\frac{2iI_0}{\omega d}\delta(\rho)\frac{\delta(\varphi)}{\rho}$$

3.1 CAMPOS DEL DIPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

- Entonces, el dipolo eléctrico

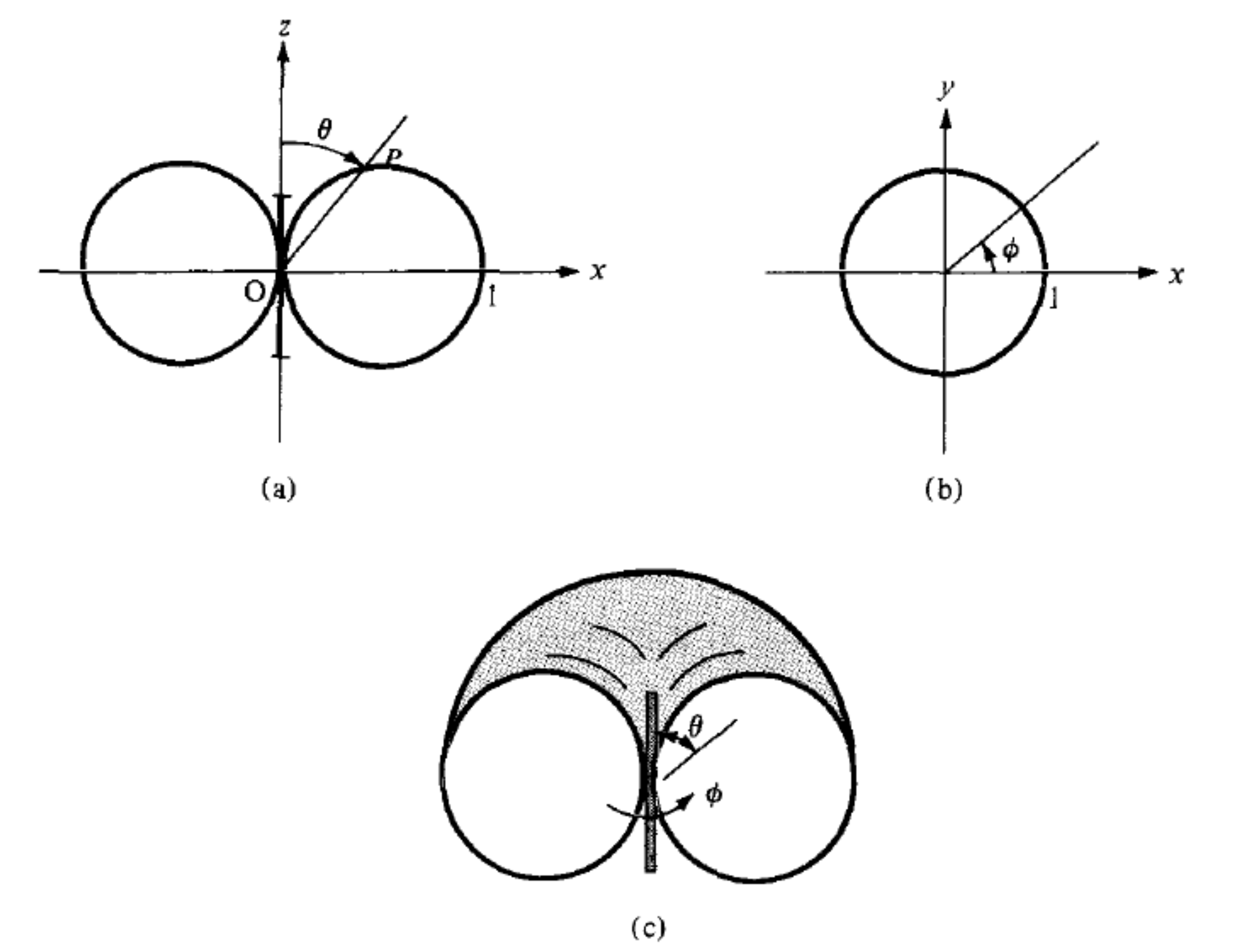
$$\vec{p} = \int_{V'} \vec{r}'\rho_f(\vec{r}', t)dV' = \hat{z}\int_{-d/2}^{d/2} z'\rho_f(z')dz' = \frac{iI_0 d}{2\omega}\hat{z}e^{-i\omega t}$$

