

ELECTROSTÁTICA

TEMAS

1. Campo eléctrico, potencial y energía electrostática
2. Electrostática en conductores y en presencia de materia
3. Métodos especiales para la solución de problemas en electrostática

1.1 LEY DE COULOMB

- La interacción entre dos cargas eléctricas en reposo está descrita por la ley de Coulomb (1786)

Dos cargas estacionarias se repelen o atraen una a la otra con una fuerza proporcional al producto de las magnitudes de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas

$$\vec{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

constante magnitud y signo de las cargas

distancia entre cargas vector unitario que va desde la carga 1 a la carga 2

- El valor de k depende de las unidades
 - Usaremos el sistema internacional de unidades SI
 - En el SI las unidades de carga son el coulomb C
 - Dos cargas iguales, cada una de 1 coulomb, se repelen con una fuerza de 8.988×10^9 newtons cuando están apartadas 1 metro

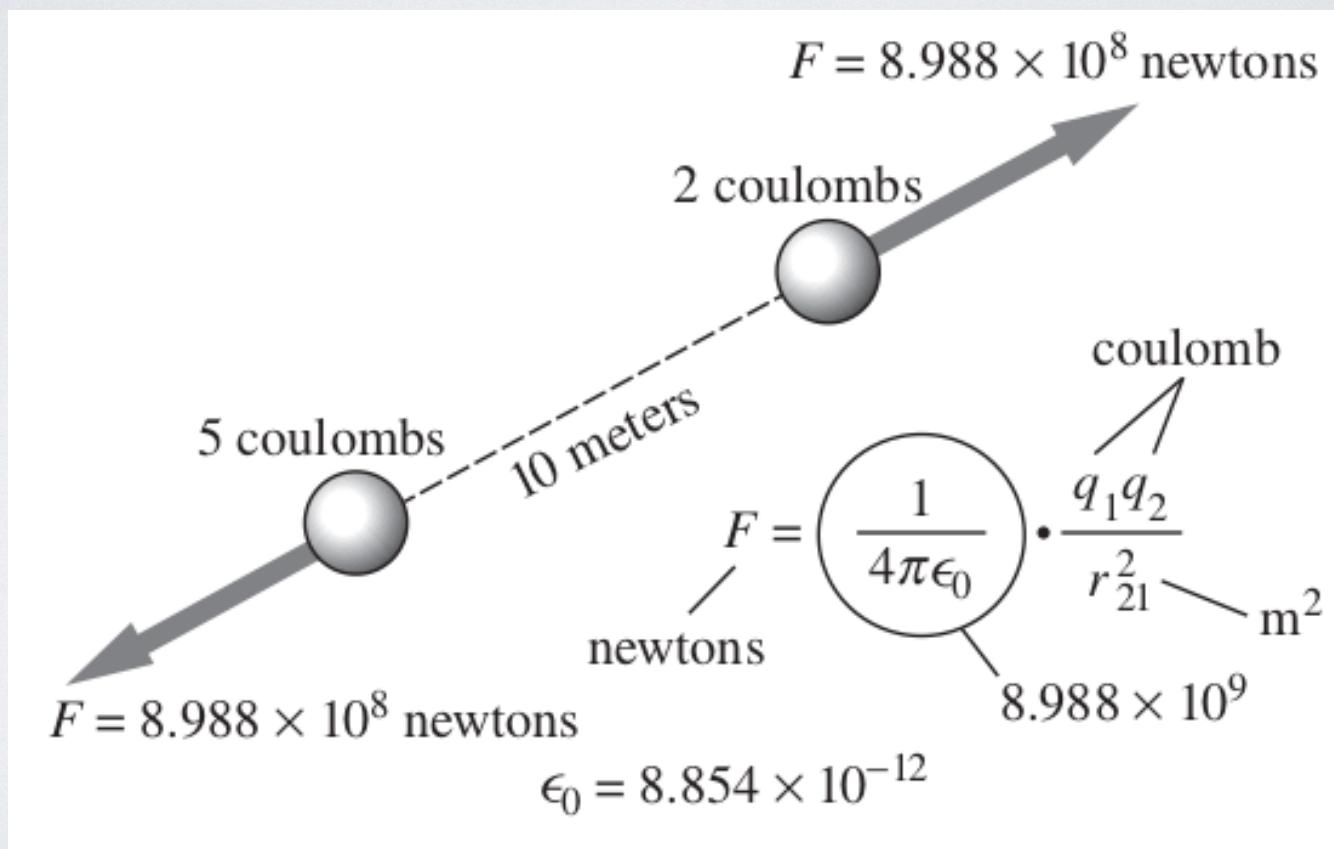
- Entonces $k = 8.988 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$
- Es común escribirlo (razones históricas) como

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

1.1 LEY DE COULOMB

Ejemplo



1.2 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

- Ahora considere tres cargas q_1, q_2, q_3

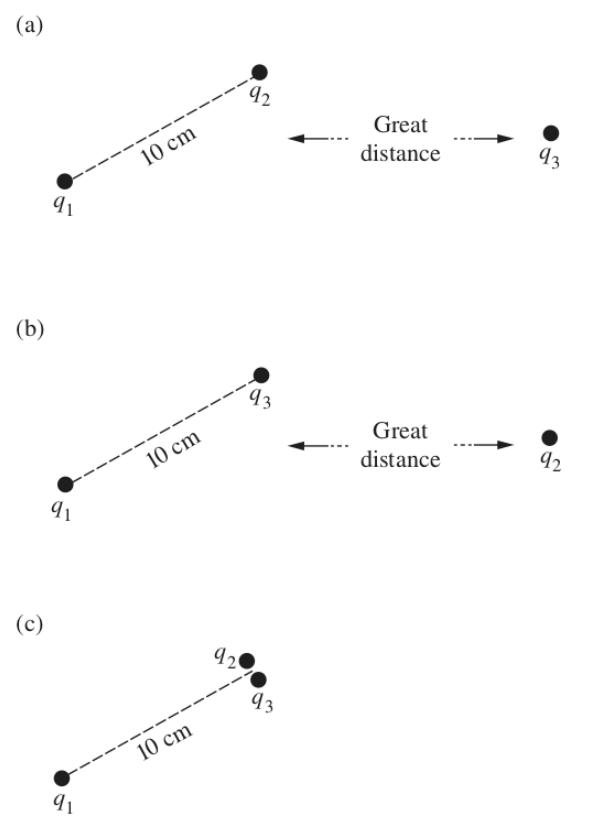
- Esté q_3 muy lejos
- Ahora alejamos q_2 y traigamos q_3 a la posición prueba y midamos la fuerza
- Ahora traigamos q_2, q_3 a la misma posición y midamos la fuerza



Encontramos que la fuerza que siente la carga q_1 es igual a la suma de las fuerzas previamente medidas entre pares de cargas



La fuerza con la que dos cargas interactúan no cambia por la presencia una tercera carga

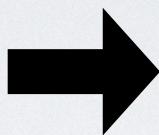


Principio de superposición:

No importa cuantas cargas tengamos en nuestro sistema, la ley de Coulomb puede ser usada para calcular la interacción de cada par de cargas

1.2 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

- El principio de superposición asegura que la fuerza sobre una carga que se encuentra en cualquier punto de un sistema combinado será la suma vectorias de las fuerzas que cada conjunto se fuentes, actuando solas, causa sobre la carga en ese punto



$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij}$$

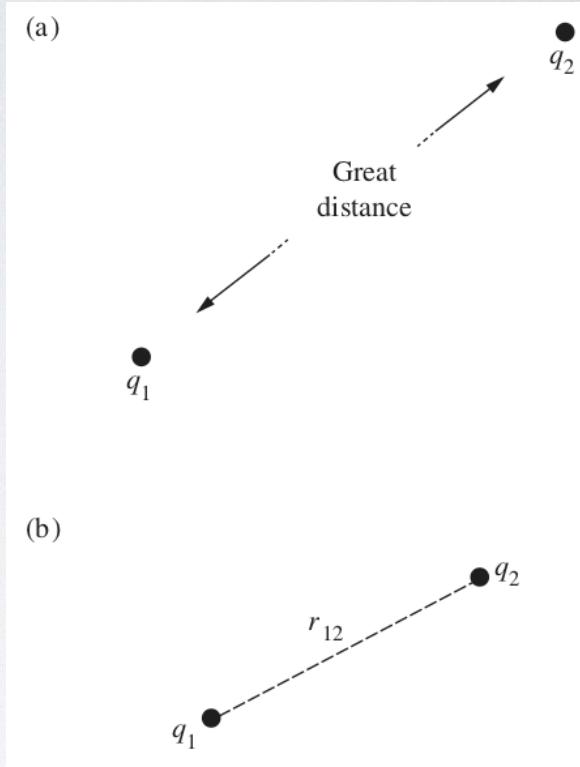
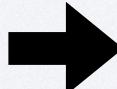


El dominio de validez (hasta ahora medido corroborado por la sonda Pioneer 10) es de 10^{-16} a 10^8 metros

1.3 ENERGÍA DE UN SISTEMA DE CARGAS

- Consideremos un sistema de cargas
- Dada la expresión de la fuerza de Coulomb inmediatamente vemos que es conservativa
- Tomemos una carga q_1 y la fijamos
 - El trabajo hecho para arreglar un sistema de dos cargas en de una forma particular es

$$W = - \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \cdot d\vec{r}$$



$$W = - \int_{\infty}^{r_{12}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

1.3 ENERGÍA DE UN SISTEMA DE CARGAS

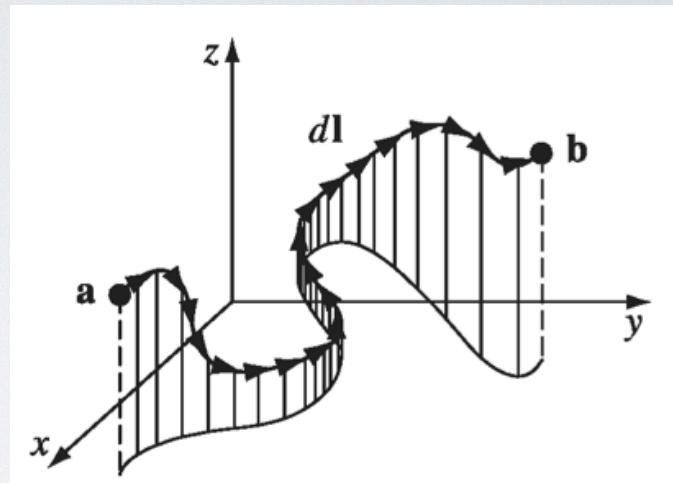
- Es fácil de ver de la expresión

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

que el trabajo hecho es

independiente de la trayectoria

- Usando el teorema del gradiente y el principio de superposición



$$W_3 = - \int \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} = - \int (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}) \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{32}}$$

} ↓

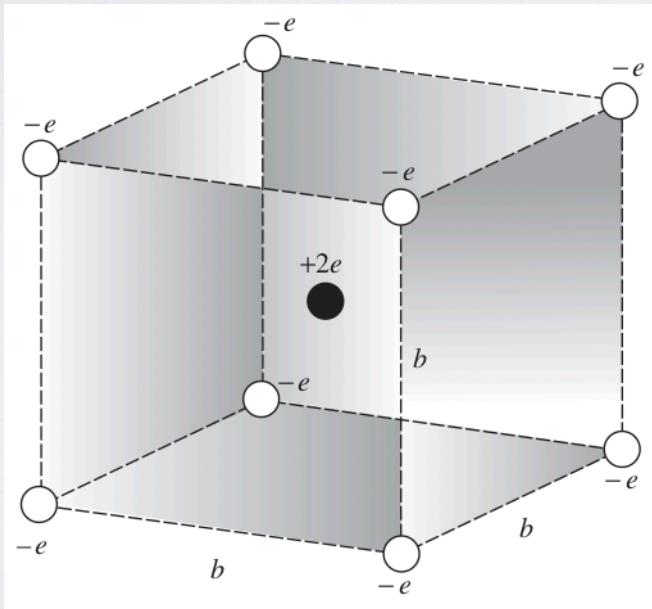
En general

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Energía potencial
eléctrica

1.3 ENERGÍA DE UN SISTEMA DE CARGAS

- Ejemplo: ¿Cuál es la energía potencial de un arreglo de ocho cargas negativas puestas en las esquinas de un cubo de lado b , y una carga positiva puesta en el centro del cubo? Suponga que cada carga es un electrón con carga $-e$, mientras que la partícula en el centro tiene una carga positiva de $+2e$.



Solución:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(8 \frac{(-2e^2)}{b\sqrt{3}/2} + 12 \frac{e^2}{b} + 12 \frac{e^2}{b\sqrt{2}} + 4 \frac{e^2}{b\sqrt{3}} \right)$$

1.4 CAMPO ELÉCTRICO

- Supongamos que tenemos un arreglo de cargas, $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$, fijas en el espacio
- Queremos cuantificar la fuerza que siente q_0 debido al arreglo
- La fuerza es proporcional a q_0

- Sin problema se puede factorizar
- Podemos dividir entre la carga y definir una cantidad, campo vectorial que guarda las propiedades del sistema



Vector unitario que va desde la carga j al punto (x, y, z) donde se encuentra la carga 0

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_0 q_j}{r_{0j}^2} \hat{r}_{0j}$$

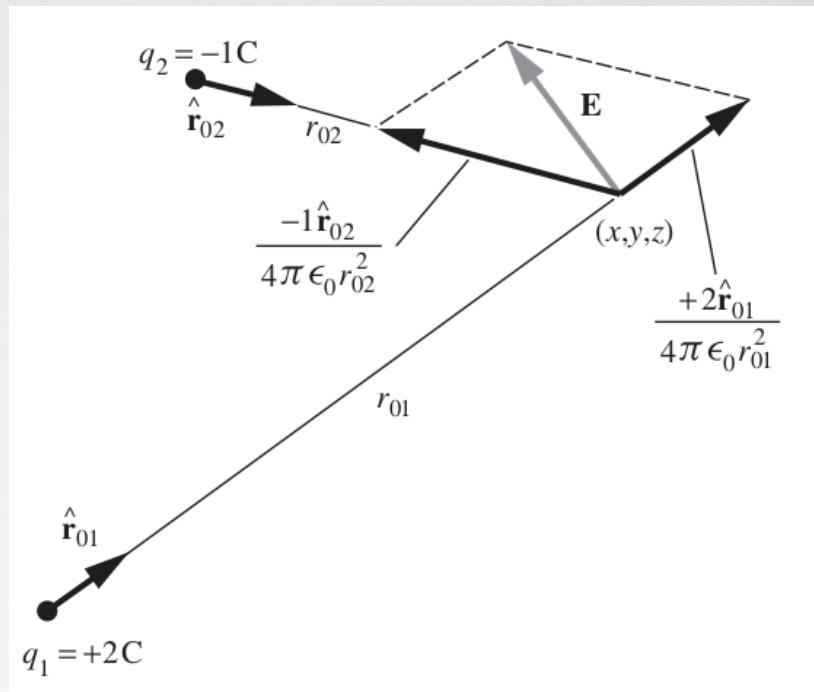


Campo eléctrico

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{r_{0j}^2} \hat{r}_{0j}$$

1.4 CAMPO ELÉCTRICO

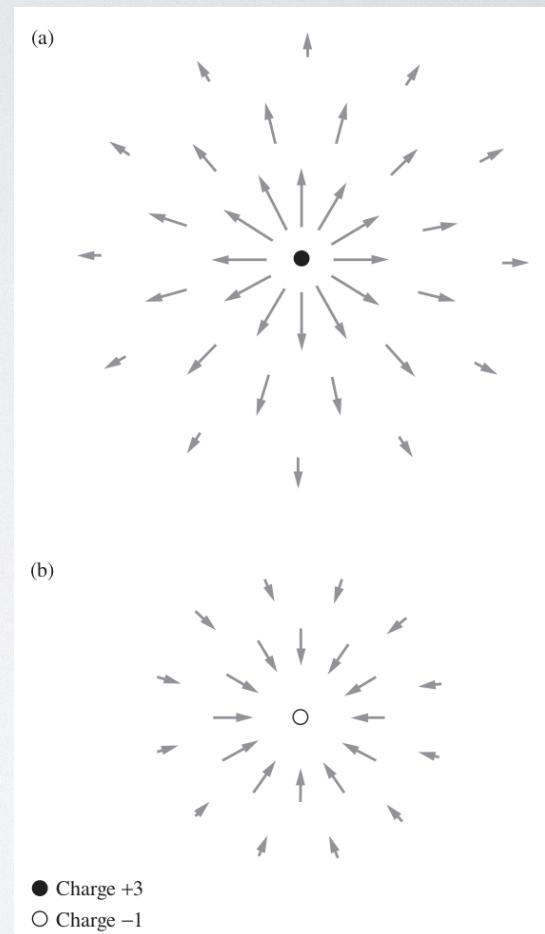
- El campo eléctrico es otra forma de describir un sistema de cargas [Fuerza por unidad de carga = newtons/coulomb]
- Tiene magnitud y dirección
- Describe una propiedad inherente al sistema generada por el hecho de tener carga
- Si hay carga, asociada a ella existe un campo eléctrico
- Es la capacidad que tiene una carga q_0 de ejercer una fuerza sobre cualquier otra en cualquier punto del espacio



