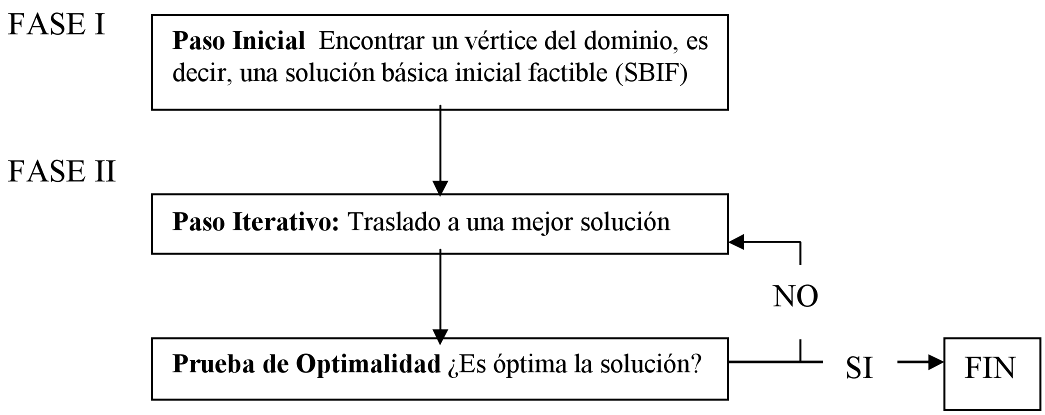
Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2,3 y 4

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Pablo Rey , Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía Nº10: SIMPLEX - FASE II

INTRODUCCIÓN A SIMPLEX (FASE II)

El método SIMPLEX, se encarga de recorrer vértices inteligentemente, viendo si son solución óptima o no. Para esto dispone de un algoritmo de 3 pasos:



<u>Formato Estándar (FE):</u> Todo problema debe ser establecido en FE para utilizar SIMPLEX

OBSERVACIÓN:
Primero veremos la utilización del método SIMPLEX, cuando existen restricciones del tipo $g(X) \leq b,\ b \geq 0$, caso contrario se verá más adelante. Esto nos permitirá omitir FASE I, ya que el origen es un vértice factible.

Problema 1: Introduciendo al SIMPLEX con lujo y detalle

Sea P) el problema de maximización:

$$
\begin{aligned}
&Max\ X_1 + 3X_2 \\
&s.a. \\
&8X_1 + 6X_2 \leq 48 \\
&X_1 - 2X_2 \geq -8 \\
&X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolver mediante el algoritmo de SIMPLEX

Respuesta:

El problema equivalente estandarizado queda:

$$\begin{aligned}
&Min -X_1 - 3X_2 \\
&s.a. \\
&8X_1 + 6X_2 + X_3 = 48 \\
&-X_1 + 2X_2 + X_4 = 8 \\
&X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Holguras:

Las variables X_3 y X_4 se conocen como holguras (se añaden para permitir la igualdad y así el FE. Son siempre no negativas. Si la holgura de una restricción es cero, entonces esta restricción está activa. Recordar complementariedad de la holgura: $h\mu = 0$

Paso Inicial (FASE I):

Se busca una solución vértice factible para comenzar. Proponemos al origen como tal (siempre es posible con restricciones del tipo $g(X) \leq b,\ b \geq 0$). Las holguras quedan iguales al lado derecho de la restricción.

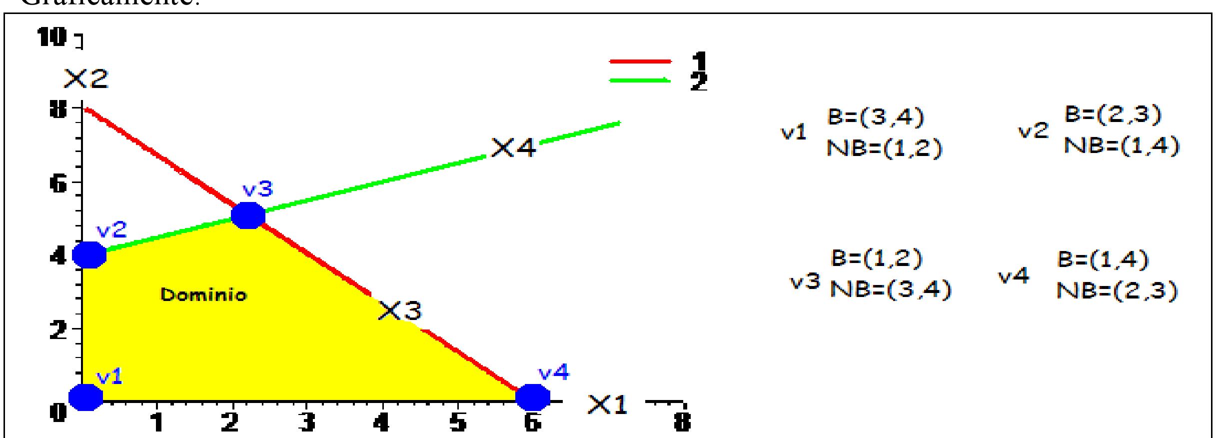
Variables Base

A las variables que toman el valor distinto de cero[1], se les conoce como **variables básicas**, mientras que las que toman el valor cero se llaman **v. no básicas**. En este caso:

V. Básicas:	V. No Básicas
$X_3 = 48 \wedge X_4 = 8$	$X_1 = 0 \wedge X_2 = 0$

En un LP, habrá igual número de variables básicas como restricciones LI. en cada vértice del dominio. En el ejemplo, en cada vértice hay siempre 2 Variables Básicas y 2 No Básicas, porque hay 2 restricciones LI.

