Electricidad y Magnetismo

FIS 1533 - 2

Dr. rer. nat. Birger Seifert

Cátedra: LW 1 Sala: AM-3

Ayudantía: MJ 4 Sala: BC-25

Ayudantes: Javier Nuñez
Carlos Espinoza

I1: V 29.08. 18:30
I2: W 01.10. 18:30
I3: W 29.10. 18:30
Ex: L 24.11. 15:30

NOTA: En este curso no habrá controles.

Libros:

- Hugh D. Young, Roger A. Freedman "Física Universitaria con Física Moderna, 9ª Edición. Pearson Addison Wesley, 1999.

- Raymond A. Serway "Electricidad y magnetismo"

- Paul A. Tipler, Gene Mosca "Física para la ciencia y la tecnología"

- Edward M. Purcell "Electricidad y magnetismo"

Vías de comunicación

Correo electrónico: bseifert@uc.cl

Las ayudantías comienzan en la segunda semana del semestre.

Los alumnos que no estén satisfechos con el desempeño de los ayudantes, sugiero hacerme llegar un mail.
En lo particular, me interesa saber cualquier problema o conflicto que pudiese aparecer en las ayudantias.
Para mi y para el buen desarrollo del curso, es de suma importancia que los alumnos estén satisfechos con esta instancia.

Las notas

Las notas se pueden encontrar en el sitio web del curso.

"www.uc.cl" ⟶ Mi Portal UC:

Electricidad y Magnetismo
⟶ Material del Curso

Desde la página misma no pueden verse los archivos en línea sino solo pueden descargarse.

Evaluación

El curso será calificado tanto por el trabajo de cátedra como por el de laboratorio, en forma independiente. Ambas partes deben ser aprobadas por separado, con nota igual o superior a 4,0.
En caso de aprobar una parte y reprobar la otra, se pondrá como nota final la de la parte reprobada, pero se "guardará" la de la parte aprobada, de manera que el alumno deberá volver a rendir sólo la parte reprobada. En los demás casos, la nota final del ramo (NF) se calculará como:

$$NF = 0.7.NT + 0.3.NL$$

Evaluación

donde NT es la nota de cátedra y NL es la nota de laboratorio. La nota final de cátedra se calculará de la siguiente manera:

$$NT = 0{,}3.NE + 0{,}7.NP,$$

donde NE es la nota del examen, y NP es la nota de presentación al examen calculada como,

$$NP = (I1 + I2 + I3) / 3,$$

donde I1, I2, e I3 son las notas de las tres Interrogaciones.

La asistencia a todas las Interrogaciones y Examen es obligatoria. En caso que no se justifique adecuadamente la inasistencia, la Interrogación o Examen respectivo será calificado con nota 1,0. En caso de inasistencia a una evaluación, el estudiante debe presentar certificado médico ante su unidad académica. A su vez, la unidad debe informar a la Facultad de Física sobre la positiva justificación del estudiante. En caso de inasistencia justificada a una Interrogación, se colocará como nota de la Interrogación respectiva la nota obtenida en el Examen.

Criterio para eximirse del Examen:

(1) Las notas de cada una de las tres Interrogaciones deben ser iguales o mayores que 4,0.

(2) La nota de presentación al Examen (NP) debe ser igual o mayor que 5,0.

Las pruebas se pueden retirar en la oficina de Ximena Caceres en el Departamento de Física en el siguiente horario: 9:30-12:30 y 15:00-17:00

De ahora en adelante vamos a hacer ejercicios grupales en la cátedra. Estos ejercicios se realizarán a cualquier hora y van a servir para subir las notas (unas décimas) a finales del semestre. Los ejercicios también servirán para premiar a los alumnos que asisten a la cátedra constantemente. Los alumnos que no asisten regularmente a la cátedra que dicto para este período, NO tendrán la oportunidad de ganarse dichas décimas. Les recuerdo que normalmente la asistencia en la cátedra es obligatoria y no se aceptan excusas.

Las presentaciones en Power Point de las clases y los libros son solo una referencia. En ningún caso pretenden reemplazar a la cátedra.

Es importante mencionar que gran parte de la materia la vemos en la pizarra también.

Los capítulos

1. Electricidad
2. Corriente eléctrica
3. Magnetismo
4. Electromagnetismo
5. Corriente y voltaje alternos
6. Ondas electromagnéticas

1. Electricidad

1.1. El descubrimiento de la electricidad

- separación de cargas por contacto
- frotar (por ejemplo: lana - ámbar)
- ámbar → "elektron" → electricidad
  (griego)
- más ejemplos: lana y vidrio
  parafina y agua ← un líquido

→ Solo necesitan contacto físico!

Ámbar

Cera de parafina

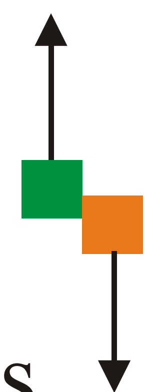
- “Electrización” por frotamiento es en realidad “electrización” por contacto!

- La electronegatividad mide la capacidad de un átomo para atraer hacia él los electrones.

<u>Experimento</u>

1) tenemos dos materiales diferentes y neutros

2) frotar (un buen contacto)



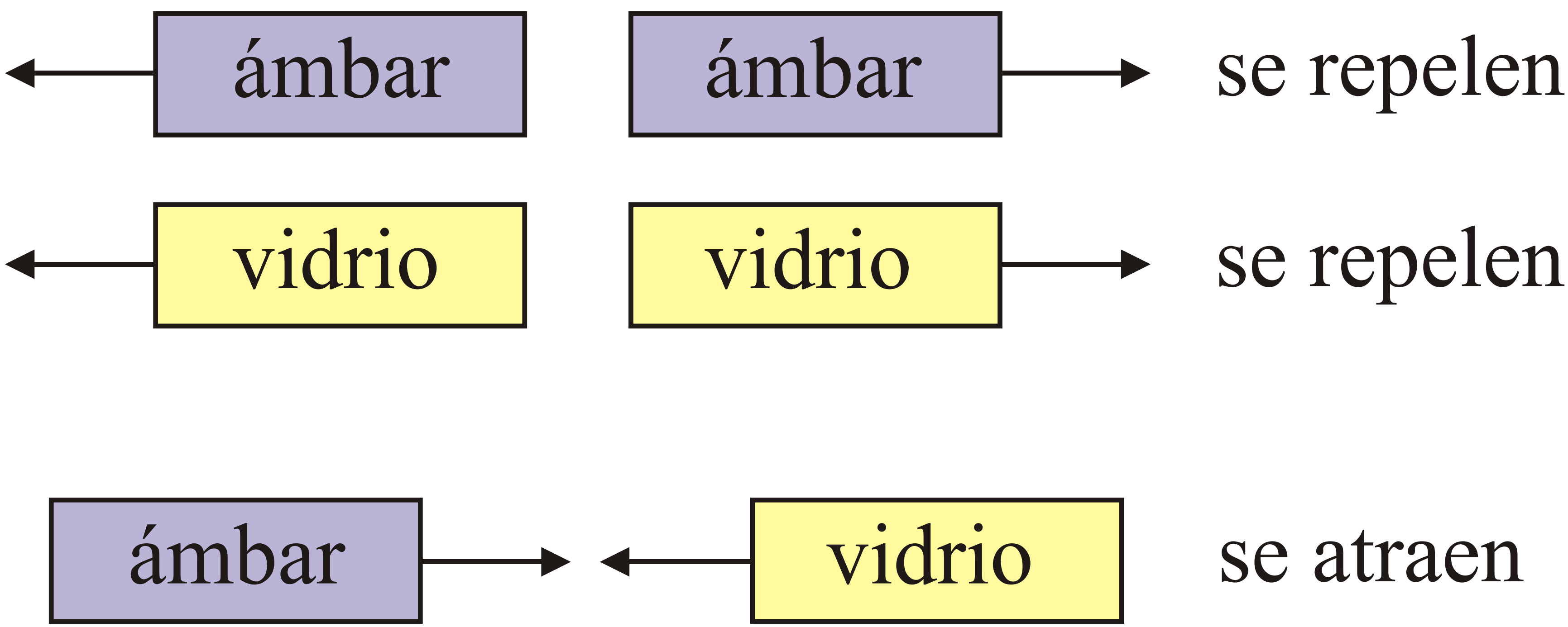
3) obtenemos dos cuerpos cargados

Dos de estos experimentos

Experimento 1 ámbar - lana

Experimento 2 vidrio - lana

Resultado



Conclusión

- Hay dos cosas distintas.
- Las dos cosas vamos a llamar dos tipos de cargas eléctricas.
- Cargas del mismo tipo se repelen. Cargas de diferentes tipos se atraen.

"Electrización" = separación de cargas

---

tipo 1 $\longrightarrow$ cargas positivas
tipo 2 $\longrightarrow$ cargas negativas

Benjamin Franklin (1706–1790) fue un inventor estadounidense

1.2. Aisladores y Conductores

En capìtulo 2 vamos a definir la conductividad.

aisladores   vidrio, plástico, ...

$< 10^{-8}$ S/m

conductores   los metales ordinarios

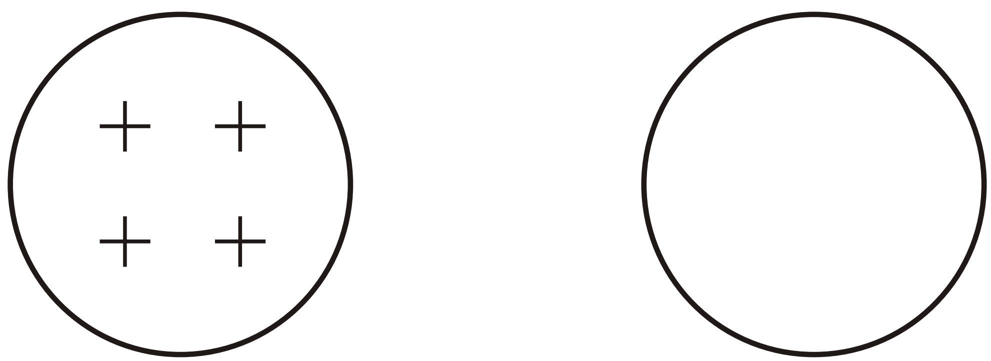
$> 10^{6}$ S/m

1.3. Conservaciòn y cuantización de la carga elèctrica

Carga eléctrica se puede acumular y dividir.
(es una propiedad extensiva)

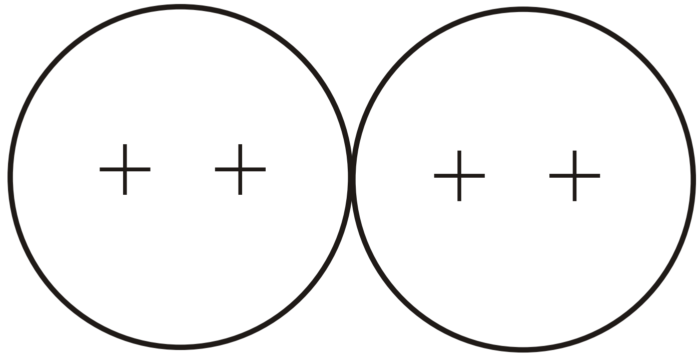
Ejemplo: dos esferas de igual radio y de un mismo metal

1) $Q_A = Q$ $Q_B = 0$



2)

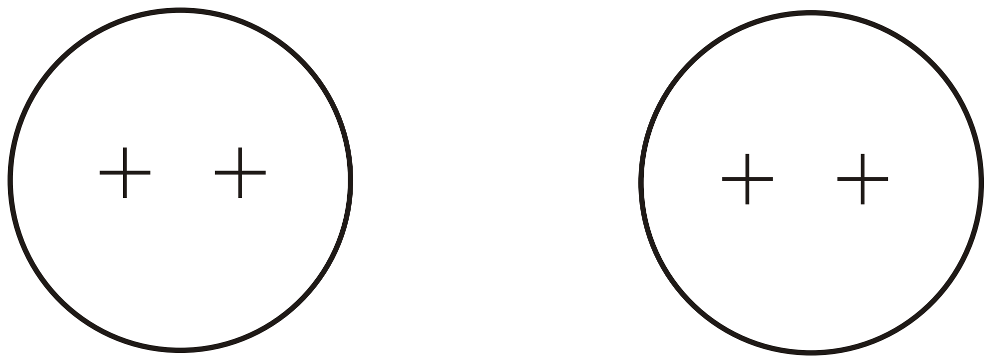
<u>contacto</u>



la carga se redistribuye

3)

<u>separarlas</u>



$Q_A = \frac{1}{2} Q$ $Q_B = \frac{1}{2} Q$

<u>Ley de la conservación de la carga eléctrica</u>

No hay destrucciòn ni creación de carga eléctrica.

Solo se puede separar cargas positivas de negativas.

- Unidad de la carga eléctrica

$[q] = 1\ C$

(Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) fue un físico francés)

La carga eléctrica NO se puede dividir infinitamente.

$\longrightarrow$ es una propiedad cuantizada

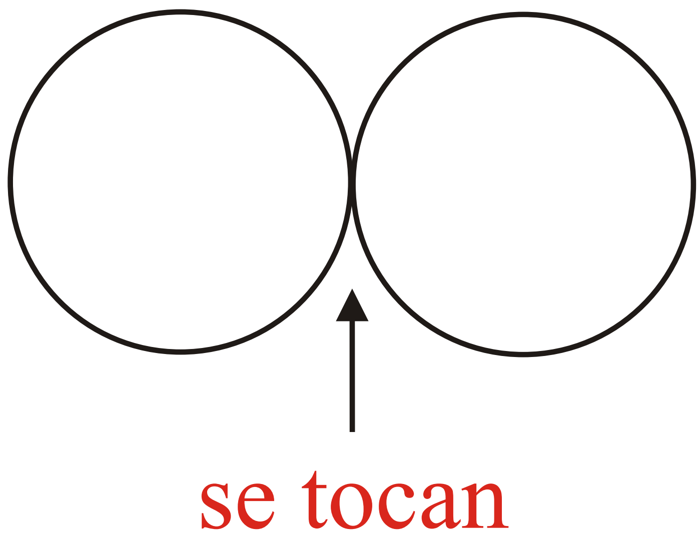
- Carga eléctrica elemental $\boxed{e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ C}$

portadores de carga $\rightarrow$ electrón $q = -e$

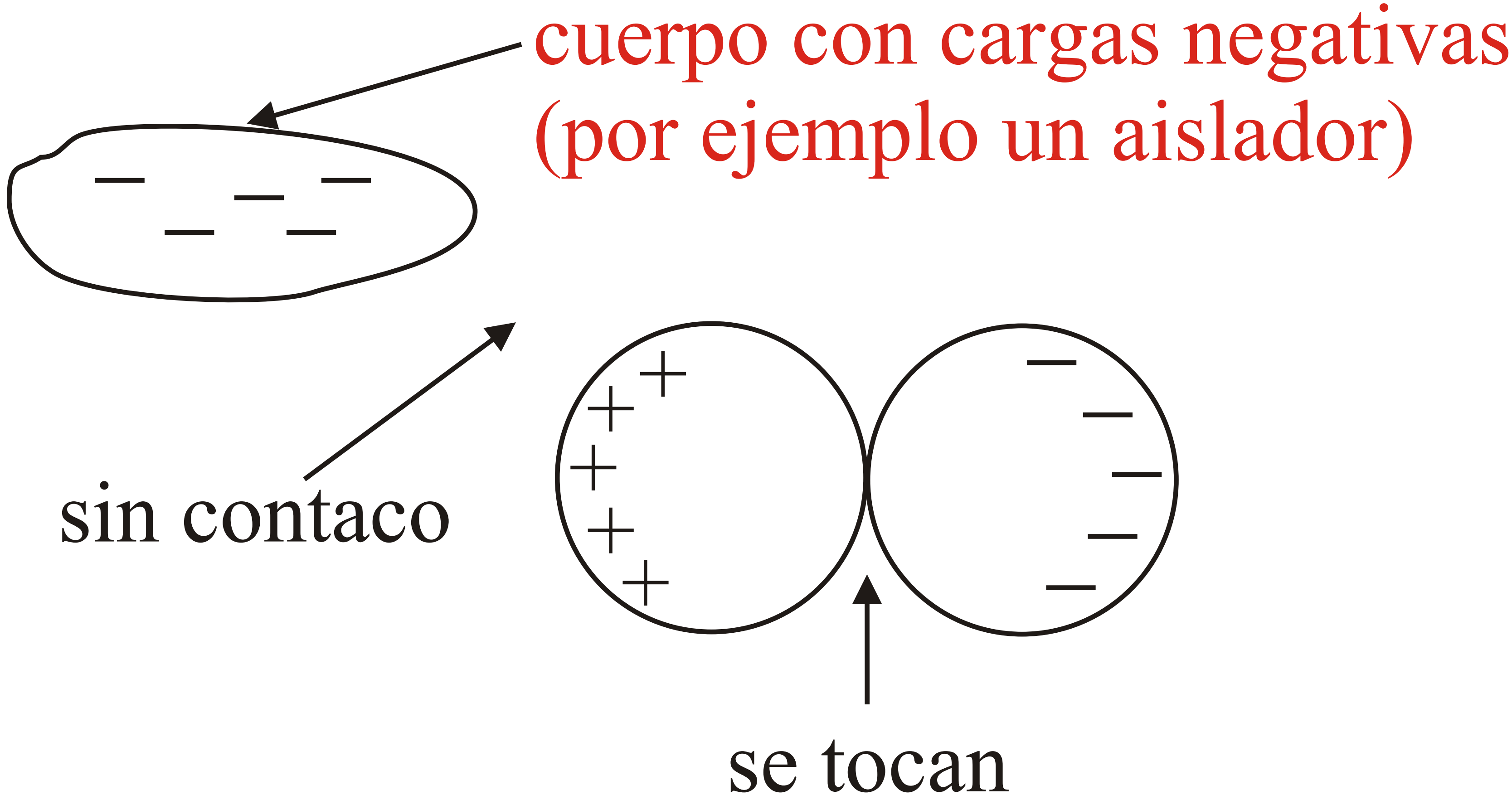
portadores de carga $\rightarrow$ protón $q = +e$

1.4. Carga por inducción
(sin contacto)

1) Dos esferas metálicas se tocan y forman un solo conductor no cargado.