Si conocemos el campo eléctrico \vec{E} en cualquier vecindad, sabremos qué pasará con una carga que se encuentre en esa vecindad

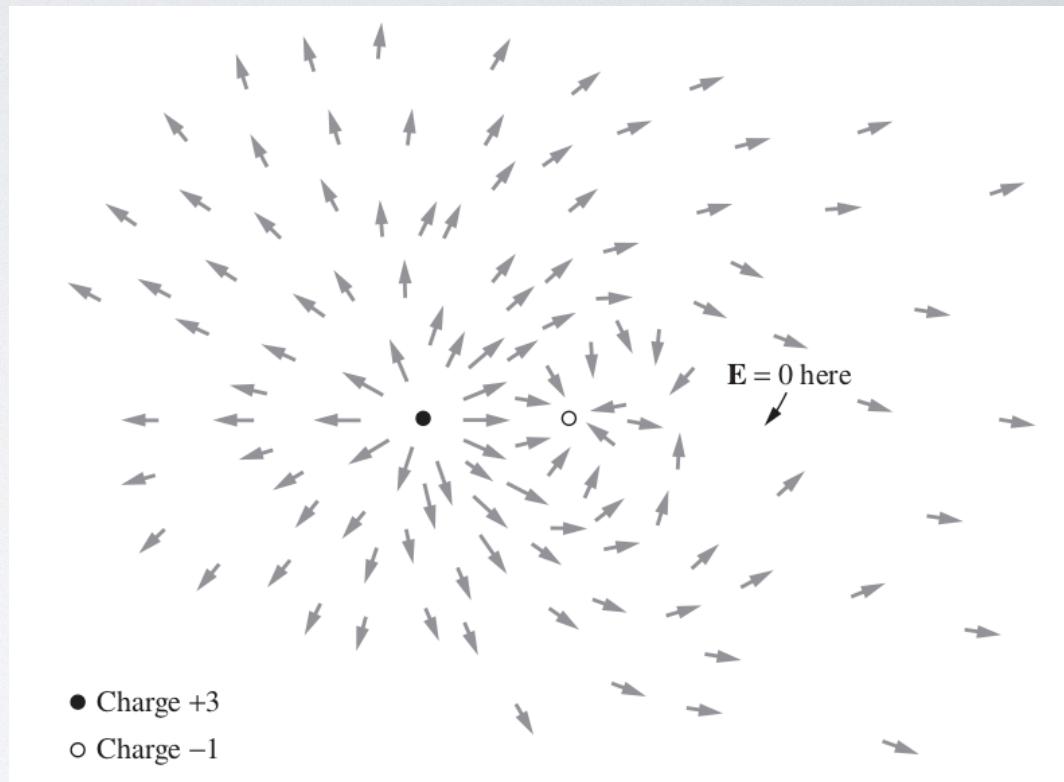
1.4 CAMPO ELÉCTRICO

- De la definición del campo eléctrico podemos hacer una representación gráfica del él asociando un vector a cada punto del espacio, con una magnitud y una dirección
- Para cargas aisladas el campo eléctrico tiene las siguientes características
 - Es radial e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia
 - Hacia afuera para cargas positivas
 - Hacia adentro para cargas negativas



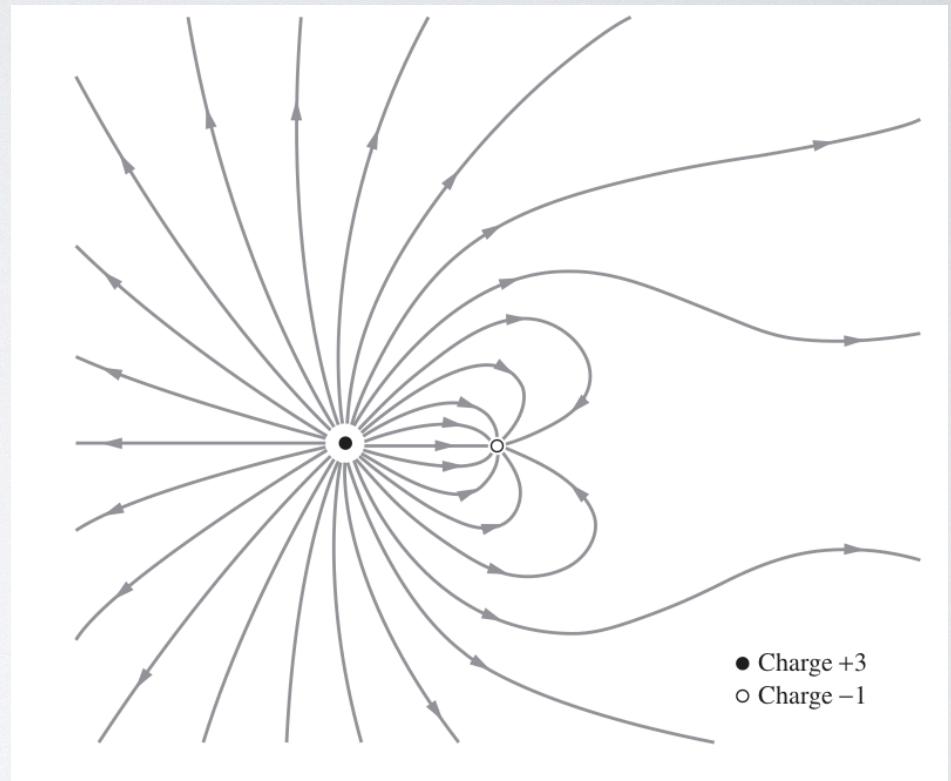
1.4 CAMPO ELÉCTRICO

- El campo eléctrico hereda las propiedades de la fuerza de Coulomb
- En particular se vale el principio de superposición
- El campo total en un punto del espacio será la suma de los campos individuales en ese punto específico del espacio



1.4 CAMPO ELÉCTRICO

- Otra representación del campo eléctrico es usando las llamadas líneas de campo
- Curvas cerradas cuya tangente en cualquier punto del espacio va en la dirección del campo en ese punto
- Las curvas son suaves y continuas, excepto en las singularidades
- Nota: Debemos notar que en esta representación no se muestra la magnitud del campo

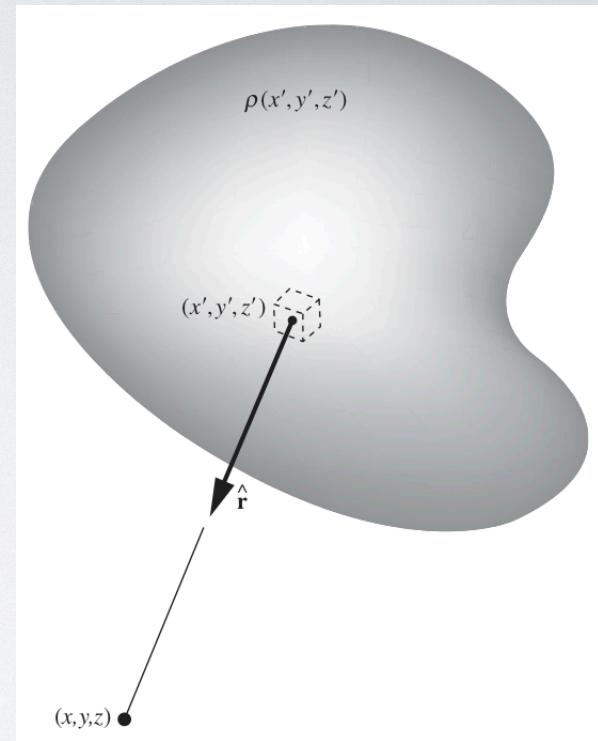
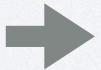


1.4 CAMPO ELÉCTRICO

- Ejemplo: Encontrar el campo eléctrico en el $(0,0,5)m$ debido a una carga $q_1 = 0.35\mu C$ en $(0,4,0)$ y $q_2 = -0.55\mu C$ en $(3,0,0)$

1.4 CAMPO ELÉCTRICO

- Se puede generalizar el resultado de cargas puntuales a distribuciones continuas de carga
- Una distribución está descrita por una función de densidad de carga, que es función de la posición
- La carga contenida en una pequeña caja de volumen $dxdydz$ en un punto (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z)dxdydz$
- Si la fuerte del campo eléctrico es una distribución continua de carga podemos usar el principio de superposición y utilizar una suma de Riemann en el límite cuando el volumen es muy pequeño y encontrar



$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z') \hat{r}}{r^2} dx' dy' dz'$$

\hat{r} va de (x', y', z') a (x, y, z)

1.4 CAMPO ELÉCTRICO

Distribución	Símbolo	Unidades en SI	cantidad de carga dq
Carga	q	C	—
Densidad de carga lineal	λ	C/m	$dq = \lambda dl$
Densidad de carga superficial	σ	C/m ²	$dq = \sigma dA$
Densidad de carga volumétrica	ρ	C/m ³	$dq = \rho dV$

1.4 CAMPO ELÉCTRICO

- Ejemplo: Un hemisferio sólido de radio R tiene una densidad de carga uniforme ρ . Encuentre el campo eléctrico en el origen

Solución:

Coordenadas esféricas

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \\ dx dy dz &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \end{aligned} \right\}$$

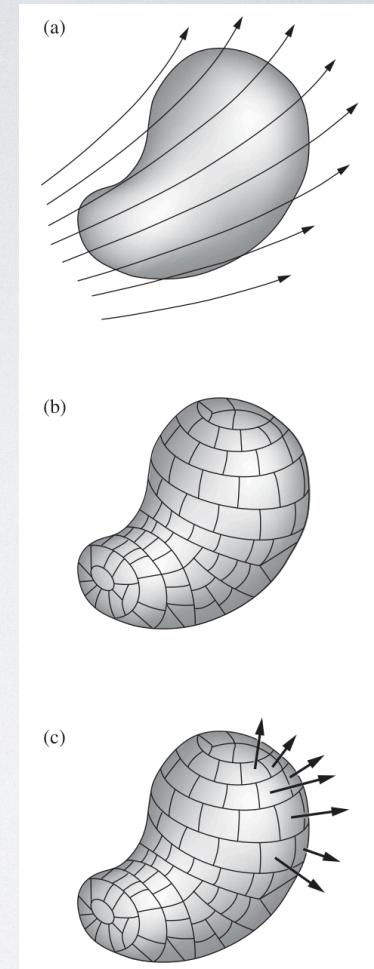
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r^2} \hat{r} dx dy dz = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho \int \frac{\hat{r}}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$



$$\vec{E} = - \frac{R}{2\epsilon_0} \rho \hat{z} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = - \frac{R}{4\epsilon_0} \rho \hat{z}$$

1.5 LEY DE GAUSS

- Un hecho importante es que hay una relación entre el campo eléctrico y sus fuentes y que puede expresarse a través del flujo
- Consideremos el campo eléctrico en una región del espacio y una superficie arbitraria
 - La superficie se llena por las líneas de campo
 - Si dividimos la superficie en pequeñas superficies con vectores \vec{a}_i
 - Sea \vec{E}_i el campo eléctrico en cada una de los parches \vec{a}_i
 - El producto escalar $\vec{E}_i \cdot \vec{a}_i$ es el flujo a través de cada superficie



1.5 LEY DE GAUSS

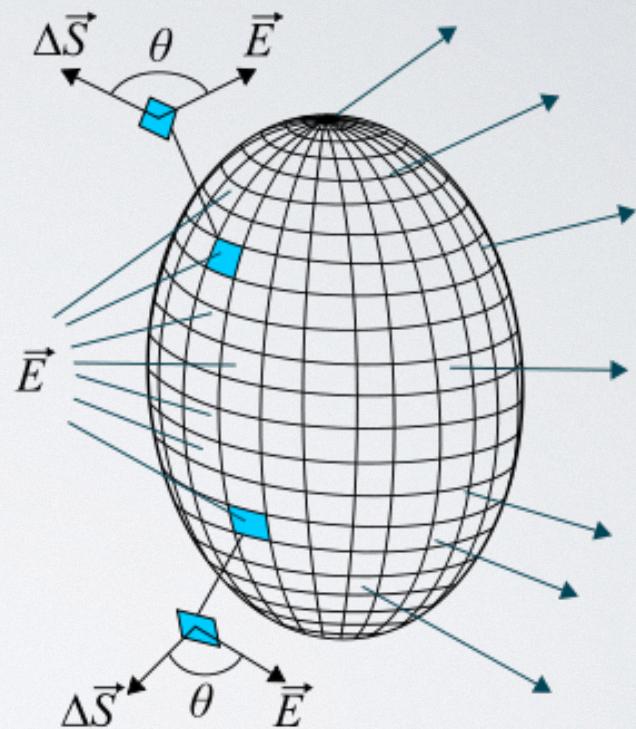
- El flujo total sobre todos los parches es una cantidad que se denota por

$$\Phi = \sum_i \vec{E}_i \cdot \vec{a}_i$$

- En el límite cuando los parches tienden a cero el flujo del campo eléctrico se expresa como

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

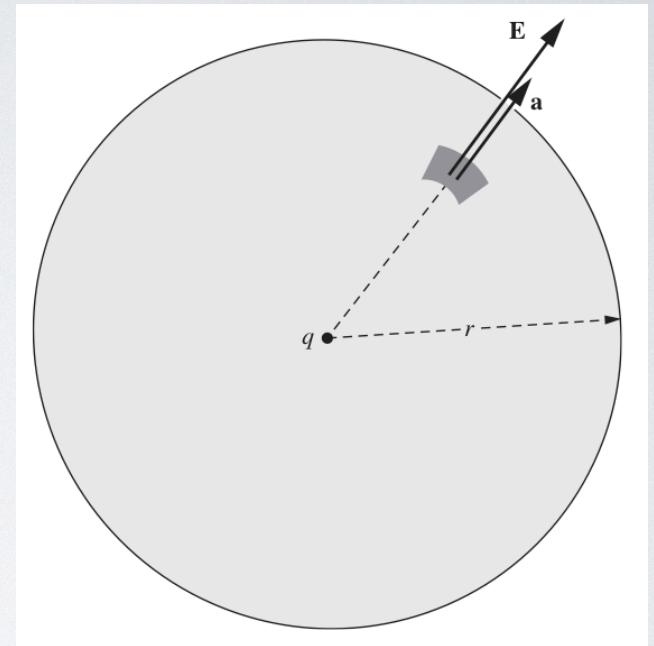
Superficie



1.5 LEY DE GAUSS

- Supongamos que una carga puntual en el origen. ¿Cuál es el flujo a través de una superficie cerrada?
- El campo es radial
- Tomamos una superficie esférica
- El flujo total es:

$$\Phi = \int_{sphere} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{sphere} \frac{\hat{r} \cdot \hat{r}}{r^2} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Observación: Inmediatamente tenemos que si no hay una carga encerrada en la superficie, entonces el flujo total es cero

