Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2 y 3

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía Nº3: Equivalencias, Existencia de Solución

1 – Equivalencias 1:

Considerando el siguiente problema. ¿Es posible convertirlo a un problema lineal?

$$Max:\prod_{i=1}^{3} e^{-0.5\{|x-x_i|+|y-y_i|\}}$$
$$s.a: \min\{x-2, y-1\} \geq 2$$

Hint: Un problema lineal es aquel que tanto la función objetivo como las restricciones del dominio son lineales en las variables.

Respuesta:

Aplicando $g(z)=\ln(z)$, ya que $g(z)$ está definida para valores positivo y es estrictamente creciente para $z=\prod_{i=1}^{3} e^{-0.5\{|x-x_i|+|y-y_i|\}}>0$ se tiene:

$$Max:\sum_{i=1}^{3} -0.5\left[|x-x_i|+|y-y_i|\right] \qquad \Rightarrow \qquad Min:\sum_{i=1}^{3}\left[|x-x_i|+|y-y_i|\right]$$
$$s.a: \min\{x-2, y-1\} \geq 2$$

Luego:

$$Min:\sum_{i=1}^{3}[\mu_i+\eta_i]$$
$$s.a:$$
$$\min\{x-2, y-1\} \geq 2$$
$$\left.\begin{array}{l}|x-x_i| \leq \mu_i \\ |y-y_i| \leq \eta_i\end{array}\right\} \forall i=1,..,3$$

Y por último:

$$
\begin{aligned}
&Min: \sum_{i=1}^{3}[\mu_i + \eta_i] \\
&s.a: \\
&\quad x - 2 \geq 2 \\
&\quad \text{y} - 1 \geq 2 \\
&\quad \left.\begin{aligned} x - x_i &\leq \mu_i \\ x - x_i &\geq -\mu_i \\ y - y_i &\leq \eta_i \\ y - y_i &\geq -\eta_i \end{aligned}\right\} \forall i = 1,..,3
\end{aligned}
$$

Luego se tiene un problema lineal...

2 – Equivalencias 2:

Escriba el siguiente problema de optimización como uno equivalente que sea absolutamente diferenciable:

$$
\text{P)} \quad \begin{aligned} &Max \ \sqrt{\min\{|x+y|, x^2+5\} + 3y^4} \\ &s.a. \\ &x^3 + 4y \geq 7 \end{aligned}
$$

Hint: Un problema diferenciable es aquel en donde la función objetivo es diferenciable para cualquier solución factible del dominio.

Respuesta:

Aplicando $g(z) = (z)^2$, ya que $g(z)$ es estrictamente creciente para $z = \sqrt{\min\{|x+y|, x^2+5\} + 3y^4} \geq 0$ se tiene:

$$
\text{P}^1) \quad \begin{aligned} &Max \ \min\{|x+y|, x^2+5\} + 3y^4 \\ &s.a. \\ &x^3 + 4y \geq 7 \end{aligned}
$$

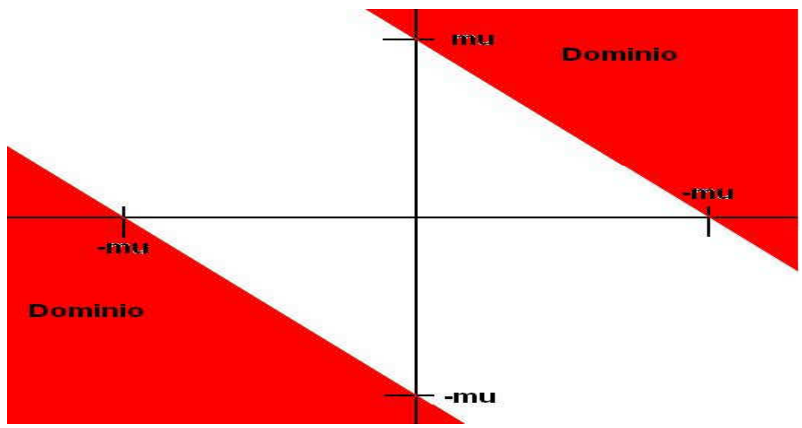
Agregando variables auxiliares, nos queda:

$$\text{P}^2) \quad \begin{aligned} & Max\ \mu_1 + \mu_2 \\ & s.a. \\ & |x+y| \geq \mu_1 \quad (*) \\ & x^2 + 5 \geq \mu_1 \\ & 3y^4 \geq \mu_2 \\ & x^3 + 4y \geq 7 \end{aligned}$$

Analicemos la restricción (*): $|x+y| \geq \mu_1 \quad \Leftrightarrow \quad x+y \geq \mu_1$ ó $(x+y) \leq -\mu_1$

La restricción nos dice que el dominio se separa en dos subconjuntos. Es decir no es diferenciable en los bordes (Dominio no convexo). → Lo que nos piden no es posible.