Gráficamente:



[1] Esto no se cumple con problemas degenerados, ver más adelante este caso....

Luego creamos el TABLEAU inicial, que no es nada más que una representación matricial de un vértice:

$$8X_1 + 6X_2 + X_3 = 48$$
$$-X_1 + 2X_2 + X_4 = 8$$
$$Z = 0 - X_1 - 3X_2$$

X1	X2	X3	X4		BASE
8	6	1	0	48	X3
-1	2	0	1	8	X4
-1	-3	0	0	0	

Analicemos el TABLEAU:

1) Lo **rojo** representa el valor de la función objetivo en ese vértice (pero con signo cambiado, por estar al lado derecho).

2) Lo **azúl** representa el valor de las variables básicas. Esto sucede, porque las variables no básicas son cero y en cada restricción sólo figura una v. básica con ponderador 1. Este valor es no negativo por restricción[2]

3) La parte en **verde** representa a los costos reducidos, e indican una variación unitaria en la F.O. al momento de ingresar una variable no-básica a la base[3], es decir $\frac{dZ}{dX_{NB}}$.

Condición de Optimalidad:

Si todos los costos reducidos son mayores o iguales a cero, estamos en un vértice óptimo. (Una variación en variables fuera de base solo empeorará la función objetivo aumentando su valor).

En el ejemplo, si entramos X_1 o X_2 a la base la función objetivo mejorará. Entremos X_2, ya que con esta variable mejorará más (disminuye 3 v/s 1), sin embargo, la elección es arbitraria y cualquiera de los caminos lleva al óptimo. Sólo puede diferir en el número de iteraciones en el TABLEAU y esto no se sabe *a priori*.

Paso Iterativo:

Si entramos una variable a la base debemos sacar otra:¿Cuál variable sale?
→ Sale la que primero se hace cero cuando la variable entrante sube de valor. Es decir hasta que alguna restricción pare su crecimiento.

---

[2] Punto para chequear, ya que en caso contrario cometimos un error.
[3] Cuanto me cambia la F.O. si la variable aumenta en una unidad desde cero. Notar que los costos reducidos básicos son siempre cero.

La columna de la variable entrante (magenta) representa la derivada (con signo cambiado), de las variables básicas respecto a la variable entrante.

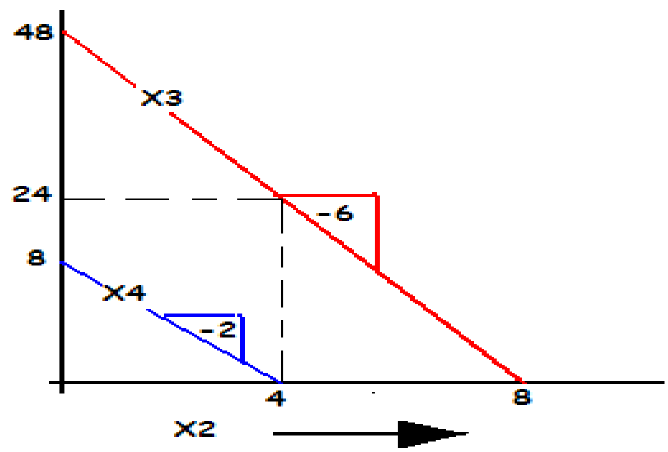
$$8X_1 + 6X_2 + X_3 = 48$$
$$-X_1 + 2X_2 + X_4 = 8$$
$$Z = 0 - X_1 - 3X_2$$

X1	X2	X3	X4		BASE
8	**6**	1	0	48	X3
-1	**2**	0	1	8	X4
-1	-3	0	0	0	

Es decir:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dX_3}{dX_2} \\ \dfrac{dX_4}{dX_2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Gráficamente:



Las variables básicas parten de su valor inicial y disminuyen con el aumento de X_2. Vemos que X_4 se hace cero primero, por lo que sale de la base. Si X_2 siguiera aumentando, la variable X_4 comenzaría a ser negativa (lo que es infactible). Luego: La variable X_2 tomaría el valor 4, X_3 el valor 24 y X_4 cero.

Luego después de la primera iteración:

$X_3 = 24$ $\qquad$ $X_4 = 0$
$X_2 = 4$ $\qquad$ $X_1 = 0$

Analíticamente:

Se toma el mínimo valor positivo del cuociente entre el lado derecho del TABLEAU y los elementos de la columna de la variable entrante.

En el ejemplo: Min {48/6, 8/**2**}=8/2=4. Luego sale la variable X4. El número marcado en **verde** es nuestro pivote.