1.5 LEY DE GAUSS

- El resultado puede generalizarse a cualquier superficie cerrada
- El flujo a través de una elemento de área es

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$



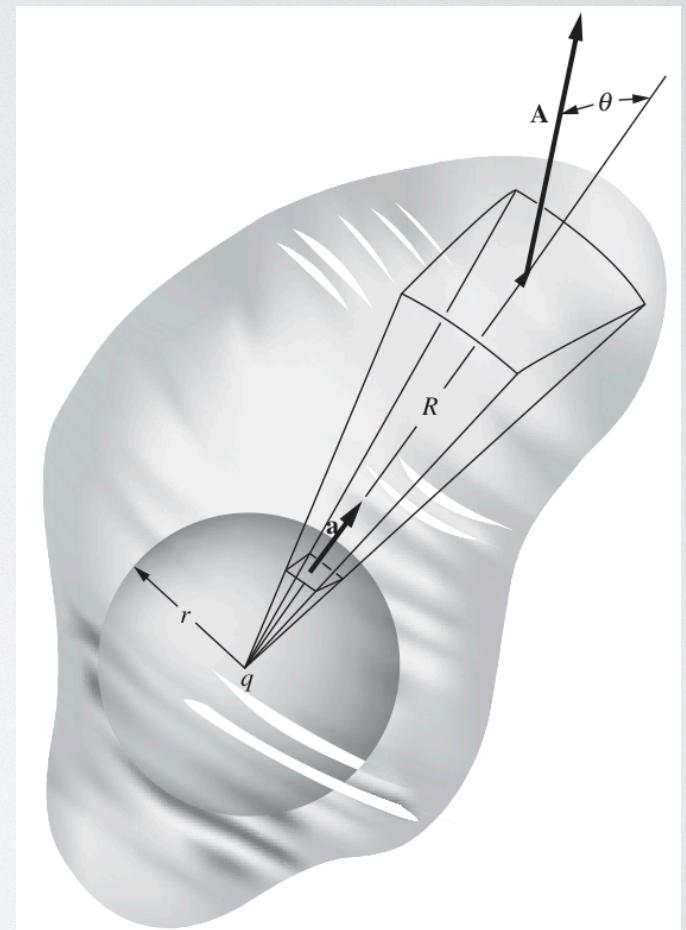
$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Ley de Gauss

El flujo del campo eléctrico \vec{E} a través de cualquier superficie cerrada es igual a $1/\epsilon_0$ veces la carga total encerrada por la superficie

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i + \frac{1}{\epsilon_0} \sum_j \int \rho_j dV_j$$



1.5 LEY DE GAUSS

- Ejemplo: Supongamos que tenemos una esfera con una densidad de carga uniforme

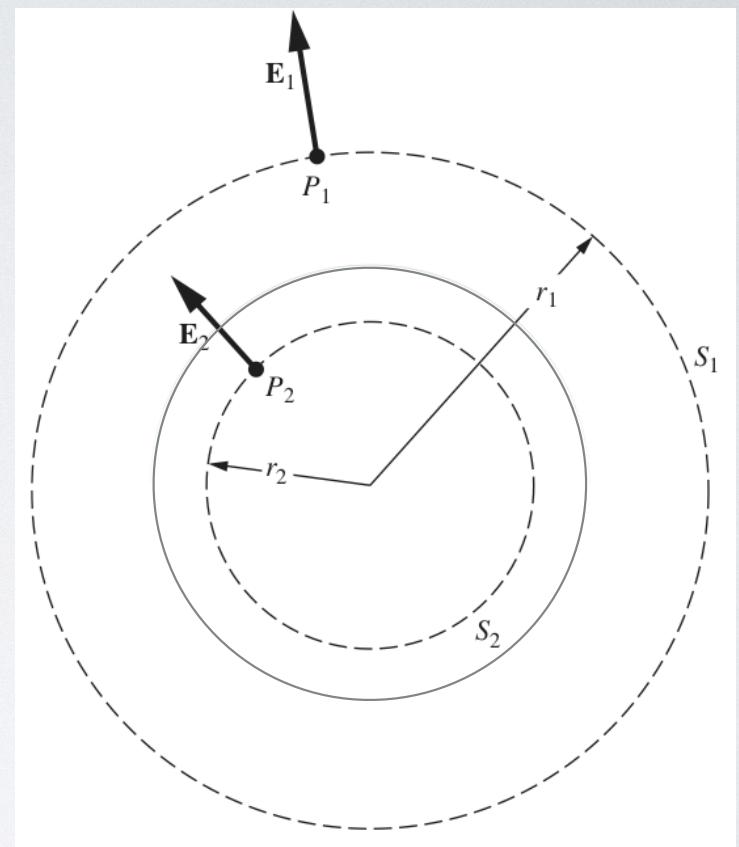
- Usando la ley de Gauss encontramos que

- Dentro de la distribución

$$E_2 = \frac{\text{carga encerrada } S_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

- Fuera de la distribución

$$E_2 = \frac{\text{carga encerrada } S_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$$

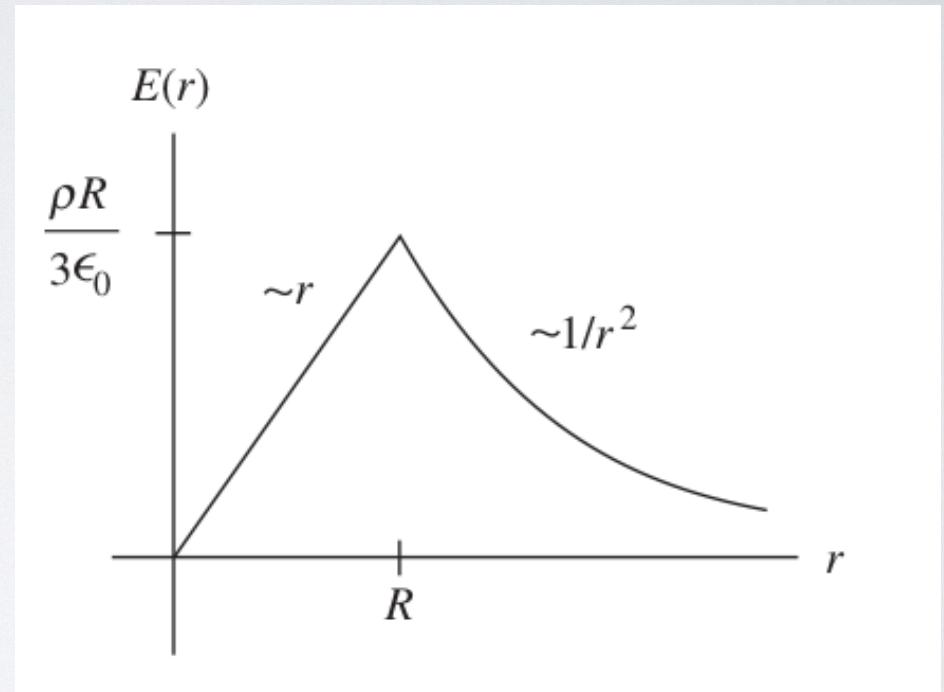


1.5 LEY DE GAUSS

$$E(r) = \frac{(4\pi R^3/3)\rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$

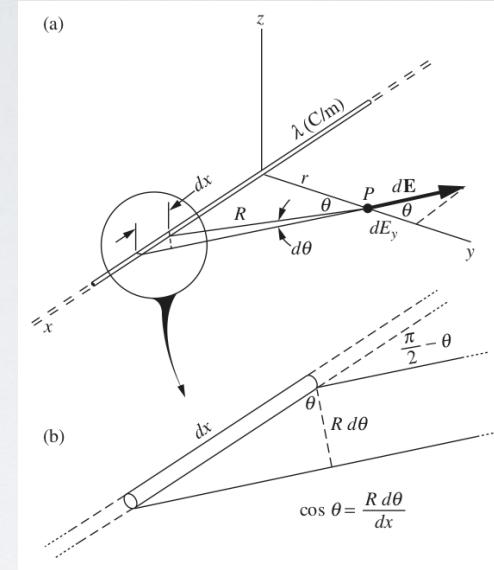
$$E(r) = \frac{(4\pi r^3/3)\rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r \leq R)$$

Observación: Para esta simetría, si no hay distribución de carga dentro de la esfera (cascarón esférico), el campo eléctrico es idénticamente cero



1.5 LEY DE GAUSS

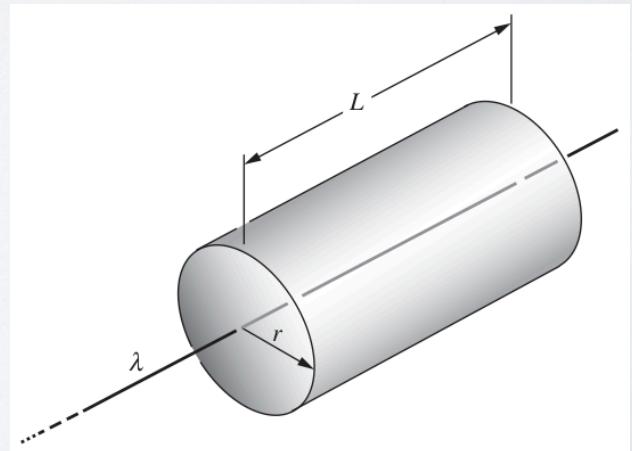
- Consideremos un filamento uniformemente cargado a lo largo del eje x
- Sea λ la densidad lineal de carga (coulombs/metro)
- El campo eléctrico tiene simetría cilíndrica
- Es fácil encontrar la magnitud del campo eléctrico usando la ley de Gauss



$$d\vec{S} = \begin{cases} \rho d\phi dz \hat{\rho} & \text{en } \hat{\rho} \\ \pm \rho d\rho d\phi \hat{z} & \text{en } \hat{z} \end{cases}$$

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_\rho \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \rho d\phi dz$$

$$\downarrow E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



1.5 LEY DE GAUSS

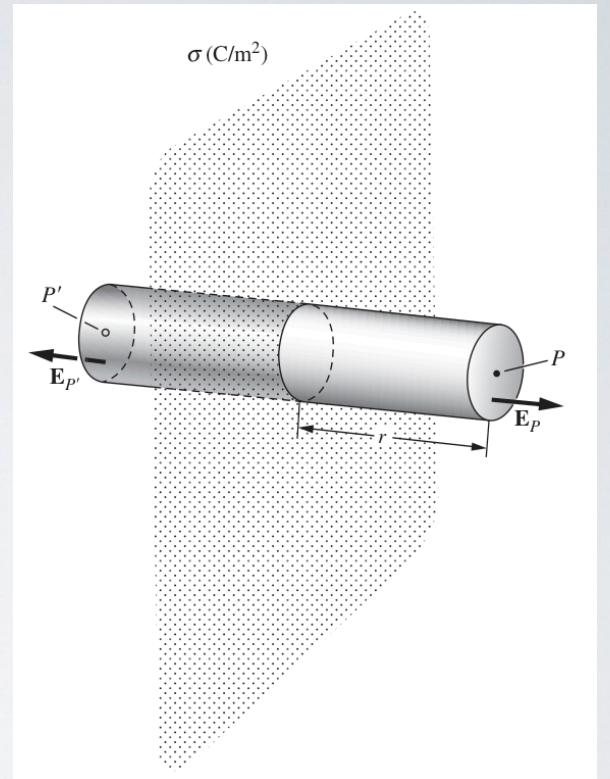
- Ahora consideremos un plano infinito con densidad superficial de carga
- Sea σ la densidad superficial de carga (coulombs/metro²)
- El campo eléctrico puede considerarse con simetría cilíndrica o cartesiana
- Usando la ley de Gauss

$$d\vec{S} = \pm \rho d\rho d\phi \text{ en } \hat{z}$$

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{z+} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\phi - E_{z-} \int_0^R \int_0^{2\pi} - \rho d\rho d\phi$$



$$E_{z+} 2\pi R^2 + E_{z-} 2\pi r^2 = 2A E_z = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \vec{E}_{\perp+} - \vec{E}_{\perp-} = (\sigma/\epsilon_0) \hat{n}$$



¡Es constante! No depende del punto de observación

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

1.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

- Supongamos que existe un campo eléctrico estacionario \vec{E} debido a una distribución de carga, por ejemplo una carga puntual q

$$, \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

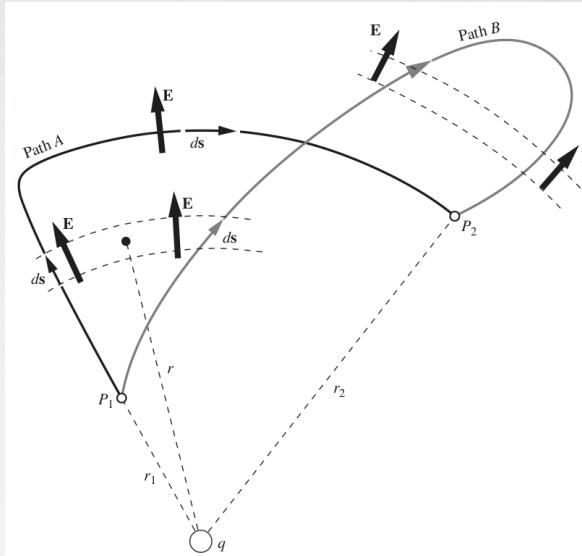
- Sean P_1 y P_2 cualquiera dos puntos en el espacio
- Considere cualquier trayectoria de P_1 a P_2
- La integral de línea del campo sobre la trayectoria es

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

La integral es independiente
de la trayectoria!