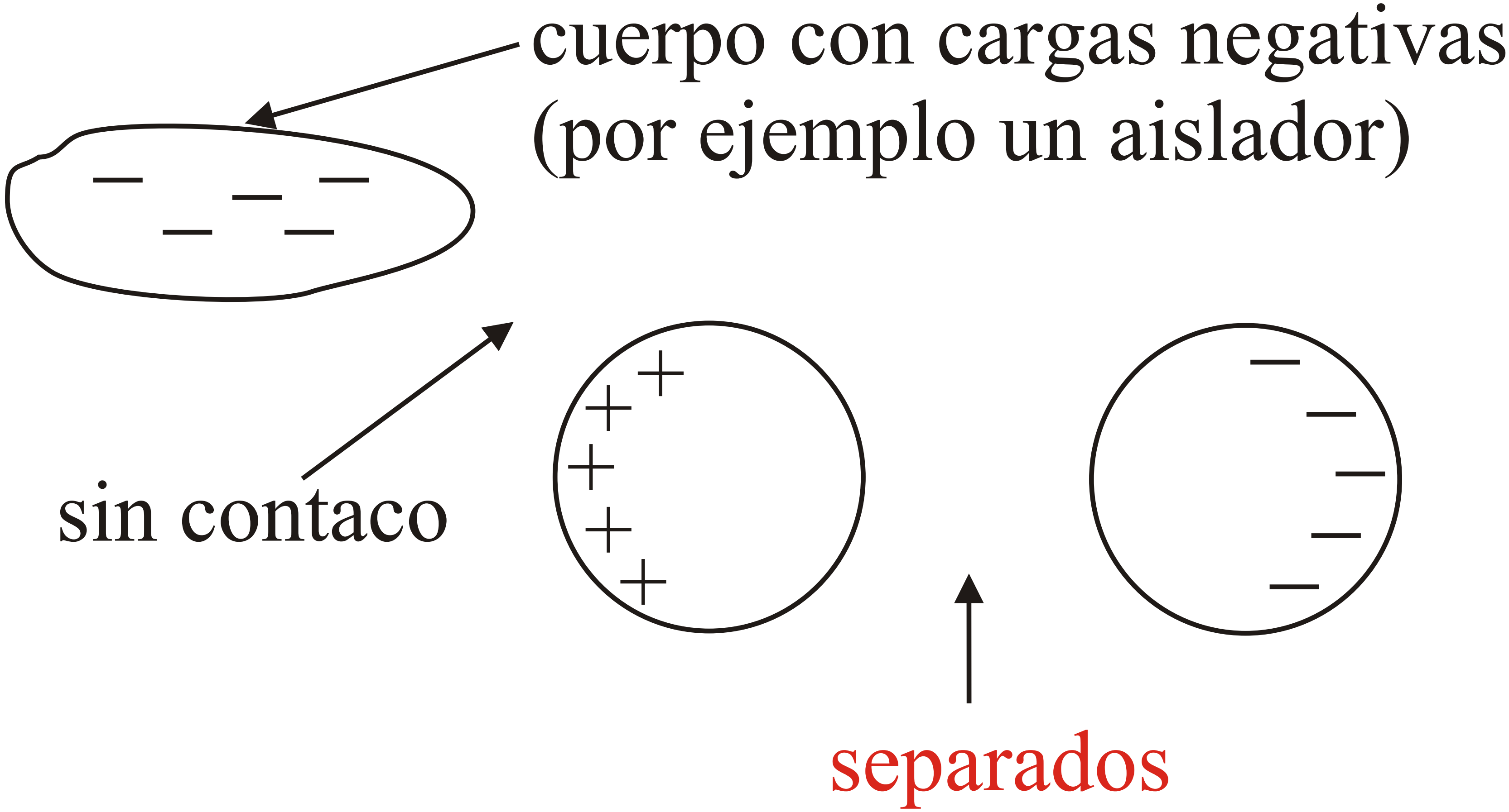


2)

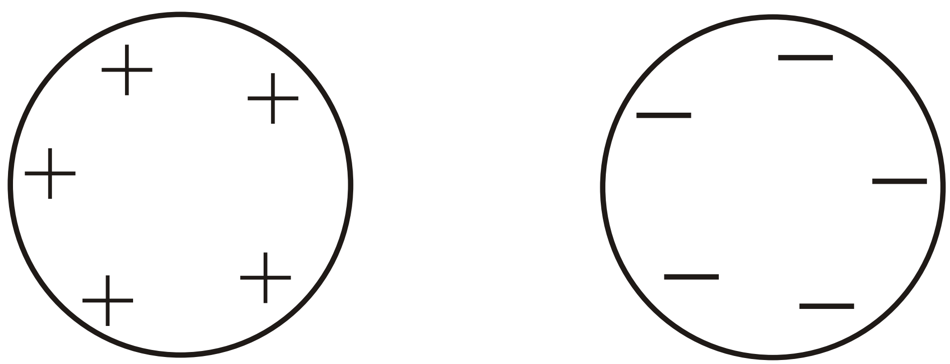


- La carga se redistribuye.
- Los electrones libres más próximas al otro cuerpo se mueven hacia el lado opuesto.

3)


cuerpo con cargas negativas
(por ejemplo un aislador)
sin contaco
separados

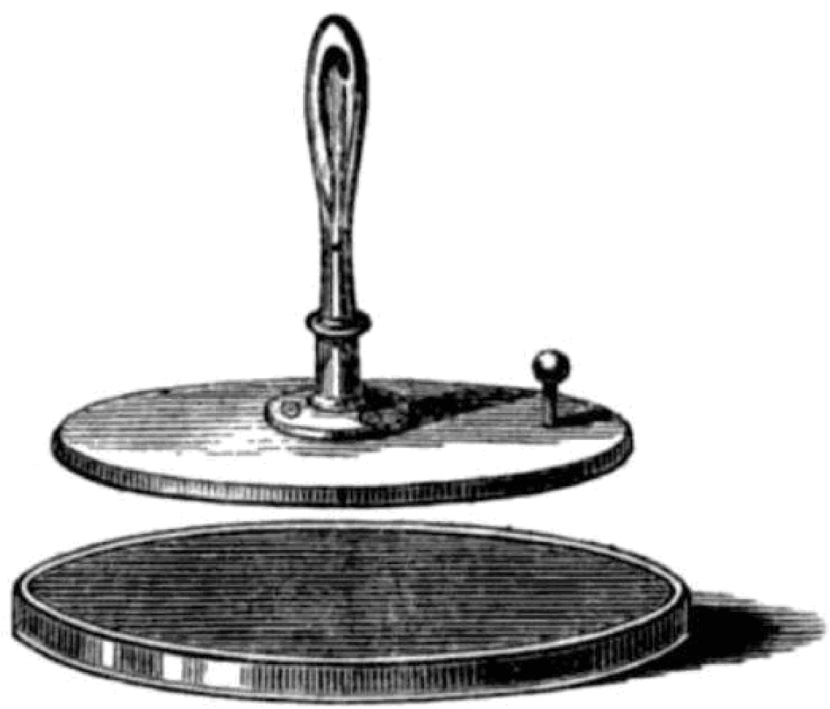
4)



- Cada esfera quedará cargada con la misma cantidad de carga y signo opuesto.

Nótense

En 1762, el físico sueco Johan Carl Wilcke inventó un generador electrostático llamado ”electróforo”.



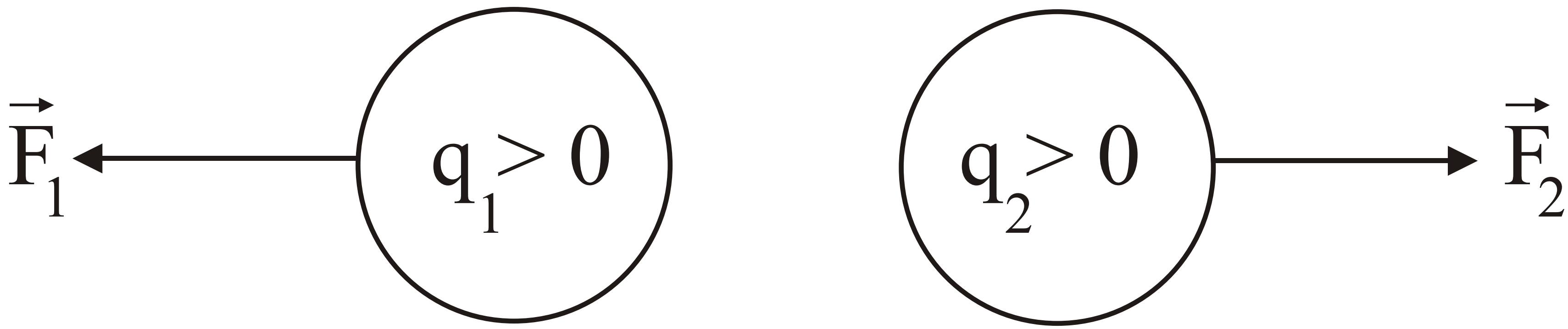
1.5. Ley de Coulomb

(Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) fue un físico francés)

- Cargas con signos iguales se repelen. $q_1 \cdot q_2 > 0$
- Cargas con signos diferentes se atraen. $q_1 \cdot q_2 < 0$

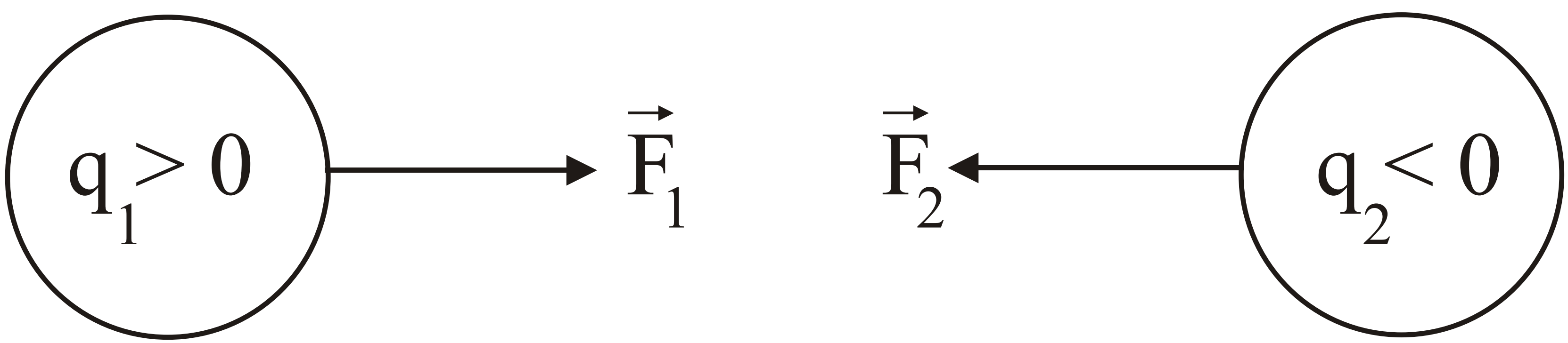
- son fuerzas mecánicas
- falta una ley cuantitativa de estas fuerzas

Experimentos con pequeñas esferas cargadas



$$\boxed{|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|}$$

(actio = reactio)
(Newton)



$$\boxed{|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|}$$

(actio = reactio)
(Newton)

En mecánica se usa el concepto de masa puntual.

Ahora la masa puntual no solo traye una masa sino también una carga. $\longrightarrow$ la carga puntual

---

Resultados de los experimentos de Coulomb

- La fuerza $F = F_1 = F_2$ es proporcional al producto de las cargas.

$$F \sim q_1 \qquad\qquad F \sim q_2$$

$$\boxed{F \sim q_1 \cdot q_2}$$

- La fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las cargas puntuales.

$$\boxed{F \sim r_{21}^{-2}}$$

Asociando ambas relaciones nos da

$$\boxed{F \sim q_1 \cdot q_2 \cdot r_{21}^{-2}}$$

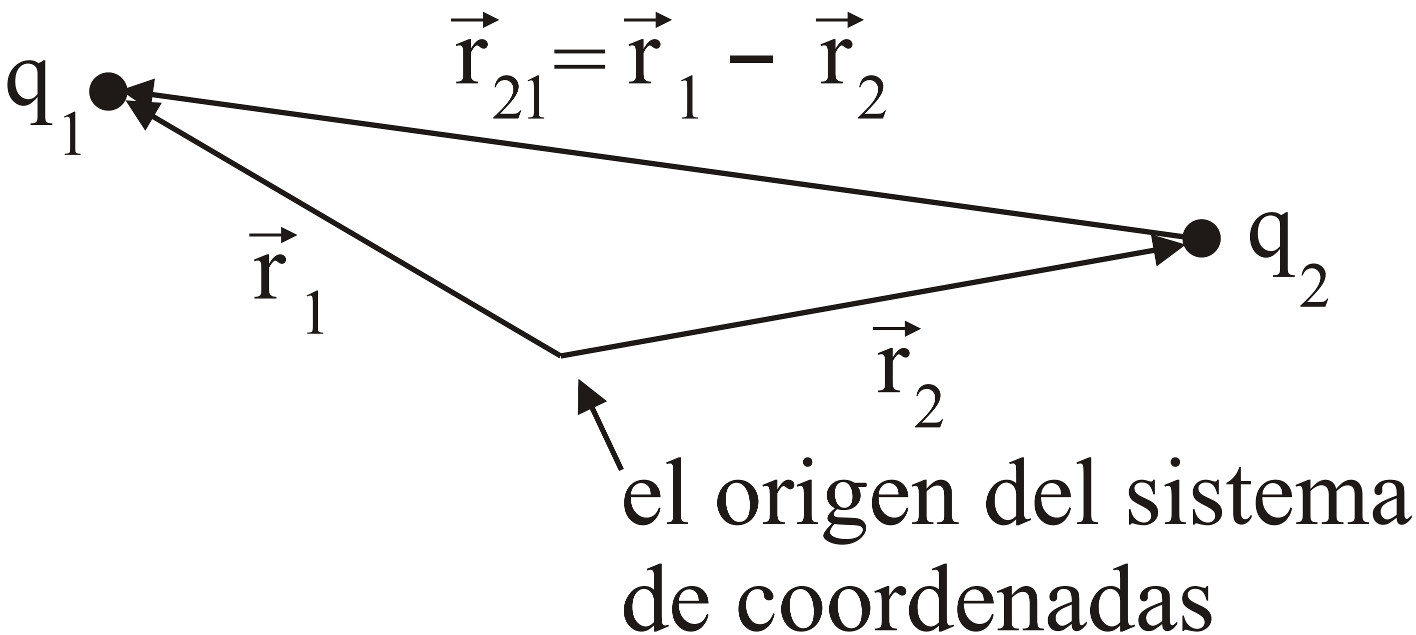
$$F \text{ y } r_{21} \xrightarrow[\text{son vectores !!!}]{} \vec{F} \text{ y } \vec{r}_{21}$$

letra de imprenta es permitido utilizar letras gordas

letra hecha a mano es prohibido utilizar letras gordas

→ Hay que poner las flechitas !!!

En el espacio tridimensional



La dirección de la fuerza $\vec{F}$ es paralela al vector $\pm\vec{r}_{21}$.

---

la fuerza que actúa a la carga q_1

$$\boxed{q_1 \cdot q_2 > 0} \longrightarrow \frac{\vec{F}_{q_1}}{F_{q_1}} = \frac{+\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

$$\boxed{q_1 \cdot q_2 < 0} \longrightarrow \frac{\vec{F}_{q_1}}{F_{q_1}} = \frac{-\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

El producto $q_1 \cdot q_2$ nos da el signo correcto.

$$\boxed{\vec{F}_{q_1} \sim q_1 \cdot q_2 \cdot r_{21}^{-2} \cdot \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}}$$

la fuerza que actúa a la carga q_1

- falta un prefactor

$$\boxed{\vec{F}_{q_1} = \frac{1}{4\quad{}_0}\, q_1\, q_2\, r_{21}^{-2}\, \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}}$$

${}_0$ es la constante dieléctrica o también la permitividad del vacío.

