

# EYP1113 - Probabilidad y Estadística

## Capítulo 3: Modelos analíticos de fenómenos aleatorios

Ricardo Aravena C.    Ricardo Olea O.

Departamento de Estadística  
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2014

Probability Concepts in Engineering

Alfredo H-S. Ang<sup>†</sup> and Wilson H. Tang<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> University of Illinois at Urbana-Champaign and University of California, Irvine

<sup>‡</sup> Hong Kong University of Science & Technology



# Contenido I

- 1 Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad
  - Eventos Aleatorios y Variables Aleatorias
  - Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria
  - Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias
- 2 Distribuciones de Probabilidad
  - Distribución Normal
  - Distribución Log-Normal
  - Distribución Binomial y Bernoulli
  - Distribución Geométrica
  - Distribución Binomial Negativa
  - El Proceso de Poisson y la Distribución de Poisson
  - Distribución Exponencial
  - Distribución Gamma
  - Distribución Hipergeométrica
  - Distribución Beta

# Contenido II

## 3 Múltiples Variables Aleatorias

- Distribución de Probabilidad Conjunta y Condicional
- Distribuciones Marginales y Condicionales
- Covarianza y Correlación

## 4 Esperanza Condicional y Predicción

- Definiciones y Ejemplos
- Predicción

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

Ya vimos los conceptos fundamentales y las herramientas referidas a la ocurrencia de fenómenos aleatorios y la determinación de las probabilidades asociadas.

Ahora, introduciremos modelos analíticos que involucran:

## **Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad**

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Eventos Aleatorios y Variables Aleatorias

Una variable aleatoria es el vehículo matemático para representar un evento en términos analíticos.

El valor de una variable aleatoria puede estar definida para un conjunto de posibles valores.

Si  $X$  es una variable aleatoria, entonces

$$X = x, \quad X < x, \quad X > x$$

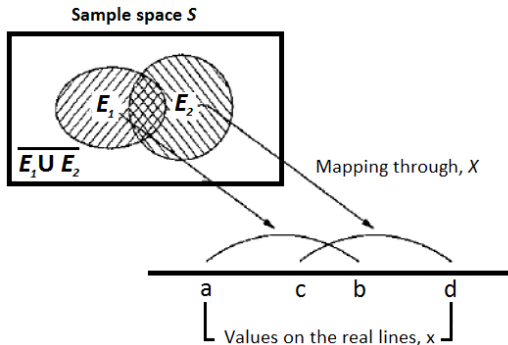
representa un evento, donde  $(a < x < b)$  es el rango de valores posibles de  $X$ .

La asignación numérica puede ser natural o artificial.

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Eventos Aleatorios y Variables Aleatorias

Formalmente, una variable aleatoria puede ser considerada como una función o regla sobre los eventos del espacio muestral a un sistema numérico (o línea real).



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Eventos Aleatorios y Variables Aleatorias

Así, los eventos  $E_1$  y  $E_2$  pueden corresponder a

$$E_1 = (a < X \leq b)$$

$$E_2 = (c < X \leq d)$$

$$\overline{E_1 \cup E_2} = (X \leq a) \cup (X > d)$$

$$E_1 \cap E_2 = (c < X \leq b)$$

Una variable aleatoria puede ser discreta o continua.

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

Para los valores o rango de valores que puede tomar una variable aleatoria tienen asociados una probabilidad específica o medidas de probabilidad.

La regla que asigna las medidas de probabilidad se denomina:

**“Distribución ó Ley de probabilidad”**



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

Si  $X$  es variable aleatoria, la distribución de probabilidad puede ser descrita por su función de distribución de probabilidad acumulada denotada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Si  $X$  es variable aleatoria discreta, entonces esta función puede ser expresada a través de la función de probabilidad “puntual” denotada por

$$p_X(x) = P(X = x)$$

Así,

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_X(x_i),$$

con  $x_i \in \Theta_X$  (soporte de  $X$ ).

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

Ahora, si  $X$  es variable aleatoria continua, las probabilidades están asociadas a intervalos de  $x$ .

En este caso se define la función de densidad  $f_X(x)$  tal que

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (1)$$

y

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

con

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

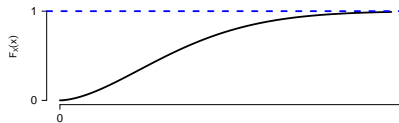
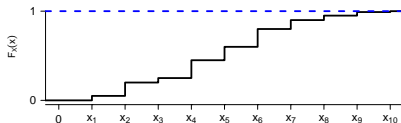
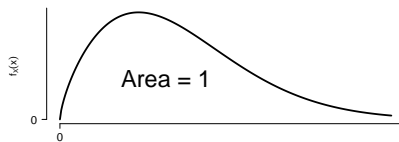
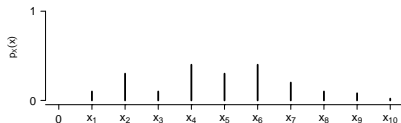
Notar que