La integral de línea $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ para cualquier campo eléctrico \vec{E} tiene el mismo valor para todas las trayectorias de P_1 a P_2



NOTA: Si tenemos más de una carga puntual, el campo eléctrico total será la suma de los campos eléctricos generados por cada carga en cualquier punto del espacio (principio de superposición)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N$$

La integral de línea $\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ en una trayectoria cerrada es idénticamente cero

1.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

- Una consecuencia de que la integral de línea se independiente de la trayectoria es
- Podemos definir una cantidad escalar sin especificar una trayectoria particular

Diferencia de potencial eléctrico

$$\phi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Unidad \longrightarrow $1 \text{ volt} = 1 \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}$

Un Joule es el trabajo requerido para mover $1C$ a través de una diferencia de potencial de $1V$

Es el trabajo por unidad de carga hecho por un agente externo al mover una carga positiva desde un punto P_1 a P_2 a través del campo eléctrico \vec{E}

- Supongamos que mantenemos P_1 fijo a una posición de referencia
 - Entonces se convierte en una función sólo de P_2
 - Es una función de las coordenadas



$$\phi(x, y, z) = - \int_{P_1}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Potencial eléctrico asociado con el campo eléctrico

1.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

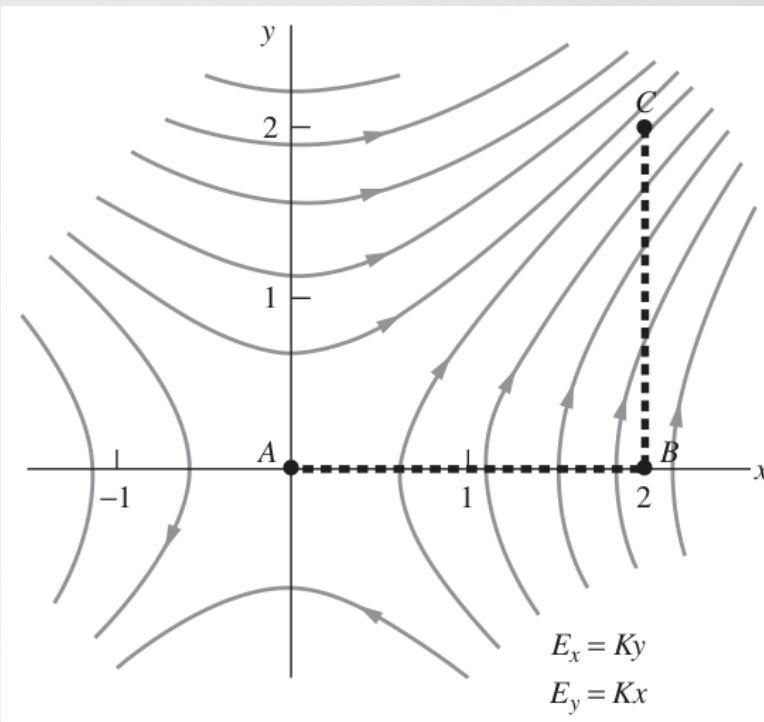
- Ejemplo: Encuentre el potencial eléctrico debido al campo eléctrico con componentes

$$E_x = ky, \quad E_y = Kx, \quad E_z = 0$$

con K constante

Solución:

$$\begin{aligned}\phi(x_2, y_2) &= - \int_{(0,0)}^{(x_2, y_2)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{(0,0)}^{(x_2, 0)} E_x dx - \int_{(x_2, 0)}^{(x_2, y_2)} E_y dy \\ &= - \int_{(x_2, 0)}^{(x_2, y_2)} E_y dy = \int_0^{y_2} Kx_2 dy = -Kx_2 y_2\end{aligned}$$



$$\implies \phi(x, y) = -Kxy$$

1.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

- Ejemplo: Consideremos una esfera de radio R y densidad de carga uniforma ρ . Encuentre el potencial eléctrico para todo r . Tome como punto de referencia el infinito

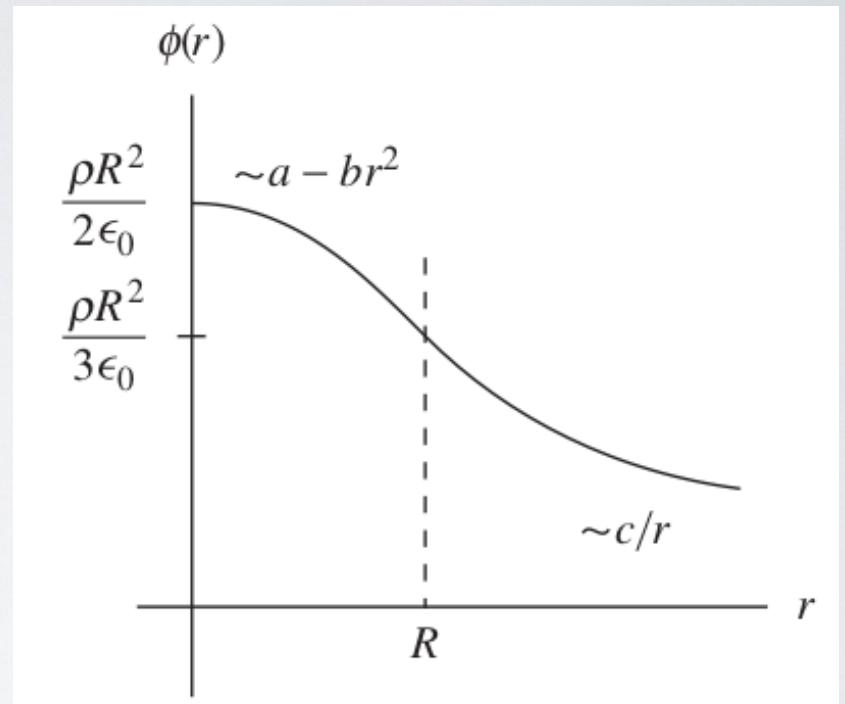
Solución:

Como el campo eléctrico es radial

$$E(r) = \begin{cases} \rho r / 3\epsilon_0 & r < R \\ \rho R^3 / 3\epsilon_0 r^2 & r \geq R \end{cases}$$

$$\phi_{out}(r) = - \int_{\infty}^r E(r') dr' = - \int_{\infty}^r \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

$$\phi_{in} = - \int_{\infty}^R E(r') dr' - \int_R^r E(r') dr' = - \int_{\infty}^R \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r'^2} dr' - \int_R^r \frac{\rho r'}{3\epsilon_0} dr' = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 R} - \frac{\rho}{6\epsilon_0} (r^2 - R^2) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$$



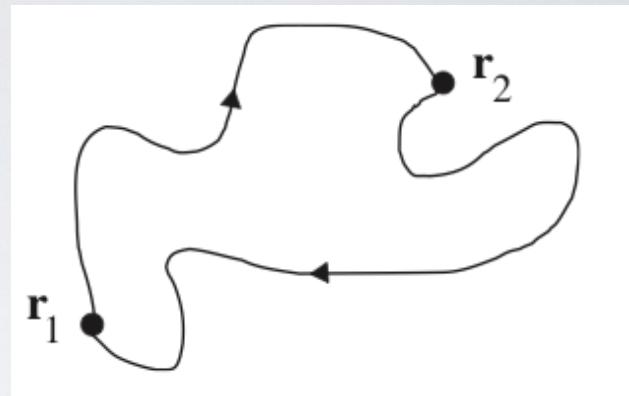
1.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

- Usando el hecho que la fuerza de Coulomb es conservativa encontramos
 - El potencial eléctrico hereda las propiedades
 - Usando la definición de trabajo, tenemos

$$W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$



$$W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_1} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} + q \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot d\vec{r}' = q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$



Usando el teorema de Stokes

$$\Rightarrow q \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

¡Cierto para cualquier curva cerrada!

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

1.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

- El rotacional del campo electrostático es cero
- Usando el teorema de Helmholtz podemos decir que el campo eléctrico proviene de una expresión como

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla f(\vec{r})$$

Inmediatamente encontramos que se debe cumplir que el campo proviene de la expresión

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \phi}$$

Potencial eléctrico
 $\phi(x, y, z) - \phi(x_1, y_1, z_1) = - \int_{P_1}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Valor de referencia

Existen puntos en el espacio donde el potencial es constante

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0$$

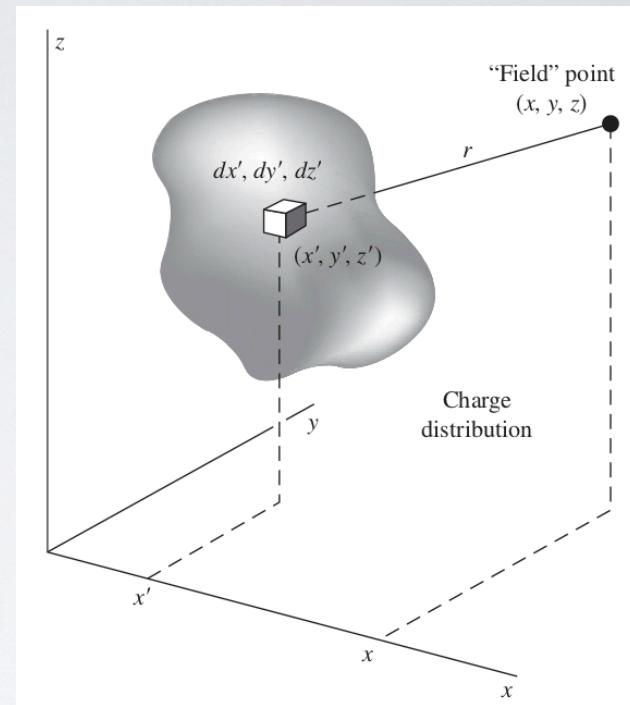
Familia de superficies embebidas en tres dimensiones llamadas equipotenciales

¡¡No se hace trabajo al mover una carga sobre una equipotencial!!

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

1.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

- Sabemos cómo es la expresión del potencial eléctrico para una carga puntual (referenciado a infinito)
- Podemos extender ese resultado a distribuciones continuas de carga
 - El principio de superposición se cumple
 - Si tenemos muchas fuentes infinitesimales, el potencial total en un punto del espacio es la suma de todos los potenciales generados por cada volumen infinitesimal



$$\phi(x, y, z) = \int_{\text{a.s.}} \frac{\rho(x', y', z')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy' dz'$$

\rightarrow

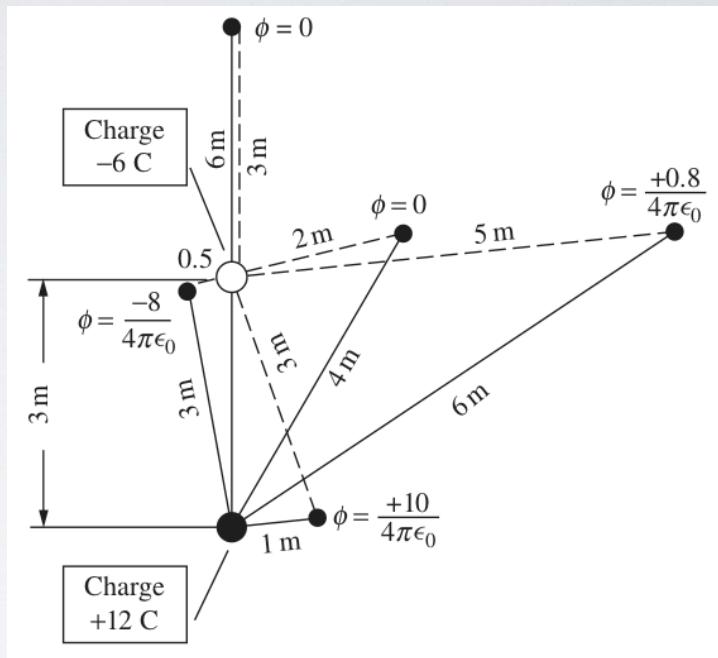
$$\rho(\vec{r}') = \sum_i q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

$$\phi(x, y, z) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

1.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

- Ejemplo: Considere el potencial de dos cargas puntuales. Una carga positiva de $12 \mu\text{C}$ está localizada a 3m de una carga negativa, $-6\mu\text{C}$

Solución:



$$\phi = \sum_{i=1}^2 \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{12 \times 10^{-6}\text{ C}}{6\text{ m}} + \frac{-6 \times 10^{-6}\text{ C}}{5\text{ m}} \right) = \frac{0.8 \times 10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} = 7.2 \times 10^3 \text{ J/C}$$

1.6 POTENCIAL ELÉCTRICO

- Ejemplo: Encuentre el potencial eléctrico debido a un disco, con densidad uniforme de carga, a lo largo del eje de simetría

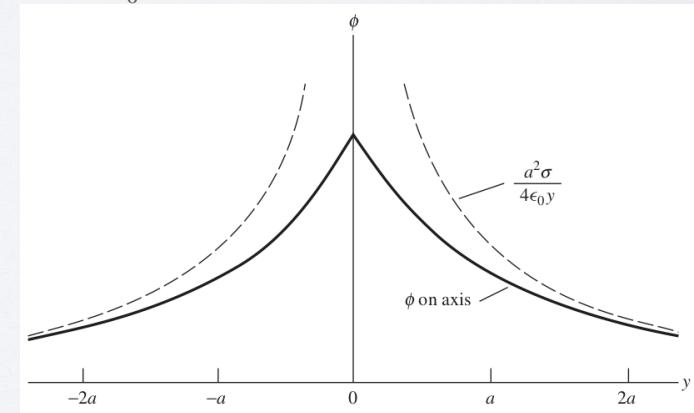
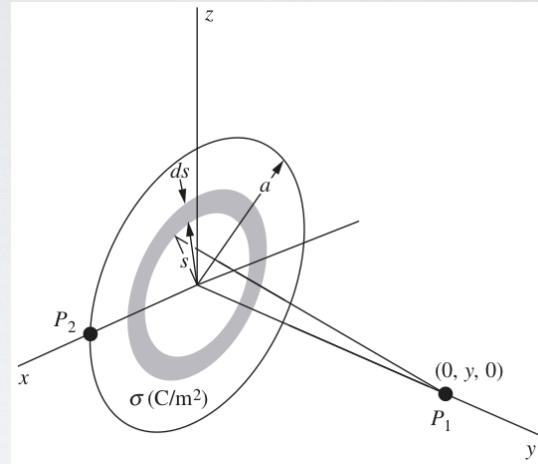
Solución:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \sigma(\vec{r}') = \sigma, \quad dS = \rho d\rho d\varphi$$

$$\phi(0,y,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma \rho d\rho d\varphi}{\sqrt{y^2 + \rho^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{y^2 + \rho^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{y^2 + \rho^2} \Big|_0^a$$

$$\phi(0,y,0) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{y^2 + a^2} - y \right) & \text{for } y > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{y^2 + a^2} + y \right) & \text{for } y < 0 \end{cases}$$

$$\phi(0,0,0) = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0}$$



1.7 ENERGÍA ELECTROSTÁTICA TOTAL

- La energía electrostática total U_E está definida como el trabajo total necesario para hacer un arreglo de distribuciones de carga desde un estado inicial donde todas las cargas se encuentran en infinito

- Para un grupo de cargas puntuales

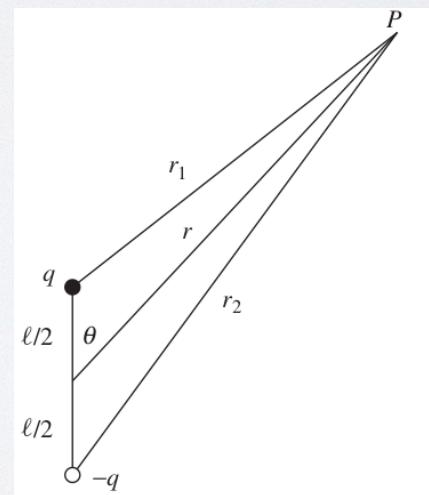
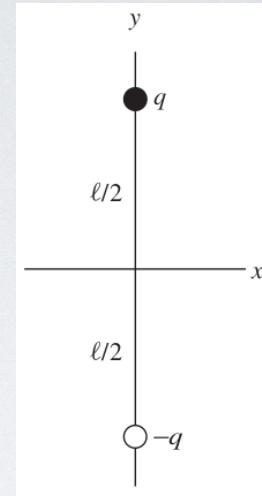
$$\left\{ \begin{array}{l} U_E = W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \sum_{i>j}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ \\ U_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\vec{r}_i) \end{array} \right.$$

- Para una distribución $\longrightarrow U_E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d^3r$

1.8 DIPOLO ELÉCTRICO (PRIMERA APROXIMACIÓN)

- Consideremos un arreglo de dos cargas iguales pero de carga opuesta $\pm q$ localizadas en $(0,0, \pm l/2)$
- Esta configuración se conoce como dipolo
- Consideremos que observamos el dipolo desde un punto que cumple con $r > > l$
- El potencial observado en P debido a las dos cargas es

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} \right)$$



1.8 DIPOLO ELÉCTRICO (PRIMERA APROXIMACIÓN)

- Podemos derivar una expresión del potencial en términos de r, θ y l

$$r_1 = r - \frac{l}{2} \cos \theta \quad r_2 = r + \frac{l}{2} \cos \theta$$



$$\phi(r, \theta) = \frac{kq}{r - \frac{l \cos \theta}{2}} - \frac{kq}{r + \frac{l \cos \theta}{2}} = \frac{kq}{r} \left[\frac{1}{1 - \frac{l \cos \theta}{2r}} - \frac{1}{1 + \frac{l \cos \theta}{2r}} \right]$$

