Potencia de una Prueba de Hipótesis

Considere $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución Normal(μ, σ). Tenemos que $\overline{X}_n$ es un estimador insesgado y consistente para el parámetro μ, con distribución Normal(μ, $\sigma/\sqrt{n}$).

Si queremos contrastar las siguientes hipótesis:

$$\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu \neq \mu_0 \tag{1}$$
$$\mathrm{H}_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu > \mu_0 \tag{2}$$
$$\mathrm{H}_0 : \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_a : \mu < \mu_0 \tag{3}$$

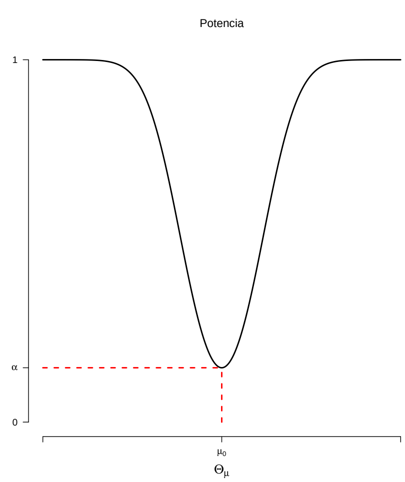
El estadístico de prueba, bajo el supuesto que H_0 es correcta (se considera siempre como referencia $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$) y σ conocido

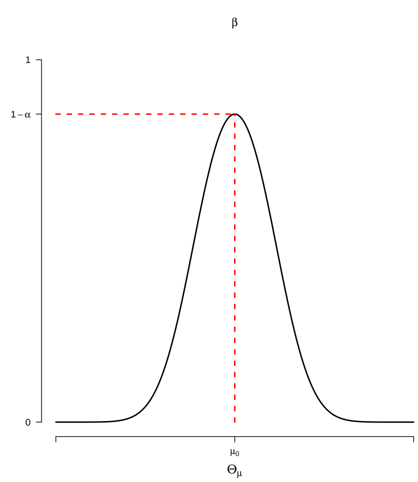
$$Z_0 = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{Normal}(0,\, 1)$$

Para (1) se rechaza H_0 si $|Z_0| > k_{1-\alpha/2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{Potencia} &= 1 - \beta \\
&= 1 - P(\text{Error Tipo II}) \\
&= 1 - P(\text{No rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(|Z_0| > k_{1-\alpha/2} \,|\, \mu = \mu_0 + \Delta) \\
&= P\left(\left| \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > k_{1-\alpha/2} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha/2} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) + P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -k_{1-\alpha/2} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0 + \Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha/2} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) + P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0 + \Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} < -k_{1-\alpha/2} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0 + \Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha/2} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) + P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0 + \Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} < k_{\alpha/2} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= 1 - \Phi\left(k_{1-\alpha/2} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right) + \Phi\left(k_{\alpha/2} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)
\end{aligned}$$

Notar que para $\Delta = 0 \to \mu = \mu_0$ y la Potencia es igual a α

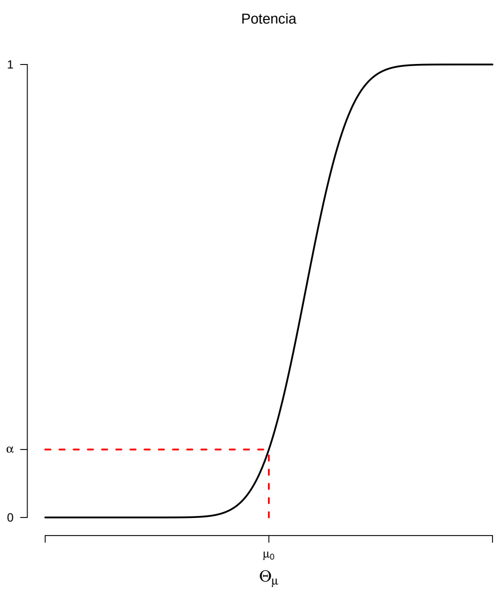


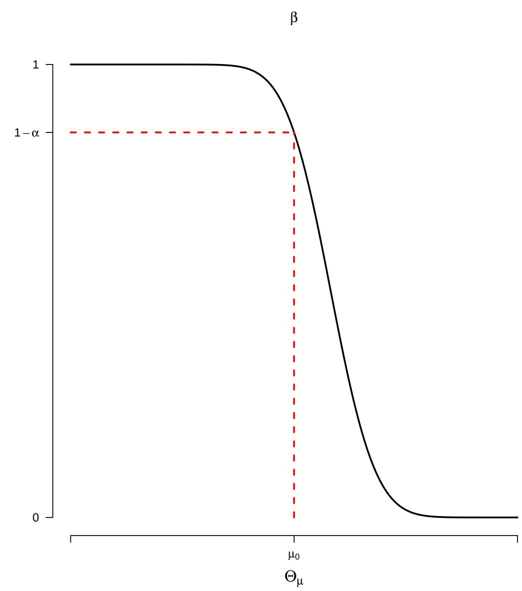


Para (2) se rechaza H_0 si $Z_0 > k_{1-\alpha}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\text{Potencia} &= 1 - \beta \\
&= 1 - P(\text{Error Tipo II}) \\
&= 1 - P(\text{No rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(Z_0 > k_{1-\alpha} \,|\, \mu = \mu_0 + \Delta) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0 + \Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} > k_{1-\alpha} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta \right) \\
&= 1 - \Phi\left(k_{1-\alpha} - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)
\end{aligned}
$$

Notar que para $\Delta = 0 \rightarrow \mu = \mu_0$ y la Potencia es igual a α





Para (3) se rechaza H_0 si $Z_0 < k_\alpha$, entonces

$$
\begin{aligned}
\text{Potencia} &= 1 - \beta \\
&= 1 - P(\text{Error Tipo II}) \\
&= 1 - P(\text{No rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(\text{Rechazar } \mathrm{H}_0 \,|\, \mathrm{H}_0 \text{ es falsa}) \\
&= P(Z_0 < k_\alpha \,|\, \mu = \mu_0 + \Delta) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < k_\alpha \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta\right) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}_n - (\mu_0 + \Delta)}{\sigma/\sqrt{n}} < k_\alpha - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \,\middle|\, \mu = \mu_0 + \Delta\right) \\
&= \Phi\left(k_\alpha - \Delta\,\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Notar que para $\Delta = 0 \to \mu = \mu_0$ y la Potencia es igual a α