$$P(x < X \leq x + dx) = f_X(x) dx$$

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

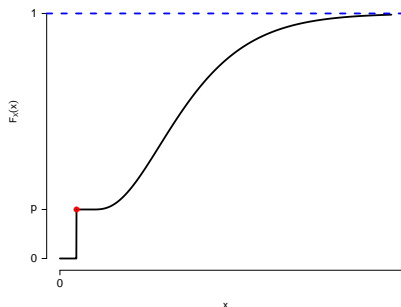
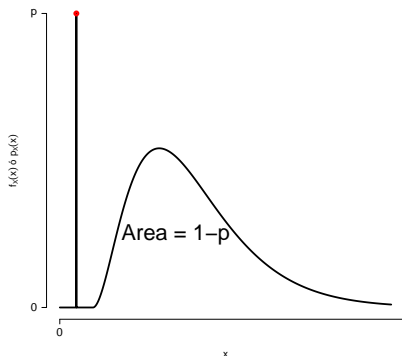
### Caso Discreto y Continuo



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

### Caso Mixto



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

### Propiedades

- ①  $F_X(-\infty) = 0$  y  $F_X(\infty) = 1$ .
- ②  $F_X(x) \geq 0$  para todo valor de  $x$  y es no decreciente.
- ③  $F_X(x)$  es continua por la derecha

Para el caso continuo, la ecuación (1) la podemos escribir como

$$P(a < X \leq b) = \int_{-\infty}^b f_X(x) dx - \int_{-\infty}^a f_X(x) dx$$

mientras que en el caso discreto

$$P(a < X \leq b) = \sum_{x_i \leq b} p_X(x_i) - \sum_{x_i \leq a} p_X(x_i)$$

es decir, para ambos casos

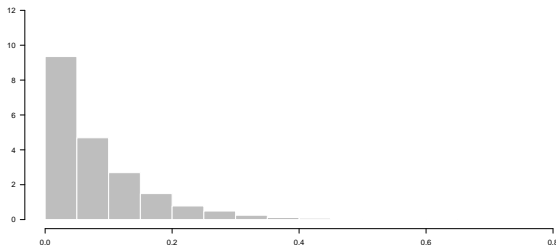
$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

**Ejemplo 3.1** Sea  $X$  la variable aleatoria cuyos valores representan el tiempo entre sismos ocurridos en nuestro país.

Tiempo en Horas



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

Este comportamiento puede ser descrito con una distribución cuya función de densidad es de la siguiente forma:

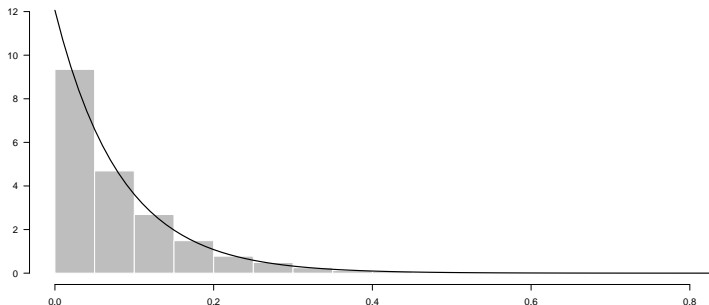
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en que  $\lambda$  es una constante positiva. Esta distribución se conoce como distribución **Exponencial**.

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

Tiempo en Horas

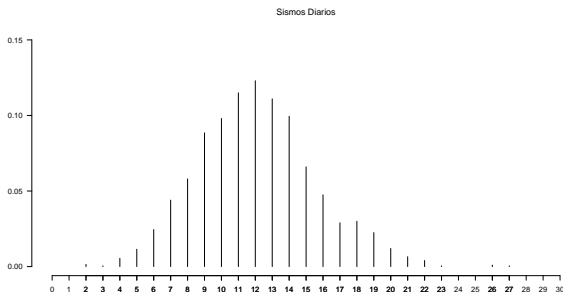




# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

**Ejemplo 3.2** Sea  $Y$  la variable aleatoria cuyos valores representan el número de sismos diarios ocurridos en nuestro país.



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

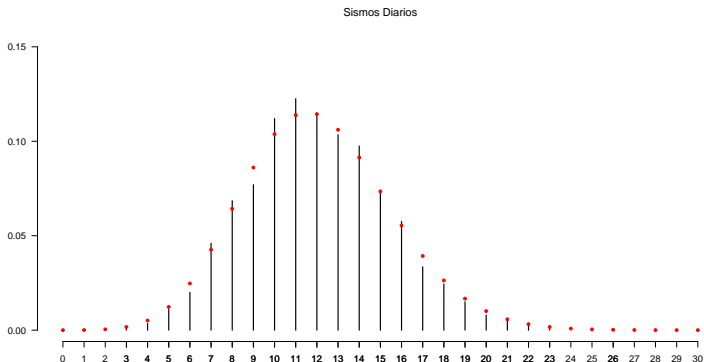
Este comportamiento puede ser descrito con una distribución cuya función de probabilidad es de la siguiente forma:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}, & y \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en que  $\lambda$  es una constante positiva. Esta distribución se conoce como distribución **Poisson**.