↓ tomado $r \gg l$, $1/(1 \pm \epsilon) \approx 1 \mp \epsilon$

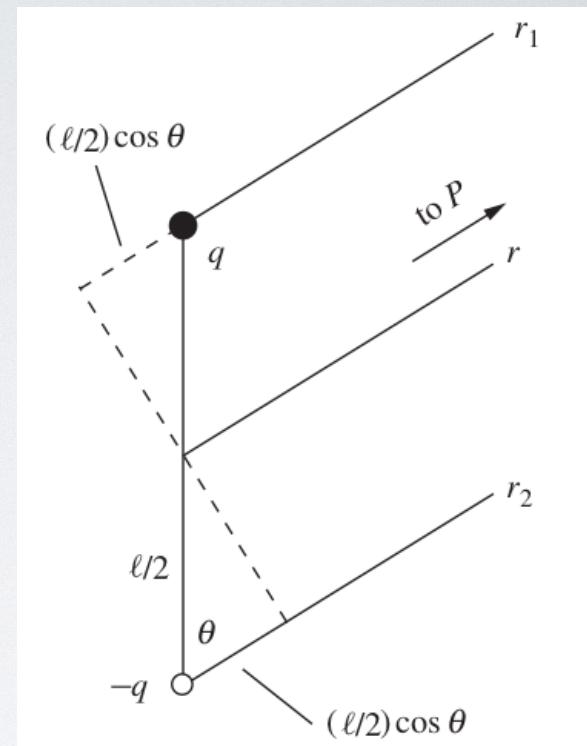
$$\phi(r, \theta) \approx \frac{kq}{r} \left[1 + \frac{l \cos \theta}{2r} - \left(1 - \frac{l \cos \theta}{2r} \right) \right] = \frac{kql \cos \theta}{r^2}$$



$$\boxed{\phi(r, \theta) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

con

$p \equiv ql$ Momento dipolar: medida de la polaridad de un sistema

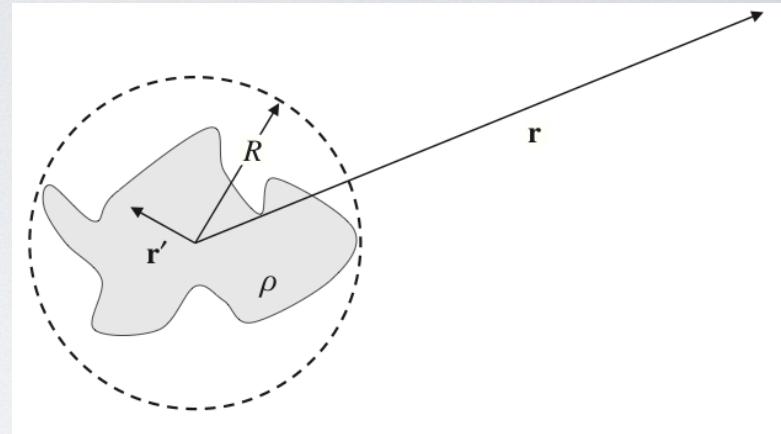


1.9 EXPANSIÓN MULTIPOLAR

- Podemos describir diferentes órdenes en la expansión, no sólo el término líder (dipolos, cuadrupolos, octupolos, etc.) de una manera formal
- Consideremos una distribución de carga con carga total Q confinada enteramente dentro de una esfera de radio R
- Tomando puntos que están fuera de la esfera tal que $r' \ll r$
- Es razonable remplazar el factor $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ por su serie de Taylor



Sustituyendo la expansión en la definición de potencial eléctrico produce una serie conocida como expansión multipolar



$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} - \dots$$



$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\int_{V'} \rho(\vec{r}') dV' \right] \frac{1}{r} - \left[\int_V \rho(\vec{r}') r'_i dV' \right] \partial_i \frac{1}{r} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left[\int_{V'} \rho(\vec{r}') r'_i r'_j dV' \right] \partial_i \partial_j \frac{1}{r} - \dots \right\} \end{aligned}$$

1.9 EXPANSIÓN MULTIPOLAR

- Los términos dentro de las llaves tienen nombres especiales

- En el caso especial de cargas puntuales

$$\text{podemos usar la relación } \rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$Q = \int \rho(r) dV = \sum_{\alpha} q_{\alpha}$$

- Momento monopolar eléctrico

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}) \vec{r} dV = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

- Momento dipolar eléctrico

- Momento cuadrupolar eléctrico

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) r_i r_j dV = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} q_{\alpha} r_{\alpha i} r_{\alpha j}$$



El potencial eléctrico se puede expresar como

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + Q_{ij} \frac{3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots \right\}$$

TEOREMA DE HELMHOLTZ

- An arbitrary vector field $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ can always be decomposed into the sum of two vector fields: One with zero divergence and one with zero curl. Specifically,

$$\vec{C} = \vec{C}_\perp + \vec{C}_\parallel$$

$$\text{where } \nabla \cdot \vec{C}_\perp = 0 \quad \text{and} \quad \nabla \times \vec{C}_\parallel = 0$$

An explicit representation of special interest is,

$$\vec{C}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) - \nabla \Omega(\vec{r})$$

with

$$\Omega(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\nabla' \cdot \vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

and

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\nabla' \times \vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

3.2.1

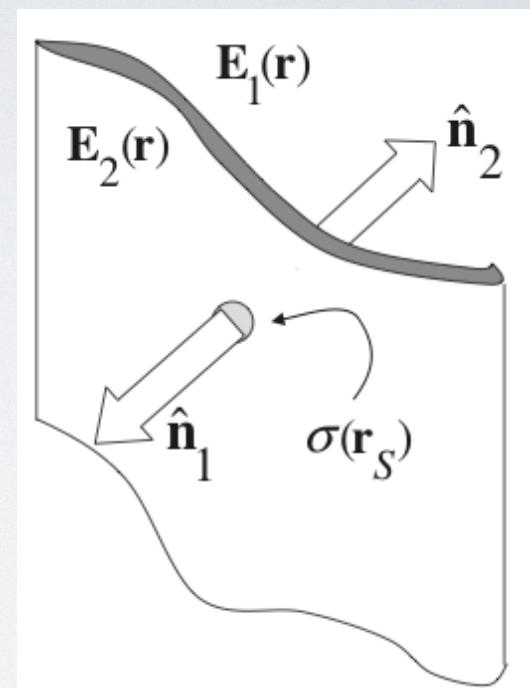
CONDICIONES DE FRONTERA

- La divergencia del campo eléctrico es igual a la densidad de carga encerrada en un volumen de una interfaz
 - Usando el Teorema de Gauss, podemos calcular la carga encerrada en una caja, de volumen infinitesimal, que encierre la interfaz (suponiendo que no hay medios materiales)

- Tendiendo a cero el ancho de la caja pero manteniendo el área, encontramos

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- Las componentes del campo electrostático perpendiculares a la superficie son discontinuas y la discontinuidad es igual a la densidad superficial de carga entre ϵ_0

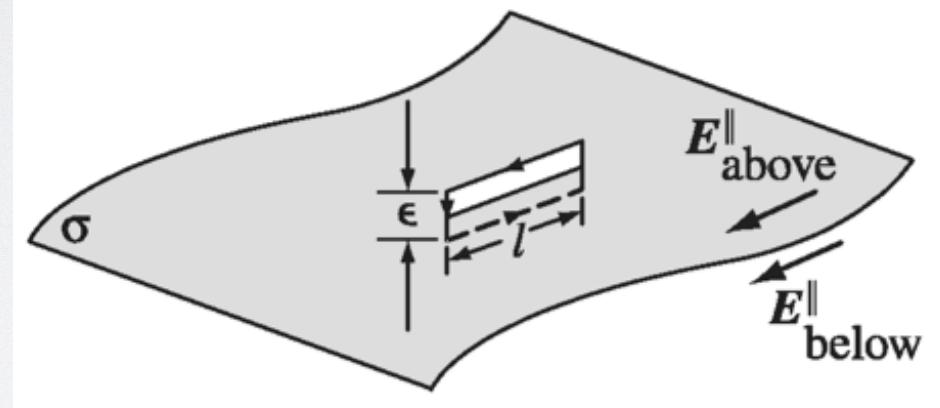


CONDICIONES DE FRONTERA

- Por otro lado, usando el hecho que el campo electrostático es conservativo, tenemos

$$W_{cycle} = q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$
$$\implies \vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}$$

- Las componentes del campo eléctrico paralelas a la superficie, son continuas



CONDICIONES DE FRONTERA

- Las condiciones de frontera para la función potencial se siguen de las encontradas para el campo electrostático

$$\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



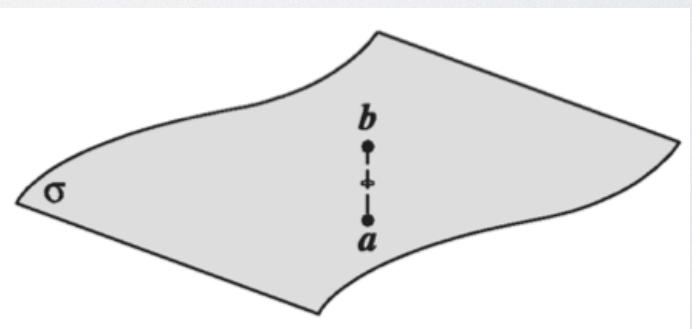
$\phi_1 = \phi_2$ ¡La función potencial es continua!

$$\hat{n}_2 \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



$$\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n_2} \right] = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La derivada dirección del la función potencial es discontinua



2.1 CONDUCTORES

- Clasificaremos los materiales en:
 - Aislantes eléctricos
 - Conductores eléctricos
- Un buen conductor, como lo son los metales, difieren de los aislantes en su conductividad por factores del orden de 10^{20}
- Estas propiedades dependen de la movilidad de las cargas como electrones o iones
- Un conductor puede ser definido como una región del espacio en la cual las cargas son libres de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico externo
 - El ejemplo más común es pensar en un metal

2.1 CONDUCTORES

- Nos enfocaremos en conductores ideales (homogéneos, isotrópicos, y con conductividad muy alta)
- En un estado estacionario de las cargas, después de que las partículas llegan a un equilibrio
 - No hay más movimiento
 - No hay campos electrostáticos en el interior

Si el campo eléctrico no fuera cero, las cargas experimentarían una fuerza y entonces, tendrían movimiento y no sería una situación estática

Esto implica que tampoco hay densidad de carga ρ en el interior del conductor

$$\vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad \rho(\vec{r}) \quad \text{para } \vec{r} \in V'$$

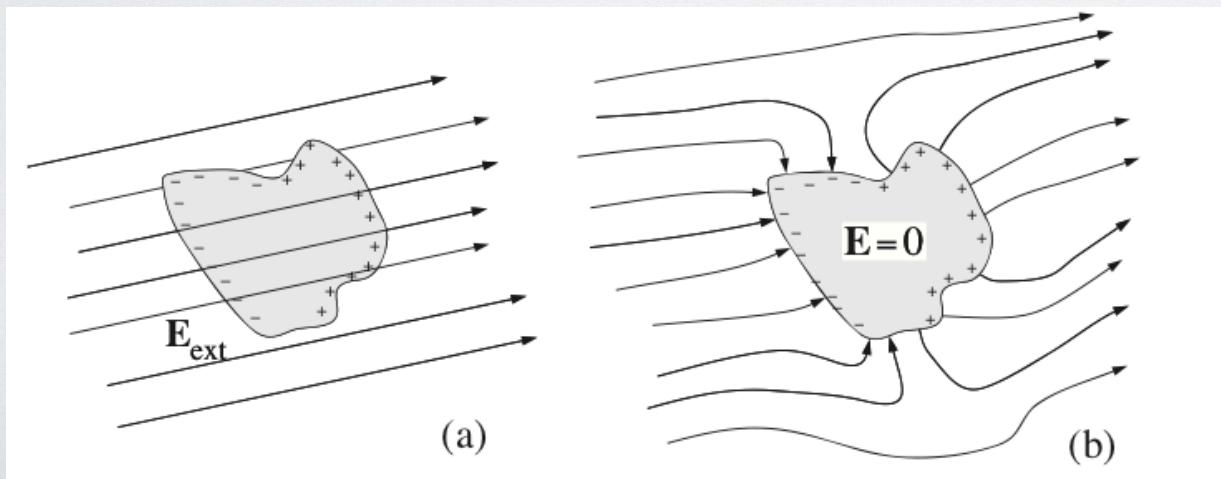
Implica que el exceso de carga se acumula en la superficie del conductor en la forma de una densidad superficial de carga $\sigma(\vec{r})$

2.1 CONDUCTORES

- El campo eléctrico afuera de un conductor puede ser tan complicado como la forma del conductor
- El campo dentro del conductor siempre es cero

- La densidad superficial final $\sigma(\vec{r})$ crea un campo propio de tal forma que cancela el campo exterior
- Dentro del conductor se tendrá un campo idénticamente cero

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{ext}(\vec{r}) + \vec{E}_{self}(\vec{r}) = \vec{E}_{ext} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0$$



2.1 CONDUCTORES

- La propiedad de tener campos eléctricos idénticamente cero dentro de un conductor nos lleva a las siguientes condiciones de frontera

$$\hat{n} \times (\vec{E}_{out} - \vec{E}_{in}) = 0$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_{out} - \vec{E}_{in}) = \frac{\sigma(\vec{r}_S)}{\epsilon_0}$$

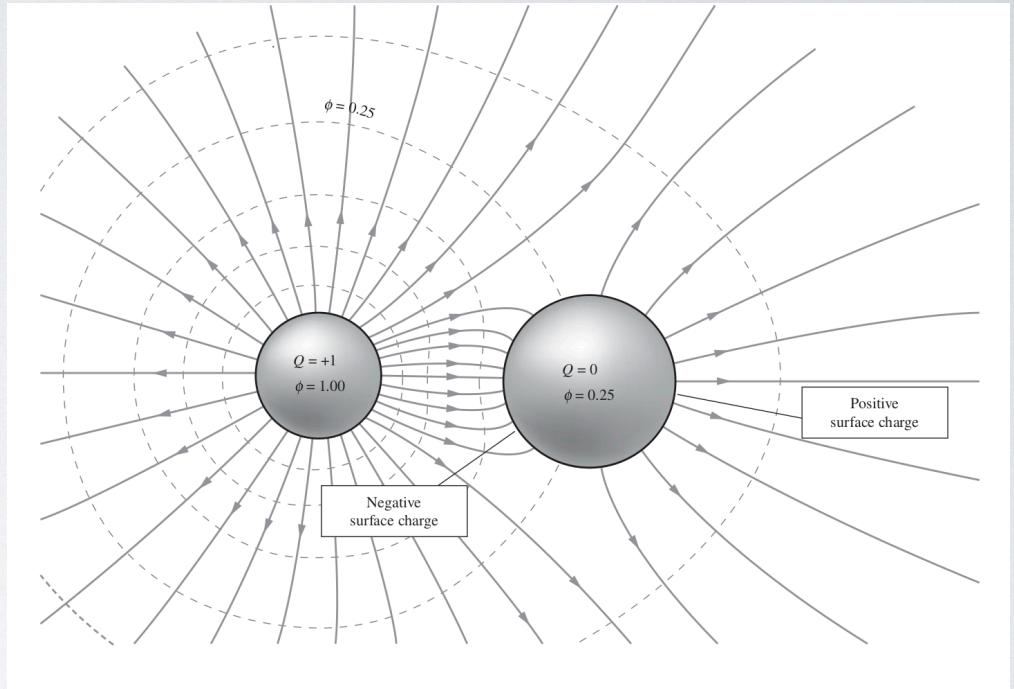
Pero $\vec{E}_{in} = 0$

$$\implies \vec{n} \times \vec{E}_{out|_S} = 0$$

¡Campo eléctrico perpendicular a la superficie!

$$\vec{E}_{out}(\vec{r}_S) = \hat{n} \frac{\sigma(\vec{r}_S)}{\epsilon_0}$$

Campo eléctrico sobre la superficie es proporcional a la densidad de carga



2.2 CAPACITANCIA

- Los conductores son usados para almacenar carga eléctrica
- Usamos el concepto de capacitancia para medir la capacidad cuantitativa de un conductor para almacenar carga, ya sea solo o en presencia de otro conductor
- Un conductor aislado con carga Q tendrá un potential ϕ_0
 - Q es proporcional a ϕ_0
 - La constante de proporcionalidad depende del tamaño y la forma del conductor