- <u>Las unidades</u>

$$N = \frac{1}{[\ _0]} \cdot \frac{C^2}{m^2} \longrightarrow [\ _0] = \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\boxed{\vec{F}_{q_1} = \frac{1}{4 \quad _0} q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}}$$

la ley de Coulomb (≈1785)

Nótense: $\vec{F}_{q_2} = -\vec{F}_{q_1}$ (actio = reactio)

1.6. Campo eléctrico

- El campo eléctrico $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}}$ $\qquad [\vec{E}] = \dfrac{N}{C}$

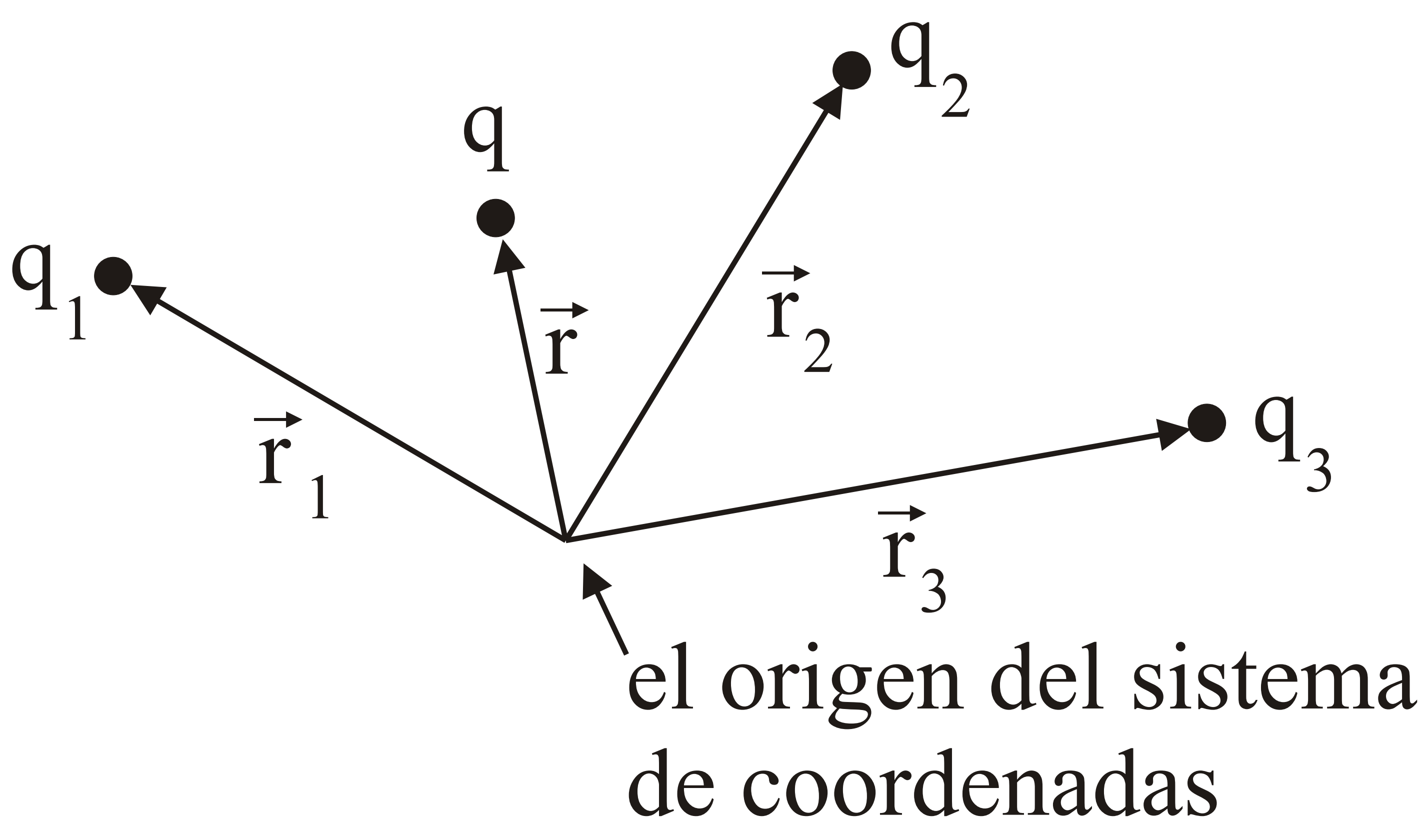
es un campo vectorial en el cual una carga eléctrica puntual de valor q sufre los efectos de una fuerza $\vec{F}$.

Fuerzas son aditivas $\qquad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

$\longrightarrow \quad q\vec{E} = \sum_i q\vec{E}_i$

$\longrightarrow \quad \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \quad \longrightarrow$ campos eléctricos también son aditivos

Un conjunto de cargas puntuales produce una fuerza actuando sobre la carga puntual q.



$$\vec{F}_q = \sum_i \frac{1}{4\quad{}_0}\, q\, q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

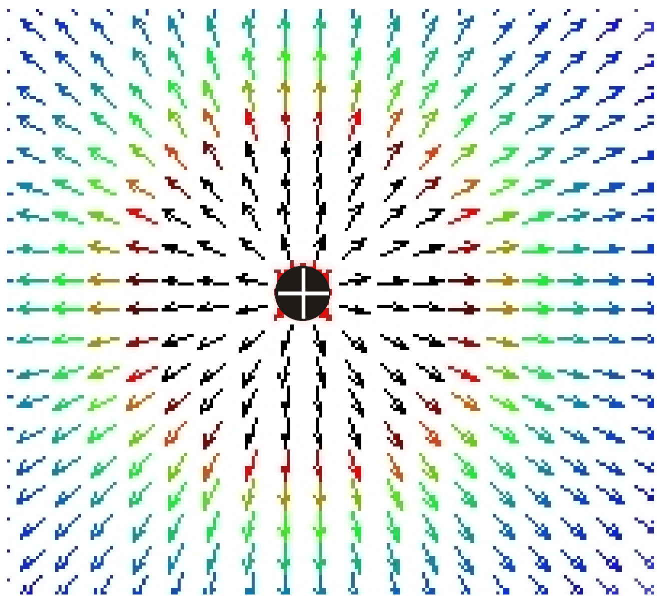
$$\vec{F}_q = \frac{1}{4\quad{}_0}\, q \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\quad{}_0} \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}$$

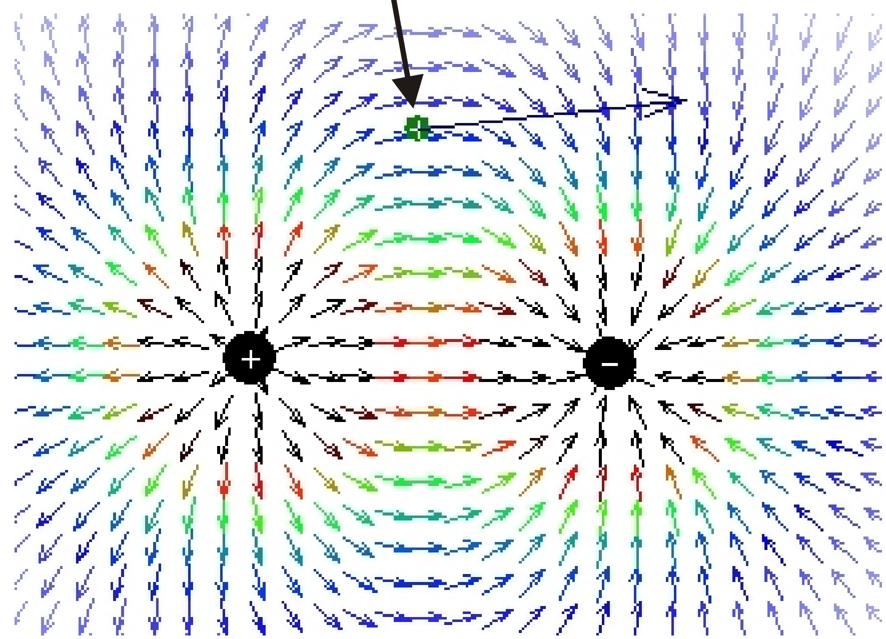
$\vec{E}(\vec{r})$ depende de las cargas q_i y de las posiciones $\vec{r}_i$ y es independiente de q.

$$q\uparrow \longrightarrow \vec{F}_q \uparrow$$

$\vec{E}(\vec{r})$ es un campo vectorial que asocia un vector $\vec{E}$ a cada punto $\vec{r}$ en el espacio.



carga de prueba
(positiva y puntual)



muchas flechitas !!!

- Para ayudar a visualizar un campo vectorial se utilizan las “líneas de campo”.

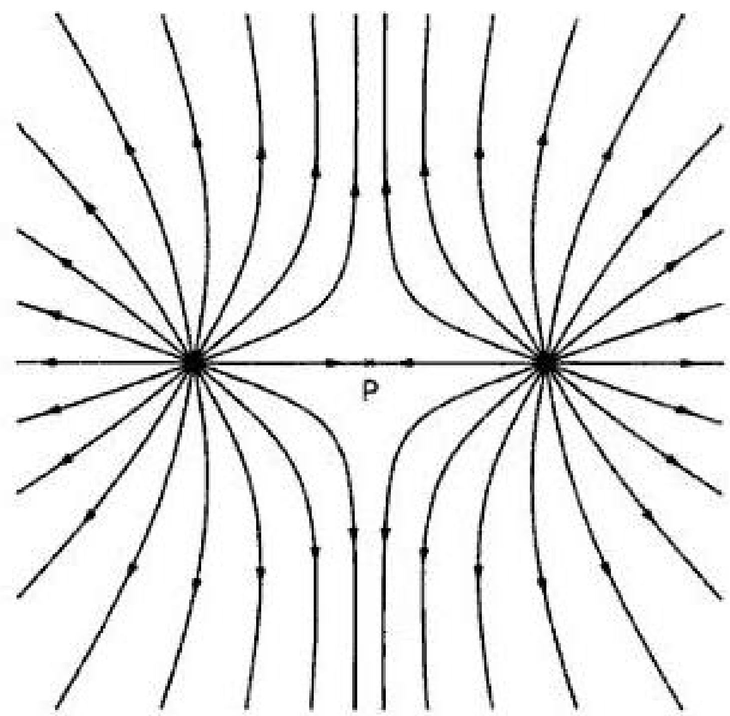
- Cada línea está dibujada de forma que el campo $\vec{E}(\vec{r})$ es tangente a la misma en cada punto de está. Las puntas de las flechas indican el sentido del campo.

<u>Ejemplo 1</u>

- dos cargas positivas

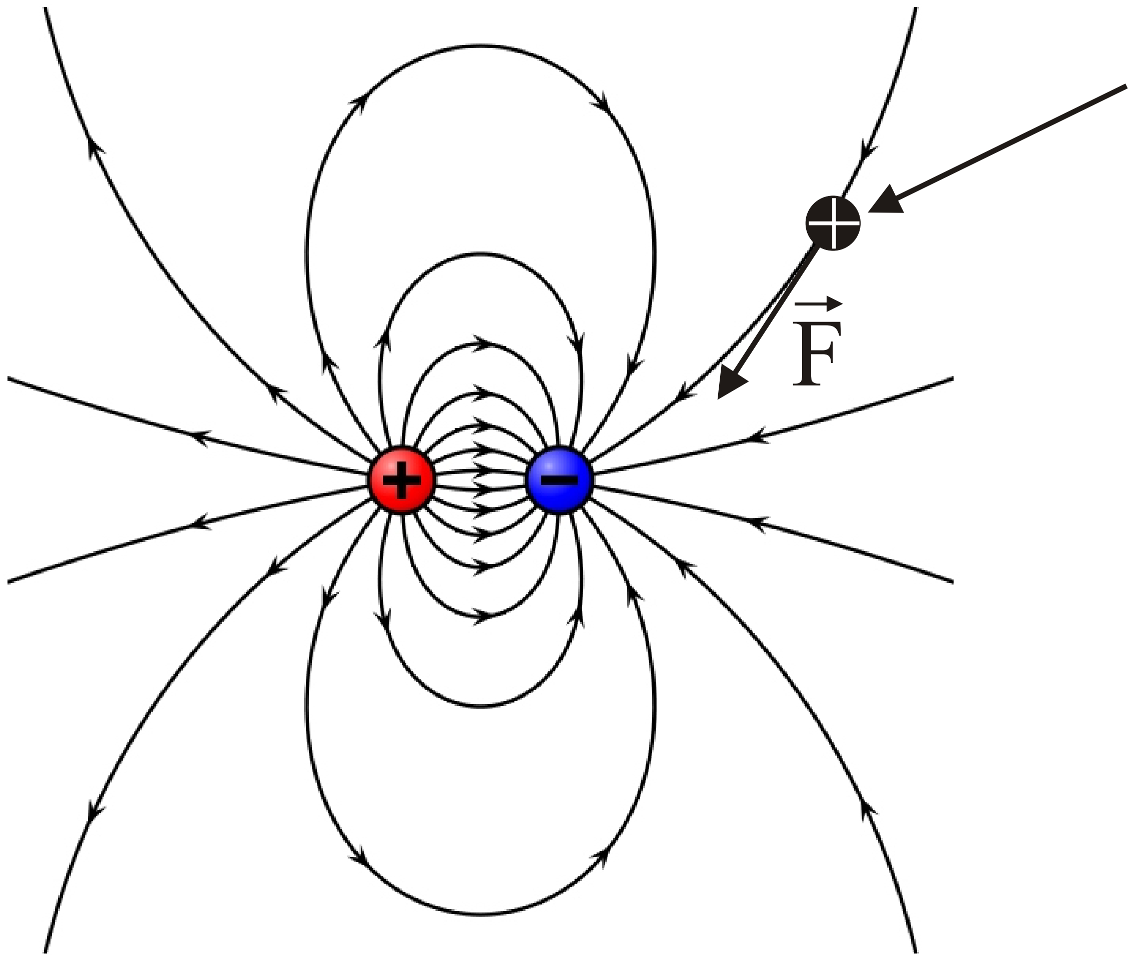
$$q_1 = q_2$$

$\vec{E} = 0$ en el punto P



Ejemplo 2 • dos cargas con signos diferentes

$$q_1 = -q_2$$

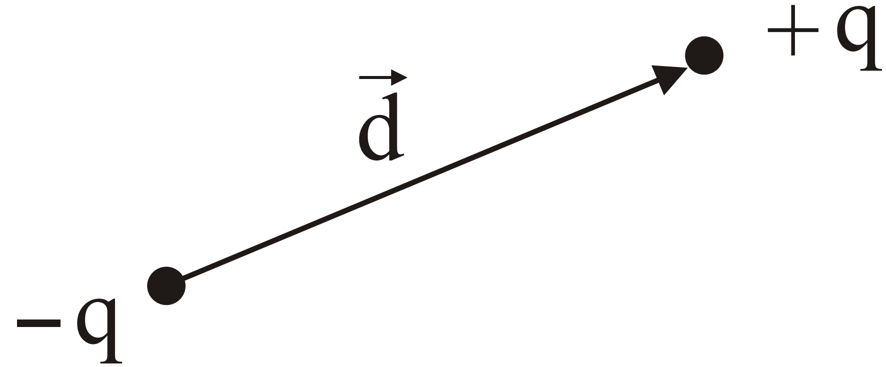


carga de prueba (positiva y puntual)

$\vec{E}$ y $\vec{F}$ apuntan en la misma dirección

- Un sistema de dos cargas de signo opuesto e igual magnitud se llama ”dipolo eléctrico”.

$q > 0$



$|\vec{d}| = d$ es la distancia entre las dos cargas.

