

# EYP1113 - Probabilidad y Estadística

## Capítulo 4: Funciones de Variables Aleatorias

Ricardo Aravena C.    Ricardo Olea O.

Departamento de Estadística  
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2014

Probability Concepts in Engineering

Alfredo H-S. Ang<sup>†</sup> and Wilson H. Tang<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> University of Illinois at Urbana-Champaign and University of California, Irvine

<sup>‡</sup> Hong Kong University of Science & Technology



# Contenido I

- 1 Introducción
- 2 Derivación de Distribuciones de Probabilidad
  - Funciones de Variables Aleatorias
  - Funciones de Múltiples Variables Aleatorias
  - Distribución de Valores Extremos
- 3 Momentos de funciones de Variables Aleatorias
  - Esperanza matemática de una función
  - Media y Varianza de una función general

# Introducción

En el área de la ingeniería los problemas, a menudo, involucran la determinación de relaciones funcionales entre una variable dependiente y dos o más variables independientes.

Si una de las variables independientes o más son aleatorias, la variable dependiente será aleatoria.

Por tanto, su distribución de probabilidades y momentos (media, varianza) deben ser obtenidas a partir de la o las variables aleatorias básicas.

# Introducción

## Ejemplo

La deflexión (desviación),  $D$ , de una barra de acero de largo  $L$  sometida a una carga  $P$ , corresponde a una relación funcional entre la carga  $P$  y el módulo de la elasticidad  $E$  de la barra, dada por:

$$D = \frac{P L^3}{3 E I}$$

donde  $I$  es el momento de la inercia.

Claramente,  $P$  y  $E$  son variables aleatorias con sus correspondientes  $f_P(p)$  y  $f_E(e)$ , la deflexión  $D$  también es una variable aleatoria con  $f_D(d)$ , la cual debe ser obtenida a partir de las funciones de  $P$  y  $E$ .

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

Considere una función de una variable aleatoria  $X$ ,

$$Y = g(X)$$

Si  $Y = y$ , entonces  $X = g^{-1}(y)$  donde  $g^{-1}$  es la función inversa de  $g$ .

En el caso que  $g^{-1}$  tenga raíz única, entonces en el caso que  $X$  sea una variable aleatoria discreta, la nueva variable aleatoria también lo será, donde

$$P(Y = y) = P[X = g^{-1}(y)]$$

Esto implica, que la función de probabilidad de  $Y$  es

$$p_Y(y) = p_X[g^{-1}(y)] \tag{1}$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

La función de distribución de probabilidad acumulada de  $Y$  esta dada por

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} P[X \leq g^{-1}(y)] & \text{si } g(\cdot) \text{ es creciente} \\ P[X \geq g^{-1}(y)] & \text{si } g(\cdot) \text{ es decreciente} \end{cases}$$

Cuando  $y$  crece con  $x$  se tiene que:

- Caso discreto

$$F_Y(y) = \sum_{x \leq g^{-1}(y)} p_X(x)$$

- Caso continuo

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int_{x \leq g^{-1}(y)} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^y f_X[g^{-1}(v)] \cdot \left[ \frac{d}{dv} g^{-1}(v) \right] dv \end{aligned}$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

Luego, la función de densidad de  $Y$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X [g^{-1}(y)] \cdot \left[ \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right]$$

Como  $g(\cdot)$  es creciente, entonces

$$\left[ \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right] > 0$$

En el caso que  $g(\cdot)$  sea decreciente, entonces

$$F_Y(y) = 1 - F_X [g^{-1}(y)]$$

Luego

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = -f_X [g^{-1}(y)] \cdot \left[ \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right]$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

con

$$\left[ \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right] < 0$$

Por lo tanto

$$f_Y(y) = f_X [g^{-1}(y)] \cdot \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$



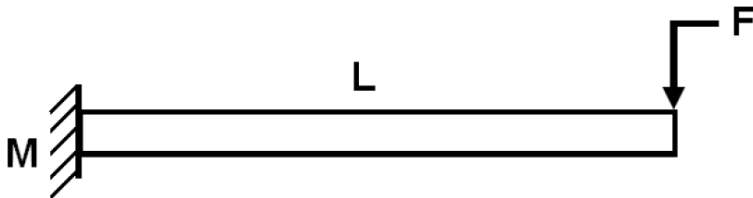
# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

### Ejemplo 4.1

Comencemos por ilustrar la transformación de una distribución discreta como se indica en la ecuación (1).