A este factor se le llama
capacitancia de un conductor
cumple con la relación

$$Q = C\phi_0$$

2.2 CAPACITANCIA

- Sea ϕ_0 el potencial de un conductor aislado con volumen V y superficie S
- Por ser conductor es una equipotencial, entonces podemos describir su forma funcional como

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 \hat{\phi}(\vec{r})$$

donde

$$\hat{\phi}(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \vec{r} \in V \\ 0 & |r| \rightarrow \infty \end{cases}$$

La carga total es

$$Q = -\epsilon_0 \phi_0 \int_S \nabla \hat{\phi} \cdot d\vec{S}$$

La proporcionalidad de la carga con el potencial ϕ_0 nos lleva a definir una cantidad puramente geométrica llamada auto-capacitancia

$$C = \frac{Q}{\phi_0} = -\epsilon_0 \int_S \nabla \hat{\phi} \cdot d\vec{S}$$

con unidades $1 \text{ fardad} = 1 \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}}$

2.2 CAPACITANCIA

- Por ejemplo la auto-capacitancia de un conductor esférico

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & r \leq R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r \geq R \end{cases} \implies \phi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad \hat{\phi} = \frac{R}{r}$$

$$\implies C = 4\pi\epsilon_0 R$$

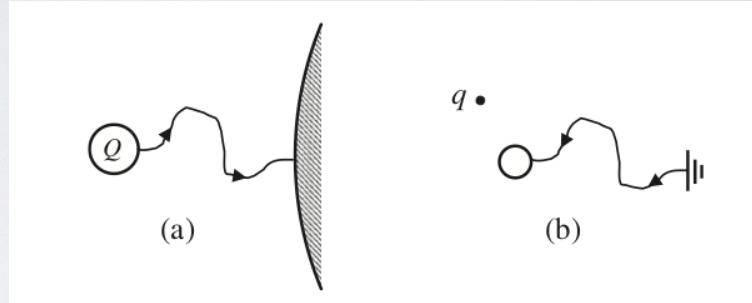
- La auto-capacitancia de un disco conductor de radio R

$$\phi(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}'|} dS' = \phi_0 \implies \phi_0 = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{Q}{8\epsilon_0 R}$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R \sqrt{R^2 - \rho^2}} \implies C = 8\epsilon_0 R$$

2.2 CAPACITANCIA

- Podemos suponer que la Tierra es una esfera conductora muy grande comparada con cualquier laboratorio
- Podemos decir que $C_{Tierra} \rightarrow \infty$, entonces, $\phi_{Tierra} \rightarrow 0$
- Prácticamente, la Tierra es un reservorio de carga
 - Cantidades finitas de carga pueden ser tomadas o añadidas sin un cambio de potencial
- Decimos que aterrizamos un conductor (fijamos el potencial a cero) conectándolo a la Tierra usando un cable conductor



- Si el conductor estaba cargado, al aterrizarlo haremos que el exceso de carga fluya a la Tierra
 - El potencial será cero
- De manera contraria, si el conductor está descargado, tomará carga de la Tierra y será añadida al sistema

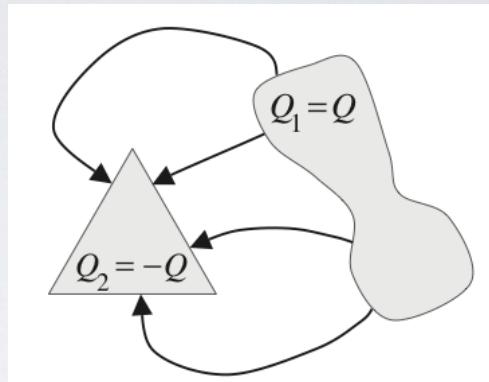
2.2 CAPACITANCIA

- Para un sistema de dos conductores que tienen carga opuesta y considerando que sus dimensiones lineales son mucho mayores que la separación entre ellos, se tiene

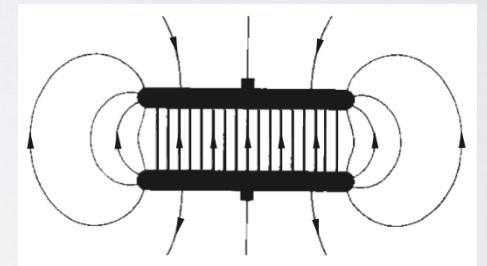
$$C = \frac{\epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Sobre el conductor con carga positiva

Diferencia de potencial entre conductores



- Ejemplo: placas paralelas



$$\pm Q/A, \text{ and } d \ll \sqrt{A}$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

2.2 CAPACITANCIA

- La energía total almacenada en un sistema de conductores se puede calcular
 - La carga sobre el conductor k es Q_k
 - La densidad superficial en el conductor es $\sigma(\vec{r})$
 - Cada conductor tiene un potencial ϕ_k
- 

$$U_E = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \phi_k \int_{S_k} \sigma(\vec{r}_S) dS = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_k \phi_k$$

Para dos conductores tenemos

$$U_E = \frac{1}{2} Q(\phi_2 - \phi_1) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C(\phi_2 - \phi_1)^2$$

2.3 MATERIALES DIELÉCTRICOS

- Un dieléctrico es un medio que no puede apantallar completamente en su interior a un campo electrostático externo
- Esto es una consecuencia de los enlaces químicos y otros efectos cuánticos
 - Estos fenómenos restringen el re-arrreglo de su densidad de carga interna cuando un campo externo es aplicado
 - Los dieléctricos no conducen (o lo hacen pobremente) corrientes eléctricas



$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}) = \vec{E}_{self}(\vec{r}) + \vec{E}_{ext} \neq 0$$

2.4 POLARIZACIÓN

- El término polarización se usa de dos formas
- Se refiere al arreglo de cargas internas que ocurre cuando la materia es expuesta a un campo electrostático externo
- Es el nombre dado a una función usada para caracterizar el detalle del arreglo

- Definimos la función $\vec{P}(\vec{r})$ como el momento dipolar por unidad de volumen

$$\Rightarrow d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r})dV$$



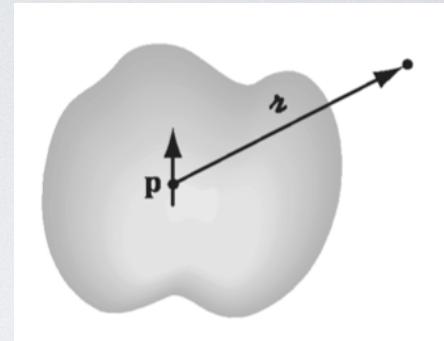
$$\vec{p}_{total} = \int_V \vec{P}(\vec{r})dV$$

2.5 DENSIDADES DE CARGA LIGADA

- Supongamos que tenemos un objeto polarizado
 - En un punto \vec{r} fuera del material, la contribución del potencial a un elemento de volumen es
- $$d\phi_P = \frac{d\vec{p}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- Entonces el potencial total es

$$\phi_P(\vec{r}) = \int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\text{Usando } \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

\implies

$$\vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

\implies

$$\phi_P(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\nabla' \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'$$

2.5 DENSIDADES DE CARGA LIGADA

- Entonces podemos reescribir la expresión anterior como

$$\phi_P(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- El potencial es producido por una densidad volumétrica de carga y una densidad superficial de carga

}

Densidad de carga ligada

$$\rho_b = -\nabla' \cdot \vec{P}$$

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}'$$

$$\Rightarrow Q = \int_{V'} \rho_b dV' + \oint_{S'} \sigma_b dS = 0$$

↑ Carga total cero!



$$\boxed{\phi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_b dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\sigma_b dS}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

Potencial de polarización

2.6 CAMPO ELÉCTRICO DE MATERIA POLARIZADA

- De la expresión de la función potencial, dada por las densidades de carga, encontramos el campo electrostático (aún dentro del dieléctrico)

$$\vec{E}_P(\vec{r}) = -\nabla \phi_P(\vec{r}) \implies \boxed{\vec{E}_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

En particular, si la polarización es constante

$$\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}') = 0$$

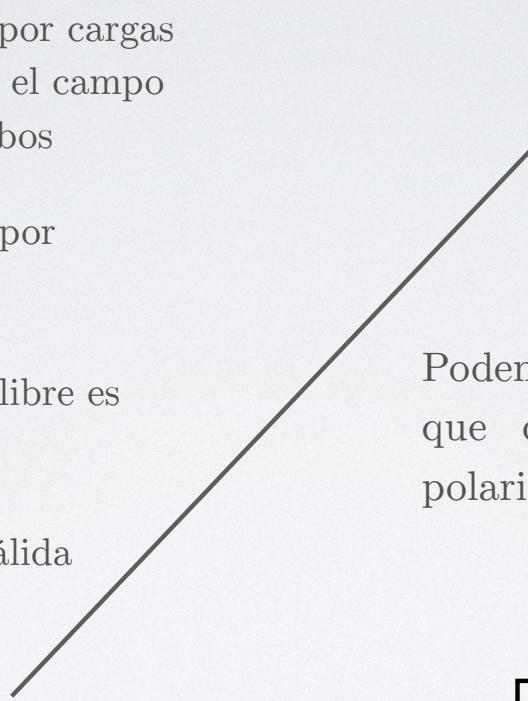
Entonces, usando la primera identidad de Green $\left(\int_V (\psi \Delta \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dv = \oint_S \psi \nabla \varphi \cdot d\vec{S} \right)$

$$\implies \vec{E}_P(\vec{r}) = -\vec{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \right) \quad \text{Fórmula de Poisson}$$

2.7 EL VECTOR AUXILIAR $\vec{D}(\vec{r})$

- Si consideramos el campo eléctrico un sistema donde haya un campo eléctrico dado por cargas libres y por un dieléctrico polarizado, el campo total debe ser la superposición de ambos
- La densidad de carga volumétrica por polarización es $\rho_P(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}$
- La densidad volumétrica de carga libre es $\rho_f(\vec{r})$
- La ley de Gauss debe seguir siendo válida

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) = \rho_P(\vec{r}) + \rho_f(\vec{r})$$


$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_f(\vec{r}) \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})) &= \rho_f \end{aligned}$$

Podemos definir un campo vectorial auxiliar que combine el campo eléctrico con la polarización

Desplazamiento eléctrico

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})}$$

2.7 EL VECTOR AUXILIAR $\vec{D}(\vec{r})$

- Las principales características del vector de desplazamiento son:
- La divergencia sólo depende de la densidad de carga libre
- El rotacional de $\vec{D}(\vec{r})$ es igual al rotacional de la polarización

$$\begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P} \end{array}$$

!!!! Esta igualdad nos dice que la variación espacial de la polarización contribuye al vector de desplazamiento (incluyendo cambios abruptos en interfaces macroscópicas)!!!!

→ Entonces, la condición fundamental de electrostática se mantiene válida

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

→ Si Q_f es la carga eléctrica libre encerrada en la superficie S , entonces

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f$$

$$\left. \begin{array}{c} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Todo esto, junto con el teorema de Helmholtz nos llevan

$$\boxed{\vec{D}(\vec{r}) = -\nabla \int_V \frac{\rho_f(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \nabla \times \int_V \frac{\nabla' \times \vec{P}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV'}$$

2.8 CONDICIONES DE FRONTERA PARA $\vec{D}(\vec{r})$

- De las condiciones de divergencia y rotacional que cumple el vector auxiliar podemos definir condiciones de frontera para

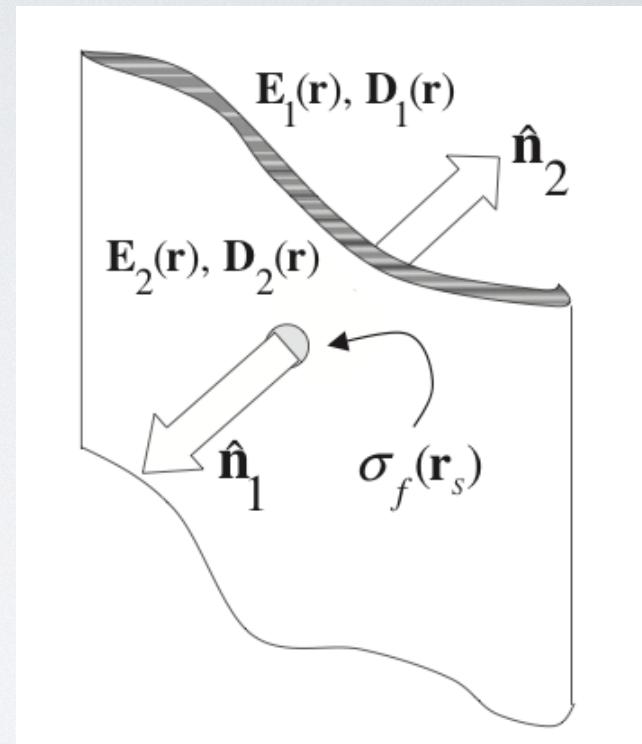
$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma_f$$

y

$$\hat{n} \times (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \hat{n} \times (\vec{P}_1 - \vec{P}_2)$$

con

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



2.9 RELACIONES CONSTITUTIVAS

- Si el campo eléctrico externo es cero, tenemos dos posibilidades para el valor de $\vec{P}(\vec{E} = 0)$
- $\vec{P}(0) = 0$ o $\vec{P}(0) \neq 0$

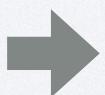
Por ejemplo los materiales ferroeléctricos

- La mayoría de los materiales se polariza cuando un campo externo es aplicado

Se puede encontrar experimentalmente que, en general, la respuesta de un material es

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j + \epsilon_0 \sum_j \sum_k \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \dots$$

Tensores que describen la posibilidad de reacción de \vec{P} como función de \vec{E}



En el caso de un dieléctrico lineal (generado cuando el campo eléctrico es lo suficientemente grande) los factores de proporcionalidad son llamados componentes del tensor de susceptibilidad eléctrica χ_{ij}

2.10 MATERIA DIELÉCTRICA SIMPLE

- Si tenemos un dieléctrico lineal y es isotrópico espacialmente, entonces, es llamada *simple* $\chi_{ij} = \chi$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

Campo eléctrico total

Susceptibilidad eléctrica

Entonces,

$$\vec{D} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = k \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

Ecuación constitutiva

Constante dieléctrica

Permitividad

Permitividad relativa

Material	Dielectric Constant	Material	Dielectric Constant
Vacuum	1	Benzene	2.28
Helium	1.000065	Diamond	5.7-5.9
Neon	1.00013	Salt	5.9
Hydrogen (H_2)	1.000254	Silicon	11.7
Argon	1.000517	Methanol	33.0
Air (dry)	1.000536	Water	80.1
Nitrogen (N_2)	1.000548	Ice (-30° C)	104
Water vapor (100° C)	1.00589	KTaNbO ₃ (0° C)	34,000

TABLE 4.2 Dielectric Constants (unless otherwise specified, values given are for 1 atm, 20° C). Data from *Handbook of Chemistry and Physics*, 91st ed. (Boca Raton: CRC Press, 2010).

