PROGRAMACIÓN DINÁMICA:

La gracia de la programación dinámica es transformar problemas complejos en problemas más simples, teniendo estructuras especiales que nos permiten separar las variables.

Problema 9: P. Dinámico Entero (Introductorio)

Una familia está interesada en planificar sus vacaciones a fin de año y tiene la posibilidad de visitar 3 ciudades. El presupuesto alcanza para salir de vacaciones durante 5 días. En una comida familiar el Padre preguntó a cada uno de los integrantes de la familia y calibró la siguiente función de utilidad del viaje:

$$2\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+3\sqrt{x_3}$$

Donde x_i es el número de días en la ciudad “i”. Plantee y resuelva en forma dinámica el problema que maximiza la utilidad de la familia.

Respuesta:

El problema de optimización es:

$$\begin{aligned}&Max:\ 2\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+3\sqrt{x_3}\\&s.a.\\&x_1+x_2+x_3\le 5\\&x_i\in Enteros\ge 0\ \forall i=1,2,3\end{aligned}$$

¡Procedamos a resolver el problema por programación dinámica!.

PASO 1: Vamos de atrás para adelante

- → Supongamos que la familia está decidiendo por la última cuidad, dadas las elecciones en la primera y segunda cuidad, que ya se hicieron y son óptimas.
- → Supongamos que nos quedan y_3 días disponibles (recursos disponibles).

¿Cuál es la mejor decisión en la tercera cuidad?

Si este fuera el caso, el problema quedaría:

ETAPA 3:

$$f_3(y_3)=\begin{cases}Max:\ 3\sqrt{x_3}\\ s.a.\\ 0\le x_3\le y_3\\ x_3\in Entero\end{cases}$$

La solución óptima de este problema es fácil, hay que asignar todo lo que nos sobra en visitar la tercera cuidad.

Hagamos una tabla:

y_3	$f_3(y_3)$	x_3*
0	0	0
1	3	1
2	4.24	2
3	5.20	3
4	6	4
5	6.71	5

Nota: El óptimo es en función de los recursos que tenemos disponibles

ETAPA 2:

Ahora suponemos que sólo se ha elegido los días en la primera cuidad y es óptimo. Los días óptimos a elegir en la segunda ciudad dado que tenemos y_2 días para visitar la segunda y la tercera se determinan con el siguiente problema:

$$f_2(y_2)\begin{cases} Max: \ \sqrt{x_2}+f_3(y_2-x_2) \\ s.a. \\ 0 \leq x_2 \leq y_2 \\ x_2 \in Entero \end{cases}$$

Nota: Lo que nos sobraría para visitar la tercera cuidad sería (y_2-x_2).

Hagamos una tabla:

y_2	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$x_2=5$	$f_2(y_2)$	x_2*
0	0						0	0
1	3	1					3	0
2	4.24	4	1.41				4.24	0
3	5.20	5.24	4.41	1.73			5.24	1
4	6.00	6.20	5.65	4.73	2		6.20	1
5	6.71	7	6.61	5.97	5	2.23	7	1

ETAPA 1:

Ahora no hemos elegido anteriormente nada. Tenemos por enunciado 5 días de recurso ($y_1=5$) , esto se llama condición de borde. El problema para elegir la cantidad de días óptimos a visitar la cuidad 1 es:

$$v*=f_1(5)\begin{cases} Max: \ 3\sqrt{x_1}+f_2(5-x_1) \\ s.a. \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ x_1 \in Entero \end{cases}$$

Nota: $f_1(5)$ corresponde justamente al valor de la función objetivo de nuestro problema.

Hagamos una tabla:

y_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$	$f_1(y_1)$	x_1 *
5	7	8.20	8.06	7.70	7	4.47	8.20	1

Luego tenemos que el valor óptimo es 8.20.
¿Cómo obtenemos la solución objetivo?

PASO 2: Vamos de adelante para atrás

→Sabemos que $x_1^* = 1$ (de la 3ra tabla).

→Esto implica que dejamos $y_2 = 4$. Con este recurso $x_2^* = 1$ (De la 2da tabla).

→Esto implica que $y_3 = 3$, luego $x_3^* = 3$ (tabla 1).

IMPORTANTE: Notemos que las variables x_1, x_2, x_3 fueron escogidas de forma arbitraria. Puede haber sido en cualquier orden.

