

3o. PROGRAMA - Integração Numérica

1) Construa um programa em **precisão simples** que calcule numericamente a integral $I = \int_0^1 (6 - 6x^5)dx$ usando o método de Simpson.

a) Faça uma tabela na forma

p	N	I_{num}	erro
1	2		
2	4		
.	.		
.	.		
.	.		
25	33554432		

onde $N = 2^p$ é o número de intervalos, $\text{erro} = |I_{\text{num}} - I|$ e I é o valor analítico da integral.

b) Faça um gráfico de $\log_2(\text{erro})$ em função de p , eliminando os pontos em que eventualmente $\text{erro} = 0$. Repita os cálculos em **dupla precisão** e coloque os resultados no mesmo gráfico. Indique nos gráficos os efeitos do erro de Truncamento no método de Simpson e erro de “Roundoff” da representação de ponto flutuante. Determine a partir do gráfico a ordem de grandeza do erro do método de empregado e “Roundoff” e compare com os teóricos $\mathcal{O}(h^4)$ e $\mathcal{O}(\sqrt{N})$, respectivamente. Explique o que está acontecendo à medida que se aumenta N .

2) O período de um pêndulo simples para ângulos pequenos ($\theta_0 < 10^\circ$) é dado por $T_{\text{Galileu}} = 2\pi\sqrt{l/g}$. Para ângulos apreciáveis e desprezando a resistência do ar a expressão para o período é

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} d\phi, \quad (1)$$

onde $k^2 \equiv [1 - \cos(\theta_0)]/2$ e θ_0 é o ângulo inicial em **radianos**. Com o método de trapézios calcule a integral acima e construa uma tabela com 10 valores de θ_0 e T/T_{Galileu} , com θ_0 variando no intervalo $[0, \pi)$. Aumente bem o número de valores θ_0 e faça um gráfico de T/T_{Galileu} em função de θ_0 . Use o número de divisões trapezoidais que achar necessário.

3) Quadratura da parábola [Arquimedes (287a.C.-212a.C.)].

Cálculo da área sob a parábola $y = 1 - x^2$, $0 < x < 1$, usando o método de Monte-Carlo.

a) Construa primeiro uma rotina $\text{random}(Z_i)$ que retorne números aleatórios uniformemente distribuídos por “linear congruential generator” com $Z_{i+1} = (aZ_i + c) \bmod m$, onde $a = 1103515245$, $c = 12345$, $m = 2147483647$ e $U_i = Z_{i+1}/m$. U_i é o número entre 0 e 1 gerado. Use seu número USP como semente inicial Z_0 . (em C declare os inteiros unsigned long long e em FORTRAN use integer*8)

b) Faça UMA tentativa jogando 100 pontos (x, y) , $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$ aleatoriamente e determine o valor da área sob a curva usando

$$I \sim \frac{\text{número de pontos dentro}}{\text{número total de pontos}} \quad (2)$$

c) Faça um estudo com diferentes números de tentativas $N_t = 2, 4, 8, 16, \dots, 131072$. (cada tentativa joga 100 pontos aleatórios). Construa a seguinte tabela

N_t	--- I_m ---	--- σ ---	--- σ_m ---
2			
4			
.			
.			
.			
131072			

onde I_m é o valor médio da integral, σ é o desvio padrão e σ_m é o desvio padrão da média, dados pelas fórmulas:

$$I_m = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} I_i, \quad (3)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_t - 1} \sum_{i=1}^{N_t} (I_i - I_m)^2, \quad (4)$$

e $\sigma_m = \sigma/\sqrt{N_t}$. O valor da integral é dado por $I_m \pm \sigma_m$.

O QUE É PARA ENTREGAR:

1a) programa (só em precisão simples)

1b) tabela precisão simples

1c) tabela precisão dupla

1d) gráfico com curvas do erro precisão simples e dupla, indicando efeitos erros de truncamento do Simpson e de “Roundoff” + ordem de grandeza do erro + Explicação.

2) programa + tabela + gráfico

3) programa + tabela do item c

Referências

P.A. Stark, *Introduction to Numerical Methods*, Macmillan Company, 1970, p.210.

A. Ralston and P. Rabinowitz, *A first course in Numerical Analysis*, Dover, 1978, pp.9-11.

L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics*, 3rd edition, Pergamon, 1976.

N. Giordano, *Computational Physics*, Prentice Hall, 1997.

Dúvidas c/ Professor na aula

Dúvidas c/ Monitores