2.10 CAMPOS Y FUENTES EN DIELÉCTRICOS SIMPLES

- Sabemos por la ley de Gauss que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$
- Por la ecuación constitutiva

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \implies \nabla \cdot \vec{D} = \epsilon \nabla \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \nabla \epsilon = \rho_f$$

Consideremos sistemas donde la constante dieléctrica toma (diferentes) valores constantes en distintas regiones del espacio separadas por fronteras

$$\implies \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \implies \nabla \times \vec{D} = 0$$

Porque el campo electrostático $\nabla \times \vec{E} = 0$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \implies \nabla \times \vec{P} = 0$
es conservativo

$$\implies \epsilon \nabla^2 \phi = -\rho_f \quad \text{y} \quad \rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = \left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right) \rho_f$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}|_S = \epsilon_0(\kappa-1)\vec{E}|_S$$

3.1 DIVERGENCIA

- Consideremos el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada S que es frontera de un volumen V

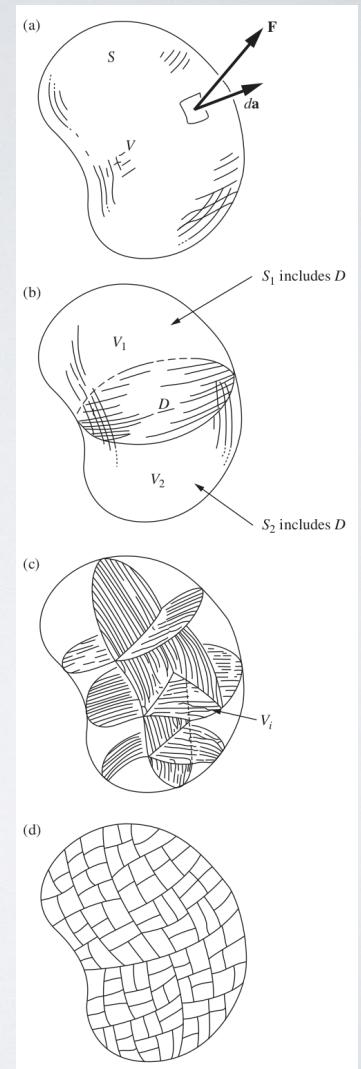
- Dividimos el volumen en secciones más pequeñas V_i

- Estos volúmenes tiene superficies S_i
- El flujo permanece sin cambios
- Continuamos haciendo las secciones cada vez más pequeñas
- Conforme el volumen se hace más pequeño, el flujo a través de la superficie nos dice cómo cambia el campo vectorial
- Dividiendo entre su volumen, nos dirá cómo cambia el campo como función de las coordenadas

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_i^N \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$

$\rightarrow \frac{\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{V_i} \quad \lim_{V_i \rightarrow 0}$

$$\operatorname{div} \vec{F} \equiv \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$



3.2 TEOREMA DE GAUSS Y FORMA DIFERENCIAL DE LA LEY DE GAUSS

- Consideraremos el flujo a través de una superficie
- Tomando el límite cuando $V_i \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$



$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_i^N \int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i$$



$$\Phi = \sum_{i=1}^N V_i \left[\frac{\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}_i}{V_i} \right]$$

$$\boxed{\int_{S_i} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV}$$

Teorema de Gauss

3.2 TEOREMA DE GAUSS Y FORMA DIFERENCIAL DE LA LEY DE GAUSS

- Aplicando el teorema de Gauss al flujo eléctrico

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

Volumen de la distribución

Superficie que encierra a la distribución

$$\int_{V_S} \operatorname{div} \vec{E} dV_S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Forma diferencial de la ley de Gauss

$$\int_{V_S} \left(\nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) dV_S = 0$$

Para cualquier superficie que encierre la distribución

3.2 TEOREMA DE GAUSS Y FORMA DIFERENCIAL DE LA LEY DE GAUSS

- Ejemplo: Verificar la ley de Gauss diferencial para una distribución esférica uniforma de radio R

Solución:

$$\left. \begin{aligned} E(r)_{in} &= \frac{(4\pi r^3/3)\rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r \leq R) \\ E(r)_{out} &= \frac{(4\pi R^3/3)\rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r \geq R) \end{aligned} \right\} \nabla \cdot \vec{E}_{in} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\rho r^2}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \vec{E}_{out} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \right) = 0$$

3.3 ECUACIÓN DE POISSON

- Ahora tenemos dos funciones relacionadas con el campo eléctrico
 - La función potencial
 - La divergencia del campo
- Las dos funciones se relacionan de la siguiente forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$



$$\operatorname{div}(-\nabla \phi) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$



$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

Ecuación de
Poisson

3.3 ECUACIÓN DE LAPLACE

- Cuando $\rho = 0$, esto es, en todas las partes del espacio donde no hay densidad de carga eléctrica, el potencial eléctrico satisface la ecuación

$$\boxed{\Delta\phi = 0} \quad \text{Ecuación de Laplace}$$

- Un resultado importante es el siguiente

Suponga que $\Omega \in \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado. Suponga que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ es armónica. Entonces se cumple

1. (Principio del máximo) $\max_{\bar{\Omega}} u(\vec{r}) = \max_{\partial\Omega} u(\vec{r})$

2. (Principio fuerte del máximo) Si Ω es conexo y existe un punto $\vec{r}_0 \in \Omega$ tal que $u(\vec{r}_0) = \max_{\bar{\Omega}} u(\vec{r})$, entonces u es constante dentro de Ω .

3.3 ECUACIÓN DE LAPLACE

- Para una función u que cumpla con $\Delta u = 0$ esta es la ley de Gauss para el promedio aritmético:

$$u(\xi) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-\xi|=\rho} u(x) dS_x$$

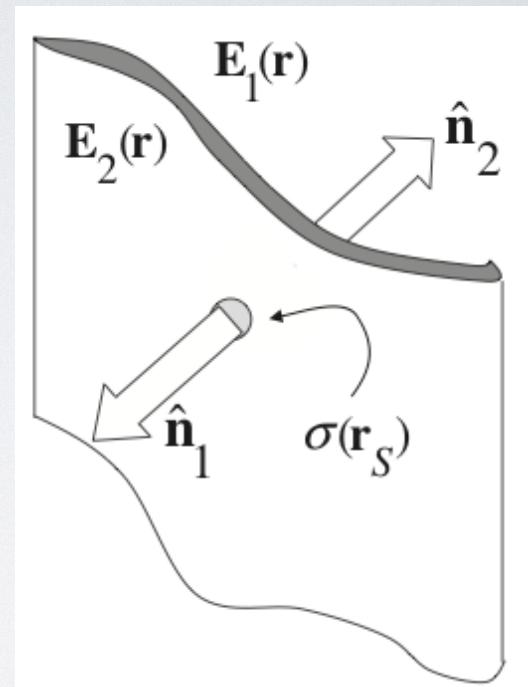
Esto significa que para una función u armónica en una bola cerrada el valor de u en el centro es igual al promedio de los valores en la superficie

2.4 CONDICIONES DE FRONTERA

- La divergencia del campo eléctrico es igual a la densidad de carga encerrada en un volumen de una interfaz
- Usando el Teorema de Gauss, podemos calcular la carga encerrada en una caja, de volumen infinitesimal, que encierre la interfaz (suponiendo que no hay medios materiales)
 - Tendiendo a cero el ancho de la caja pero manteniendo el área, encontramos

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- Las componentes del campo electrostático perpendiculares a la superficie son discontinuas y la discontinuidad es igual a la densidad superficial de carga entre ϵ_0

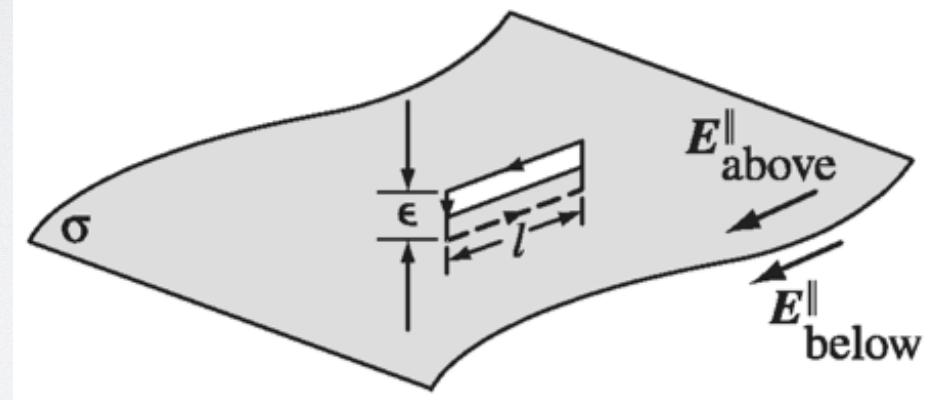


3.4 CONDICIONES DE FRONTERA

- Por otro lado, usando el hecho que el campo electrostático es conservativo, tenemos

$$W_{cycle} = q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$
$$\implies \vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel}$$

- Las componentes del campo eléctrico paralelas a la superficie, son continuas



3.4 CONDICIONES DE FRONTERA

- Las condiciones de frontera para la función potencial se siguen de las encontradas para el campo electrostático

$$\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$



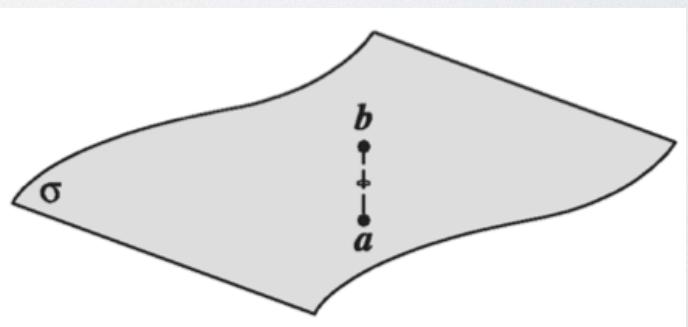
$\phi_1 = \phi_2$ ¡La función potencial es continua!

$$\hat{n}_2 \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



$$\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial n_2} - \frac{\partial \phi_1}{\partial n_2} \right] = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

La derivada dirección del la función potencial es discontinua



3.5 TEOREMA DE EARNSHAW

Teorema:

Es imposible construir un campo electrostático que mantenga a una carga en equilibrio estable en el vacío

Prueba:

Usando el principio del máximo podemos ver que la posición estable para una partícula cargada debe estar donde el potential ϕ es un mínimo para una vecindad de puntos (si la partícula tiene carga positiva) o un máximo en una vecindad de puntos (si la partícula tiene carga negativa). Claramente ninguna es posible para una función cuyo valor promedio sobre una esfera siempre es igual dentro del dominio

3.6 TEOREMA DE UNICIDAD

- Estamos interesados en encontrar soluciones a la ecuación de Poisson
 - Tenemos que garantizar que la solución encontrada sea única
- El teorema de unicidad garantiza que si encontramos una solución esa es la única
- Nos dice qué condiciones de frontera son apropiadas para tener la solución

3.6 TEOREMA DE UNICIDAD

- Supongamos que V soporta dos soluciones distintas de la ecuación de Poisson para la misma densidad de carga $\rho(\vec{r})$ y condiciones de frontera

$$\nabla^2 \phi_1(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon$$

$$\nabla^2 \phi_2(\vec{r}) = \rho(\vec{r})/\epsilon$$

Construimos la función

$$\Phi = \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$$

$$\implies \nabla^2 \Phi = 0$$

La prueba se deriva de las identidades de Green usando $\phi = \psi$

$$I = \int_V |\nabla \Phi|^2 dV = \int_S \Phi \nabla \Phi \cdot d\vec{S} \quad \phi = \psi$$

Es idénticamente cero para las condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann y mixtas



Usando el principio del máximo, tenemos

$$\Phi \equiv 0, \quad \vec{r} \in V \cup S$$

$$\implies \boxed{\phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r})}$$

Condiciones de frontera

Dirichlet

$$\phi(\vec{r}) = f(\vec{r}), \quad \forall \vec{r} \in S$$

Neumann

$$\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n} = g(\vec{r}), \quad \forall \vec{r} \in S$$

Mezcladas

Dirichlet sobre S_1 y Neumann sobre S_2

$$S_1 + S_2 = S$$

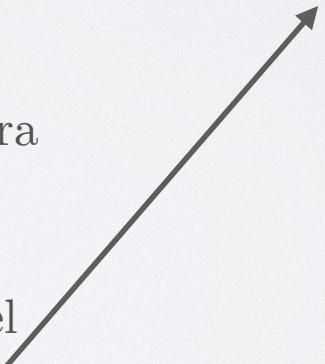
Cauchy

$$\phi(\vec{r}) = v(\vec{r}) \text{ y } \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n} = w(\vec{r}), \quad \forall \vec{r} \in S$$

3.6 TEOREMA DE UNICIDAD

- El teorema de unicidad nos garantiza que al encontrar la solución será única
- Siempre que tengamos condiciones de frontera
- Las condiciones de frontera, funciones con valores en esos puntos, dependerán de la física del sistema
- Debemos encontrar las condiciones de frontera que resuelvan nuestro problema
- Las condiciones de frontera dependerán del sistema que estemos estudiando

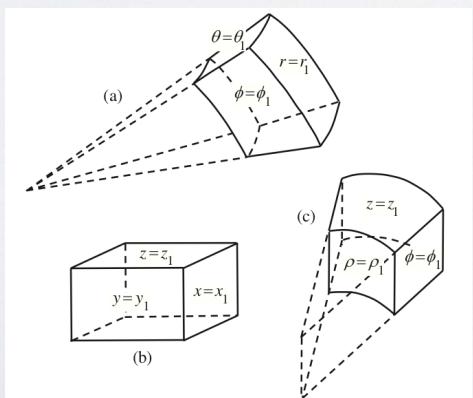
Los dividimos en dos grandes grupos

- 
- Conductores
 - Aislantes

3.7 SEPARACIÓN DE VARIABLES

- Cada que $\rho = 0$, esto es, en todas partes del espacio que no contengan carga eléctrica, el potencial eléctrico satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$
- Consideremos que la ecuación de Laplace satisface ciertas condiciones de frontera
 - Si las fronteras corresponden a posiciones sobre una superficie en un sistema de coordenadas ortogonales, es conveniente encontrar la solución por el método de separación de variables



En un sistema coordenado ortogonal donde podemos etiquetar los puntos de espacio con (u, v, w) , el método de separación de variables asume que la solución es de la siguiente manera

$$\phi(u, v, w) = A(u)B(v)C(w)$$

El proceso de separación genera tres constantes de separación indeterminadas que sirven como parámetros en las ecuaciones diferenciales

La solución más general es una suma sobre todos los posibles valores de las constantes de separación

$$\phi(u, v, w) = \prod_i \sum_{\alpha\beta\gamma} [a_\alpha X_{i\alpha}(u) + \tilde{a}_\alpha \tilde{X}_{i\alpha}(u)]$$

Conjunto completo de funciones $\longrightarrow X_i = A, B, C$

3.8 SIMETRÍA CARTESIANA

- El potencial con fronteras rectangulares naturales $\phi = X(x)Y(y)Z(z)$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z^2} = 0$$



$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0$$



$$\frac{d^2X}{dx^2} = \alpha^2 X, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = \beta^2 Y, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} = \gamma^2 Z$$

with $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$

$$X_\alpha = \begin{cases} A_0 + B_0 x, & \alpha = 0 \\ A_\alpha e^{\alpha x} + B_\alpha e^{-\alpha x}, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$Y_\beta = \begin{cases} C_0 + D_0 y, & \beta = 0 \\ C_\beta e^{\beta y} + D_\beta e^{-\beta y}, & \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$Z_\gamma = \begin{cases} E_0 + F_0 z, & \gamma = 0 \\ E_\gamma e^{\gamma z} + F_\gamma e^{-\gamma z}, & \gamma \neq 0 \end{cases}$$



Solución general

$$\phi(x, y, z) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\gamma} X_\alpha(x) Y_\beta(y) Z_\gamma(z) \delta(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

3.8 SIMETRÍA CARTESIANA

- Ejemplo: Un cubo hueco tiene paredes conductoras definidas por seis planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x = a$, $y = b$, $z = c$. Hay una diferencia de potencial $\Delta\phi = V$ entre las paredes $z = 0$ y $z = c$. Las otras cuatro paredes están a un potencial cero (Jackson sección 2.9).

Solución:

Este problema tiene condiciones de frontera de Dirichlet. La solución es

$$X = \sin \alpha x$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$Y = \sin \beta y$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b}$$

$$Z = \sinh \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z \right)$$

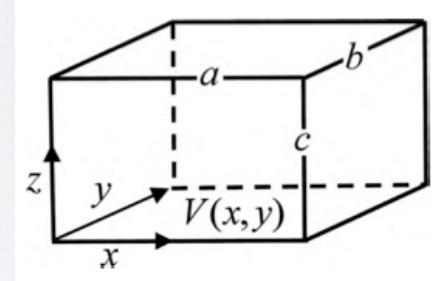
$$\gamma_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow \phi_{nm} = \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} z)$$

with

$$\phi = V(x, y) \text{ at } z = 0$$

$$V(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \sinh(\gamma_{nm} c) \quad A_{mn} = \frac{4}{ab \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a \int_0^b V(x, y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) dy dx$$



3.8 SIMETRÍA CARTESIANA

- Encuentre el potencial electrostático en cualquier punto dentro de un conductor largo y hueco que se mantiene a potenciales como se muestra en la figura.