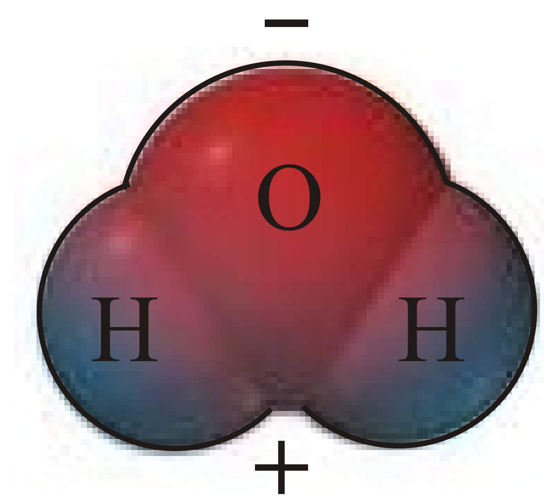
- Muchas moléculas son dipolos eléctricos, por ejemplo:

H_2O, HCl, NH_3

(dipolos <u>permanentes</u>)

agua:

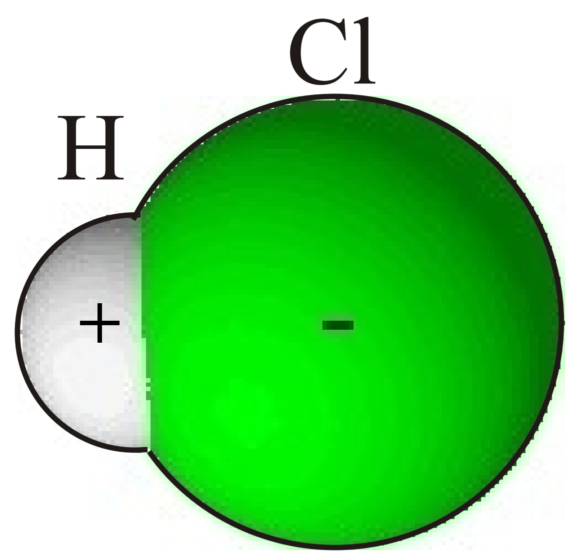
(dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno)



---

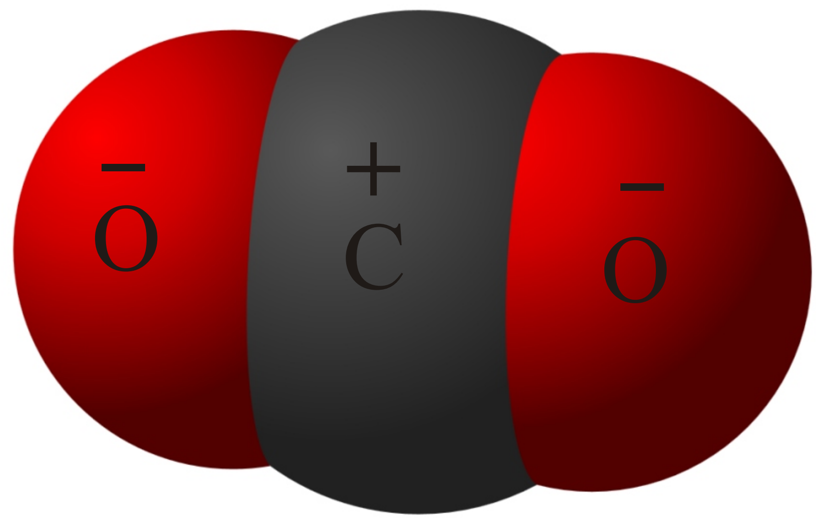
cloruro de hidrógeno:

(un átomo de cloro unido a uno de hidrógeno)

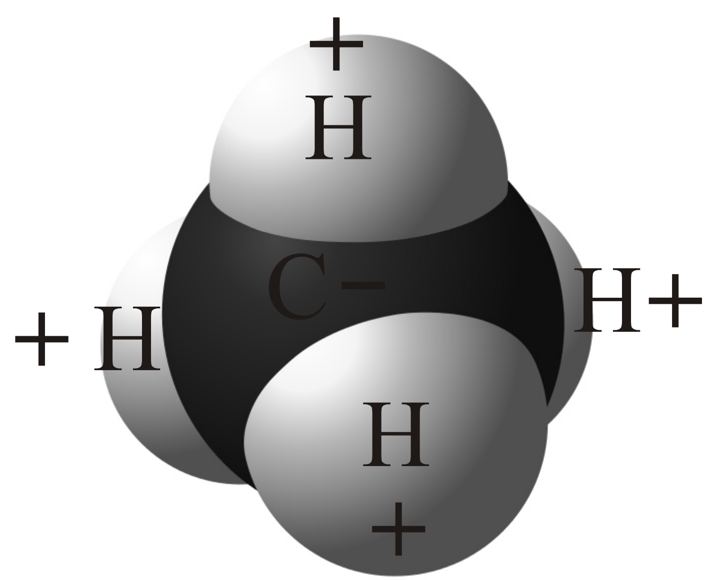


- También hay moléculas, que No son dipolos eléctricos, por ejemplo: CO_2, CH_4

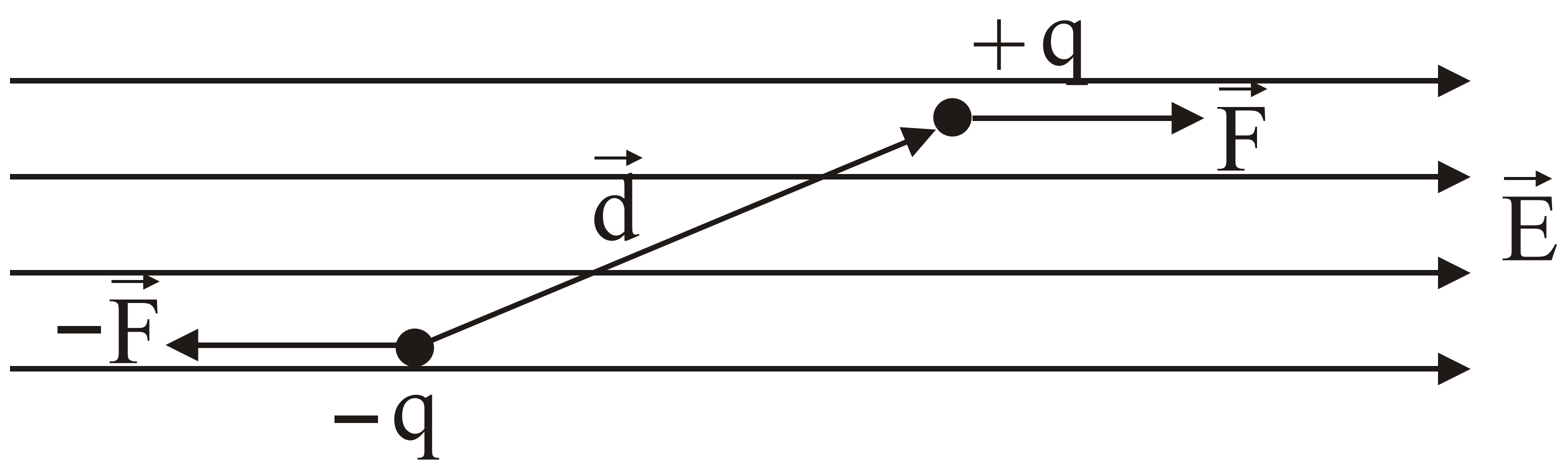
<u>dióxido de carbono:</u>



<u>metano:</u>



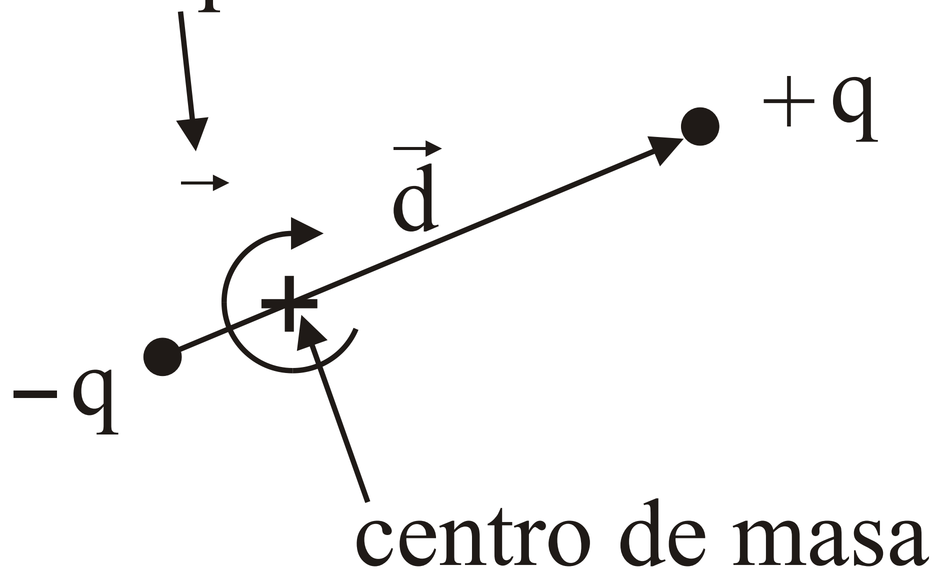
- Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme:



- El dipolo podemos considerar como un <u>solido</u>: $d = const$ (por el enlace químico)

- La intensidad del campo eléctrico externo no es suficiente para romper el dipolo.

- Suponiendo que el centro de masa se ubica en la línea que conecta las dos cargas, se obtiene un torque:



$$\boxed{\vec{\ } = \quad \vec{d}\times\vec{F} \; + \quad - \quad -\vec{d} \; \times -\vec{F}} \qquad \leq \quad \leq$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{\ } = \vec{d}\times\vec{F}}$$

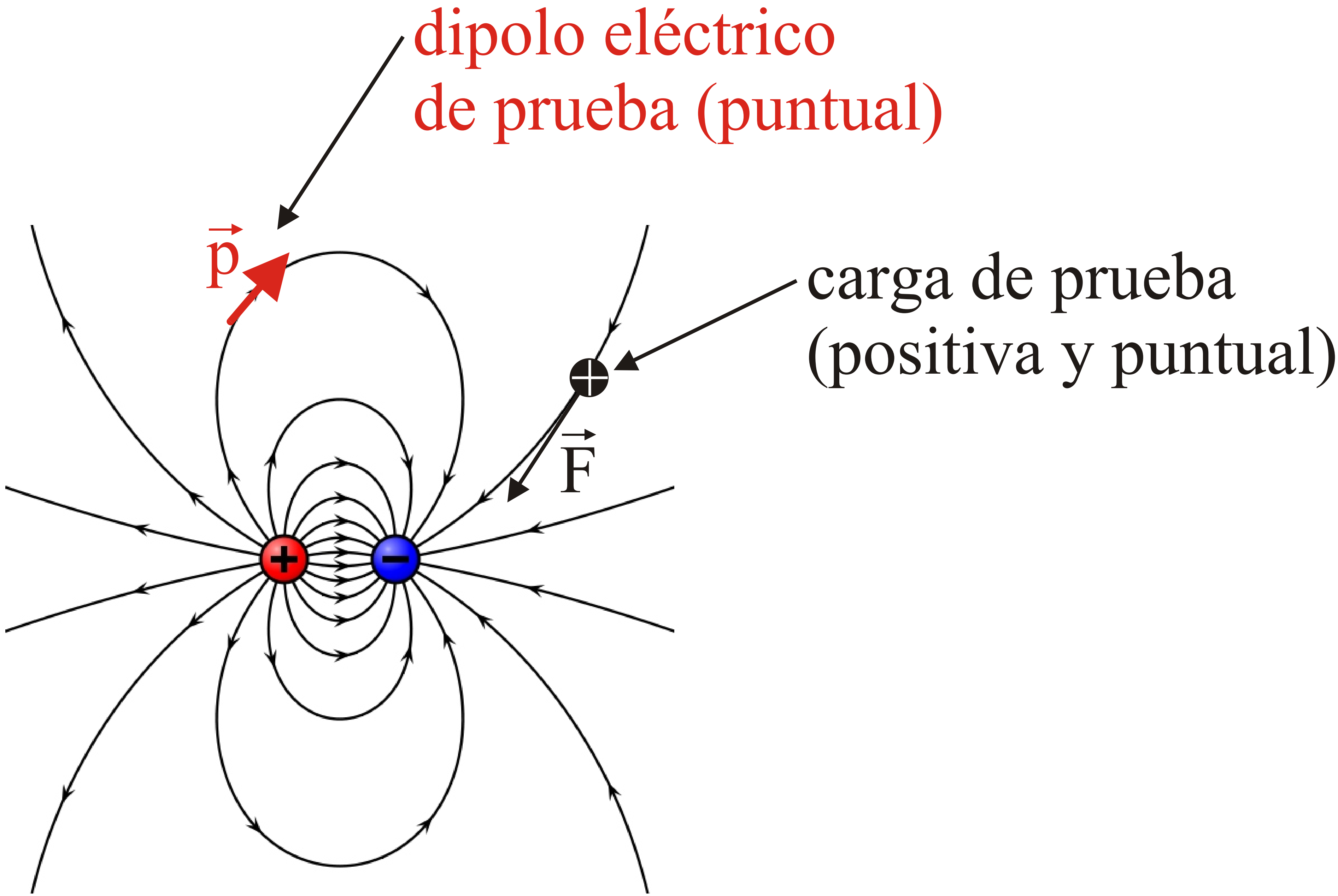
- El torque $\vec{\ }$ actúa sobre el dipolo.
- Utilizando $\vec{F} = q\vec{E}$ obtenemos:

$$\vec{\ } = \vec{d} \times (q\vec{E}) = q\,\vec{d} \times \vec{E}$$

- Se define el **momento dipolar eléctrico** como:

$$\boxed{\vec{p} = q\,\vec{d}} \qquad [\vec{p}] = \mathrm{C\,m}$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{\ } = \vec{p} \times \vec{E}}$$



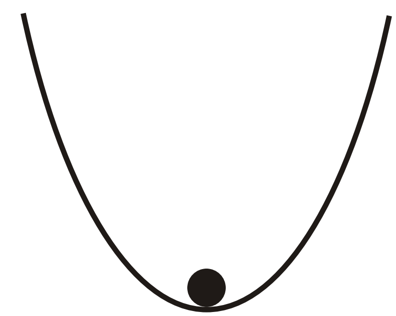
dipolo eléctrico
de prueba (puntual)
$\vec{p}$
carga de prueba
(positiva y puntual)
$\vec{F}$

$\vec{\ } \neq \vec{0}$ $\longrightarrow$ el dipolo se gira

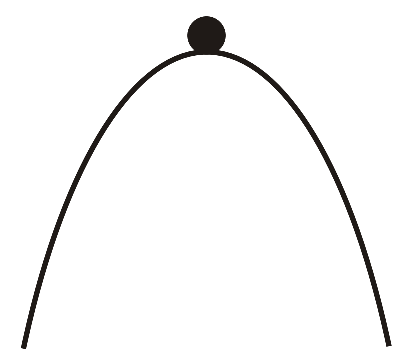
<u>hasta:</u> $\vec{\ } = \vec{0}$ (frenado por <u>fricción</u>)

$$\longrightarrow \vec{0} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$\longrightarrow \boxed{+\vec{p} \parallel \vec{E}}$ $\longrightarrow$ equilibrio estable



$-\vec{p} \parallel \vec{E}$ $\longrightarrow$ equilibrio inestable



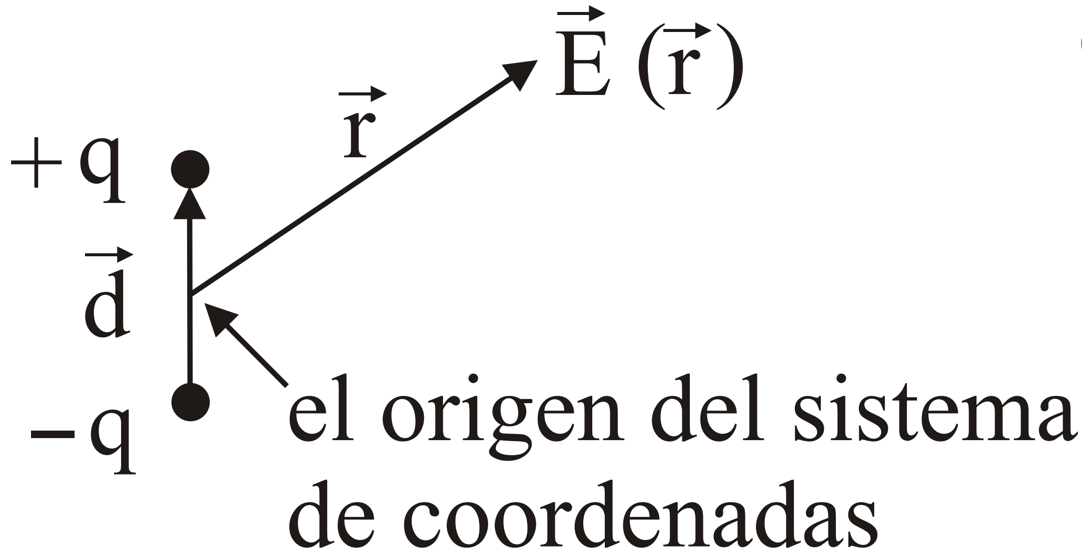
Ejemplos: momento dipolar eléctrico

H_2O $\quad p = 6{,}17 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{C\,m}$

HCl $\quad p = 3{,}70 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{C\,m}$

NH_3 $\quad p = 4{,}91 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{C\,m}$

Campo eléctrico del dipolo



$q > 0$

$$\longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\quad{}_0}\left[\frac{\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}}{\left|\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right|^3} - \frac{\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}}{\left|\vec{r}+\frac{\vec{d}}{2}\right|^3}\right]$$