Considere la posibilidad de una viga de longitud  $L$  que se somete a una carga  $F$  aplicada en el extremo libre de la viga como se muestra en la figura:



# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

### Ejemplo 4.1

Supongamos que la carga  $F$  se compone de una serie de cajas de un mismo pesos y el número de cajas  $x$  cargadas en la viga varía de 0 a  $n$ .

Si una caja es cargada con probabilidad  $p$ , entonces,

$$p_F(x) = P(F = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

### Ejemplo 4.1

Bajo una carga de  $x$  cajas, el momento de flexión en el empotramiento de la viga esta dado por:

$$m = L \cdot x \Rightarrow x = \frac{m}{L}$$

Luego, la función de probabilidad del momento  $M$  es:

$$p_M(m) = P(X = m/L) = \binom{n}{m/L} p^{m/L} (1-p)^{n-m/L}$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

### Ejemplo 4.2

Sea  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ .

Determine la distribución de  $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ .

### Ejemplo 4.3

Sea  $X \sim \text{Log-Normal}(\lambda, \zeta)$ .

Determine la distribución de  $Y = \ln X$ .

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

Cuando  $g^{-1}(y)$  no tiene solución única, es decir,

$$g^{-1}(y) = x_1, x_2, \dots, x_k,$$

Entonces

$$(Y = y) = \bigcup_{i=1}^k (X = x_i)$$

Si  $X$  es discreta, entonces

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^k p_X [g_i^{-1}(y)]$$

Si  $X$  es continua, entonces

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^k f_X [g_i^{-1}(y)] \cdot \left| \frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right|$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

### Ejemplo 4.4

La energía de deformación en una barra elástica sometido a una fuerza axial  $S$  está dada por la ecuación:

$$U = \frac{L}{2 A E} S^2$$

Donde,

- $L$ : Largo de la barra.
- $A$ : Área de sección transversal de la barra.
- $E$ : Módulo de elasticidad del material.

Si  $S \sim \text{Log-Normal}$  con parámetros  $\lambda$  y  $\zeta$ . Determina la función densidad de  $U$ .

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Variables Aleatorias

### Ejemplo 4.5

Suponga ahora que  $S \sim \text{Normal}(0, 1)$ . Determine la densidad de  $U$ .

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

En el caso que una variable dependa de otras dos o más variables aleatorias, ésta también es una variable aleatoria y por tanto su distribución de probabilidad puede ser obtenida a partir de ellas.

Considere el caso

$$Z = g(X, Y)$$

donde  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias.



# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

Si  $X$  e  $Y$  son discretas, se tiene

$$\begin{aligned}\{Z = z\} &= \{g(X, Y) = z\} \\ &= \bigcup_{g(x,y)=z} \{X = x, Y = y\}\end{aligned}$$

y su función de probabilidad esta dada por

$$p_Z(z) = \sum_{g(x,y)=z} p_{X,Y}(x, y)$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

Si  $X$  e  $Y$  son continuas, la función de distribución de probabilidad acumulada de  $Z$  esta dada por

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \iint_{g(x,y) \leq z} f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{g^{-1}} f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

donde  $g^{-1} = g^{-1}(z, y)$ .

Cambiando la variable de integración de  $x$  a  $z$ , se tiene

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^z f_{X,Y}(g^{-1}, y) \left| \frac{\partial}{\partial u} g^{-1} \right| \, du \, dy$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

derivando con respecto a  $z$ , obtenemos la función de densidad de  $Z$ , la cual resulta ser:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(g^{-1}, y) \left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1} \right| dy$$

Alternativamente, si consideramos la inversa con respecto a  $y$ , es decir,  $g^{-1} = g^{-1}(x, z)$ , se tiene que la función de densidad de  $Z$  esta dada por:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, g^{-1}) \left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1} \right| dx$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

### Suma de Variables Aleatorias Discretas

Considere la suma de dos variables aleatorias discretas,  $Z = X + Y$ .

En este caso, la función de probabilidad de  $Z$  esta dada por:

$$p_Z(z) = \sum_{x+y=z} p_{X,Y}(x,y) = \sum_{x \in \Theta_X} p_{X,Y}(x, z-x)$$

Si  $X$  e  $Y$  son independientes, entonces

$$p_{X,Y} = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

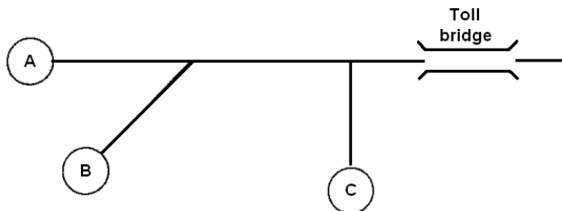
**Ejercicio:** Si  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros  $\nu$  y  $\mu$ , mostrar que la distribución de  $Z = X + Y$  es Poisson( $\nu + \mu$ ).