  - Entonces, el promedio temporal de la distribución de la potencia de radiación

$$\left\langle \frac{dP}{dt} \right\rangle = \frac{Z_0 I_0^2}{128\pi^2}(kd)^2 \sin^2\theta$$

  - La potencia total de radiación

$$P = \frac{A_0 I_0^2 (kd)^2}{48\pi}$$



3.2 CAMPOS DEL DIPOLO MAGNÉTICO, CUADRUPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

- Si el primer término de la expansión

$$\lim_{kr\to\infty} \overrightarrow{A}(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-ik)^l}{l!}\int_{V'}\vec{j}(\vec{r}\,')(\hat{r}\cdot\vec{r}\,')^l dV'$$

desaparece, entonces, no hay término de dipolo

- Consideramos el siguiente término en la expansión

$$\overrightarrow{A}(\vec{r},t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ike^{i(kr-\omega t)}}{r}\int_{V'}\vec{j}(\vec{r}\,')(\hat{r}\cdot\vec{r}\,')dV'$$

  - Tomando la expresión

$$\left(\hat{r}\cdot\vec{r}\,'\right)\vec{j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\hat{r}\cdot\vec{r}\,')\vec{j} + (\hat{r}\cdot\vec{j})\vec{r}\,'\right]}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{r}\,'\times\vec{j}\right)\times\hat{r}}_{\text{antisimétrico}}$$

    - Recordando que la magnetización está definida como $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}\times\vec{j}\right)$

Entonces, la parte antisimétrica produce radiación de dipolo magnético

$$\overrightarrow{A}(\vec{r},t) = \frac{ik\mu_0}{4\pi}\left(\hat{r}\times\vec{m}\right)\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

$$\text{con } \vec{m} = \int_{V'}\overrightarrow{M}dV' = \frac{1}{2}\int_{V'}\vec{r}\,'\times\vec{j}dV'$$

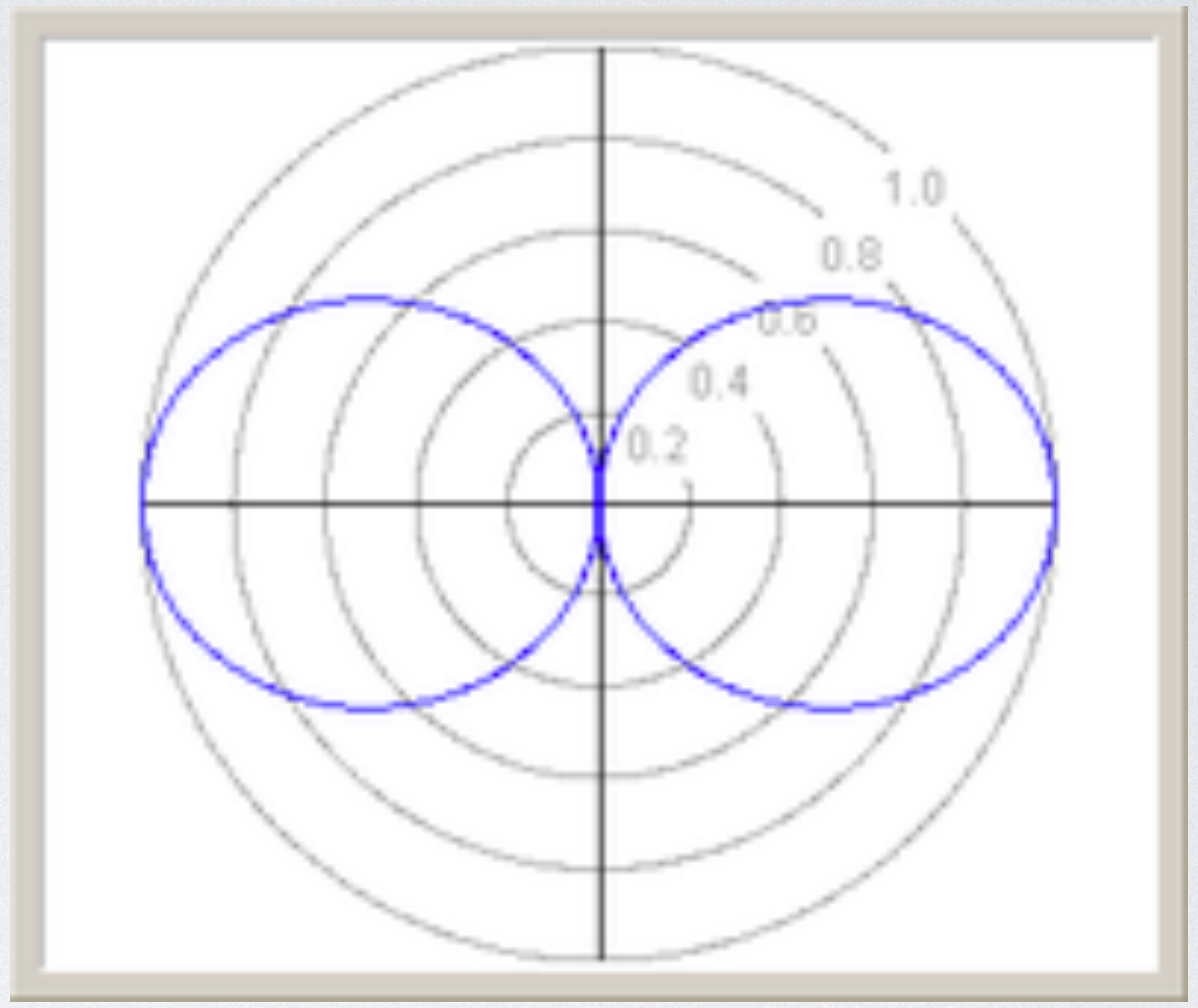
Entonces, los campos electromagnéticos en la zona de radiación para el dipolo magnético son