Campo eléctrico del dipolo puntual

- Lejos del dipolo se tiene: $\boxed{d \ll r}$

$$\longrightarrow \left.\begin{aligned} \left|\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right|^3 &\approx (r^2 + \vec{r}\cdot\vec{d})^{3/2} \\ &\approx (r^6 + 3r^4\,\vec{r}\cdot\vec{d})^{1/2} \\ &\approx r^3 + \frac{3}{2}\, r\, \vec{r}\cdot\vec{d} \end{aligned}\right\} \text{Tarea!}$$

$$\longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\, r^{-6}}{4 \quad {}_0} \left[\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right)\left(r^3 + \frac{3}{2}\, r\, \vec{r}\cdot\vec{d}\right) - \left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right)\left(r^3 - \frac{3}{2}\, r\, \vec{r}\cdot\vec{d}\right)\right]$$

$$\longrightarrow \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\, r^{-6}}{4 \quad {}_{0}} \left[3\, r\, \vec{r} \left(\vec{r} \cdot \vec{d} \right) - \vec{d}\, r^{3} \right]$$

- Utilizando $\vec{p} = q\, \vec{d}$ nos da:

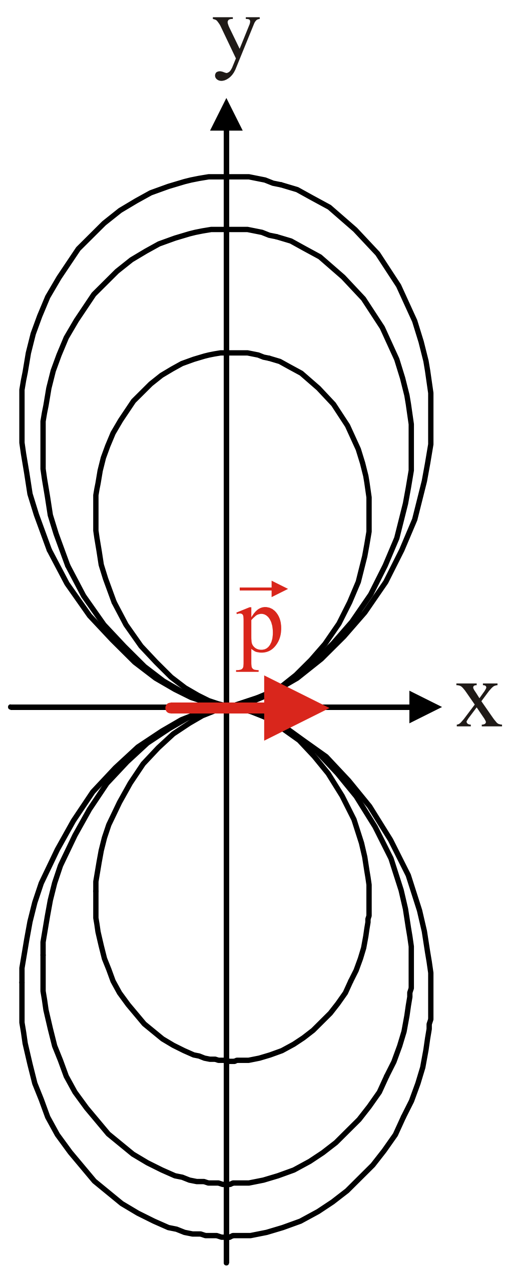
$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \quad {}_{0}\, r^{3}} \left[3\, r^{-2}\, \vec{r} \left(\vec{r} \cdot \vec{p} \right) - \vec{p} \right]}$$

(campo eléctrico del dipolo puntual)

= (campo lejano del dipolo)

$\longrightarrow$ La relación entre $\vec{E}$ y $\vec{p}$ no es trivial.

- Las líneas del campo lejano del dipolo:



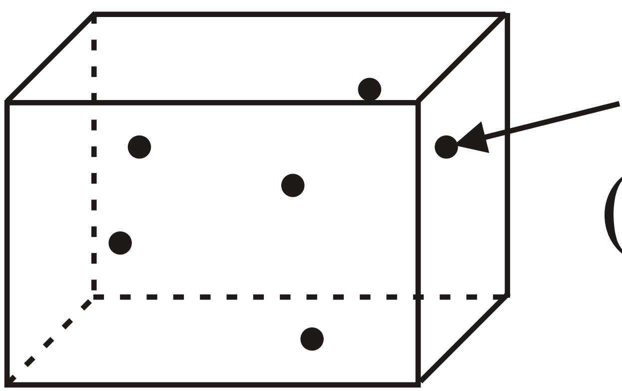
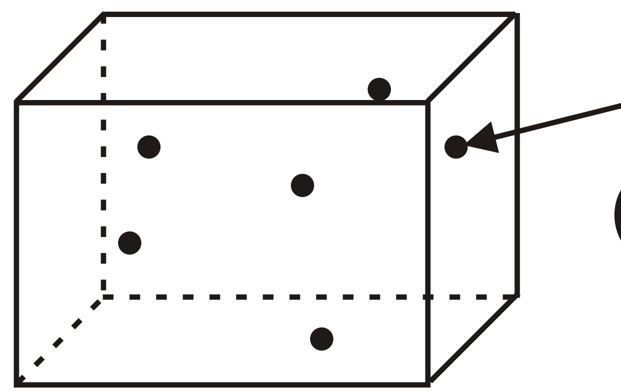
<u>coordenadas polares</u>

$$r = C \sin^2(\ \ )$$

Tarea!

1.7. Campo macroscópico
(distribuciones continuas de carga)

El campo macroscópico es el promedio espacial del campo microscópico. Para determinar el promedio espacial se utiliza un pequeño volumen V.

Mecánica	Electricidad
 m_i (masa puntual)	 q_i (carga puntual)
$m = \sum_{\vec{r}_i \in V} m_i$	$q = \sum_{\vec{r}_i \in V} q_i$

densidad volumétrica de masa

$$(\vec{r}) = \frac{m(\vec{r})}{V(\vec{r})}$$

$$= \text{”}\frac{dm(\vec{r})}{dV(\vec{r})}\text{”}$$

densidad volumétrica de carga

$$(\vec{r}) = \frac{q(\vec{r})}{V(\vec{r})}$$

$$= \text{”}\frac{dq(\vec{r})}{dV(\vec{r})}\text{”}$$

se ignora el “mundo microscópico“

- La densidad volumétrica macroscópica es discontinua en el contorno de un medio.

$$\boxed{dq = \quad (\vec{r})\ dV} \qquad [\quad] = C\ m^{-3}$$

carga infinitesimal en el volumen dV

$$q = \int_V dq = \int_V \quad (\vec{r})\ dV$$

---

cargas puntuales

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \quad {}_0} \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}$$

---

densidad de carga

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \quad {}_0} \int_V \quad (\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\, d^3\vec{r}\,'}$$

El símbolo $d^3\vec{r} \equiv dV$ es muy útil.

- Los campos macroscópicos son muy útiles para describir cuerpos.

- Se puede trabajar con distribuciones continuas de carga (dentro del cuerpo) y no hay variaciones complejas (espaciales y temporales).

- La presencia de discontinuidades (en el contorno) es un efecto secundario.

Densidad de carga

3D: volumétrica: $= \frac{dq}{dV}$

volumen

2D: superficial: $= \frac{dq}{dA}$

área

1D: lineal: $= \frac{dq}{dl}$

largo

1.8. Flujo eléctrico

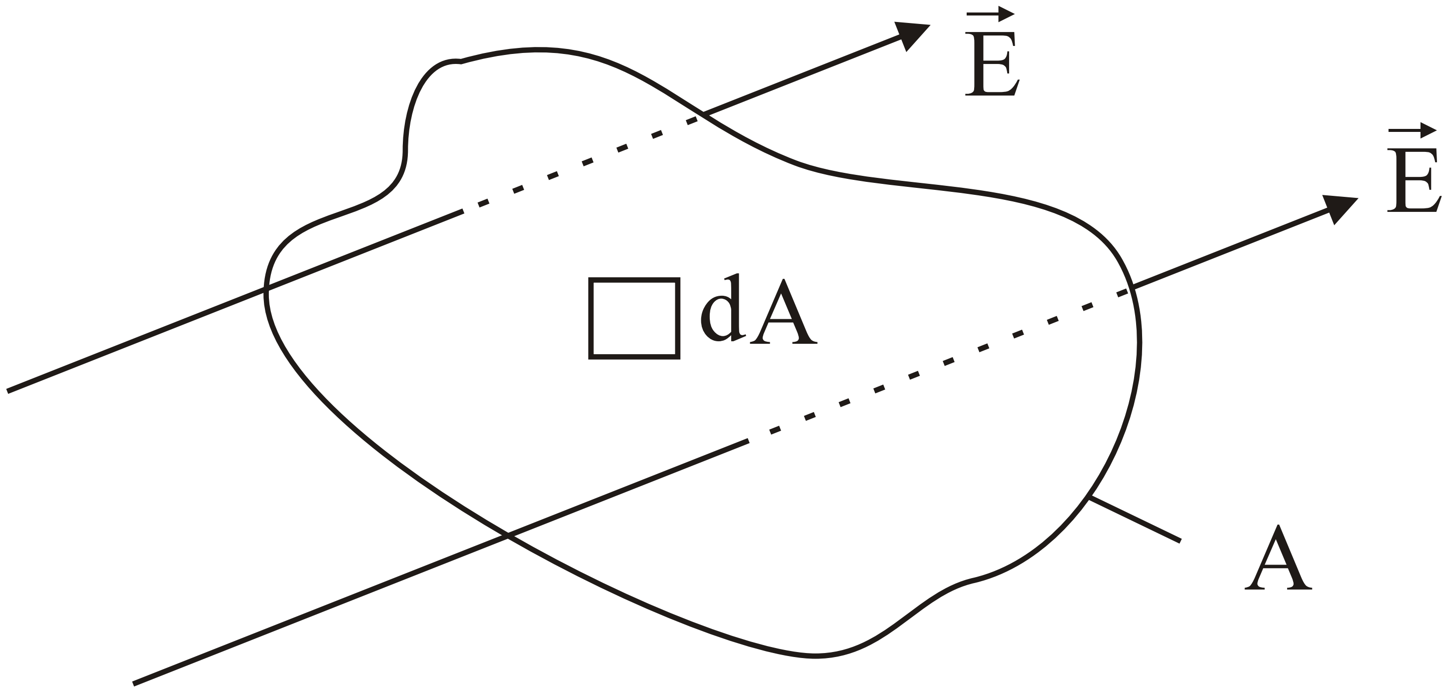
El flujo eléctrico $\ _e$ es una cantidad escalar que expresa una medida del campo eléctrico $\vec{E}$ que atraviesa una determinada superficie A.

Definición: $$d\ _e = \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(forma diferencial)

producto escalar

$d\vec{A}$ es el vector diferencial de superficie que corresponde a cada elemento infinitesimal del área A.



$$d\vec{A} = \vec{n}\ dA$$

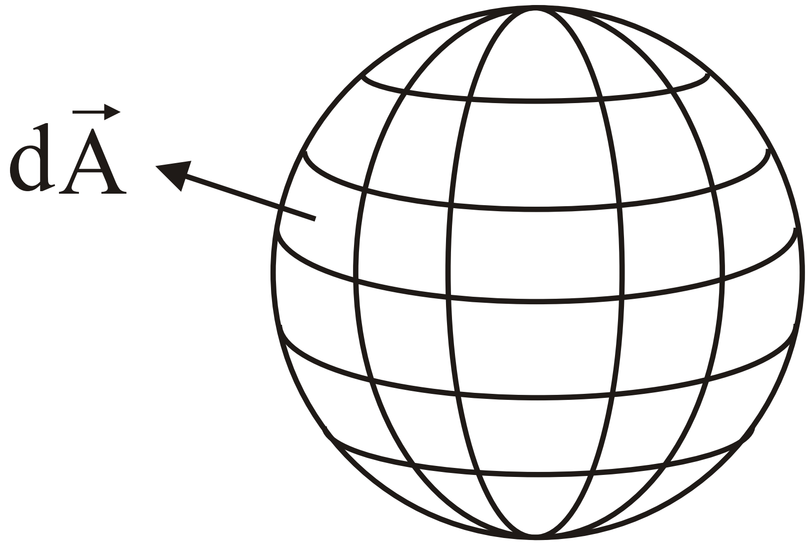
vector normal

área infinitesimal

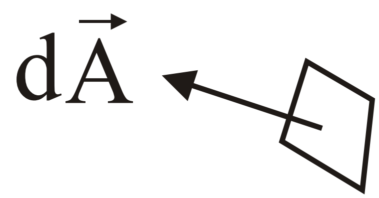
$$|d\vec{A}| = dA$$

$$|\vec{n}| = 1$$

Por ejemplo una esfera:



- La superficie se encuentra dividida en cuadrados elementales.
- La dirección de $d\vec{A}$ es normal a la superficie y el sentido hacia afuera.



Forma integral:

$$\boxed{{}_{e} = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

$${}_{e} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

una superficie
cerrada

La unidad:

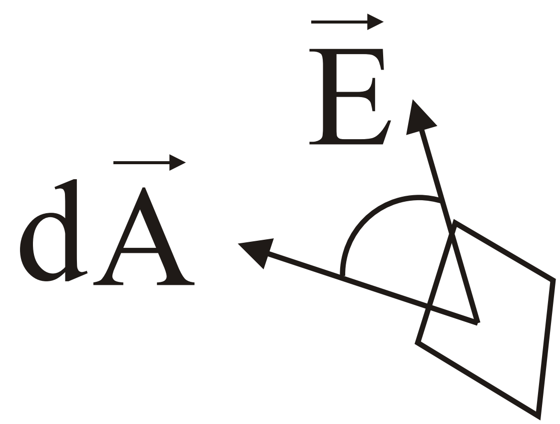
$$[\ {}_{e}] = \frac{N}{C} m^2$$

1.9. Ley de Gauss

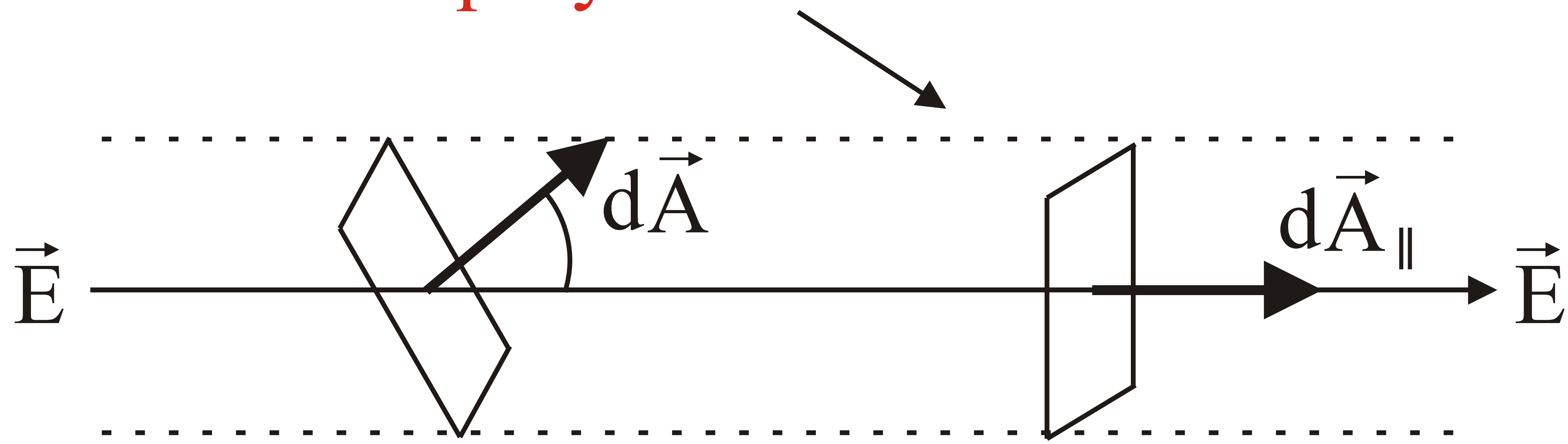
(Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), fue un matemático y físico alemán)

- Vamos a considerar una carga puntual rodeada por una superficie cualquiera y vamos a calcular el flujo eléctrico que atraviesa esta superficie.
- El ángulo entre $\vec{E}$ y $d\vec{A}$ viene dado por:

$$\cos(\quad) = \frac{\vec{E} \cdot d\vec{A}}{E \cdot dA}$$



- Se busca la proyección normal:



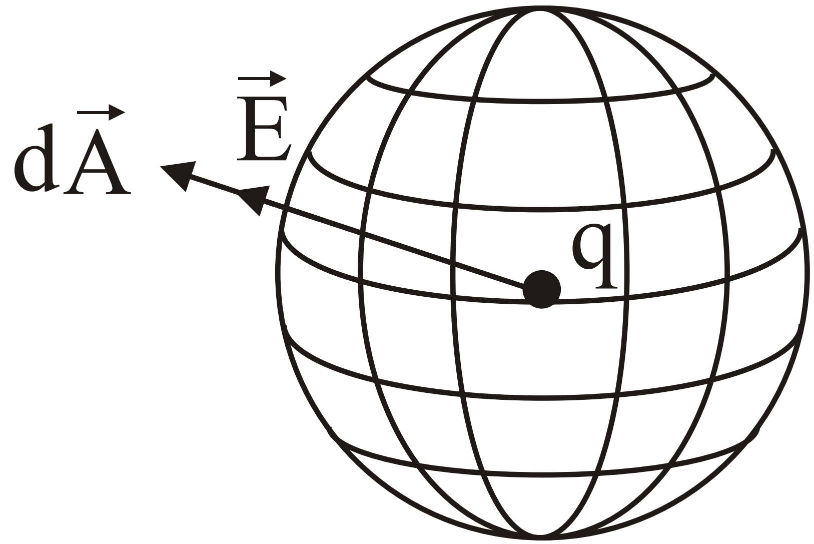
$$dA \geq dA_{\|}$$

$$dA = \frac{dA_{\|}}{\cos(\quad)}$$

$\longrightarrow$ $d\quad_{e} = \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\ dA\cos(\quad) = E\ dA_{\|}$

$\longrightarrow$ Una superficie cualquiera se puede reemplazar con cualquier esfera de cualquier radio.