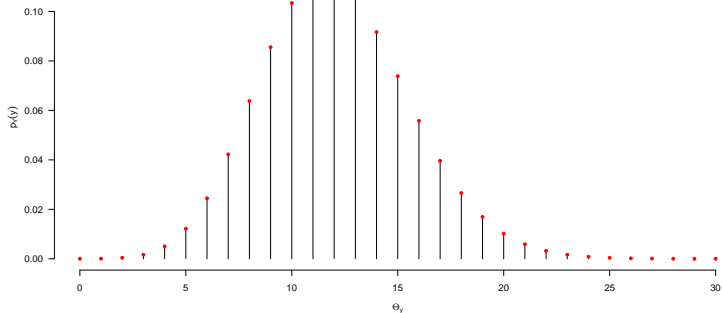
# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria



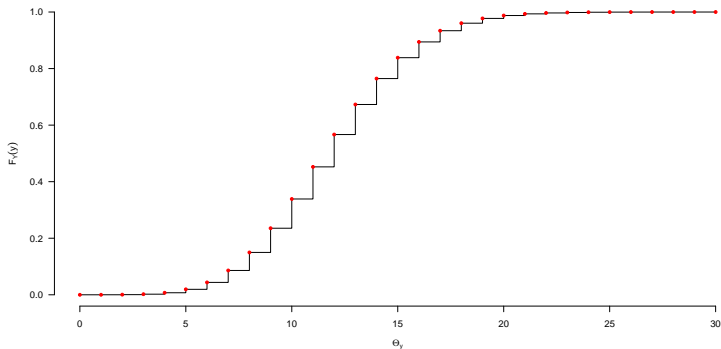
# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

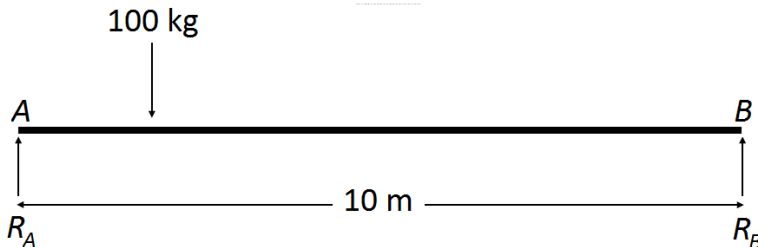
## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

**Ejemplo 3.3** Considere la carga ejercida de 100 kg sobre un punto al azar de una viga de largo 10 m (Ver figura). La distribución de probabilidad de la posición de carga  $X$  distribuye Uniforme(0, 10).



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Distribución de Probabilidades de una Variable Aleatoria

### Ejemplo 3.3

Cuya función densidad es constante en el intervalo  $[0, 10]$  y cero en otro caso:

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq 10 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Mientras que su función de distribución acumulada esta dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{10}, & 0 \leq x < 10 \\ 1, & x \geq 10 \end{cases}$$

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

Una variable aleatoria puede ser descrita totalmente por su **función de distribución de probabilidad o de densidad**, o bien por su **función de distribución de probabilidad acumulada**.

Sin embargo, en la práctica la forma exacta puede no ser totalmente conocida.

En tales casos se requieren ciertas “medidas” para tener una idea de la forma de la distribución:

- Medidas Centrales.
- Medidas de Dispersión.
- Medidas de Asimetrías y otras.



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### Valores Centrales

En el rango de posibles valores de una variable aleatoria, existe un interés natural con respecto a los valores centrales, por ejemplo, el promedio.

Consideremos una variable aleatoria  $X$  con soporte  $\Theta_X$ .

Como cada valor de  $\Theta_X$  tiene una medida de probabilidad, el **promedio ponderado** es de especial interés.

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### Valores Centrales

A el promedio ponderado se le llama también **valor medio** o **valor esperado** de la variable aleatoria  $X$ .

Para una variable aleatoria  $X$  se define el valor esperado,  $\mu_X$ , como:

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \sum_{x \in \Theta_X} x \cdot p_X(x), & \text{Caso Discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx, & \text{Caso Continuo} \end{cases}$$

Este valor existe siempre y cuando

$$\sum_{x \in \Theta_X} |x| \cdot p_X(x) < \infty \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) dx < \infty$$

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

Otras medidas de centralidad corresponden:

- **La Moda:** Valor más frecuente o con mayor probabilidad.
- **La Mediana:** Sea  $x_{\text{med}}$  el valor que toma la mediana, entonces:

$$F_X(x_{\text{med}}) = 1/2$$

En resumen, el valor esperado de una variable aleatoria es un valor promedio que puede ser visto como un indicador del valor central de la distribución de probabilidad, por esta razón se considera como un parámetro de localización.

Por otra parte, la mediana y la moda de una distribución también son parámetros de localización que no necesariamente son iguales a la media.

Cuando la distribución es simétrica, estas tres medidas son parecidas.

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### Esperanza matemática

La noción del valor esperado como un promedio ponderado puede ser generalizado para funciones de la variable aleatoria  $X$ .

Dada una función  $g(X)$ , entonces el valor esperado de esta puede ser obtenido como:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{x \in \Theta_X} g(x) \cdot p_X(x), & \text{Caso Discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx, & \text{Caso Continuo} \end{cases}$$

**Nota:** La demostración de este resultado se realizará durante el desarrollo del capítulo 4.

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### **Función Generadora de Momentos** [Rice, 1995 (pág 142 - 144)]

La función generadora de momentos de una variable aleatoria  $X$  se define como

$$M_X(t) = E[\exp(t X)]$$

Esta función puede no estar definida para algunos valores de  $t$ , pero si existe en un intervalo abierto que contenga al cero, entonces esta función tiene la propiedad de determinar la distribución de probabilidad de  $X$ .