Actualización del TABLEAU: BASE: B ={3,2} y NB ={1,4}

Para actualizar, copiar la **fila de la variable saliente dividida por el pivote** y asignamos esta fila a la **variable entrante**. Luego a través de operaciones fila, se anula la columna asociada a X_2 (se crea la segunda columna de la identidad, que antes estaba en X_4), dejándola solo con ceros. Los nuevos valores de las variables son: $X_1 = 0$, $X_2 = 4$, $X_3 = 24$, $X_4 = 0$.

$$11X_1 + X_3 - 3X_4 = 24$$
$$-X_1/2 + X_2 + X_4/2 = 4$$
$$Z = -12 - 5/2X_1 + 3/2X_4$$

X1	X2	X3	X4		BASE
11	0	1	-3	24	X3
-1/2	1	0	1/2	4	X2
-5/2	0	0	3/2	12	

COMENTARIO:

Vemos que el TABLEAU es una especie de "matriz" en la cual se hacen operaciones fila. Lo que logramos con esto es poner a las variables básicas en función de variables que son cero (no básicas), de tal manera que puedan ser obtenidas fácilmente con el lado derecho de la restricción.

Iteración 2: Seguimos con el método....

No hay optimalidad, ya que X_1 tiene un costo reducido asociado negativo igual a –5/2. Por lo tanto hay que seguir iterando.

B ={3,2} NB ={1,4}

$$11X_1 + X_3 - 3X_4 = 24$$
$$-X_1/2 + X_2 + X_4/2 = 4$$
$$Z = -12 - 5/2X_1 + 3/2X_4$$

X1	X2	X3	X4		BASE
11	0	1	-3	24	X3
-1/2	1	0	1/2	4	X2
-5/2	0	0	3/2	12	

No hay optimalidad: → X_1 entra a la base.
→Sale: Min{ 24/11 , * }=24/11, por lo que sale X_3.

Iteración 3:

B ={1,2} NB ={3,4}

$$X_1 + X_3/11 - 3X_4/11 = 24/11$$
$$X_2 + X_3/22 + 4X_4/11 = 56/11$$
$$Z = \frac{-192}{11} + \frac{5}{22}X_3 + \frac{9}{11}X_4$$

X1	X2	X3	X4		BASE
1	0	1/11	-3/11	24/11	X1
0	1	1/22	4/11	56/11	X2
0	0	5/22	9/11	192/11	

Hay optimalidad: Todos los costos reducidos del problema son mayores o iguales a cero por lo que no puedo mejorar mi función objetivo.

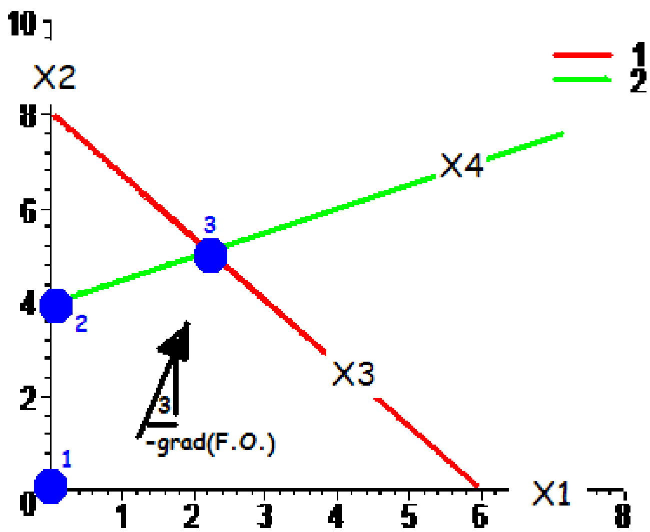
Luego:

$$X^{*} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24/11 \\ 56/11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Con: $V^{*}_{(P)Min}$ = -192/11 y $V^{*}_{(P)Max}$=192/11

En este ejemplo vemos que las 2 restricciones están activas en ese punto (holguras = 0).

Analicemos gráficamente que hemos hecho:

Recorrimos los vértices hasta llegar al óptimo (1 → 2 → 3).



Tarea: Ingresar X_1 al comienzo y llegar al óptimo por el otro lado.......

Problema 2: Tratamiento de variables libres de signo

Resuelva por SIMPLEX el siguiente problema lineal:

$$
\begin{aligned}
&P)\ Min\ -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\
&s.a \\
&3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\
&x_1 + 4x_2 \leq 420 \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\
&x_1,\ x_2 \geq 0 \\
&x_3\ libre
\end{aligned}
$$

Respuesta:

Agreguemos las holguras:

$$
\begin{aligned}
&P)\ Min\ -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \\
&s.a \\
&3x_1 + 2x_3 + x_4 = 460 \\
&x_1 + 4x_2 + x_5 = 420 \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 430 \\
&x_1,\ x_2, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\
&x_3\ libre
\end{aligned}
$$

¿Estamos listos para iniciar SIMPLEX?
¡¡¡No!!! Por ningún motivo, ya que SIMPLEX solo trabaja con variables no negativas. Este no es un formato estándar. ¿Qué hacemos?