$$\overrightarrow{H} = \frac{k^2}{4\pi}\left[\hat{r}\times(\vec{m}\times\vec{r})\right]\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{c}(\hat{r}\times\vec{m})\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

3.2 CAMPOS DEL DIPOLO MAGNÉTICO, CUADRUPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

- Usando los campos electromagnéticos encontrados se obtiene la distribución angular de la potencia de radiación es $\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0 c k^4}{32\pi^2} k^4 (\hat{r} \times \vec{m}) \cdot (\hat{r} \times \vec{m}^*)$



  - Básicamente se obtienen los mismos resultados que en caso del dipolo eléctrico viendo que se cumple la simetría $\vec{p} \to \vec{m}/c$ y

$$P = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c^3} |\vec{m}|^2$$

3.2 CAMPOS DEL DIPOLO MAGNÉTICO, CUADRUPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

- Ahora, consideramos la parte simétrica del segundo término de la expansión
$$\left(\hat{r}\cdot\vec{r}'\right)\vec{j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\hat{r}\cdot\vec{r}')\vec{j} + (\hat{r}\cdot\vec{j})\vec{r}'\right]}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{r}'\times\vec{j}\right)\times\hat{r}}_{\text{antisimétrico}}$$
    - Se puede demostrar que
$$\frac{1}{2}\int_{V'}\left[(\hat{r}\cdot\vec{r}')\vec{j} + (\hat{r}\cdot\vec{j})\vec{r}'\right]dV' = -\frac{i\omega}{2}\int_{V'}\vec{r}'(\hat{r}\cdot\vec{r})\rho(\vec{r}')dV'$$
- El potencial asociado es
$$\overrightarrow{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 ck^2}{8\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\int_{V'}\vec{r}'(\hat{r}\cdot\vec{r}')\rho(\vec{r}')dV'$$

Los campos eléctromagnéticos

$$\overrightarrow{H} = ik\hat{r}\times\overrightarrow{A}/\mu_0$$
$$\overrightarrow{E} = ikZ_0(\hat{r}\times\overrightarrow{A})\times\hat{n}/\mu_0$$

Explícitamente

$$\overrightarrow{H} = -\frac{ick^3}{8\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\int_{V'}\left(\hat{r}\times\vec{r}'\right)\cdot\left(\hat{n}\cdot\vec{r}'\right)\rho(\vec{r}')dV'$$

3.2 CAMPOS DEL DIPOLO MAGNÉTICO, CUADRUPOLO ELÉCTRICO Y RADIACIÓN

- Podemos usar la definición de cuadrupolo eléctrico

$$Q_{\alpha\beta} = \int_V (3r_\alpha r_\beta - r^2\delta\alpha\beta)\rho(\vec{r})dV$$