Problema 2: Dinámico Continuo

Resolver el siguiente problema a través de programación dinámica:

$$\begin{aligned}&Max:\ x_1^2 x_2^2 x_3\\&s.a.\\&x_1+x_2+x_3\le 10\\&x_i\ge 0\ \forall \text{i=1,2,3}\end{aligned}$$

Respuesta:

Nota: Esta vez tenemos un problema continuo pero la base es la misma.

ETAPA 3

Si tenemos y_3 recursos para la tercera variable, ya habiendo elegido x_1* y x_2*, el problema es:

$$f_3(y_3)\begin{cases}Max: x_3\\0\le x_3\le y_3\end{cases}$$

Se tiene que el óptimo es:

$$x_3*(y_3)=y_3$$
$$f_3(y_3)=y_3$$

ETAPA 2

Si tenemos y_2 recursos, ya habiendo elegido x_1*, el problema es:

$$f_2(y_2)\begin{cases}Max: x_2^2 f_3(y_2-x_2)\\0\le x_2\le y_2\end{cases} \leftrightarrow f_2(y_2)\begin{cases}Max: x_2^2(y_2-x_2)\\0\le x_2\le y_2\end{cases}$$

Se tiene que el óptimo es:

$$x_2*(y_2)=\frac{2}{3}y_2$$
$$f_2(y_2)=\frac{4}{27}y_2^3$$

ETAPA 1

Ahora si tenemos $y_1=10$ recursos el problema es:

$$v*=f_1(10)\begin{cases}Max: x_1^2 f_2(10-x_1)\\0\le x_1\le 10\end{cases} \leftrightarrow v*=f_1(10)\begin{cases}Max: x_1^2\dfrac{4}{27}(10-x_1)^3\\0\le x_1\le 10\end{cases}$$

Se tiene que el óptimo es:

$$x_1*=4$$
$$v*=f_1(10)=512$$

Luego la solución óptima se obtiene en cadena:

Si $x_1*=4$ → queda $y_2=6$ → $x_2*=4$ → queda $y_3=2$ → $x_3*=2$

Problema 3: Producción e Inventario
Una planta produce un solo producto y enfrenta las siguientes demandas en los períodos 1,..4:

Periodo	**1**	**2**	**3**
Demanda: d_n	1	3	2

Las demandas pueden ser satisfechas con lo producido el periodo anterior.

Sean:

- K: Costo fijo de producción = 5
- C: Costo unitario variable de producción = 2
- Q: Capacidad mensual máxima de producción = 3
- h: Costo unitario de manutención de inventario = 1

Se debe decidir cuánto producir en cada periodo para satisfacer la demanda a mínimo costo.

Respuesta:

Las variables de decisión son:

Y_n: Tamaño del lote de producción del período n
X_n: Inventario al final del período n
Z_n: 1 si $Y_n > 0$, 0 en caso contrario

El problema de optimización es:

$$\begin{aligned}
&Min: \sum_{k=1}^{n} KZ_n + CY_n + hX_n \\
&s.a. \\
&X_n = X_{n-1} + Y_n - d_n \ \forall n \\
&Y_n \leq QZ_n \ \forall n \\
&Z_n \in \{0,1\}
\end{aligned}
\quad \rightarrow \quad
\begin{aligned}
&Min: \sum_{k=1}^{3} 5Z_n + 2Y_n + X_n \\
&s.a. \\
&X_1 = Y_1 - 1 \\
&X_2 = X_1 + Y_2 - 3 \\
&X_3 = X_2 + Y_3 - 2 \\
&Y_3 \leq 3Z_3 \\
&Y_2 \leq 3Z_2 \\
&Y_1 \leq 3Z_1 \\
&Z_n \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Para el modelo de programación dinámica definimos:

→ $f_n(S_n)$:= Costo mínimo asociado a los períodos n, n+1, …, N si el inventario al principio del período "n" es $S_n = X_{n-1}$.

Por lo tanto, el modelo en cada etapa queda:

$$f_n(S_n) = \begin{cases} Min : \alpha(Y_n) + f_{n+1}(S_n + Y_n - d_n) \\ s.a. \\ S_n + Y_n - d_n \geq 0 \\ Y_n \leq 3 \end{cases}$$

Con:

$$\alpha(Y_n) = \begin{cases} h(S_n - d_n) & si \quad Y_n = 0 \\ K + CY_n + h(S_n + Y_n - d_n) & si \quad Y_n > 0 \end{cases}$$

→ Luego el valor óptimo será $f_1(0) = V$ (inicialmente no hay inventario).