Desdoblamiento de Variables

Si tenemos una variable libre X la podemos desdoblar en dos variables positivas de la siguiente manera: X = X' - X'' con X' y X'' no negativas.

Así nos queda en siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&P)\ Min\ -3x_1 - 2x_2 - 5x_3' + 5x_3'' \\
&s.a \\
&3x_1 + 2x_3' - 2x_3'' + x_4 = 460 \\
&x_1 + 4x_2 + x_5 = 420 \\
&x_1 + 2x_2 + x_3'' - x_3'' + x_6 = 430 \\
&x_1,\ x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

¡Este si es un formato estándar!

Iteración 1:

X1	X2	X3’	X3’’	X4	X5	X6		**BASE**
3	0	2	-2	1	0	0	460	X4
1	4	0	0	0	1	0	420	X5
1	2	1	-1	0	0	1	430	X6
-3	-2	-5	5	0	0	0	0	

Entremos X_3’ a la base → Min(460/2, ∞ ,430/1) = 230. Sale la primera variable de la base, o sea, X_4.

Iteración 2:

X1	X2	X3’	X3’’	X4	X5	X6		**BASE**
3/2	0	1	-1	1/2	0	0	230	X3’
1	4	0	0	0	1	0	420	X5
-1/2	2	0	0	-1/2	0	1	200	X6
9/2	-2	0	0	5/2	0	0	1150	

Entremos X_2 a la base → Min(∞ ,420/4,200/2) = 100. Sale la tercera variable de la base, o sea, X_6.

Iteración 3:

X1	X2	X3’	X3’’	X4	X5	X6		**BASE**
3/2	0	1	-1	1/2	0	0	230	X3’
2	0	0	0	1	1	-2	20	X5
-1/4	1	0	0	-1/4	0	1/2	100	X2
4	0	0	0	2	0	1	1350	

Vemos que tenemos solución óptima:
$X_1 = 0$, $X_2 = 100$, $X_3' = 230$, $X_3'' = 0$, $X_4 = 0$, $X_5 = 20$, $X_6 = 0$ con $V^* = -1350$

Sin embargo, existe **solución múltiple**, ya que el <u>costo reducido de una variable no básica es cero</u> (X_3’’), esto significa que si yo entro esta variable a la base, la F.O. no cambiará su valor. ¡Esto nos dice que hay más soluciones que son igual de óptimas!

Encontremos esta otra solución:

Entra X_3’’ a la base → Min (*, ∞ , ∞) = ∞ .

Esto nos dice que el valor de X_3’’ puede subir indefinidamente. ¡Ninguna restricción la acota!

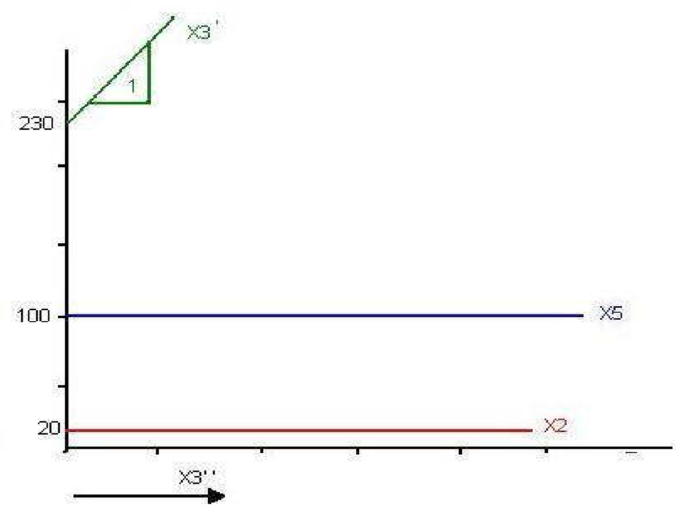
Analicemos un poco más este resultado:

Como dijimos anteriormente se tiene que la columna de la variable básica entrante es la derivada con signo negativo de las variables básicas respecto a la variable no básica entrante.

O sea:

$$\text{Así:} \begin{bmatrix} \dfrac{dx_3'}{dx_3''} \\ \dfrac{dx_5}{dx_3''} \\ \dfrac{dx_2}{dx_3''} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gráficamente:



Se tiene que al aumentar X_3'' en 't' unidades , X_2 y X_5 permanecen invariantes mientras que X_3' sube exactamente 't' unidades. Por lo tanto existen infinitas soluciones de la forma:

$X_1 = 0$, $X_2 = 100$, $X_3' = 230 + t$, $X_3'' = t$, $X_4 = 0$, $X_5 = 20$, $X_6 = 0$ con $V^* = -1350$

¿Es lógico que pase esto?
¡Es totalmente consecuencia de la forma del problema!
Si volvemos a nuestro problema original con X_3 libre, se tiene que el óptimo es:

$X_1 = 0$, $X_2 = 100$
$X_3 = X_3' - X_3'' = 230 + t - t = 230$
$X_4 = 0$, $X_5 = 20$, $X_6 = 0$ con $V^* = -1350$

El problema original tiene solución única. Al desdoblar la variable en 2, damos un grado de libertad, por lo que si una de las dos variables aumenta la otra siempre lo puede compensar aumentando también. Luego los problemas con desdoblamiento de variables y donde esta variable está en la base óptima, tienen siempre infinitas soluciones.