Cuando esto último ocurra, esta función permite obtener el  $r$ -ésimo momento de  $X$  de la siguiente forma

$$M^{(r)}(0) = E(X^r)$$

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### Medidas de dispersión

Es de interés cuantificar el nivel de dispersión que tienen una variable aleatoria con respecto a un valor de referencia.

Por ejemplo, nos podría interesar la distancia esperada de los valores de una variable aleatoria  $X$  con respecto al valor esperado  $\mu_X$ , es decir,  $E[(X - \mu_X)]$ .

Esta idea de dispersión tiene el problema que siempre da como resultado cero.

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### Medidas de dispersión

Una alternativa es utilizar la definición de varianza:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2] \\ &= \begin{cases} \sum_{x \in \Theta_X} (x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x), & \text{Caso Discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx, & \text{Caso Continuo} \end{cases}\end{aligned}$$

**Ejercicio:** Mostrar que  $\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$ .

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

En términos de dimensionalidad, es conveniente utilizar la desviación estandar, es decir,

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Ahora, si  $\mu_X > 0$ , una medida adimensional de la variabilidad es el coeficiente de variación (c.o.v)

$$\delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$



# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### Ejemplo 3.4

Valor Esperado, Mediana, Varianza y c.o.v. del modelo propuesto en el Ejemplo 3.1

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### Ejemplo 3.5

Obtenga el Valor Esperado y Varianza del modelo propuesto en el Ejemplo 3.2

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### Medida de asimetría

Se define una medida de asimetría (skewness) corresponde al tercer momento central:

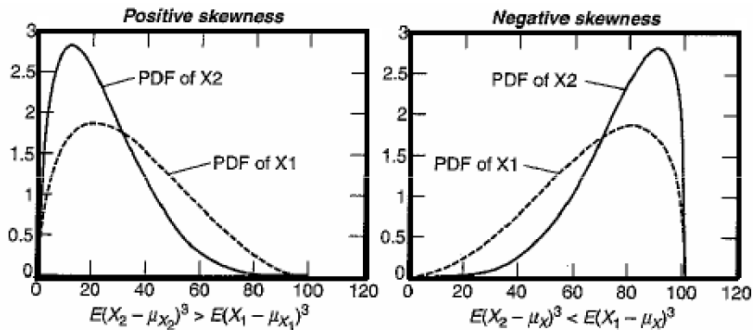
$$E[(X - \mu_X)^3] = \begin{cases} \sum_{x_i \in \Theta_X} (x_i - \mu_X)^3 \cdot p_X(x_i), & \text{Caso Discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^3 \cdot f_X(x) dx, & \text{Caso Continuo} \end{cases}$$

Una medida conveniente es el coeficiente de asimetría que se define como:

$$\theta_X = \frac{E[(X - \mu_X)^3]}{\sigma_X^3}$$

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias



**Figure 3.3** Properties of asymmetric PDFs.

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

**Ejemplo 3.6** El tiempo  $T$  entre sismos vimos que se comportan como una variable aleatoria Exponencial (Ejemplo 3.1).

Si el tiempo medio es  $\mu_T$ , muestre que el tercer momento central es

$$E[(T - \mu_T)^3] = 2 \mu_T^3$$

y que el coeficiente de asimetría es

$$\theta_T = 2$$

# Variables Aleatorias y Distribución de Probabilidad

## Medidas Descriptivas de Variables Aleatorias

### Medida de kurtosis

Finalmente, el cuarto momento central se conoce como la kurtosis

$$E[(X - \mu_X)^4] = \begin{cases} \sum_{x_i \in \Theta_X} (x_i - \mu_X)^4 \cdot p_X(x_i), & \text{Caso Discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^4 \cdot f_X(x) dx, & \text{Caso Continuo} \end{cases}$$

que es una medida del “apuntamiento” o “achataamiento” de la distribución de probabilidad o de densidad.

Usualmente se prefiere el coeficiente de kurtosis

$$K_X = \frac{E[(X - \mu_X)^4]}{\sigma_X^4} - 3$$

# Distribuciones de Probabilidad

Teóricamente, cualquier función que satisfaga las condiciones descritas puede ser utilizada para representar una distribución de probabilidad o de densidad de una variable aleatoria, sin embargo, nos interesan algunas funciones que satisfacen:

- La función es resultado de un proceso físico o puede ser derivada bajo ciertos supuestos.
- La función es resultado de algunos procesos límites
- Es ampliamente conocida, y la información esta disponible.
- Distribución de probabilidad, medidas de descripción, etc.

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

En estadística y probabilidad se llama distribución normal, distribución de Gauss o distribución gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece en fenómenos reales.