Gráficamente:

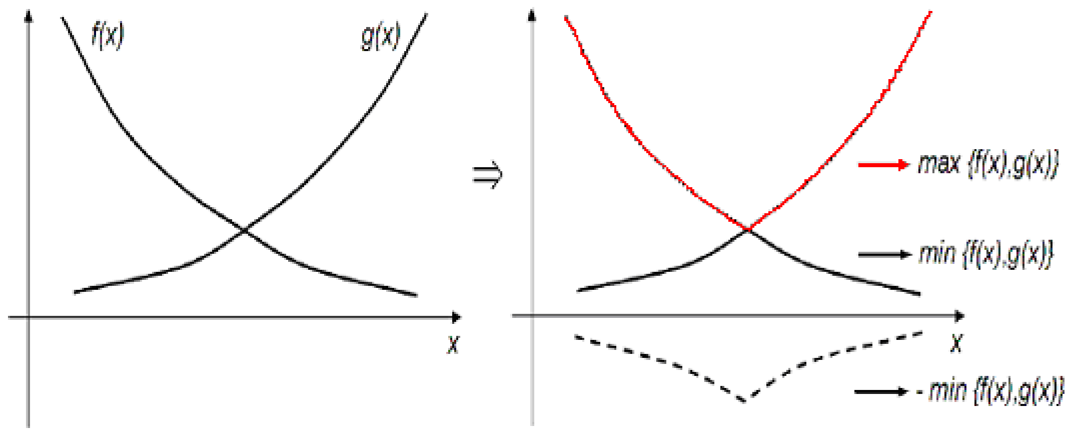


3 – Equivalencias 3

Comente la veracidad o falsedad de esta afirmación: $-\min\{f(x), g(x)\} = \max\{f(x), g(x)\}$

Hint: Considere siempre que min y max con minúscula se refieren a funciones mínimo y máximo respectivamente.

Respuesta:
La afirmación es FALSA. Pensemos en el siguiente ejemplo:



Claramente las dos funciones son distintas. También se puede mostrar con dos funciones algebraicas y mostrar que por lo menos en un punto las dos difieren.

4 – Equivalencias 4

Demostrar que $Min\left\{\max\left[\left(x^4-y^2\right)^{-1};\left(|x|+|y|\right)^{-1}\right]\right\}$ es equivalente a $Max\left\{\min\left[x^4-y^2;|x|+|y|\right]\right\}$

Respuesta:

$$Min\left\{\max\left[\left(x^4-y^2\right)^{-1};\left(|x|+|y|\right)^{-1}\right]\right\}$$

es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&Min\ \mu\\
&s.a.\\
&\mu \ge \left(x^4-y^2\right)^{-1}\\
&\mu \ge \left(|x|+|y|\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Como $\mu \ge 0$, ya que $\mu \ge \dfrac{1}{\underbrace{\left(x^4-y^2\right)}_{\ge 0}} \ge 0$ → aplicamos a la función objetivo la transformación $g(z) = -1/z$ creciente en $z \ge 0$ y se tiene que:

$$\begin{aligned}
&Min\ \text{-}1/\mu \qquad \Rightarrow \qquad Max\ 1/\mu\\
&s.a.\\
&1/\mu \le \left(x^4-y^2\right)\\
&1/\mu \le \left(|x|+|y|\right)
\end{aligned}$$

Usando un cambio de variable: $\lambda = 1/\mu$:

$$\begin{aligned}
&Max\ \lambda\\
&s.a.\\
&\lambda \le \left(x^4-y^2\right)\\
&\iota \le \left(|x|+|y|\right)
\end{aligned}$$

Y esto es equivalente a:

$$Max\left\{\min\left[x^4-y^2;|x|+|y|\right]\right\}$$

Q.E.D.