Problema 3: Establecer F.O. para forzar vértices óptimos

Considere el siguiente problema:

$$Max: X + aY$$
$$s.a.$$
$$3Y + X \leq 13$$
$$X + Y \leq 6$$
$$3X + Y \leq 13$$
$$0 \leq X$$
$$0 \leq Y \leq 4$$

Encuentre para que valores de "a" en la solución óptima del problema estarán activas las restricciones: $X + Y \leq 6 \wedge 3X + Y \leq 13$. La solución debe ser única.

Respuesta:

Llevando a formato estándar:

$$Min: -X - aY$$
$$s.a.$$
$$X + 3Y + h_1 = 13$$
$$X + Y + h_2 = 6$$
$$3X + Y + h_3 = 13$$
$$Y + h_4 = 4$$
$$X, Y \geq 0$$

Luego el Tableau queda:

Iteración 1:

X	Y	h1	h2	h3	h4		BASE
1	3	1	0	0	0	13	h1
1	1	0	1	0	0	6	h2
3	1	0	0	1	0	13	h3
0	1	0	0	0	1	4	h4
-1	-a	0	0	0	0	0	

Para lograr nuestro objetivo requerimos que $h_2 = h_3 = 0$ (no básicas) en el óptimo. Este TABLEAU no cumple ni la condición de óptimo, ni lo que queremos, por lo tanto hay que iterar.

X entra a la base → Min (13/1, 6/1, 13/3, ∞) = 13/3. Sale la tercera variable de base, h_3.

Iteración 2:

X	Y	h1	h2	h3	h4		BASE
0	8/3	1	0	-1/3	0	26/3	h1
0	2/3	0	1	-1/3	0	5/3	h2
1	1/3	0	0	1/3	0	13/3	X
0	1	0	0	0	1	4	h4
0	1/3-a	0	0	1/3	0	13/3	

Tenemos solo la restricción 3 activada, ya que $h_3 = 0$. Pero falta la 2, por lo que no puede ser el óptimo. Por lo tanto: $1/3 - a < 0$. Esto implica $\boxed{\mathbf{a > 1/3}}$ (Mayor estricto → S. única)

Y entra a la base→ Min[(26/3)/(8/3), (5/3)/(2/3),(13/3)/(1/3),4/1] = (26/8, 5/2, 13, 4) = 5/2.
Luego sale la segunda variable de base, o sea, h_2.

Iteración 3:

X	Y	h1	h2	h3	h4		BASE
0	0	1	-4	1	0	2	h1
0	1	0	3/2	-1/2	0	5/2	Y
1	0	0	-1/2	1/2	0	7/2	X
0	0	0	-3/2	1/2	1	3/2	h4
0	0	0	(3a-1)/2	(1-a)/2	0	21/6+5a/2	

Obtenemos nuestra condición, ya que logramos sacar las holguras 2 y 3 fuera de la base.
Este vértice debe ser óptimo, por lo que los costos reducidos deben ser mayores o iguales que cero: $(3a-1)/2 > 0$ y $(1-a)/2>0$.

Esto nos dice que. : $\boxed{\mathbf{a > 1/3 \text{ y } a < 1}}$

Luego $\boxed{\mathbf{1/3 < a < 1}}$ es la condición pedida.

Problema 4: Inexistencia por Dominios no acotados

Demuestre vía SIMPLEX que el problema no tiene solución óptima:

$$\begin{aligned}&Min\ -X_2\\&s.a.\\&X_1 - X_2 \leq 6\\&2X_1 - 3X_2 \leq 8\\&X_1, X_2 \geq 0\end{aligned}$$

Respuesta:

OJO: Este problema tiene soluciones factibles, por ejemplo el origen, por lo que si no existe solución se debe a que el problema no está acotado.

Llevémoslo a formato estándar:

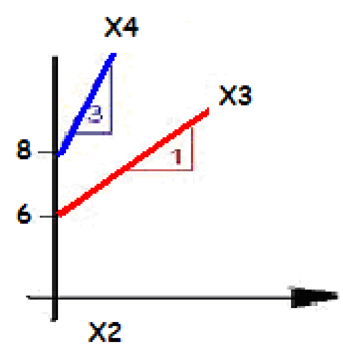
$$\begin{aligned}&Min\ -X_2\\&s.a.\\&X_1 - X_2 + X_3 = 6\\&2X_1 - 3X_2 + X_4 = 8\\&X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0\end{aligned}$$

Iteración 1:

X1	X2	X3	X4		**BASE**
1	-1	1	0	6	X3
2	-3	0	1	8	X4
0	-1	0	0	0	

X_2 entra a la base. Sale: Min (*,*) = ¿ ? No sale ninguna. Esto significa que la variable X_2 no está acotada por ninguna restricción. Al momento de subir su valor no hace que ninguna de las otras variables baje su valor. Esto hace que la función objetivo disminuya su valor infinitamente.