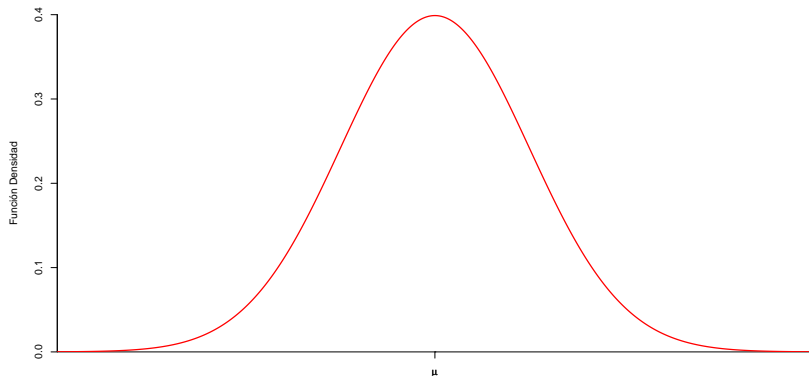
La distribución normal fue reconocida por primera vez por el francés **Abraham de Moivre** (1667-1754), en un artículo de 1733 donde relaciona la distribución normal y la binomial.

Posteriormente, el matemático alemán **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855) elaboró desarrollos más profundos y formuló la ecuación de la curva; de ahí que asimismo se la conozca, más comúnmente, como campana de Gauss.



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

Muchos fenómenos que encontramos en la naturaleza se miden mediante variables cuya distribución, naturalmente, tienden a formar una campana de Gauss. Además, muchas variables aleatorias continuas presentan una función de densidad cuya gráfica tiene dicha forma.

Finalmente, varios procedimientos estadísticos usados habitualmente asumen la normalidad de los datos observados.

La importancia de esta distribución radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales, sociales y psicológicos.

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

La función densidad de una variable aleatoria  $X$  con distribución Normal( $\mu, \sigma$ ) es de la forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad -\infty < x < \infty$$

con  $\mu$  parámetro de localización y  $\sigma$  un parámetro de escala o forma tales que:

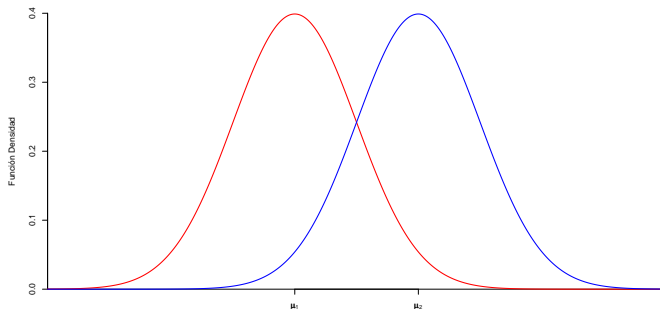
$$-\infty < \mu < \infty, \quad 0 < \sigma < \infty$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

Los dos parámetros:  $\mu$  y  $\sigma$ , permiten describir diferentes distribuciones normales.

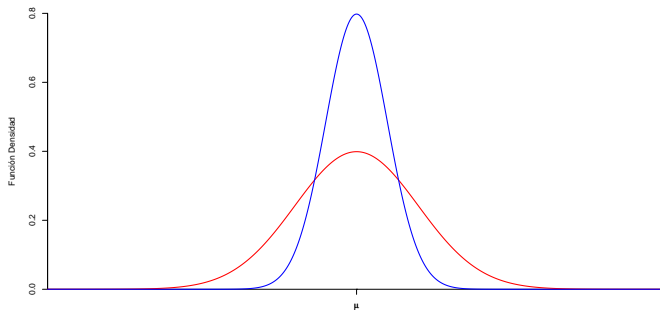
### Efecto del parámetro $\mu$



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

### Efecto del parámetro $\sigma$



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

Un caso especial es cuando  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$ . Este caso es conocido como la distribución normal estándar.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

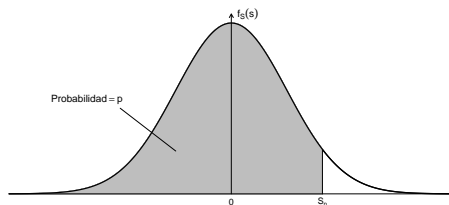
La ventaja es que función de distribución de probabilidad acumulada se encuentra tabulada, la cual se denota por  $\Phi(\cdot)$ .

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

Sea  $S$  una variable aleatoria con distribución normal estándar, cuya función de distribución de probabilidad acumulada esta dada por

$$\Phi(s) = F_S(s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$



**Propiedades:**  $S_p = \Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1 - p)$  y  $\Phi(-s) = 1 - \Phi(s)$ .

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

**Tabla Normal Estándar:** Resultado de  $\Phi(S_p) = p$ , para  $S_p \geq 0$

$S_p$	Segunda cifra decimal									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

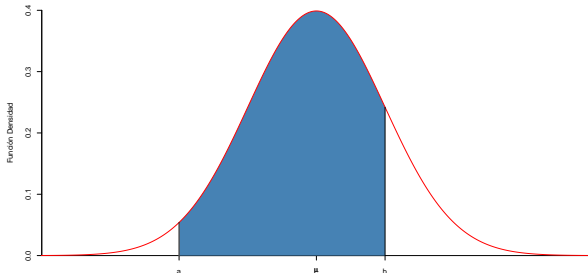


# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

Sea  $X$  una variable aleatoria Normal( $\mu, \sigma$ ) con función de distribución acumulada  $F_X$ . Para dos valores dados  $a$  y  $b$  (con  $a < b$ ) se tiene que:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

**Ejercicio** Si  $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma)$ , muestre que:

- ①  $E(X) = \mu$ .
- ②  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .
- ③  $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ .