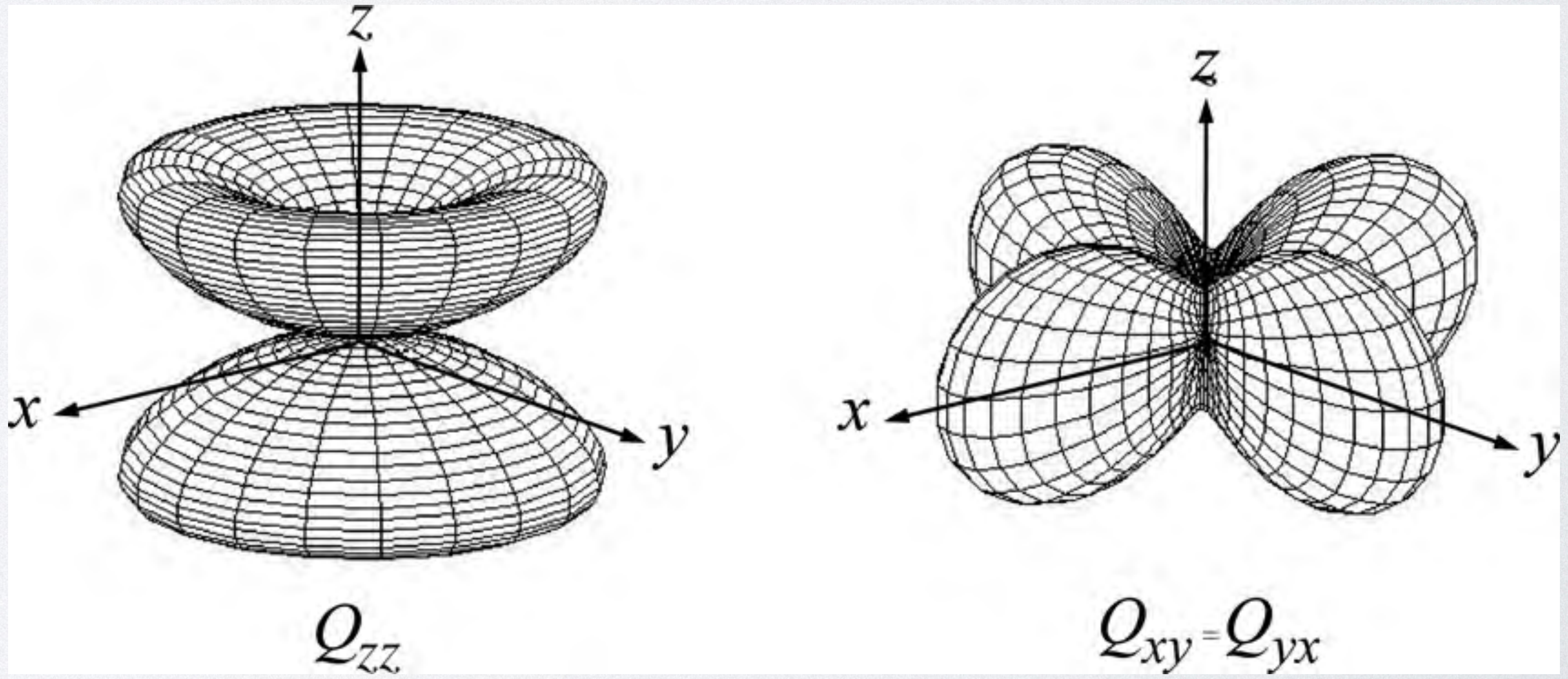
  - Entonces, se puede demostrar que

$$\hat{r} \times \int_{V'} \vec{r}' \left(\hat{r} \cdot \vec{r}'\right) \rho(\vec{r}')dV' = \frac{1}{3}\hat{n} \times \overrightarrow{Q}(\hat{r})$$

    - Donde $Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta}(\hat{r})_\beta$

$$\overrightarrow{H} = -\frac{ick^3}{24\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\hat{r} \times \overrightarrow{Q}(\hat{r})$$

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{Z_0 c^2}{1152\pi^2}k^6 \left| \left[\hat{r} \times \overrightarrow{Q}(\hat{r}) \right] \times \hat{r} \right|^2$$



3.3 POTENCIA TOTAL RADIADA POR UNA CARGA PUNTUAL ACELERADA

- Supongamos que observamos a una partícula acelerada desde una marco de referencia inercial

    - El campo eléctrico correspondiente a la aceleración

$$\vec{E}_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\hat{R}\times\left[\left(\hat{R}-\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{\beta}}\right]}{cg^3R}\right\}_{ret}$$

$$c\vec{B}_a = \hat{R}_{ret}\times\vec{E}_a$$

El flujo de energía está dado por el vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_a\times\vec{B}_a = \epsilon_0 c\,|\,\vec{E}_a|^2\,\hat{R}_{ret}$$

$$\vec{S}(t) = \epsilon_0 c\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\left|\frac{\hat{R}\times\left[\left(\hat{R}-\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{\beta}}\right]}{cg^3R}\right|_{ret}^2\hat{R}_{ret}$$

