Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2,3 y 4

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Pablo Rey , Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía N°13: SIMPLEX: ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

INCORPORACIÓN POSTOPTIMAL DE UNA VARIABLE AL PROBLEMA

Nos interesa saber qué pasará con la asignación óptima al incorporar una nueva variable: ¿Qué pasa con la solución óptima: cambia o sigue siendo la misma?

Se debe tener en cuenta lo siguiente:

¡No cambia el número de variables básicas del problema! (# de restricciones no cambia).

Si tenemos la nueva variable X_k y la incluimos al TABLEAU como variable no básica. Su columna es R_k, su costo es C_K, por lo que su costo reducido será:

$$\boxed{r_k = C_k - C_B{}^T B^{-1} R_k}$$

1)	Si $r_k \geq 0$ nos dice que al incorporar esta variable, sólo conseguiremos aumentar el valor de la función objetivo. Por lo tanto no conviene incluirla.
2)	Si $r_k < 0$, al incorporar la variable a la base, podemos reducir la función objetivo, por lo que es atractiva su inclusión. La solución óptima cambia si se incluye X_K.

Problema 1:

Una empresa láctea produce 2 tipos de productos: Leche Entera con un costo de $40/Kg y un requerimiento de 2 horas-hombre por Kg. Mantequilla con un costo de $60/Kg y 1 hora-hombre por Kg. Se sabe que el precio de mercado de la leche Entera es $130/Kg y el de la mantequilla de $200/Kg. Por otra parte suponga que la empresa vende todo lo que produce.

a) Maximice la ganancia mensual de la empresa, si esta cuenta con un capital de $15000 y 400 horas-hombre al mes.

b) Debido a la creciente obesidad en la población, se comienza a consumir Leche Descremada. Se sabe que la leche descremada le cuesta al productor $80/Kg y 3 horas-hombre por Kg. El precio por fijar es $X/Kg. ¿Cuánto debería ser X para que al producir Leche Descremada exista una ganancia adicional en la empresa?

Respuesta:

a) El problema de Maximización queda como:

$$\begin{array}{lcl} Max: 130x_1 + 200x_2 & & Min: -130x_1 - 200x_2 \\ s.a. & & s.a. \\ 40x_1 + 60x_2 \leq 15000 & \text{estandarizando} \rightarrow & 40x_1 + 60x_2 + x_3 = 15000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 400 & & 2x_1 + x_2 + x_4 = 400 \\ x_1, x_2 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Iteración 1:

X1	X2	X3	X4	L.D.	BASE
40	60	1	0	15000	X3
1	2	0	1	400	X4
-130	-200	0	0	0	

Entra X_2 a la base, Min(15000/60,400/2) = 200. Sale X_4.

Iteración 2:

X1	X2	X3	X4	L.D.	BASE
10	0	1	-30	3000	X3
½	1	0	1/2	200	X2
-30	0	0	100	40000	

Entra X_1 a la base, Min(3000/10,200/(1/2)) = 300. Sale X_3.

Iteración 3:

X1	X2	X3	X4	L.D.	BASE
1	0	1/10	-3	300	X1
0	1	-1/20	2	50	X2
0	0	3	10	49000	

La solución es óptima. El productor maximiza ingresos si produce 300 Kg de Leche Entera y 50 Kg de Mantequilla. Sus ganancias son de \$49000.

b) Se tiene lo siguiente:

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -3 \\ -1/20 & 2 \end{pmatrix}$ (Obtenida del TABLEAU con $B^{-1}R$ y con R = Identidad) y

$C_B = [-130, -200]$.

De la nueva variable se tiene: $R_k = \begin{bmatrix} 80 \\ 3 \end{bmatrix}$; $C_k = -X$

Luego su costo reducido es: $r_k = -X - [-130 \quad -200] \begin{pmatrix} 1/10 & -3 \\ -1/20 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 3 \end{bmatrix} = -X + 170$

Por lo que para representar una ganancia, r_k, el costo reducido, debe ser negativo. Esto se logra para X > \$170. La empresa debería producir Leche Descremada si se cumple esta condición, puesto que le proporcionaría una mejor función objetivo (más ganancias).

VARIACIÓN DE UN COSTO NO BÁSICO

Nos interesa analizar la variación de un costo no básico en la solución óptima. ¿Cuánto puede variar el costo para que una variable siga siendo no básica?