Gráficamente no se acota la variable X_2 al entrar a la base. :



Inexistencia de Solución por dominio no acotado:

Sucede cuando al introducir una variable a la base su columna en el TABLEAU posee sólo valores no positivos (negativos o nulos).

Problema 5: Más complejidad con soluciones múltiples

Vía SIMPLEX: Encuentre todas las soluciones óptimas del siguiente problema:

$$\begin{aligned}
&Max \quad -8x_3 \\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2 \\
&2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 5 \\
&x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3\}
\end{aligned}$$

Respuesta:

Agregamos holguras, estandarizamos y comenzamos a iterar:

$$\begin{aligned}
&Min \;\; 8x_3 \\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\
&2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_5 = 5 \\
&x_i \geq 0 \;\; \forall i \in \{1,2,3,4,5\}
\end{aligned}$$

Iteración 1:

X1	X2	X3	X4	X5	L.D.	BASE
1	3	2	1	0	2	X4
2	4	5	0	1	5	X5
0	0	8	0	0	0	

Este vértice es óptimo, pero no es el único. Hay 2 vértices más, ya que existen 2 costos reducidos no básicos nulos. El primer vértice óptimo es: $\boxed{X_1^* = [0,0,0,2,5]^T}$

X_1 entra a la base. Min(2/1,5/2) = 2/1→ sale X_4

Iteración 2:

X1	X2	X3	X4	X5	L.D.	BASE
1	3	2	1	0	2	X1
0	-2	1	-2	1	1	X5
0	0	8	0	0	0	

La segunda solución óptima es: $\boxed{X_2^* = [2,0,0,0,1]^T}$

X_2 entra a la base. Min(2/3, *) = 2/3→ sale X_1

Iteración 3:

X1	X2	X3	X4	X5	L.D.	BASE
1/3	1	2/3	1/3	0	2/3	X2
2/3	0	7/3	-4/3	1	7/3	X5
0	0	8	0	0	0	

La tercera solución óptima es: $\boxed{X_3^* = [0,2/3,0,0,7/3]^T}$

Ya tenemos los 3 vértices, por lo que no quedan más bases óptimas, si seguimos iterando nos encontraremos sólo con repeticiones de estos 3 Tableaus.

Luego es solución óptima cualquier combinación convexa de estas tres soluciones.

Por lo tanto la solución óptima es:

$$X^* = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Problema 6: Degeneración de vértices

Resuelva el siguiente problema vía SIMPLEX:

$$
P)\quad
\begin{aligned}
&Min\ -x_1 - x_2\\
&s.a.\\
&2x_1 + x_2 \le 2\\
&3x_2 \le 2\\
&6x_1 + 9x_2 \le 10\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Respuesta:

Pasando a formato estándar:

$$
\begin{aligned}
&Min\ -x_1 - x_2\\
&s.a.\\
&2x_1 + x_2 + x_3 = 2\\
&3x_2 + x_4 = 2\\
&6x_1 + 9x_2 + x_5 = 10\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

Iteración 1:

X1	X2	X3	X4	X5		**BASE**
2	1	1	0	0	2	X3
0	3	0	1	0	2	X4
6	9	0	0	1	10	X5
-1	-1	0	0	0	0	

Entra X_1 a la base. Min(2/2, ∞,5/3) = 2/2. Por lo que sale la primera variable de base, o sea, X_3.

Iteración 2:

X1	X2	X3	X4	X5		**BASE**
1	1/2	1/2	0	0	1	X1
0	3	0	1	0	2	X4
0	6	-3	0	1	4	X5
0	-1/2	1/2	0	0	1	

Entra X_2 a la base. Min(1/(1/2), 2/3, 4/6) = 2/3. Sale X_4 ó X_5.

Veamos que pasa en ambos casos :
Si sale X_4: **Iteración 3:**

X1	X2	X3	X4	X5		BASE
1	0	1/2	-1/6	0	2/3	X1
0	1	0	1/3	0	2/3	X2
0	0	-3	-2	1	0	X5
0	0	1/2	1/6	0	4/3	

Si sale X_5: **Iteración 4:**

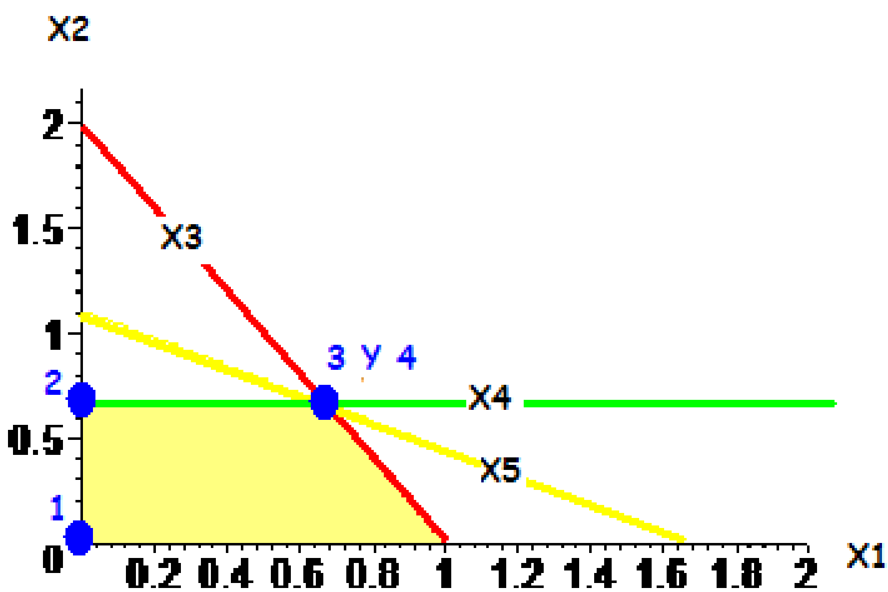
X1	X2	X3	X4	X5		BASE
1	0	3/4	0	-1/12	2/3	X1
0	0	-3/2	1	-1/2	0	X4
0	1	-1/2	0	1/6	2/3	X2
0	0	1/4	0	1/12	4/3	