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN:

Supongamos un problema P): $Min: f\left(\overrightarrow{X}\right)\ s.a.\ \overrightarrow{X} \in \Omega$

TEOREMA DE EXISTENCIA DE SOLUCIÓN:

Si se cumple en P) que:

1) $f\left(\overrightarrow{X}\right)$ es continua en Ω

→ "$f\left(\overrightarrow{X}\right) \neq \pm\infty$ *con* $\overrightarrow{X}$ *finito*"

2) Ω cerrado (Sólo restricciones del tipo $\leq\ \geq$ ó $=$)

→ "*Ω contiene sus bordes*"

3) Ω no vacío

→ "*Existen soluciones factibles*".

4) Ω acotado ó $\lim\limits_{\left\|\overrightarrow{X}\right\| \to \infty} f\left(\overrightarrow{X}\right) = \infty$ con $X \in \Omega$.

→ "$f\left(\overrightarrow{X}\right)$ *no se minimiza infinitamente, existe cota inferior de* $f\left(\overrightarrow{X}\right)$"

Entonces el **problema admite solución óptima.** (No garantiza unicidad de solución, sólo que existe)

5 - Existencia 1:

Sea el siguiente problema de optimización:

P) $Min\ z(x,y) = x^2 + \cos(\ln(\sqrt{x}+10)) + e^y$

s.a.

$y^2 \leq x$

$x \leq 6 - sen(y)$

$y \geq 4 - 2x$

Demuestre la existencia de solución óptima del problema

Respuesta:

1. Función objetivo continua:

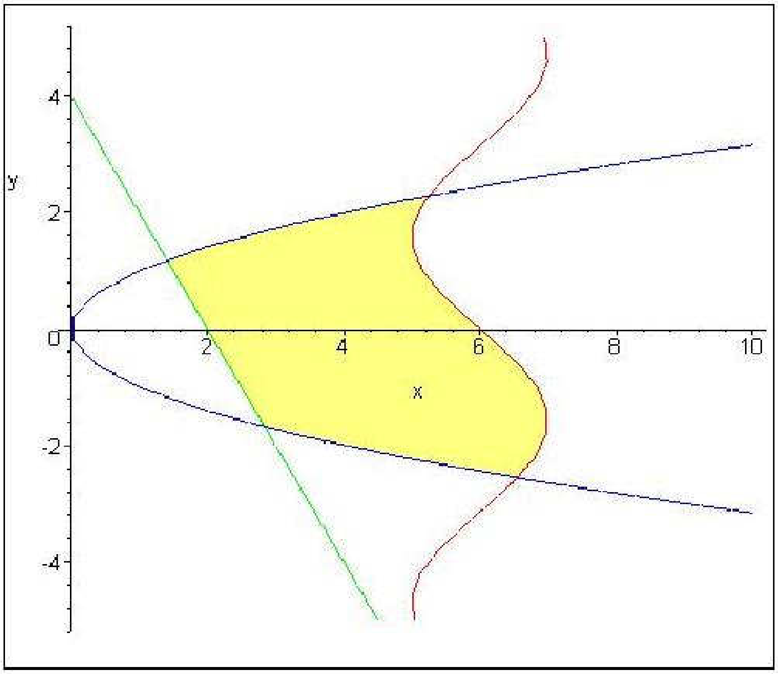
$$Min\ \underbrace{x^2}_{cont.} + \underbrace{\cos(\underbrace{\ln(\underbrace{\sqrt{x}}_{cont.\ si\ x\geq 0}+10)}_{cont\ si\ \sqrt{x}+10>0})}_{cont.} + \underbrace{e^y}_{cont.}$$

2. Dominio cerrado:

Solo hay desigualdades no estrictas (del tipo $\geq, =, \leq$, y no > o <), por lo que el dominio es cerrado.

3. Dominio no vacío:

Para verificar que el dominio es no vacío y acotado será útil representarlo gráficamente:



No es dificil encontrar un punto perteneciente al dominio. Tomemos, por ejemplo, el punto (4,0). Verificando cada restricción:

→ $0 \leq 4$

→ $4 \leq 6$

→ $0 \geq -4$ → Con lo que se prueba que el dominio no es vacío.

4. Dominio acotado:

→Cotas para x:

$$x \geq y^2 \Rightarrow x \geq 0$$
$$x \leq 6 - sen(y) \Rightarrow x \leq 7$$

→Cotas para y:

$$\left.\begin{matrix} x \geq y^2 \\ x \leq 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2 \leq 5 \Rightarrow |y| \leq \sqrt{7},$$
$$\therefore -\sqrt{7} \leq y \leq \sqrt{7}$$

Con lo que se demuestra que el domino es acotado.