Sea X_j la variable no básica a analizar y supongamos que su costo varía ΔC_j. El costo reducido anterior a la variación es:

$$r_j^{VIEJO} = C_j - C_B{}^T B^{-1} R_j$$

Su nuevo costo reducido será:

$$r_j^{NUEVO} = \left(C_j + \Delta C_j\right) - C_B{}^T B^{-1} R_j = \Delta C_j + r_j^{VIEJO}$$

La condición de optimalidad nos dice que:

$$\boxed{\Delta C_j + r_j^{VIEJO} \geq 0}$$

Por lo tanto:

1) Si $\Delta C_j \geq -r_j$, la solución óptima será la misma, con el mismo valor óptimo.
2) Si $\Delta C_j < -r_j$, la solución óptima cambia, ya que esta variable posee, con el cambio, un costo reducido negativo.

VARIACIÓN DE UN COSTO BÁSICO

Supongamos ahora que estamos en solución óptima y que varía el costo de una variable básica. ¿Cuánto puede variar el costo de dicha variable, para que no cambie la configuración de la Base óptima?

Sea X_j la variable básica a analizar y supongamos que su costo varía ΔC_j. Los costos reducidos no básicos antes del cambio son:

$$r_R{}^{T\ VIEJOS} = C_R{}^T - C_B{}^T B^{-1} R\ .$$

Después de la variación serán:

$$r_R{}^{T\,NUEVOS} = C_R{}^T - (C_B{}^T + \left[0,..,\Delta C_j,..,0\right])B^{-1}R = r_R{}^{T\ VIEJOS} - \left[0,..,\Delta C_j,..,0\right]B^{-1}R$$

1) Si todos los costos reducidos modificados son mayores o iguales a cero.
   → La solución óptima no varía.
2) Si existe algún costo menor a cero.
   → Cambia la configuración de la base óptima

OJO:

1) Al hacer variar un costo básico siempre vamos a cambiar el valor óptimo (aunque no cambie la solución óptima), mientras que al variar uno no básico la función objetivo no cambia si se mantiene la misma solución óptima.
2) Al variar un costo básico cambian todos los costos reducidos no básicos.
3) Al cambiar el costo básico, pueden salir o entrar a la Base otras variables (no necesariamente la misma analizada)

VARIACIONES EN EL LADO DERECHO DE RESTRICCIONES

Ahora queremos modificar el lado derecho de las restricciones y ver que pasa con la base óptima, las restricciones activas, etc..... En este caso la solución óptima es:

$$X_B^{VIEJA} = B^{-1}b.$$

Si ahora la restricción "j" varía en su lado derecho un Δb_j, la nueva solución será:

$$\boxed{X_B^{NUEVA} = B^{-1}\left(b + \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ \Delta b_j \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \right) = X_B^{VIEJA} + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ \Delta b_j \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}}$$

1) Si los nuevos valores de la solución básica son mayores o iguales a cero, la configuración Base óptima sigue siendo la misma, al igual que las restricciones activas.

2) Si existe algún valor negativo, esto significa que la configuración Base deja de ser una solución básica factible. Luego la configuración de la base óptima cambia a otra que sea factible.

OJO:

1) Al variar el lado derecho de alguna restricción activa → Siempre cambia la solución óptima y el valor óptimo (Nosotros sólo analizamos si cambia la configuración de la Base óptima o no).
2) Al variar el lado derecho de alguna restricción inactiva → Sólo cambian holguras hasta que activemos esta restricción.
3) Si se mantiene la configuración de base, los costos reducidos no cambian.

Problema 2:

El candidato Tomás Pineda B., de la "Concertación de Alianzas que Juntos Pueden Más" está convencido que le falta alcanzar a los hombres y mujeres del segmento ABC5, para ganar las próximas elecciones. Para poder captar este grupo ha decidido comprar minutos de radio en dos tipos de programas: los partidos de fútbol del domingo y un programa de conversación matinal.

Se sabe que los partidos de fútbol son oídos por 20 mil mujeres y 120 mil hombres del segmento ABC5 en todo Chile. El programa de conversación matinal es oído por 70 mil mujeres y 20 mil hombres del mismo segmento.