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Normal

**Ejemplo 3.9** Durante una tormenta el drenaje de una comunidad se comporta como una variable aleatoria Normal con una media y desviación estándar estimada de 1.2 y 0.4 millones de galones diarios (mgd) respectivamente.

- (a) Si el sistema de drenaje de aguas pluviales fue diseñado para soportar una capacidad máxima de 1.5 mgd. ¿Cuál es la probabilidad que el sistema colapse?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad que el sistema deba soportar un drenaje entre 1.0 y 1.6 mgd?
- (c) ¿Cuál es la carga de agua durante una tormenta que soporta el sistema de drenaje correspondiente al percentil 90?

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Log-Normal

Se dice que  $X$  sigue una ley de probabilidad Log-Normal si su función de densidad esta dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\zeta x)} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \lambda}{\zeta} \right)^2 \right], \quad x \geq 0.$$

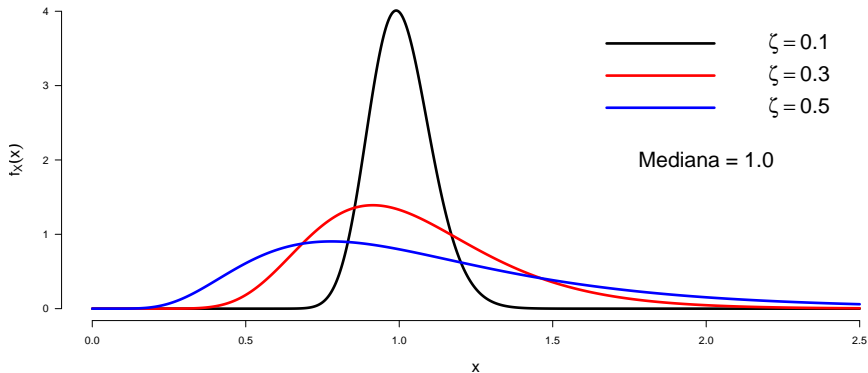
Donde,

$$\lambda = E(\ln X) \quad \text{y} \quad \zeta = \sqrt{\text{Var}(\ln X)}$$

**Propiedad:**  $\ln X \sim \text{Normal}(\lambda, \zeta)$  (Demostración en el capítulo 4)

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Log-Normal



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Log-Normal

### Ejercicio

Sea  $X \sim \text{Log-Normal}(\lambda, \zeta)$ , obtenga su valor esperado, mediana y varianza.

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Log-Normal

**Ejemplo 3.12** Considere ahora que la distribución del drenaje se comporta como una variable aleatoria Log-Normal en vez de Normal.

- (a) Si el sistema de drenaje de aguas pluviales fue diseñado para soportar una capacidad máxima de 1.5 mgd. ¿Cuál es la probabilidad que el sistema colapse?
- (b) ¿Cuál es la probabilidad que el sistema deba soportar un drenaje entre 1.0 y 1.6 mgd?
- (c) ¿Cuál es la carga de agua durante una tormenta que soporta el sistema de drenaje correspondiente al percentil 90?

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Binomial y Bernoulli

En las más diversas áreas de la Ingeniería, a menudo los problemas involucran la ocurrencia o recurrencia de un evento, el cual es impredecible, como una secuencia de “experimentos”.

### Ejemplos:

- ① Para un día de lluvia, ¿colapsa o no un sistema de drenaje?
- ② Al comprar un producto, ¿éste satisface o no los requerimientos de calidad?
- ③ Un alumno ¿aprueba o reprueba el curso?

Notar que hay sólo dos resultados posibles para cada “experimento”.



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Binomial y Bernoulli

Las variables descritas pueden ser modeladas por una secuencia Bernoulli, la cual se basa en los siguientes supuestos:

- ① Cada experimento, tiene una de dos opciones ocurrencia o no ocurrencia del evento.
- ② La probabilidad de ocurrencia del evento (“éxito”) en cada experimento es constante (digamos  $p$ ).
- ③ Los experimentos son estadísticamente independientes.

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Binomial y Bernoulli

Dada una secuencia Bernoulli, si  $X$  es el número de ocurrencias del evento éxito entre los  $n$  experimentos, con probabilidad de ocurrencia igual a  $p$ , entonces la probabilidad que ocurran exactamente  $x$  éxitos en los  $n$  experimentos esta representada por la distribución Binomial

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[x]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & 0 \leq x < n \\ 1, & x \geq n \end{cases}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Binomial y Bernoulli

El valor esperado y varianza están dados por:

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Binomial y Bernoulli

**Ejemplo 3.14** Cinco niveladoras se utilizan en la construcción de una carretera. Suponga que  $T$ , vida operacional de cada niveladora, se comporta como una variable aleatoria log-normal con media 1.500 hrs. y c.o.v. del 30%.