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

### Ejemplo 4.7

Tres distritos residenciales  $A$ ,  $B$  y  $C$  están conectados como muestra la figura.



Durante las horas pick, el tráfico promedio estimado de vehículos que sale desde los tres distritos son 2, 3, y 4 vehículos por minuto respectivamente.

¿Cuál es la probabilidad que en un minuto de hora pick crucen por el puente más de nueve vehículos proveniente desde los distritos?

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

### Suma de Variables Aleatorias Continuas

Considere la suma de dos variables aleatorias continuas,  $Z = X + Y$ . En este caso, la función de densidad de  $Z$  está dada por

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z - y, y) dy \quad \circ \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z - x) dx$$

Si  $X$  e  $Y$  son independientes, entonces

$$f_{X,Y} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

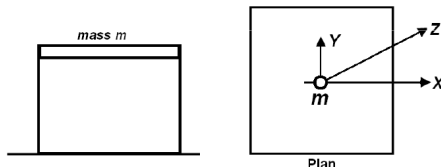
**Ejercicio:** Si  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias con distribución Normal, entonces la distribución de  $Z = X + Y$  también es una variable aleatoria cuya distribución es Normal.

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

### Ejemplo 4.8

La figura muestra un edificio que concentra una masa  $m$  a nivel del techo. Cuando un temblor ocurra el edificio vibrará sobre su posición original. La velocidad de la masa con respecto a los ejes  $X$  e  $Y$  implican una velocidad  $Z = (X^2 + Y^2)^{1/2}$



Suponiendo que  $X$  e  $Y$  son variables aleatorias independientes con distribución Normal(0,1), determine la distribución de la energía cinética de la masa definida como  $W = m Z^2$ .

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

### Producto y cociente de variables aleatorias continuas

Sea  $Z = XY$ , entonces  $x = z/y$  por tanto,  $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{y}$ , aplicando el resultado anterior, se tiene que la función de densidad de  $Z$  esta dada por

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{y} \right| f_{X,Y}(z/y, y) dy$$

En términos similares, si  $Z = X/Y$ , la función de densidad de  $Z$  esta dada por

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_{X,Y}(zy, y) dy$$



# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

### Ejemplo 4.13

El costo anual de operación de una planta de tratamiento de residuos es función del peso  $W$  de los residuos sólidos, el factor de costo unitario  $F$  y el coeficiente de eficacia  $E$  de la siguiente manera:

$$C = \frac{WF}{\sqrt{E}}$$

donde  $W$ ,  $F$  y  $E$  son estadísticamente independientes con distribución Log-Normal

Variable	Mediana	c.o.v.
W	2000 tons/yr	20.0%
F	\$20 per ton	15.0%
E	1.6	12.5%

Determine la probabilidad que el costo anual del funcionamiento de la planta de tratamiento de residuos se superior a \$35.000.

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

### Teorema Central de Limite

Sin pérdida de generalidad, el teorema dice que la suma de un gran número de variables aleatorias, donde ninguna es dominante, tiende a la distribución normal cuando el número de variables aleatorias se incrementa.

En otras palabras, si una sucesión de variables aleatorias independientes con idéntica distribución  $X_1, \dots, X_n$ , con  $E(X_i) = \mu$  y  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ , entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Normal} \left( \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Funciones de Múltiples Variables Aleatorias

Por ejemplo considere una secuencia de variables aleatorias discretas  $X_1, \dots, X_n$  independientes con función de probabilidad

$$P(X_i = -1) = P(X_i = +1) = \frac{1}{2}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

De acuerdo al teorema,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow S \sim \text{Normal}(0, 1)$$

cuando  $n$  tiende a infinito.

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Distribución de Valores Extremos

Los extremos (mínimo y máximo) de un fenómeno a menudo son de especial interés e importancia en ingeniería.

Por ejemplo:

- Nivel máximo y/o mínimo del flujo de un río en los últimos 25 años.
- Intensidad máxima de un terremoto en los últimos 50 años.