→ $f_k(S_k) = 0 \ \forall k > 3$ (son sólo 3 periodos)

ETAPA 3:

s_3	$Y_3 = 0$	$Y_3 = 1$	$Y_3 = 2$	$Y_3 = 3$	$v_3(s_3)$	Y_3* (óptimo)
0			**9**	**12**	**9**	**2**
1		**7**	**10**	**13**	**7**	**1**
2	**0**	**8**	**11**	**14**	**0**	**0**
3	**1**	**9**	**12**	**15**	**1**	**0**

Es decir, en cada caso lo óptimo es producir lo menos posible, como es lógico.

ETAPA 2:

s_2	$Y_2 = 0$	$Y_2 = 1$	$Y_2 = 2$	$Y_2 = 3$	$v_2(s_2)$	Y_2* (óptimo)
0				**11+9**	**20**	**3**
1			**9+9**	**12+7**	**18**	**2**
2		**7+9**	**10+7**	**13+0**	**13**	**3**
3	**0+9**	**8+7**	**11+0**	**14+1**	**9**	**0**

ETAPA 1:

s_1	$Y_1 = 0$	$Y_1 = 1$	$Y_1 = 2$	$Y_1 = 3$	$v_1(s_1)$	Y_1* (óptimo)
0		**7+20**	**10+18**	**13+13**	**26**	**3**

Por lo tanto, resolviendo de vuelta hacia adelante, lo óptimo es producir 3 unidades en el primer periodo, 3 en el segundo y ninguna en el tercero. El costo total entonces será 26.

Problema 4:

Se ha encargado un estudio a la Escuela. El problema es tan complejo que ésta ha formado 3 equipos diferentes para resolverlo; sin embargo, las probabilidades de fallar aún son altas. Para asegurarse, la Escuela ha decidido contratar hasta 2 investigadores adicionales, que deben repartirse entre los equipos de alguna forma. Se sabe que las probabilidades de fallar de cada equipo por separado, en función de la cantidad de investigadores extra asignados a cada uno, es

Investigadores extra	**Equipo**		
	1	**2**	**3**
0	0,4	0,6	0,8
1	0,2	0,4	0,5
2	0,15	0,2	0,3

Usando programación dinámica, encuentre la asignación óptima de investigadores a equipos.

Respuesta:

Sean:

→ X_i = Número de investigadores asignados al equipo "i"

→ $P_i(X_i)$ = probabilidad de fallar del equipo "i" al agregarle X_i investigadores.

La probabilidad total de fallar es que los 3 equipos fallen simultáneamente, por lo que el problema de optimización es:

$$\begin{aligned} &Min: P_1(X_1)P_2(X_2)P_3(X_3) \\ &s.a. \\ &X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ &X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Usando programación dinámica, necesitamos definir:

$f_n(Y_n)$ = Mínima probabilidad de falla asociada a los equipos n, n + 1, . . . ,N si quedan Y_n investigadores por asignar. El problema dinámico queda definido por:

$$f_n(Y_n)\begin{cases} Min: P_n(X_n) * f_{n+1}(Y_n - X_n) \\ s.a. \\ X_n \leq Y_n \\ X_n \in Entero \geq 0 \end{cases}$$

→ El valor óptimo entonces es $f_1(2)$ y $f_k(Y_k) = 1 \ \forall k > 3$

ETAPA 3:

y_3	$v_3(y_3)$	x_3 *
0	0,8	0
1	0,5	1
2	0,3	2

ETAPA 2:

y_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$v_2(y_2)$	x_2 *
0	$0,6 \times 0,8$			0,48	0
1	$0,6 \times 0,5$	$0,4 \times 0,8$		0,3	0
2	$0,6 \times 0,3$	$0,4 \times 0,5$	$0,2 \times 0,8$	0,16	2

ETAPA 3:

y_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$v_1(6)$	x_1 *
2	$0,4 \times 0,16$	$0,2 \times 0,3$	$0,15 \times 0,48$	0,06	1

Por lo que resolviendo de vuelta, conviene asignar uno de los investigadores al equipo 1 y el otro al equipo 3. Al hacerlo así, se obtiene una probabilidad total de fallar de 0,06.