Considérese una esfera de radio R con una carga puntual q en su centro:



$$\vec{E} \parallel d\vec{A}$$

<u>Campo eléctrico de la carga puntual:</u>

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \quad {}_{0}}\, q\, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^{3}}}$$

$$\longrightarrow \qquad {}_{e} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{4\quad{}_{0}}\, q \oint \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^{3}}\cdot d\vec{A}$$

$$d\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r}\, dA$$

esfera

$${}_{e} = \frac{1}{4\quad{}_{0}}\, q \oint \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^{3}}\cdot \frac{\vec{r}}{r}\, dA$$

$${}_{e} = \frac{1}{4\quad{}_{0}}\, q \oint r^{-2}\, dA$$

Coordenadas esféricas:

$$dA = r^{2}\, d\quad = r^{2}\sin(\quad)\, d\quad d$$

ángulo sólido

$$\leq \quad \leq$$

el estereorradián (sr)

$$\longrightarrow \qquad {}_{e} = \frac{1}{4\quad {}_{0}}\, q \int\!\!\int r^{-2}\; r^{2} \sin(\quad)\, d\quad d$$

$$= \frac{1}{4\quad {}_{0}}\, q \;\underbrace{\int \sin(\quad)\, d}_{2}\;\; \underbrace{\int d}_{2} \;=\; \frac{q}{\quad {}_{0}}$$

$$\longrightarrow \qquad \boxed{{}_{e} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\quad {}_{0}}}$$

la ley de Gauss

q es la carga eléctrica encerrada en esta superficie.

Usando $\quad q = \int_V \;(\vec{r})\, dV$

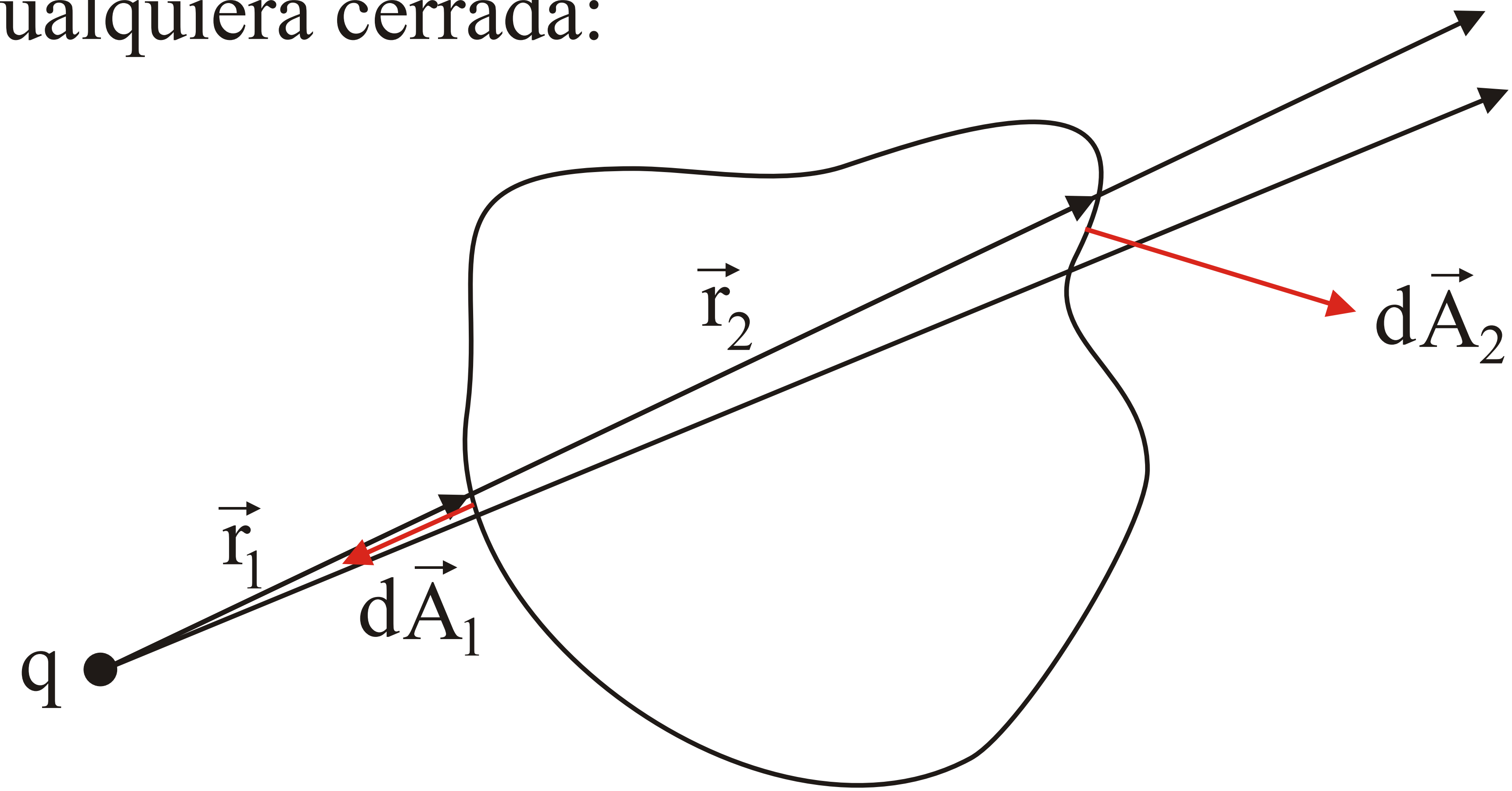
se obtiene:

$$\boxed{{}_{e} = \oint_{(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{{}_{0}} \int_V \;(\vec{r})\, dV}$$

la superficie del volumen

Esta relación es valida para cualquier distribución continua de carga.

Una carga puntual en el exterior de una superficie cualquiera cerrada:



$$\vec{E}(\vec{r}_1)\cdot d\vec{A}_1 = -E(\vec{r}_1)\, dA_{1\parallel}$$

$$\vec{E}(\vec{r}_2)\cdot d\vec{A}_2 = +E(\vec{r}_2)\, dA_{2\parallel}$$

proyección normal (hacia afuera)

Los áreas normales:

$$dA_{2\parallel} = \frac{r_2^2}{r_1^2}\, dA_{1\parallel}$$

Campo eléctrico de la carga puntual:

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4 \quad {}_0}\, q\, r^{-2}$$

El flujo eléctrico total:

$$d \quad {}_{e1} + d \quad {}_{e2} = -E(\vec{r}_1)\, dA_{1\parallel} + E(\vec{r}_2)\, dA_{2\parallel}$$

$$= -\frac{1}{4 \quad {}_0}\, q\, r_1^{-2}\, dA_{1\parallel} + \frac{1}{4 \quad {}_0}\, q\, r_2^{-2}\, \frac{r_2^2}{r_1^2}\, dA_{1\parallel}$$

$$= 0$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\;{}_{e\,total} = \oint d \qquad {}_{e\,total} = 0\;}$$

El flujo eléctrico total a través de A es nulo porque no encierra carga.

<u>Nótense:</u> En cualquier punto interior a A existe campo y no es nulo en ningún lugar.

Conclusión:

$$
{}_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} \dfrac{q}{{}_0} & \text{si la carga está encerrada por la superficie} \\[2ex] 0 & \text{si la carga está fuera de la superficie} \end{cases}
$$

$$
\longrightarrow \quad \boxed{{}_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{{}_0}}
$$

la ley de Gauss

es generalmente válida!

1.10. Cargas eléctricas en conductores

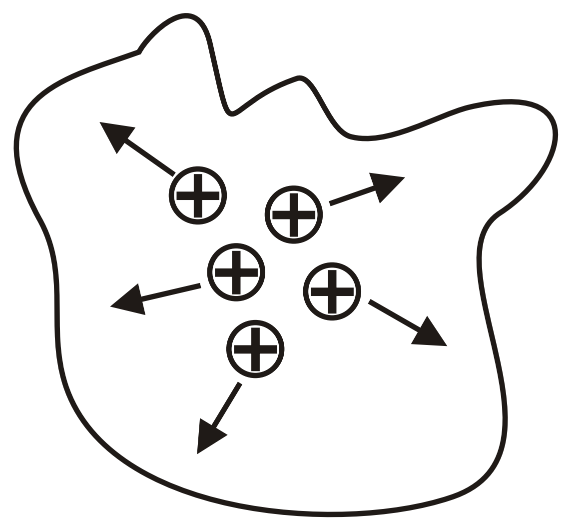
- En un conductor ideal los portadores de carga se moverán en respuesta a cualquier campo eléctrico.

Por ejemplo:

Situación inicial: Un conductor eléctrizado

- hay cargas positivas en el interior del conductor

- las cargas se repelen

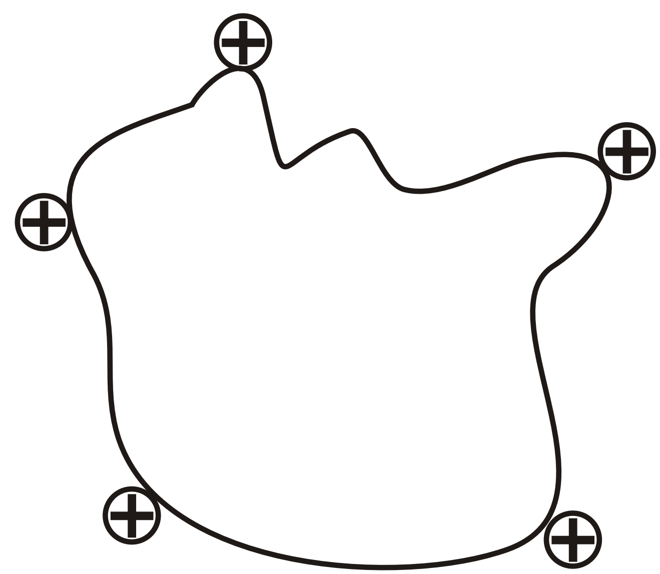


- las cargas llegan a la superficie después de un tiempo muy corto.

Situación final:

- El sistema microscópico llega a un estado donde los portadores de carga se mueven solo en la superficie.

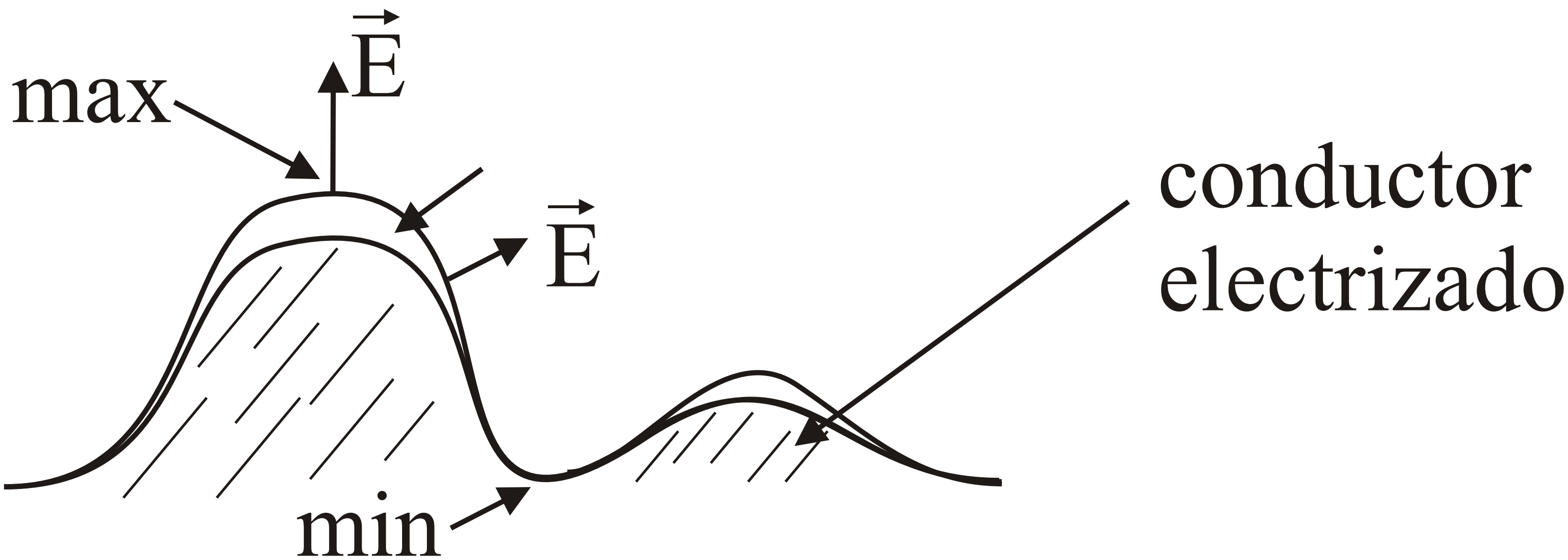
el excedente de carga está en la superficie



- El sistema macroscópico tiene una densidad de carga superficial que no varía en el tiempo.

$\downarrow$ equilibrio

- La densidad de carga superficial $= \dfrac{dq}{dA}$ no es necesariamente uniforme sino depende de la forma del conductor.

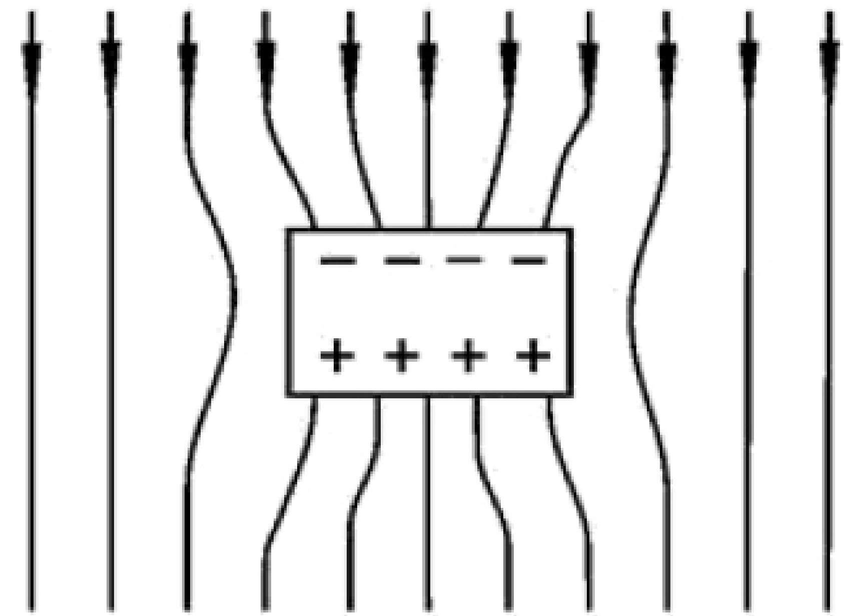


- Todas las fuerzas sobre la densidad de carga superficial se compensan exactamente.

$\longrightarrow$ En el equilibrio el campo $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie. $\longrightarrow$ $\vec{E} \parallel d\vec{A}$

- La inducción (electrostática) es la redistribución de la carga eléctrica en un conductor, causada por un campo eléctrico externo. (sección 1.4.)

- Una acumulación de carga positiva y negativa en zonas opuestas de la superficie del conductor genera un campo eléctrico tal que compensa el campo eléctrico externo.