Cuando hablemos de valores extremos, consideramos el mayor y menor valor de una muestra de tamaño  $n$  de una distribución conocido. Por tanto, nos interesa determinar su distribución exacta o asintótica.

# Derivación de Distribuciones de Probabilidad

## Distribución de Valores Extremos

### Distribuciones exactas

Considere una variable aleatoria  $X$  con función de densidad  $f_X(x)$  o de distribución acumulada  $F_X(x)$ .

Para una muestra  $X_1, \dots, X_n$  de esta distribución, se definen:

$$Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad Y_1 = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

La función de densidad del  $Y_n$  esta dada por:

$$f_{Y_n} = n [F_X(y)]^{n-1} f_X(y)$$

Mientras que la función de densidad de  $Y_1$  corresponde a:

$$f_{Y_1} = n [1 - F_X(y)]^{n-1} f_X(y)$$

# Momentos de funciones de Variables Aleatorias

Ya vimos como obtener funciones de una o más variables aleatorias.

Por ejemplo, funciones lineales de variables normales es normal, o bien, producto o cociente de log-normales es log-normal.

Sin embargo, algunas distribuciones de funciones pueden ser difícil de obtener analíticamente (y hasta imposible).

Por tanto, es necesario disponer de métodos que permitan obtener algunos momentos (media y varianza), o una aproximación de éstos.

Estos momentos están relacionados con los momentos de las variables originales.

# Momentos de funciones de Variables Aleatorias

## Esperanza matemática de una función

El valor esperado de una función de variables aleatorias se denomina esperanza matemática.

Si  $Z = g(X_1, \dots, X_n)$ , entonces la esperanza de  $Z$  puede ser obtenida como sigue:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1$$

en el caso de variables aleatorias discretas, se sustituyen las integrales por sumas y la función de densidad por función de distribución de probabilidad (puntual).

# Momentos de funciones de Variables Aleatorias

## Esperanza matemática de una función

### Ejercicio

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  variables aleatorias y  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  constantes conocidas.

Muestre que

- $E\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot E(X_i).$
- $\text{Cov}\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i, b_0 + \sum_{j=1}^m b_j \cdot Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \cdot b_j \cdot \text{Cov}(X_i, Y_j).$



# Momentos de funciones de Variables Aleatorias

## Esperanza matemática de una función

### Ejercicio (Cont.)

- $\text{Var} \left( a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j \cdot \text{Cov} (X_i, X_j).$
- Si  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes, entonces

$$\text{Var} \left( a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \text{Var} (X_i)$$

# Momentos de funciones de Variables Aleatorias

## Media y Varianza de una función general

Sea  $Y = g(X)$ , con  $X$  variable aleatoria con función de densidad  $f_X(x)$ , entonces:

$$\mu_Y = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$
$$\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - \mu_Y]^2 f_X(x) dx$$

Si no es posible determinar la densidad de  $X$ , se puede expandir  $g(x)$  en torno a  $E(X)$ , es decir:

$$g(X) \approx g(\mu_X) + (X - \mu_X) \frac{dg}{dx} + \frac{1}{2} (X - \mu_X)^2 \frac{d^2g}{dx^2}$$

# Momentos de funciones de Variables Aleatorias

## Media y Varianza de una función general

Evaluando las derivadas en  $\mu_X$ , y truncando se tiene la aproximación de primer orden para la media y varianza:

$$E[g(X)] = g(\mu_X)$$

y

$$\text{Var}[g(X)] = \text{Var}(X) \left[ \frac{d}{dX} g(\mu_X) \right]^2$$

Es posible incluir términos de mayor orden, por ejemplo, la aproximación de segundo orden

# Momentos de funciones de Variables Aleatorias

## Media y Varianza de una función general

Si  $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ , se tiene que la expansión de Taylor entorno a los valores esperados  $(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n})$  está dada por

$$\begin{aligned} Y = g[(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n})] &+ \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_{X_i}) \frac{\partial g}{\partial X_i} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j}) \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} + \dots \end{aligned}$$

# Momentos de funciones de Variables Aleatorias

## Media y Varianza de una función general

Para el caso de una aproximación de primer orden se tiene que

$$E(Y) \simeq g[(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n})]$$

y

$$\text{Var}(Y) \simeq \sum_{i=1}^n \sigma_{X_i}^2 \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^n \sum_{i \neq j} \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j}$$

# Momentos de funciones de Variables Aleatorias

## Media y Varianza de una función general

Para el caso de una aproximación de segundo orden se tiene que

$$E(Y) \simeq g[(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n})] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)$$