La razón a la cual la energía fluye a través de un elemento de ángulo sólido encerrado en una esfera de radio R es:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dU}{dtd\Omega} = R^2\vec{S}(t)\cdot\hat{R}_{ret}$$

3.3 POTENCIA TOTAL RADIADA POR UNA CARGA PUNTUAL ACELERADA

- Considerando que para tiempos retardados

  $$t_{ret} = t - \frac{R_{ret}}{c}$$

  - Recordando que

    $$dt = \frac{dt}{dt_{ret}} dt_{ret} = \left(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}\right)_{ret}$$

  - Nos lleva a

    $$\frac{dP_{ret}}{d\Omega} = \frac{dU}{dt_{ret} d\Omega} = g_{ret} R^2 \vec{S}(t) \cdot \hat{R}_{ret}$$

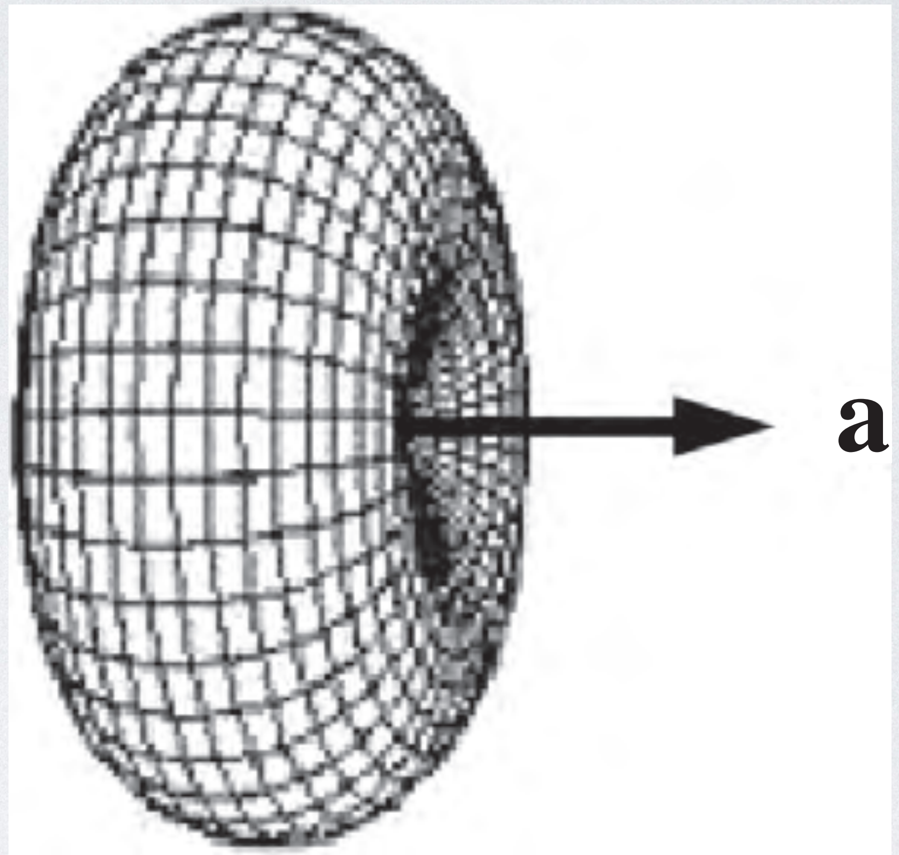
La distribución angular de la potencia emitida

$$\frac{dP_{ret}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \left. \frac{\left| \hat{R} \times \left[\left(\hat{R} - \vec{\beta} \right) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right|^2}{\left(1 - \hat{R} \cdot \vec{\beta}\right)^5} \right|_{ret}$$

3.3 POTENCIA TOTAL RADIADA POR UNA CARGA PUNTUAL ACELERADA

- Consideremos el caso donde la velocidad de movimiento de la partícula es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz $v \ll c$

    - Entonces, $\beta \approx 0$



$$\frac{dP}{d\omega} \approx \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c}\left|\hat{R} \times \left(\hat{R} \times \vec{a}\right)\right| \approx \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c}\left|\hat{r} \times \vec{a}\right|^2 = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\sin^2\theta$$