Tomás Pineda B. quisiera que al menos 280 mil mujeres y 240 mil hombres oigan un minuto de su propaganda. Un minuto de propaganda vale $1.000.000 en los partidos de fútbol y $500.000 en el caso del programa de conversación.

a) Formule el Problema Lineal que pueda recomendar al candidato cuantos minutos de cada tipo de propaganda comprar de modo de alcanzar su objetivo a mínimo costo (Exprese el problema en millones de pesos y en miles de personas).

b) El Tableau óptimo luego de agregar variables de exceso correspondientes es:

X	Y	e1	e2	L. D.
1	0	1/400	-7/800	1,4
0	1	-3/200	1/400	3,6
0	0	1/200	3/400	-3,2

i) Determine el rango de C_Y (costo de Y) en el cual la base óptima no cambia.

ii) Determine el rango de valores de b_1 (actualmente en 280 mil personas) en el cual la base óptima no cambia. Si b_1 fuera 400 mil. ¿Cuál sería la nueva solución? ¿Cambia la configuración de la base?

iii) Suponga que se considera una nueva alternativa de propaganda. Cuesta $110.000 el minuto y alcanza 120 mil hombres y 70 mil mujeres. ¿Es una alternativa atractiva?

Respuesta:

a)

Sean: X: número de minutos comprados en propagandas durante el fútbol.
Y: número de minutos comprados en propagandas durante el matinal.

El problema queda como:

$$Min: X + 0,5Y$$
$$s.a.$$
$$20X + 70Y \geq 280$$
$$120X + 20Y \geq 240$$
$$X, Y \geq 0$$

b) i)
Con el TABLEAU se sabe que la base es: B = [X, Y].
Luego:

$$\rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/400 & 7/800 \\ 3/200 & -1/400 \end{pmatrix} \text{ y } R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (B^{-1} obtenido de $B^{-1}R$ con R = -I)

$$\rightarrow C_R^{\ T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } C_B^{\ T} = [1 \quad 1/2 + \Delta C_y]$$

Nos piden una variación del costo de una variable básica. Hay que revisar todos los costos reducidos:

$$r_R^{\ T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - [1 \quad 1/2 + \Delta C_y] \begin{pmatrix} 1/400 & -7/800 \\ -3/200 & 1/400 \end{pmatrix}$$
$$= [0 \quad 0] + [1/200 \quad 3/400] - [-3\Delta C_y/200 \quad \Delta C_y/400]$$
$$= [\frac{1+3\Delta C_y}{200} \quad \frac{3-\Delta C_y}{400}]$$

Luego para no variar la base óptima estos costos reducidos deben ser no negativos. Por lo tanto la condición es: $1+3\Delta C_y \geq 0$ y $3-\Delta C_y \geq 0$. Luego: $3 \geq \Delta C_y \geq -1/3$. ¡No puede aumentar Cy en más de $3 millones o disminuir en más de $1/3 millón!

ii)
Utilizamos:

$$X_B^{\ Nueva} = X_B + B^{-1} \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 \\ 3,6 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -1/400 & 7/800 \\ 3/200 & -1/400 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4 - \Delta b_1/400 \\ 3,6 + 3\Delta b_1/200 \end{bmatrix}$$

Luego la condición es: $1,4 - \Delta b_1/400 \geq 0$ y $3,6 + 3\Delta b_1/200 \geq 0$.
Por lo que: $-240 \leq \Delta b_1 \leq 560$.

Si b_1 = 400 la configuración de la base no varía, pero la nueva solución óptima es:

$$X_B^{\ Nueva} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = B^{-1} \begin{bmatrix} 400 \\ 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 5,4 \end{bmatrix}$$

iii)
Tenemos que ver cual es el costo reducido de la nueva variable. Se tiene:

$$\rightarrow \qquad R_k = \begin{bmatrix} 70 \\ 120 \end{bmatrix} \text{ y } C_k = 0,11$$

Luego:

$$r_j = 0,11 - \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1/400 & 7/800 \\ 3/200 & -1/400 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 70 \\ 120 \end{bmatrix} = 0,11 - 5/4 = -1.14$$

Luego podemos apreciar que al incluir esta nueva variable en el problema, el valor óptimo mejoraría. Por lo tanto la alternativa es atractiva.

Problema 3:

Considere el problema:

$$
\begin{aligned}
&Min: 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 10x_5 - 5x_6 \\
&s.a. \\
&x_1 + 2x_2 + x_4 - x_6 = 11 \\
&x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 - x_6 = 6 \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 - 7x_6 = 13 \\
&x_i \geq 0 \ \forall \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Suponga que las variables básicas en el óptimo son: x_1, x_2, x_3, en ese orden.

a) Calcular los valores de las variables básicas en el óptimo. Indique como puede comprobar que está efectivamente en el óptimo.

b) Obtenga el rango del costo de la variable x_5, para el cual la solución obtenida sigue siendo óptima. Haga lo mismo pero con el costo de x_3.