- En el interior del conductor, por tanto, el campo eléctrico es nulo. (en el equilibrio)

1.11. Aplicaciones de la ley de Gauss

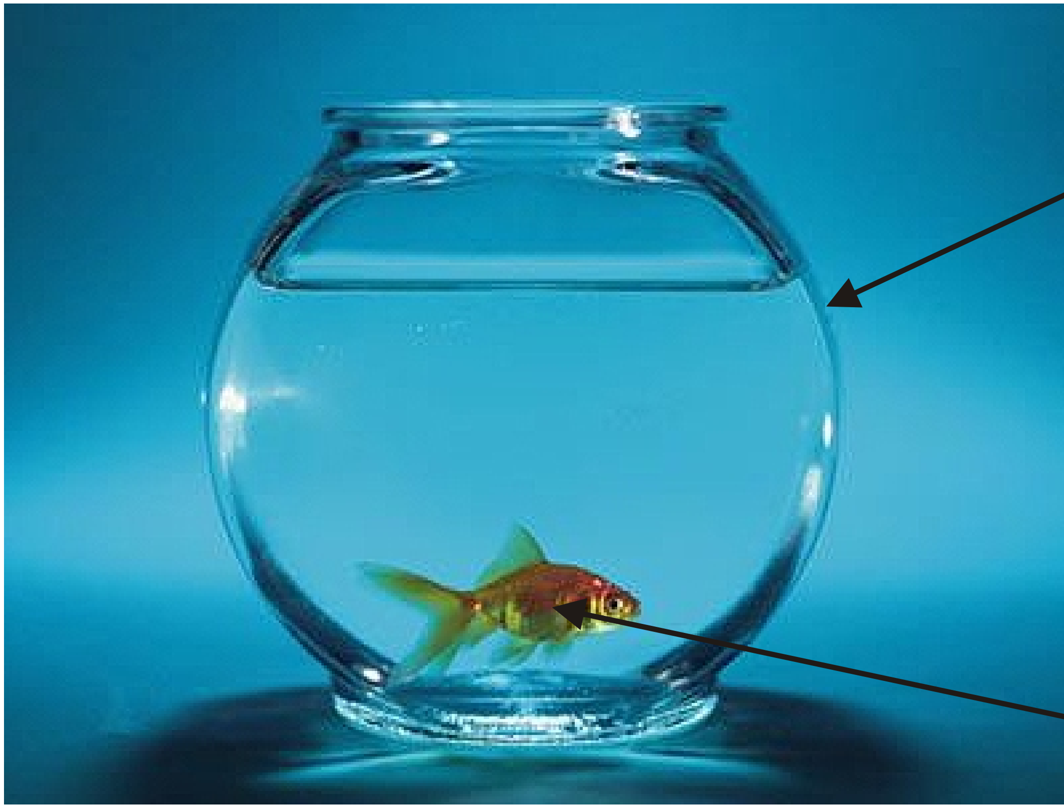
- La ley de Gauss se puede utilizar para determinar el campo eléctrico de un cuerpo.

$$\boxed{{}_{e} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{{}_{0}}}$$

la ley de Gauss

Esta superficie cerrada se llama superficie gaussiana.

- Consideremos un cuerpo encerrado por la superficie gaussiana.



superficie gaussiana

el cuerpo

La integral $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ se puede simplificar bajo ciertas condiciones.

- Podría ser que el cuerpo tiene una simetría y densidad de carga que nos da:

$$\vec{E} \parallel d\vec{A} \longrightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = E\,dA$$

una parte de la superficie gaussiana
(no es la superficie del cuerpo)

$$\longrightarrow \quad {}_{e} = \oint E\,dA = \frac{q}{{}_{0}}$$

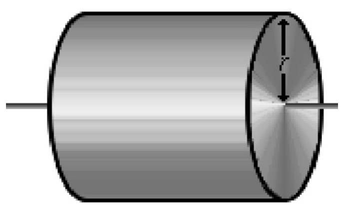
- Podría ser que el campo eléctrico es constante en la superficie gaussiana.

$$\longrightarrow \quad {}_{e} = E \oint dA = E\,A = \frac{q}{{}_{0}}$$

- Hay <u>casos particulares</u> que permiten utilizar la fórmula

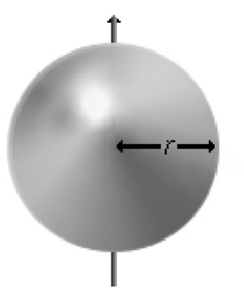
$$\boxed{E = \frac{q}{A\ {}_{0}}}$$

<u>Primer ejemplo que vimos en clase:</u>



un cilindro macizo

<u>Segundo ejemplo que vimos en clase:</u>



una esfera maciza

en la pizarra !!!

- En general hay que buscar una superficie gaussiana que permite hacer la integral

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

1.12. Potencial eléctrico

- El campo eléctrico se puede representar con el gradiente de una función escalar.

$$\mathrm{grad}[f(\vec{r})] = \vec{\nabla} f(\vec{r})$$

- Nabla es un operador diferencial representado por el símbolo $\vec{\nabla}$.

En coordenadas cartesianas tridimensionales:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

La unidad: $[\vec{\nabla}] = m^{-1}$

Por ejemplo: Vamos a calcular el gradiente de la función:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z$$

$$\vec{r}\,' = x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z$$

$$\longrightarrow \quad f(\vec{r}) = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{-1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x = -\frac{1}{2}[\ldots]^{-3/2}\; 2\,(x - x')\;\vec{u}_x$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\vec{\ } \, f(\vec{r}) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}}$$

Esta función ya la vimos en sección 1.7.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \quad {}_{0}} \int_{V} (\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, d^3\vec{r}\,'$$

$$\longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \quad {}_{0}} \int_{V} (\vec{r}\,') \left[- \vec{\ } \, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] d^3\vec{r}\,'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\ }\left[\frac{1}{4\qquad_{0}}\int_V (\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,'\right]$$

Sacamos fuera de la integral el operador $-\vec{\ }$.

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\qquad_{0}}\int_V \frac{(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,'}$$

La función escalar $V(\vec{r})$ se llama **potencial eléctrico**.

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\ }\;V(\vec{r})}$$

cargas
puntuales

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4 \qquad {}_0} \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4 \qquad {}_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}}$$

<u>La unidad:</u> $[V(\vec{r})] = [\vec{E}(\vec{r})] \cdot m$

Nota: $[\vec{\ }] = m^{-1}$

$$\longrightarrow \quad [V(\vec{r})] = \frac{N}{C} \cdot m = \frac{J}{C} = V$$

definición

El potencial eléctrico tiene
una nueva unidad, el volt.

La unidad “<u>volt</u>” nos da:

$$[V] = V \qquad \text{(potencial eléctrico)}$$

$$[\vec{E}] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m} \qquad \text{(campo eléctrico)}$$

$$[\quad_e] = \frac{N}{C}\,m^2 = V\,m \qquad \text{(flujo eléctrico)}$$

$$[\ _0] = \frac{C^2}{Nm^2} = \frac{C}{Vm} \qquad \text{(permitividad)}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\vec{\nabla}[V(\vec{r})+C]}$$

Se puede sumar una constante al potencial sin modificar el campo eléctrico.

El potencial es ambiguo en este sentido.

Las ventajas del potencial:

$V(\vec{r}) \longrightarrow$ Es un campo <u>escalar</u>. (es más fácil)

$\vec{E}(\vec{r}) \longrightarrow$ Es un campo vectorial.

$$V(\vec{r}) \longrightarrow \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{(es más fácil)}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \longrightarrow \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

1.13. Trabajo y energía potencial

El trabajo hecho por el campo eléctrico para trasladar una carga puntual de un punto a otro será:

$$W_{AB} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \;\; = q \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\longrightarrow \quad W_{AB} = -q \int \left[\vec{\ } V(\vec{r}) \right] \cdot d\vec{r}$$

producto escalar

$$\left[\overrightarrow{}\, V(\vec{r})\right]\cdot d\vec{r} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\[2ex] dy \\[2ex] dz \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz \;=\; dV$$

derivadas
parciales

diferencial
<u>total</u>

$$\longrightarrow \quad W_{AB} = -q\int dV = \underline{\underline{-q\left[V(\vec{r}\,) - V(\vec{r}\,)\right]}}$$

(independiente de la trayectoria)

<u>caso particular:</u>

$$W_{AB} = -q\int dV = 0$$

$\longrightarrow$ El trabajo que se realiza en cualquier trayectoria cerrada es igual a cero.

$\longrightarrow$ El campo eléctrico es un campo conservativo.

- Todo gradiente de un potencial es un campo conservativo. Eso es obvio!

- No todos los campos vectoriales pueden escribirse como gradiente de un potencial escalar.

<u>Ejemplo:</u>

$$\vec{F} = a \begin{pmatrix} -x \\ z-y \\ z-y \end{pmatrix}$$

En este ejemplo no existe ningún potencial!
(dV tampoco existe)

- Para el campo eléctrico tenemos:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- Se puede definir una superficie equipotencial con:

$$V(\vec{r}_{equipot}) = \text{const}$$

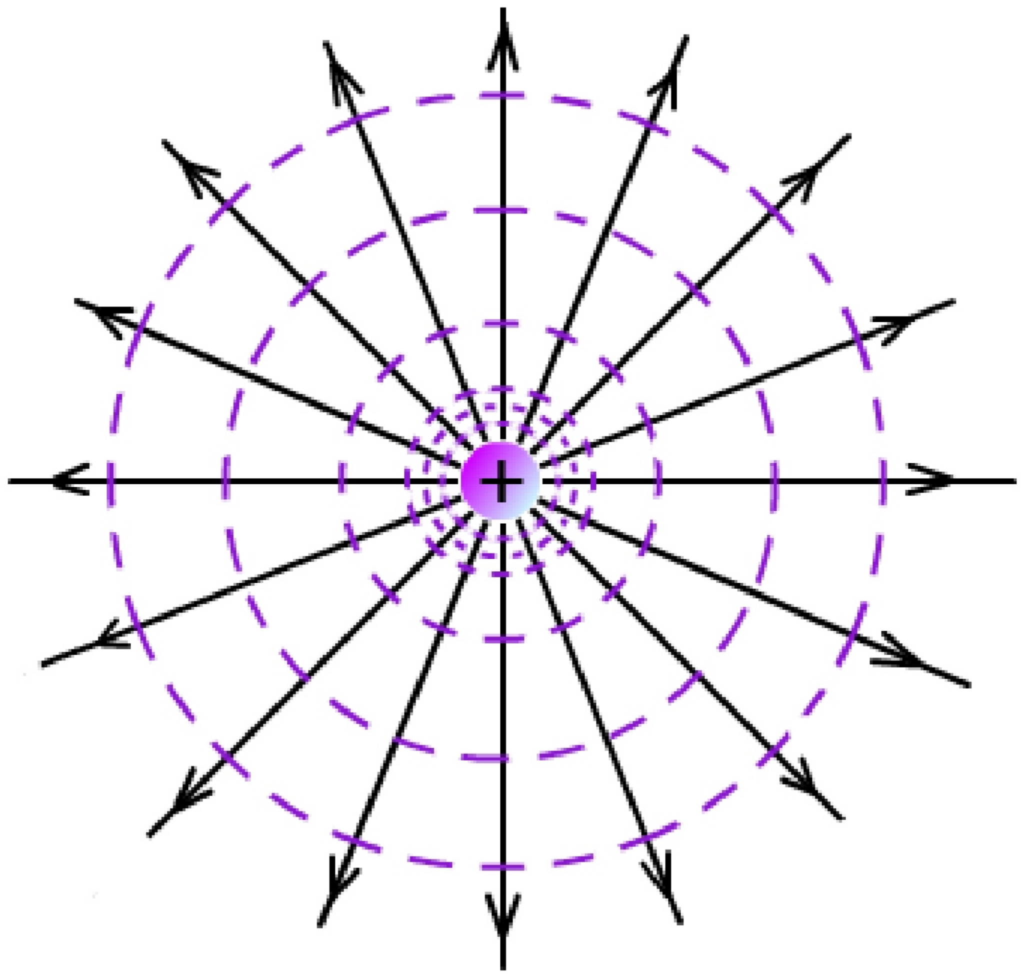
$$\longleftrightarrow \quad \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \vec{E} \perp d\vec{r}$$

- El campo eléctrico es perpendicular al plano tangente a la superficie equipotencial.

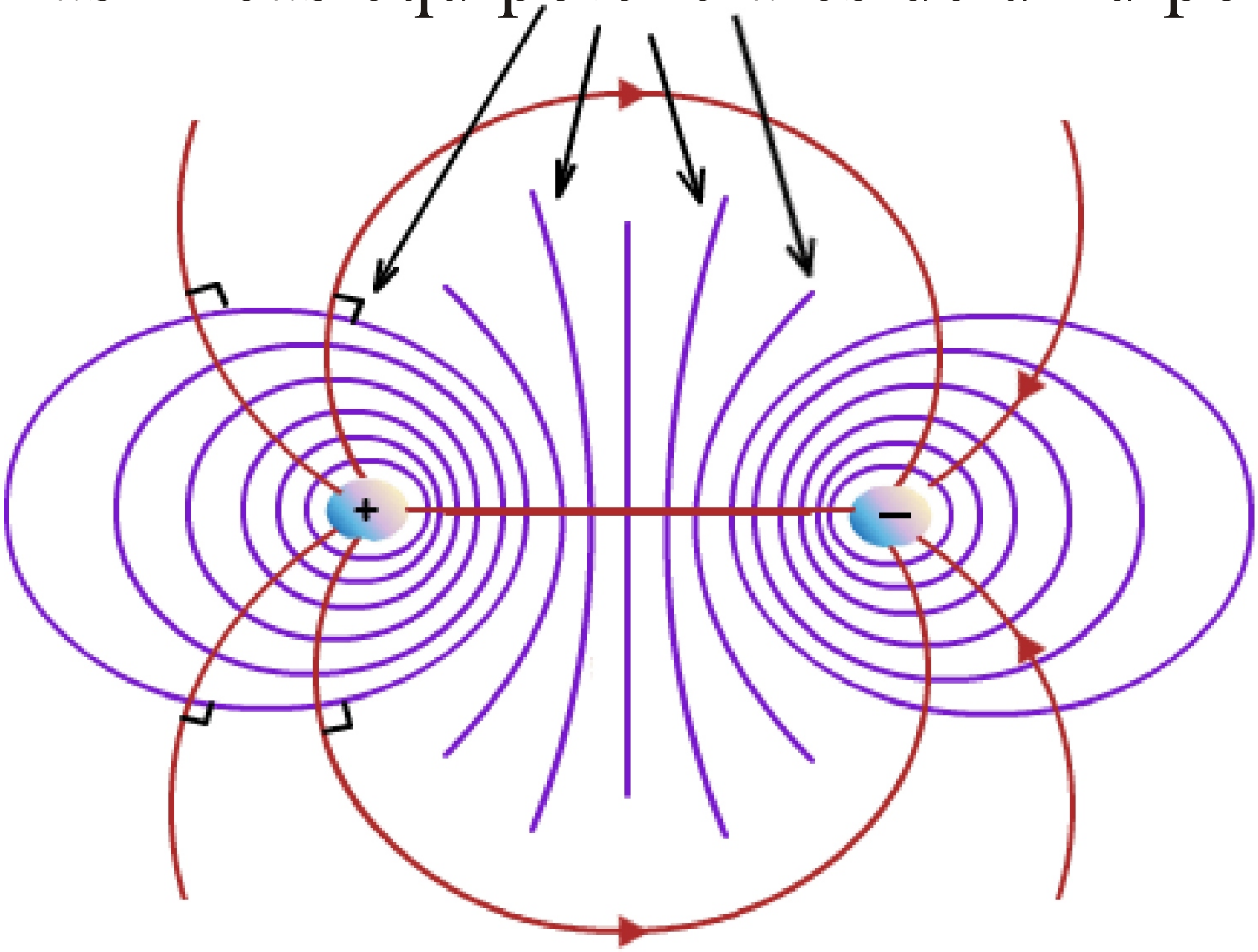
Nota: En dos dimensiones se habla de las líneas equipotenciales.

Las líneas equipotenciales de una carga puntual.

(simetría radial)



Las líneas equipotenciales de un dipolo.



Campos eléctricos y potenciales eléctricos son aditivos.

- Una fuerza conservativa deriva de la energía potencial como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\;}\; E_{pot}(\vec{r})$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} = -\vec{\;}\; \frac{E_{pot}(\vec{r})}{q} = \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\;}\; V(\vec{r})$$

$$\longrightarrow \quad V(\vec{r}) = \frac{E_{pot}(\vec{r})}{q}$$

la constante de integración es igual a cero

<u>Definición:</u> $\boxed{E_{pot}(\vec{r}) = q\,V(\vec{r})}$

la energía potencial

el potencial

- El trabajo realizado por una fuerza externa para desplazar una carga puntual contra un campo eléctrico externo será:

$$W_{ext} = -q\int \vec{E}\cdot d\vec{r} = +q\left[V - V\right]$$

- La fuerza externa tiene que compensar la "fuerza eléctrica".

$$\longrightarrow \quad \vec{F}_{neta} = \vec{0} \qquad \vec{a} = \vec{0} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{const}$$

- La diferencia de potencial $V \quad = V \; - V$ se denomina voltaje.