Asumiendo independencia entre las niveladoras, determine la probabilidad que:

- (a) exactamente dos presenten una falla en las primeras 900 hrs. de funcionamiento.
- (b) dos o más presenten fallas en las primeras 900 hrs.
- (c) a lo más dos presenten fallas en las primeras 900 hrs.

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Geométrica

Dada una secuencia Bernoulli, el número de experimentos hasta la ocurrencia del primer evento exitoso sigue una distribución geométrica.

Si el primer éxito ocurre en el  $n$ -ésimo experimento, los primeros  $n - 1$  fueron “fracasos”. Si  $N$  es la variable aleatoria que representa el número de experimentos hasta el primer éxito, entonces:

$$P(N = n) = p(1 - p)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Geométrica

La función distribución esta dada por:

$$F_N(n) = \sum_{k=1}^{[n]} p (1-p)^{k-1} = 1 - (1-p)^{[n]}$$

para  $n > 0$ .

Mientras que su valor esperado y varianza son:

$$E(N) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(N) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Geométrica

### Tiempo de recurrencia y periodo de retorno

En algunos problemas, el tiempo  $T$  (o espacio) es discretizado en intervalos,  $T = N$ , y puede ser modelado por secuencia Bernoulli.

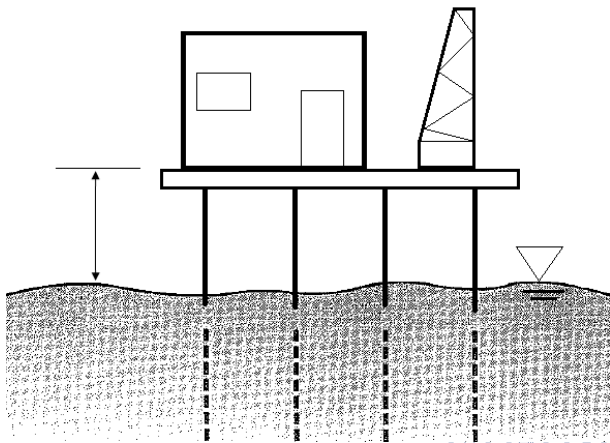
El número de intervalos ocurridos hasta observar el primer evento exitoso se denomina tiempo medio de recurrencia y corresponde al tiempo entre recurrencias. Este tiempo se conoce como periodo de retorno:

$$\bar{T} = E(T) = \sum_{t=1}^{\infty} t p (1-p)^{t-1} = \frac{1}{p}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Geométrica

**Ejemplo 3.17** Una plataforma “costa afuera” es diseñada para soportar olas de hasta 8 metros sobre el nivel medio del mar (ver figura).





# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Geométrica

### Ejemplo 3.17

Una ola de estas característica tiene una probabilidad del 5% de ocurrencia por año.

Determine:

- El periodo de retorno.
- La probabilidad de observar una ola de estas características durante el período de retorno.
- Probabilidad que ocurra después del tercer año.
- Probabilidad que ocurra el 5° año, dado que no sucedió durante los primeros tres años.

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Binomial Negativa

La distribución geométrica permite modelar el numero de experimentos hasta la primera ocurrencia.

El numero de experimentos hasta la  $k$ -ésima ocurrencia de un éxito es modelada por la distribución binomial negativa.

$$P(T_k = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad x = k, k+1, k+2, \dots$$

$$E(T_k) = \frac{k}{p}, \quad \text{Var}(T_k) = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## El Proceso de Poisson y la Distribución de Poisson

Muchos problemas físicos de interés para ingenieros y científicos que implican las ocurrencias posibles de eventos en cualquier punto en el tiempo y/o en el espacio.

### Por ejemplo:

- Los terremotos pueden ocurrir en cualquier momento y en cualquier lugar en una región con actividad sísmica en el mundo.
- Las grietas por fatiga puede producirse en cualquier punto de una soldadura continua.
- Los accidentes de tráfico pueden suceder en cualquier momento en una autopista.

# Distribuciones de Probabilidad

## El Proceso de Poisson y la Distribución de Poisson

Este problema puede ser modelado como secuencia Bernoulli, dividiendo el tiempo o el espacio en pequeños intervalos “apropiados” tal que solo un evento puede ocurrir o no dentro de cada intervalo (Ensayo Bernoulli).

Sin embargo, si el evento puede ocurrir al azar en cualquier instante de tiempo (o en cualquier punto del espacio), esto puede ocurrir más de una vez en cualquier momento o intervalo de espacio.

En tal caso, las ocurrencias del evento puede ser más apropiado el modelo con un proceso de Poisson o la secuencia Poisson.

# Distribuciones de Probabilidad

## El Proceso de Poisson y la Distribución de Poisson

### Supuestos:

- Un evento puede ocurrir al azar y en cualquier instante de tiempo o en cualquier punto en el espacio.
- La ocurrencia(s) de un evento en un intervalo de tiempo dado (o espacio) es estadísticamente independiente a lo que ocurra en otros intervalos (o espacios) que no se solapan.
- La probabilidad de ocurrencia de un evento en un pequeño intervalo  $\Delta t$  es proporcional a  $\Delta t$ , y puede estar dada por  $\nu \Delta t$ , donde  $\nu$  es la tasa de incidencia media del evento (que se supone constante).
- La probabilidad de dos o más eventos en  $\Delta t$  es insignificante.