Como el problema cumple las cuatro condiciones de existencia, se puede concluir que el <u>problema tiene solución óptima.</u>

6 - Existencia 2:

¿Tiene solución óptima el siguiente problema?

$$Min: -xy - yz - xz$$
$$s.a.$$
$$x + y + z = 0 \ (1)$$

Respuesta:

1. Función objetivo continua, ya que corresponde a una suma de polinomios.
2. Dominio cerrado: Solo hay una igualdad.
3. Dominio no vacío: P.ej. : (0,0,0) es factible
4. El dominio claramente no es acotado. Hay que ver que pasa cuando $\lim_{\|X\| \to \infty} f(X) = \infty$.

Tomamos coordenadas cilíndricas: $x = r\cos(\theta) \wedge y = rsen(\theta)$. Esto hace que de (1) se defina: $z = -r(sen(\theta) + \cos(\theta))$.

Luego el problema es equivalente a:

$$Min: -r^2 \cos(\theta) sen(\theta) - rsen(\theta)(-r(\cos(\theta) + sen(\theta))) - r\cos(\theta)(-r(\cos(\theta) + sen(\theta)))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Min: -r^2 \cos(\theta) sen(\theta) + r^2 sen(\theta)\cos(\theta) + r^2 sen^2(\theta) + r^2 \cos(\theta) sen(\theta) + r^2 \cos^2(\theta)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Min: r^2 sen(\theta)\cos(\theta) + r^2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$Min: r^2 \underbrace{(sen(\theta)\cos(\theta) + 1)}_{>0}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{r \to \infty} Min: r^2 \underbrace{(sen(\theta)\cos(\theta) + 1)}_{>0} \to \infty$$

La función no se minimiza "eternamente" → **Tiene solución óptima.**

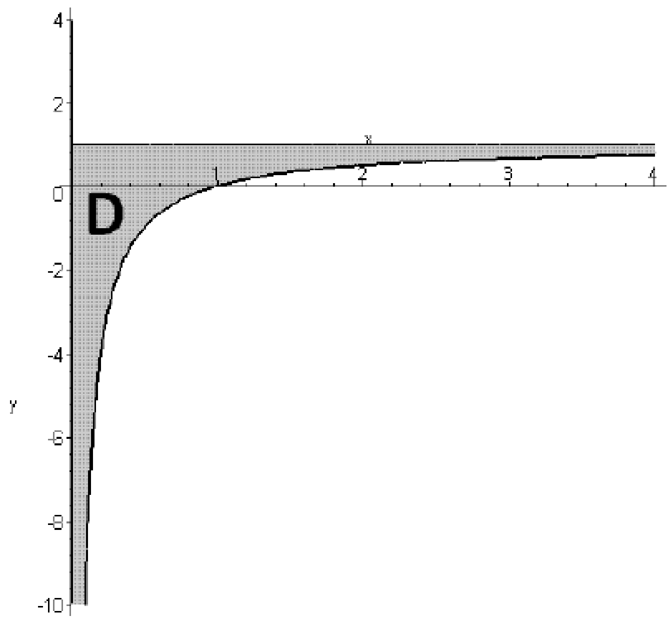
7- Existencia 3

¿Tiene solución óptima el siguiente problema?

$$
\begin{aligned}
&Min: y\left(x^2 - y^2\right) \\
&s.a. \\
&y \le 1 \\
&x \ge 0 \\
&x(1-y) \le 1
\end{aligned}
$$

Respuesta:

Graficando el dominio podemos observar lo siguiente:



1. Función objetivo continua, ya que corresponde a una suma de polinomios.
2. Dominio cerrado: Solo hay desigualdades irrestrictas.
3. Dominio no vacío: P.ej. : (0,0) es factible
4. El dominio claramente no es acotado. Hay que ver que pasa cuando $\lim_{\|X\| \to \infty} f(X) = \infty$.

Este caso es más fácil que el anterior, ya que hay sólo 2 posibles puntos en donde el dominio es no acotado (sólo hay 2 rayos de escape).

→ Estos puntos son: $(\infty, 1) \wedge (-\infty, 0)$

Por un lado se tiene que: $\lim_{x \to \infty, y \to 1} y\left(x^2 - y^2\right) = \infty$, lo que satisface el teorema de existencia.

Por el otro lado se tiene que: $\lim_{x \to 0, y \to -\infty} y\left(x^2 - y^2\right) = \infty$, por lo que también se cumple.

Luego existe solución óptima, ya que se cumple el Teorema de Existencia.