Ambos soluciones básicas iniciales factibles representan el mismo vértice y es óptimo.
$X^* = (2/3, 2/3, 0, 0, 0)$ →¡Tenemos 2 bases para un vértice y una variable básica nula!

¿Por que paso esto?

Este tipo de vértice se llama **Solución Degenerada.** Existe solución degenerada cuando una de las variables en la base adquiere valor cero. La solución degenerada existe por el hecho de puntos sobredeterminados, es decir más de 'n' restricciones en un espacio de R^n determinan un punto.

Gráficamente:



→Vemos claramente la sobredeterminación del punto óptimo.

Problema 7: Degeneración y solución múltiple
Resuelva el siguiente problema vía SIMPLEX:

$$\begin{aligned}&Min\ -x_1-x_2\\&s.a.\\&x_1+x_2\leq 1\\&-x_1+x_2\leq 0\\&x_1,x_2\geq 0\end{aligned}$$

Respuesta:
Pasando a formato estándar:

$$\begin{aligned}&Min\ -x_1-x_2\\&s.a.\\&x_1+x_2+x_3=1\\&-x_1+x_2+x_4=0\\&x_1,x_2,x_3.x_4\geq 0\end{aligned}$$

Iteración 1:

X1	X2	X3	X4		**BASE**
1	1	1	0	1	X3
-1	1	0	1	0	X4
-1	-1	0	0	0	

Entremos X_2 a la base. Min(1/1, 0/1) = 0. Por lo que sale la segunda variable de base, X_4.

Iteración 2:

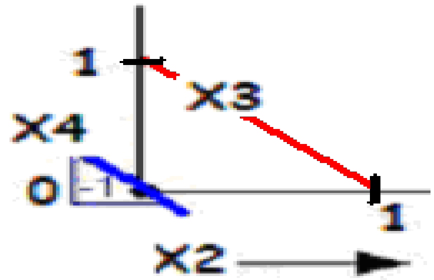
X1	X2	X3	X4		**BASE**
2	0	1	-1	1	X3
-1	1	0	1	0	X2
-2	0	0	1	0	

Tenemos el mismo vértice que antes → Hay degeneración. En este caso el vértice degenerado no es óptimo. Seguimos iterando.....

Analicemos: Si tomamos la columna de la variable entrante de la primera iteración:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{dx_3}{dx_2}\\ \dfrac{dx_4}{dx_2}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

Gráficamente:



La variable X_4 al partir de cero y estando en la base, no dejó a la variable X_2 subir de valor. En este caso de R^2 existen 3 restricciones determinando el punto en vez de 2, las cuales son:

$$-x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Iteración 2:

X1	X2	X3	X4		BASE
2	0	1	-1	1	X3
-1	1	0	1	0	X2
-2	0	0	1	0	

Entra X_1 a la base. Min(1/2, *) = ½. Por lo tanto sale la primera variable de base, X_3.

Iteración 3:

X1	X2	X3	X4		BASE
1	0	1/2	-1/2	1/2	X1
0	1	1/2	1/2	1/2	X2
0	0	1	0	1	

Vemos que tenemos solución óptima, pero múltiple, ya que el costo reducido de X_4 es cero:

$$X_1{*} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontremos la otra solución: Entra X_4 a la base, Min(*, (1/2)/(1/2)) = 1. Sale X_2

Iteración 4:

X1	X2	X3	X4		BASE
1	0	1	0	1	X1
0	2	1	1	1	X4
0	0	1	0	1	

Por lo que la otra solución es: $X_2{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

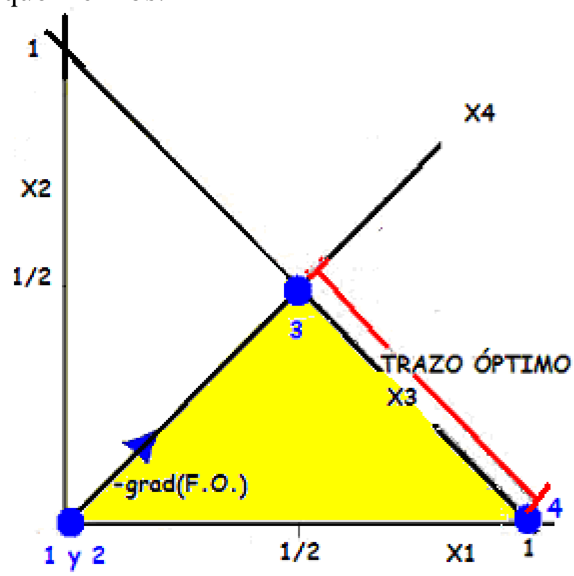
Debemos tener en cuenta que cualquier combinación convexa entre estas 2 soluciones también es solución óptima.