- El potencial eléctrico en forma diferencial:

$$\boxed{dV(\vec{r}) = \frac{dE_{pot}(\vec{r})}{q} = -\vec{E} \cdot d\vec{r}}$$

diferencia infinitesimal de potencial

- La <u>convención</u> más <u>común</u> para definir un potencial absoluto es la siguiente:

La energía potencial de una carga puntual en un punto determinado en un campo eléctrico, es el trabajo necesario para mover la carga desde el infinito hasta ese punto.

$$\boxed{V\ (r = \infty) = 0}$$

potencial de referencia

Se define el potencial igual a cero a una distancia infinita.

$$\longrightarrow \quad E_{pot}(\vec{r}) = -q\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r}\,'$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r}\,'}$$

potencial eléctrico (absoluto)

<u>Ejemplo:</u> el potencial eléctrico (absoluto) de una carga puntual

cargas puntuales $\quad V(\vec{r}) = \dfrac{1}{4 \quad {}_0} \sum_i \dfrac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$

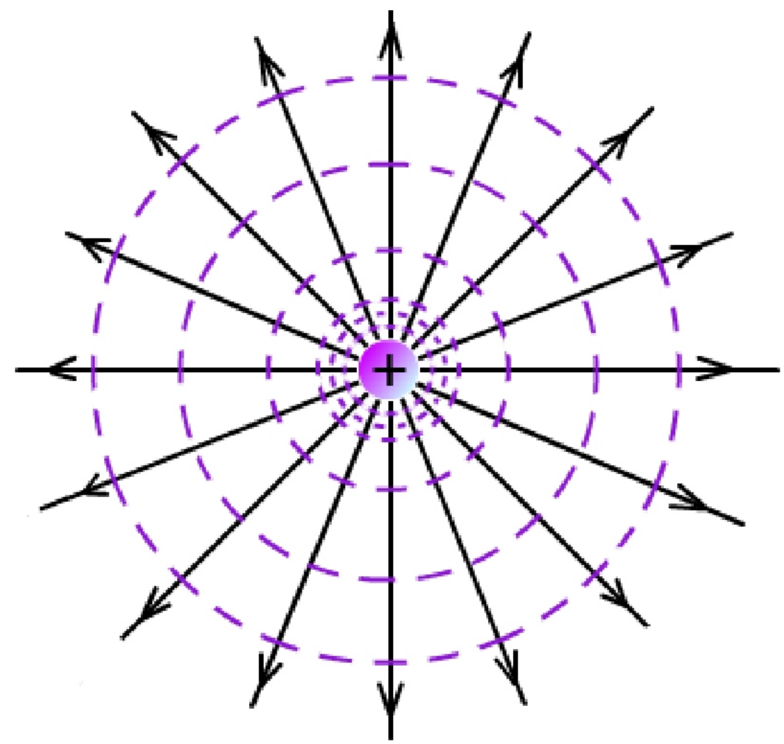
solo una carga
puntual

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\quad{}_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Para la carga $q = Q$ situada en el origen $\vec{r}\,' = \vec{0}$ del sistema de coordenadas obtenemos:

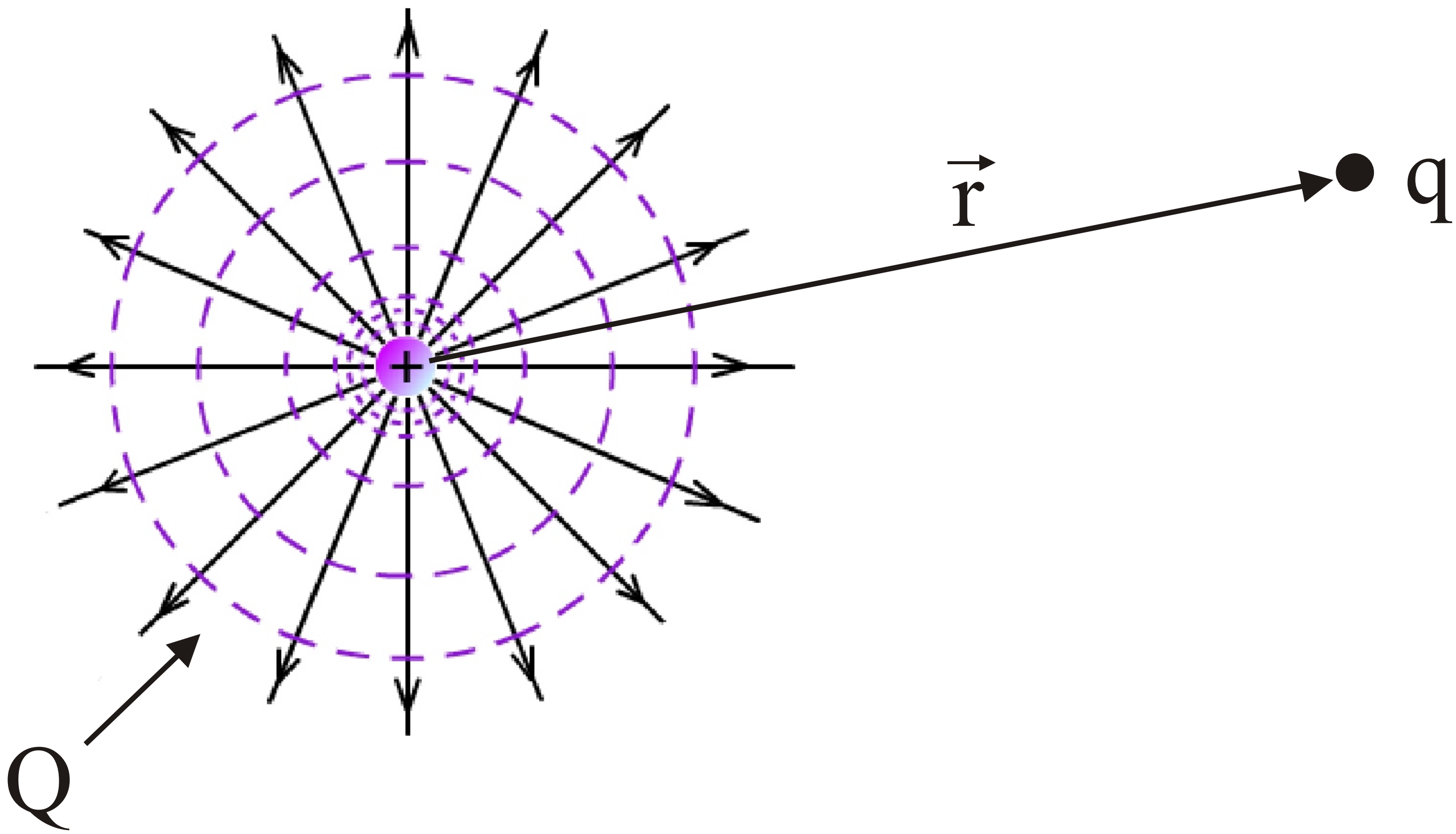
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\quad{}_0} \frac{Q}{r}$$

(simetría radial)



Energía potencial de una carga q sometida al campo eléctrico de la carga Q:

$$E_{pot}(\vec{r}) = q\,V(\vec{r}) = \frac{1}{4\qquad {}_{0}}\;\frac{q\,Q}{r}$$



1.14. Herramientas matemáticas

Operadores diferenciales

$$\mathrm{grad}[f(\vec{r})] = \vec{\ }\, f(\vec{r})$$ el gradiente

$$\mathrm{div}[\vec{F}(\vec{r})] = \vec{\ } \cdot \vec{F}(\vec{r})$$ la divergencia

$$\mathrm{rot}[\vec{F}(\vec{r})] = \vec{\ } \times \vec{F}(\vec{r})$$ el rotor

$$\vec{\ } \cdot \vec{\ } \;=\; \vec{\ }^{\,2} \;=$$ el Laplaciano

$$\mathrm{div}[\mathrm{grad}[f(\vec{r})]] = \quad f(\vec{r})$$

(Pierre Simon Laplace (1749-1827), fue un físico francés)

Teoremas

$$\boxed{\int_V \operatorname{div}[\vec{F}(\vec{r})]\, dV = \oint_{(V)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}}$$

la superficie del volumen

(teorema de Gauss)

$$\boxed{\int_A \operatorname{rot}[\vec{F}(\vec{r})] \cdot d\vec{A} = \oint_{(A)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}}$$

el borde del área

(teorema de Stokes)

<u>Nota:</u> $\vec{F}(\vec{r})$ cuenta con derivadas parciales de primer orden continuas.

Aplicaciones de los operadores diferenciales

1 $$\text{rot}\ \vec{E} = -\,\text{rot}[\text{grad}\,(V)]$$

existe un potencial para $\vec{E}$

$$\text{rot}[\text{grad}\,(V)] = \vec{\ } \times (\vec{\ }\ V)$$

$$\longrightarrow$$

$$\vec{\ } = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}[\text{grad}\,(V)] = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}[\text{grad}(V)] = \vec{u}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \ldots$$

$$= \vec{0}$$

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{E} = \vec{0}}$$

El rotacional de todo campo de gradientes (campos conservativos) es nulo.

2 Tenemos la ley de Gauss:

$$\oint_{(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\ _0} \int_V \quad dV \qquad \text{(en forma integral)}$$

Tenemos el teorema de Gauss:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \; dV = \oint_{(V)} \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$\longrightarrow \int_V \operatorname{div} \vec{E} \; dV = \frac{1}{\ _0} \int_V \quad dV$$

Como esta expresión debe ser cierta para cualquier volumen, solo puede ser que:

$$\boxed{\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\ }{\ _{0}}}$$

la ley de Gauss en forma diferencial

1.15. $V(\vec{r})$ y $\vec{E}(\vec{r})$ de los conductores

Tenemos las siguientes fórmulas:

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4 \qquad {}_{0}} \int_{V} \frac{(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, d^{3}\vec{r}\,'}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{}\; V(\vec{r})}$$

Dada la densidad de carga, se pueden determinar $V(\vec{r})$ y $\vec{E}(\vec{r})$.

¿Cómo se puede determinar la densidad de carga?

Hay dos tipos de problemas

1 El cuerpo es un aislador.

→ no hay cargas libres

→ $(\vec{r})$ no varía

→ es posible calcular $V(\vec{r})$ y $\vec{E}(\vec{r})$

2 El cuerpo es un conductor.

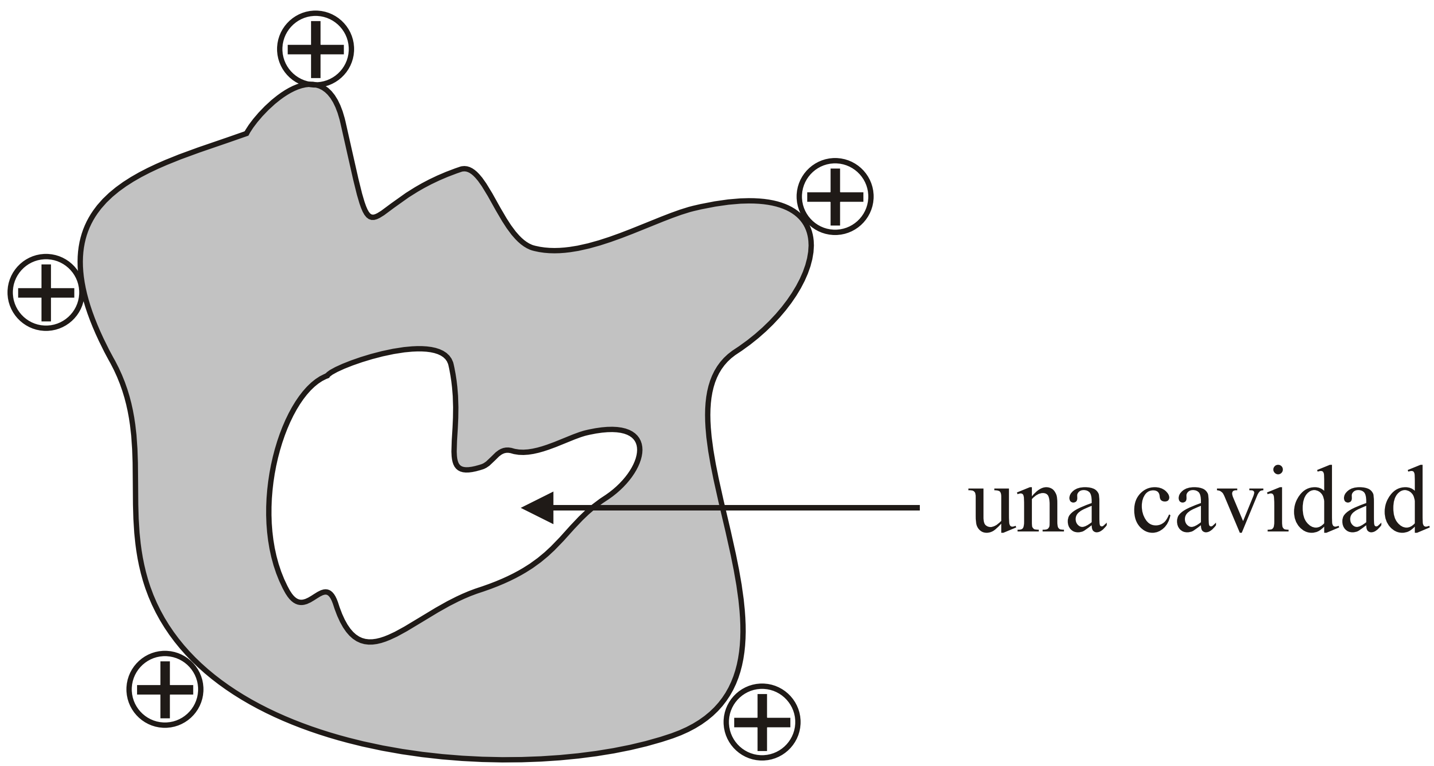
→ hay cargas libres

→ $(\vec{r})$ depende de la forma del conductor y de cualquier campo eléctrico externo

→ hay dificultades al examinar $V(\vec{r})$ y $\vec{E}(\vec{r})$

En sección 1.10. aprendimos que la carga de un conductor macizo se distribuye por su superficie.

A ¿Qué pasa en un conductor con un hueco interno?



La carga se distribuye por la superficie <u>externa</u>.

<u>Claro:</u> Las cargas se repelen.

En sección 1.10. también aprendimos que la inducción (electrostática) hace que en el interior del conductor el campo eléctrico es nulo. (en el equilibrio)

→ El campo eléctrico en la cavidad también es nulo. (jaula de Faraday)

Ⓑ Se tiene un conductor formado por dos esferas de radios R_1 y R_2, muy alejadas entre sí, pero unidas por un cable conductor muy delgado.
La esfera 1 almacena una carga Q.

¿Cuánta carga se va a cada esfera?

Cada punto sobre <u>la superficie</u> de un conductor cargado en equilibrio está <u>al mismo potencial</u>.

<u>Claro:</u> $dE_{pot}(\vec{r}) = q\ dV(\vec{r}) = 0$

(en el equilibrio)

$$\boxed{V(\vec{r}_{superficie}) = \text{const}}$$

La superficie del conductor es una superficie equipotencial. (en el equilibrio)

→ La diferencia de potencial entre esfera 1 y esfera 2 es igual a cero.

$$V_1 = \frac{1}{4 \qquad {}_0} \frac{Q_1}{R_1} \qquad\qquad V_2 = \frac{1}{4 \qquad {}_0} \frac{Q_2}{R_2}$$

$$V_1 = V_2 \longrightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \longrightarrow \boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}}$$

→ La carga será mayor en la esfera más grande.

$$Q = Q_1 + Q_2 \longrightarrow \frac{Q}{Q_2} = \frac{Q_1}{Q_2} + 1$$

$$\longrightarrow \frac{Q}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} + 1 = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$$\longrightarrow Q_2 = Q\,\frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad Q_1 = Q\,\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

El potencial en el conjunto es:

$$V = \frac{1}{4\quad {}_0}\;\frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\quad {}_0}\;\frac{Q_2}{R_2} = \frac{1}{4\quad {}_0}\;\frac{Q}{R_1 + R_2}$$

Ⓒ ¿Qué sabemos sobre la densidad de carga y el campo eléctrico?

La densidad de carga superficial: $\quad = \dfrac{dQ}{dA}$

en la superficie de una esfera es uniforme (por la simetría) e igual a

$$= \frac{Q}{4\quad R^2}$$

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}} \longrightarrow \boxed{\frac{\ _1}{\ _2} = \frac{R_2}{R_1}} \qquad \sim R^{-1}$$

Cuanto más pequeña sea la esfera, mayor es su densidad de carga superficial.

El campo eléctrico en la superficie de la esfera está dado por:

$$= \frac{Q}{4\quad R^2}$$

$$E = \frac{1}{4\quad\ _0}\frac{Q}{R^2} = \frac{V}{R} = \frac{}{\ _0}$$

El campo eléctrico también será más intenso en la esfera de menor radio:

$\sim R^{-1}$

$$E = \frac{\quad}{{}_0}$$

$$E \sim R^{-1}$$

$R \longrightarrow 0$

$E \longrightarrow \infty$

El campo eléctrico en la superficie de un conductor es más intenso donde el radio de curvatura es más pequeño.

$\longrightarrow$ El efecto punta.

fue descubierto por Benjamin Franklin (1753)