Respuesta:

Se tiene: $B = \{1,2,3\}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}; b = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}; C_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ y } C_R = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

a) Calculemos las variables básicas:

$$X_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para verificar el óptimo:

→ La solución debe ser factible, lo que ya esta cumplido con variables no negativas.

→ Costos reducidos no básicos mayores o iguales a cero:

$$r_R^{\,T} = C_R^{\,T} - C_B^{\,T} B^{-1} R = \begin{bmatrix} -6 & 10 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución es óptima y múltiple.

b)

Con C_5 nos piden el rango de variación de un costo no básico:

Ocupamos la fórmula → $\Delta C_5 \geq -r_5 = -3$. Luego C_5 debe ser mayor o igual que 7 para mantener la misma solución óptima y valor óptimo.

Con C_3 nos piden el rango de variación de un costo básico:

Hay que analizar todos los costos reducidos no básicos:

$$r_R^{T\,Nuevos} = C_R^{\ T} - C_B^{\ T\,Nuevos} B^{-1} R$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 10 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3+\Delta C_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2\Delta C_3 & 3+\Delta C_3 & 6\Delta C_3 \end{bmatrix}$$

Estos costos deben ser positivos para que la solución óptima no cambie. Por lo que: $0 \leq \Delta C_3 \leq 1/2$. Por lo tanto el costo debe estar entre –3 y -5/2 para no cambiar la solución óptima. El valor óptimo, sin embargo, cambia con cualquier variación de costos básicos.

Problema 4:

Considere el siguiente problema

$Max\ x + 2y + z$
s.a
$-x + y + z \leq 5$
$2x + 2y + 2z \geq 10$
$3x - y = 8$
$x, y, z \geq 0$

Se le informa que la base óptima es $B = \{x, y, h2\}$ en ese orden, siendo $h2$ la variable de exceso de la segunda restricción.

1. Demuestre que la base dada es óptima. Indique la solución óptima
2. Indique en que rango puede moverse Cz (ponderador de la variable z en la f.obj, actualmente igual a 1), sin que cambie la solución óptima
3. Suponga que resuelve incluir una nueva variable al problema cuyo beneficio unitario asociado es 3 y su vector (traspuesto) de consumo es $[-1, 2, 4]$. En este caso: ¿sigue vigente la solución óptima para el nuevo problema?

Respuesta:

Pasamos al equivalente de minimización,

$Min - x - 2y - z$
s.a.
$-x + y + z + h1 = 5$
$2x + 2y + 2z - h2 = 10$
$3x - y + h3 = 8$
$x, y, z, h1, h2, h3 \geq 0$

Se tiene la base $Xb = \{x, y, h2\}$

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}: B^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 3/2 & 0 & 1/2\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}; R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}; C_B=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{bmatrix}; C_R=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \text{ y } b=\begin{bmatrix}5\\ 10\\ 8\end{bmatrix}$$

1. Calculamos el vector de costos reducidos en el óptimo, para ver si todos estos son no negativos (condición de optimalidad).

$$r_R^{\ T}=C_B^{\ T}-C_R^{\ T}B^{-1}R=\begin{bmatrix}5/2 & 7/2 & 3/2\end{bmatrix}$$

Todos los costos reducidos son positivos, por lo tanto estamos es solución única.

Calculando ahora la solución óptima (no olvidar que puede ser infactible).

$$x_B=B^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 10\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{2}\\ \frac{23}{2}\\ 26\end{bmatrix}$$

Es factible...

El valor óptimo:

$$\hat{v} \quad = \quad C_B^T B^{-1}b=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 10\\ 8\end{bmatrix}=-\frac{59}{2}$$

2.
z es una variable no básica. Entonces, la variación de Cz (en la f.o. del problema equivalente de minimización)

$$\begin{aligned}-r_z &\leq \Delta c_z<\infty\\ -\frac{5}{2} &\leq \Delta c_z<\infty\end{aligned}$$

Esto quiere decir que (en el problema de minimización equivalente) Cz tiene que al menos valer −7/2 para que sea atractivo integrar la variable asociada a la base. Es decir, en el problema original, tiene que subir hasta 7/2 su costo para que sea atractivo.

3. Calculamos el costo reducido de la nueva variable:

$$r_j^{\ T}=C_B^{\ T}-C_R^{\ T}B^{-1}R_j=-3-C_R^{\ T}B^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=-1/2$$

Como el costo reducido calculado es negativo, entonces si interesaría integrar esta nueva variable.