Solución:

Debido a la invariancia de translación

a lo largo del eje z

$$\Rightarrow \phi(x, y, z) = \phi(x, y)$$

La solución general está dada por

$$\phi(x, y) = (a_0 + b_0 x)(c_0 + d_0 y) + \sum_{\alpha} (a_{\alpha} e^{\alpha x} + b_{\alpha} e^{-\alpha x})(c_{\alpha} \sin \alpha y + d_{\alpha} \cos \alpha y)$$

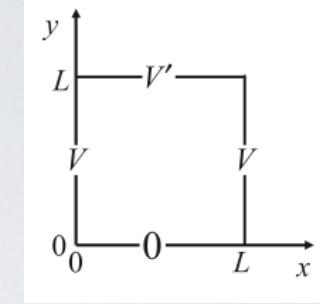
Usando las condiciones de frontera

$$\phi(x, 0) = 0 = (a_0 + b_0 x)c_0 + \sum_{\alpha} (a_{\alpha} e^{\alpha x} + b_{\alpha} e^{-\alpha x})d_{\alpha}$$

$$\phi(x, L) = V' = (a_0 + b_0 x)L + \sum_{\alpha} (a_{\alpha} e^{\alpha x} + b_{\alpha} e^{-\alpha x}) \sin \alpha L$$

$$\Rightarrow \alpha = m\pi/L, b_0 = 0$$

$$\Rightarrow \phi(x, y) = \frac{V'}{L}y + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m e^{m\pi x/L} + b_m e^{-m\pi x/L}) \sin \frac{m\pi y}{L}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi(0, y) &= V = \frac{V'}{L}y + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m + b_m) \sin \frac{m\pi y}{L} \\ \phi(L, y) &= V = \frac{V'}{L}y + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m e^{m\pi} + b_m e^{-m\pi}) \sin \frac{m\pi y}{L} \\ a_m + b_m &= a_m e^{m\pi} + b_m e^{-m\pi} = \Omega_m \\ \Omega_m &= \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{m\pi y}{L} \left(V - \frac{V'}{L}y \right) dy = \frac{2}{m\pi} [V + (-1)^m (V' - V)] \end{aligned}$$

3.9 SIMETRÍA AZIMUTAL

- Ahora consideremos el caso cuando tenemos simetría azimutal
- Separación de variables en coordenadas esféricas

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \phi(r, \theta)$$

La ecuación de Laplace se reduce a

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

Tomando $x = \cos \theta$ y $\phi(r, x) = R(r)M(x)$ la ecuación de Laplace se reduce

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \kappa R = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dM}{dx} \right] + \kappa M = 0 \quad \kappa = \nu(\nu + 1)$$

Ecuación diferencial de Legendre

La solución está dada por los polinomios de Legendre y la función r

$$R_\nu(r) = A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-(\nu+1)}$$

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\nu} [A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-(\nu+1)}] [C_\nu P_\nu(\cos \theta) + D_\nu Q_\nu(\cos \theta)]$$

Polinomios de Legendre de segunda clase (no tienen significado físico)

$$\phi(r, \theta) = \sum_{\nu} [A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-(\nu+1)}] P_\nu(\cos \theta)$$

3.9 SIMETRÍA AZIMUTAL

- Example: A uniformly charged ring

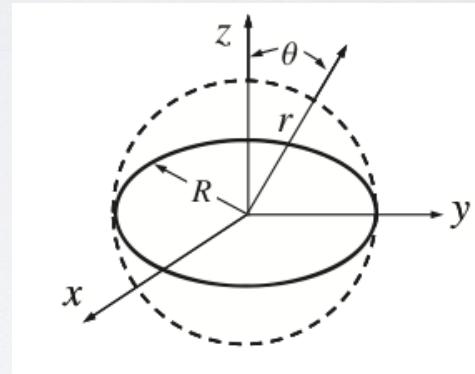
Solution:

We know that the solution is given by multipole expansion

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} c_l \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \theta), & r \leq R, \\ \sum_{l=0}^{\infty} c_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta), & r \geq R, \end{cases}$$

With the conditions

$$\epsilon_0 \left[\frac{\partial \phi_-}{\partial r} - \frac{\partial \phi_+}{\partial r} \right] = \sigma(\theta) = \frac{\lambda}{R} \delta(\cos \theta)$$



and

$$c_l = \frac{R}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta \sigma(\theta) P_l(\cos \theta) d\theta = \frac{Q P_l(0)}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\implies \phi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(0) P_l(\cos \theta), & r \leq R, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(0), & r \geq R, \end{cases}$$

3.10 SIMETRÍA ESFÉRICA

- Para problemas con simetría esférica
- consideramos el laplaciano completo en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Separating variables $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)R \implies R_l(r) = A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}$$

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{dY}{d\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = l(l+1)Y$$

Armónicos esféricos

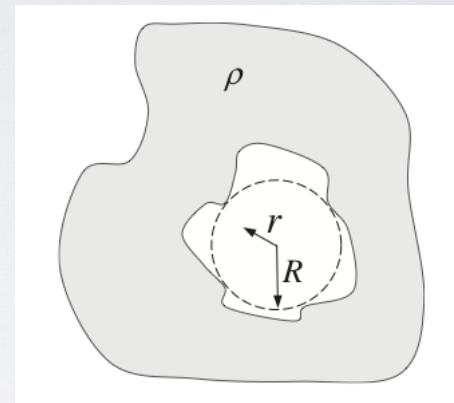


Solución

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}] Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

3.10 SIMETRÍA ESFÉRICA

- The expansion for systems with natural spherical symmetry, in terms of $r_<$ and $r_>$ gives two different domains:
 - The exterior spherical expansion $r > R$
 - Points exterior to charge density
 - The Interior spherical expansion $r < R$
 - Points at the interior to charge density



$$\phi_{ext}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \frac{Y_{lm}(\Omega)}{r^{l+1}} \quad r > R$$

$$\phi_{int}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_{lm}^*(\Omega) r^l \quad r < R$$

3.11 SIMETRÍA CILÍNDRICA

- La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Separación de variables $\phi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)G(\varphi)Z(z)$

Ecuación de diferencial de Bessel

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (k^2 \rho^2 - \alpha^2)R = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 G}{d\varphi^2} + \alpha^2 G = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} G_\alpha(\varphi) &= \begin{cases} x_0 + y_0 \varphi & \alpha = 0 \\ x_\alpha e^{i\alpha\varphi} + y_\alpha e^{-i\alpha\varphi} & \alpha \neq 0 \end{cases} \\ Z_k(z) &= \begin{cases} s_0 + t_0 z & k = 0 \\ s_k e^{kz} + t_k e^{-kz} & k \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

3.10 SIMETRÍA CILÍNDRICA

- Si permitimos tomar $k = i\kappa$ las soluciones elementales son

$$R_\alpha^k(\rho) = \begin{cases} A_0 + B_0 \ln(\rho) & k = 0, \alpha = 0 \\ A_\alpha \rho^\alpha + B_\alpha \rho^{-\alpha} & k = 0, \alpha \neq 0 \\ A_\alpha^k J_\alpha(k\rho) + B_\alpha^k N_\alpha(k\rho) & k^2 > 0 \\ A_\alpha^k I_\alpha(k\rho) + B_\alpha^k K_\alpha(k\rho) & k^2 < 0 \end{cases}$$

Con funciones de Bessel

$J_\alpha(x)$, $N_\alpha(x)$ Primera clase

$I_\alpha(x)$, $K_\alpha(x)$ Función de Bessel modificada

con

$$I_\alpha(k\rho) = i^{-\alpha} J_\alpha(ik\rho)$$

$$K_\alpha(k\rho) = \frac{\pi}{2} i^{\alpha+1} [J_\alpha(ik\rho) + iN_\alpha(ik\rho)]$$

Por condiciones físicas, la solución más general es

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{\alpha} \sum_{k} R_\alpha^k(\rho) G_\alpha(\varphi) Z_k(z)$$

3.11 COORDENADAS POLARES

- En muchas de las situaciones físicas el potencial eléctrico efectivo es una función de dos variables
 - Cuando la simetría del problema nos lleva a la ecuación de Laplace en dos dimensiones usando coordenadas polares

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

La solución general está dada por

$$\phi(\rho, \varphi) = (A_0 + B_0 \ln \rho)(x_0 + y_0 \varphi) + \sum_{\alpha \neq 0} (A_\alpha \rho^\alpha + B_\alpha \rho^{-\alpha})(x_\alpha \sin \alpha \varphi + y_\alpha \cos \alpha \varphi)$$

3.11 SUPERPOSICIÓN

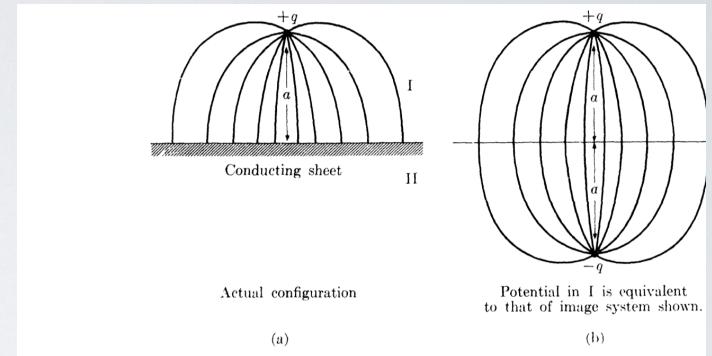
- Now, let's consider the case with $\rho(\vec{r}) \neq 0$
 - We can always find the potential functions by direct integration or by evaluating Coulomb's integral
 - It is not possible when
 - polarizable matter is present
 - at least some portion of volume charge density consists of true volume charge
 - The most effective way is to solve the Poisson's equation as a boundary value problem
- Superposition is the key idea to solve Poisson's equation in electrostatics
 - The unique solution to the problem can always be written as a combination of a particular solution of Poisson's equation and a solution to Laplace's equation

$$\phi(\vec{r}) = \text{a particular solution to Poisson's equation} + \text{a solution to Laplace's equation in } V$$

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$$

3.12 MÉTODO DE IMÁGENES

- El método de imágenes resuelve un número pequeño pero importante de problemas de la ecuación de Poisson donde hay dominios separados
 - Planos
 - Esferas
 - Cilindros
- La frontera separa el espacio en V y un volumen complementario V'
 - Una carga puntual está presente en V , el método nos da el potencial electrostático en V introduciendo una carga imagen ficticia en V'
 - Usualmente la frontera se asume que se encuentra aterrizada y los volúmenes pueden estar en el vacío o llena de un dieléctrico simple



3.12 MÉTODO DE IMÁGENES

- Ejemplo: Consideremos una carga puntual que yace a una distancia z_0 sobre un plano infinito y aterrizado en $z=0$
- Por el método de imágenes encontramos el potencial usando coordenadas cilíndricas

$$\phi(\rho, z \geq 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z + z_0)^2}} \right]$$

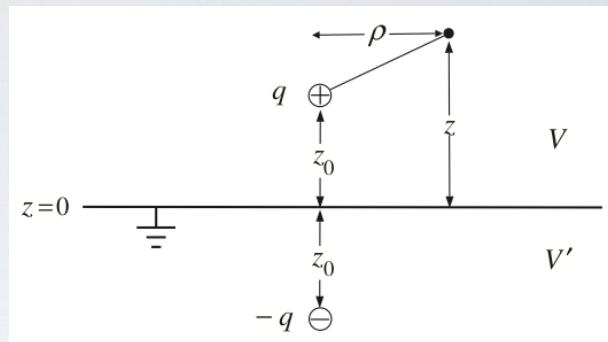
↓

$$\vec{E}(\rho, z \geq 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\rho\hat{\rho} + (z - z_0)\hat{z}}{[\rho^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} - \frac{\rho\hat{\rho} + (z + z_0)\hat{z}}{[\rho^2 + (z + z_0)^2]^{3/2}} \right]$$

↓

Densidad de carga superficial

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 \hat{z} \cdot \vec{E}(\rho, z = 0) = -\frac{qz_0}{2\pi(\rho^2 + z_0^2)^{3/2}}$$



La carga inducida en la superficie

$$q_{ind} = \int \sigma dS = -q \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{sdsd\varphi}{2\pi(s^2 + 1)^{3/2}} = -q$$

↓

La fuerza en el plano

$$\vec{F}(z_0) = \frac{\hat{z}}{2\epsilon_0} \int_S \sigma^2 dS = \hat{z} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 z_0^2} \int_0^\infty \frac{sds}{(s^2 + 1)^{3/2}} = \hat{z} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(2z_0)^2}$$

3.12 MÉTODO DE IMÁGENES

- Ejemplo: Una carga puntual fuera de una esfera conductora aterrizada

Solución:

Usamos el método de imágenes para encontrar el potencial

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{s^2 + r^2 - 2sr \cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos\theta}} \right]$$

cuando $r=R$, el potencial es cero para el ángulo

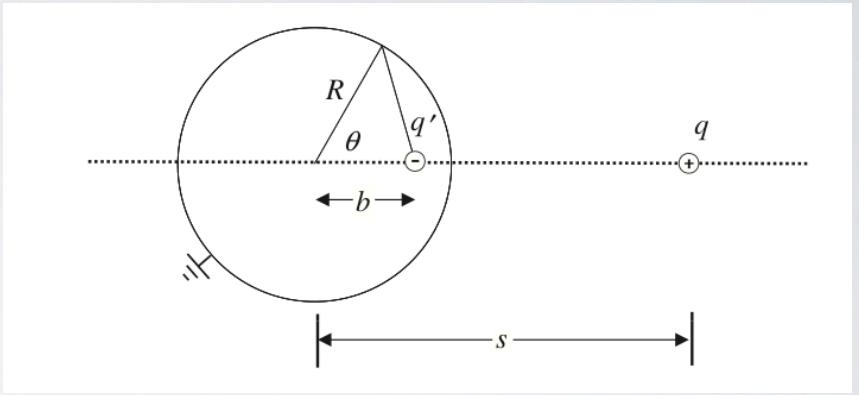
$$q^2(b^2 + R^2) = q'^2(s^2 + R^2) \text{ for } \theta = \pi/2$$

$$q^2(b^2 - R^2) = q'^2(s^2 - R^2) \text{ for } \theta = 0$$

$$\Rightarrow q^2b = q'^2s \quad \Rightarrow \quad sb^2 - (s^2 + R^2)b + sR^2 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{R^2}{s}, \text{ and } q' = -\frac{R}{s}q$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} - \frac{R/s}{|\vec{r} - \vec{s}R^2/s^2|} \right], \quad r, s > 0$$



La fuerza sobre la carga debido al campo eléctrico de la esfera es

$$\vec{F} = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{s}}{(s-b^2)} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R\vec{s}}{(s^2-R^2)^2}$$

3.12 MÉTODO DE IMÁGENES

- Si la esfera conductora se mantiene a un potencial fijo ϕ_0
 - Podemos añadir al potencial una segunda carga imagen con $q_0 = 4\pi\epsilon_0 R\phi_0$ puesta en el centro de la esfera
- Si la esfera tiene una carga neta Q
 - Usamos cargas imágenes en el centro para remplazar la carga neta de la esfera aterrizada

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} - \frac{R/s}{|\vec{r} - \vec{s}R^2/s^2|} \right] + \frac{R\phi_0}{r}, \quad s, r > R$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{s}|} - \frac{R/s}{|\vec{r} - \vec{s}R^2/s^2|} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + qR/s}{r}, \quad s, r > R$$