Por lo tanto:

$$X^* = t\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\end{bmatrix} + (1-t)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \forall t \in [0,1]$$

Es la solución óptima.

Veamos gráficamente que hicimos:



→ Vemos claramente que la s. óptima es el trazo perpendicular al gradiente de la F.O.
→ Vemos la sobredeterminación del punto (0,0) por 3 restricciones.

Problema 8: Planteado

Resuelva por el método SIMPLEX:

$$\begin{aligned}&Max: x_1 + 2x_2\\&s.a.\\&x_1 - x_2 \geq 0\\&2x_1 + 2x_2 \leq 4\\&0 \leq x_1 \leq 2\\&0 \leq x_2 \leq 1\end{aligned}$$

Respuesta:

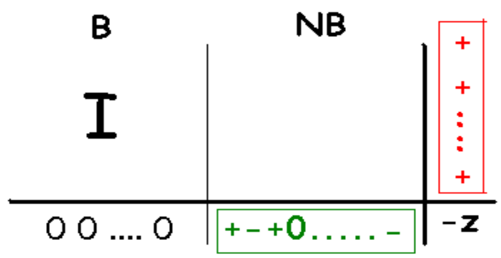
Se deja planteado. La solución óptima es $x_1^* = x_2^* = 1$.

RESUMEN DE POSIBLES CASOS EN EL TABLEAU

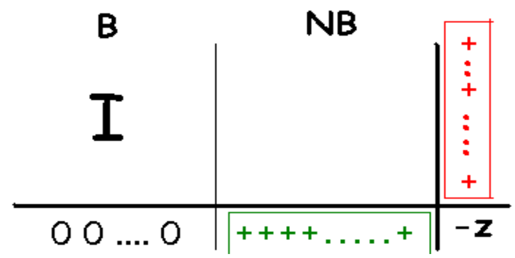
Caso	Caracterización en el Tableau	¿Qué hacer?
SIBF (Vértice factible)	Todo elemento del lado derecho mayor o igual a cero.	Iterar y encontrar el óptimo entrando a la base variables no básicas con costos reducidos negativos
Solución Única	Solución Factible, con todo costo reducido no básico mayor a cero	OK, encontramos el óptimo
Solución Múltiple	Solución Factible, con todos los costos reducidos no básicos mayores o iguales a cero. Al menos un costo reducido no básico igual a cero.	Encontrar las demás soluciones entrando a la base las variables no básicas con costos reducidos cero. S. Óptima es combinación convexa de las soluciones en los vértices encontradas.
Solución Degenerada	Algún elemento del lado derecho (Variable básica) igual a cero.	Si es óptimo, OK. Si no; seguir iterando y así salir del vértice degenerado, para luego encontrar el óptimo.
Problema no acotado	Columna de la variable entrante sólo con valores negativos o ceros.	Nada... El problema no tiene solución

EJEMPLOS

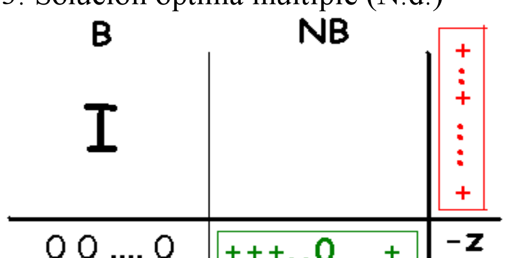
1. Solución Factible



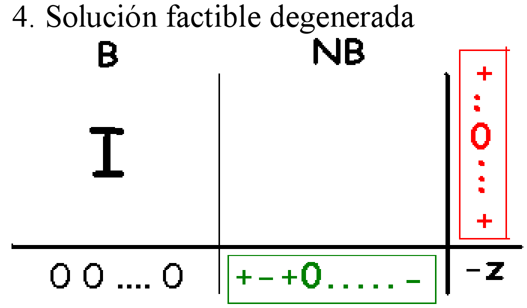
2. Solución óptima única (No degenerada)



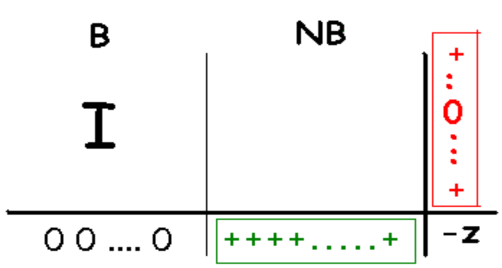
3. Solución óptima múltiple (N.d.)



4. Solución factible degenerada



5. Solución óptima degenerada



6. Problema no acotado