# Distribuciones de Probabilidad

## El Proceso de Poisson y la Distribución de Poisson

Bajo los supuestos anteriores, el número de eventos estadísticamente independientes en  $t$  (tiempo o espacio) esta regido por la función de probabilidad del modelo Poisson, donde la variable aleatoria  $X_t$ : número de eventos en el intervalo de tiempo  $(0, t)$ .

$$P(X_t = x) = \frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

donde  $\nu$  es la tasa de ocurrencia media por unidad de tiempo, es decir,

$$E(X_t) = \nu t$$

# Distribuciones de Probabilidad

## El Proceso de Poisson y la Distribución de Poisson

**Ejemplo 3.20** Los registros históricos de tormentas severas en una ciudad en los últimos 20 años indica que ha habido un promedio de cuatro tormentas de lluvia por año.

Suponiendo que las ocurrencias de lluvias se pueden modelar con un Proceso de Poisson.

Calcule la probabilidad el próximo año no presente tormentas de lluvias.

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Exponencial

En un Proceso de Poisson el tiempo transcurrido entre la ocurrencia de eventos puede ser descrito por una distribución exponencial.

Si  $T_1$  representa al tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del primer evento en un Proceso de Poisson, el evento  $(T_1 > t)$  implica que en el intervalo  $(0, t)$  no ocurren eventos, es decir,

$$P(T_1 > t) = P(X_t = 0) = \frac{(\nu t)^0 e^{-\nu t}}{0!} = e^{-\nu t},$$

con

$$X_t \sim \text{Poisson}(\nu t)$$



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Exponencial

Por lo tanto la función de distribución de probabilidad acumulada de  $T_1$  esta dada por:

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - e^{-\nu t}$$

Su función densidad se obtiene como sigue:

$$f_{T_1}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_1}(t) = \nu e^{-\nu t}$$

que corresponde a la función densidad de una variable aleatoria con distribución exponencial.

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Exponencial

Ya mostramos anteriormente que un variable aleatoria  $X$  con distribución Exponencial de parámetro  $\lambda > 0$ , tiene función densidad y de distribución:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Mientras que su valor esperado y varianza son:

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Exponencial

Una variable aleatoria  $X$  con distribución Exponencial de parámetro  $\lambda > 0$ , se llama trasladada en  $a$  si su función densidad y de distribución acumulada son

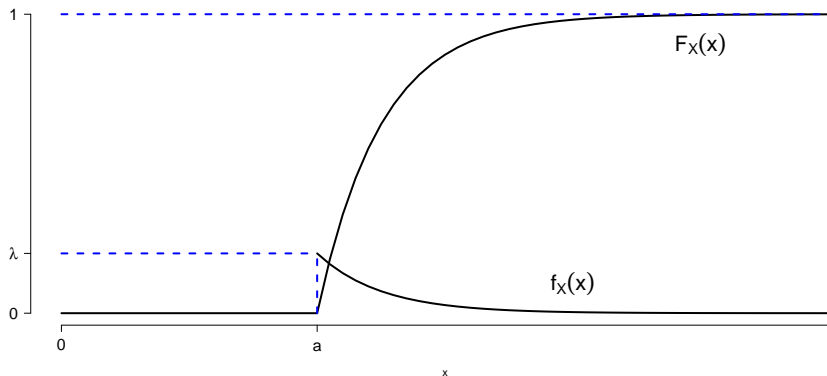
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1 - e^{-\lambda(x-a)}, & x \geq a \end{cases}$$

Su valor esperado y varianza están dados por

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda} + a, \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Exponencial



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Gamma

Una variable aleatoria  $X$  con distribución Gamma tiene función densidad

$$f_X(x) = \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\nu x}, \quad x \geq 0$$

donde  $k, \nu$  son parámetros positivos.

La función  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$ , la cual tiene las siguientes propiedades:

- $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$ .
- $\Gamma(n + 1) = n!$  si  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Gamma

### Relación con distribución Poisson

En un Proceso de Poisson el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del  $k$ -ésimo evento puede ser descrito por una distribución Gamma.

Si  $T_k$  representa al tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del  $k$ -ésimo evento en un Proceso de Poisson, el evento  $(T_k > t)$  implica que en el intervalo  $(0, t)$  ocurren a lo más  $k-1$  eventos, es decir,

$$P(T_k > t) = P(X_t \leq k-1) = \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Gamma

### Relación con distribución Poisson

Luego, su **función de distribución acumulada** esta dada por:

$$F_{T_k}(t) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \frac{(\nu t)^x e^{-\nu t}}{x!}$$

Se puede demostrar que

$$f_{T_k}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_k}(t) = \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-\nu t}, \quad t \geq 0$$

donde su valor esperado y varianza son

$$\mu_{T_k} = \frac{k}{\nu}, \quad \sigma_{T_k}^2 = \frac{k}{\nu^2}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Gamma

**Ejemplo 3.28** Supongamos que los accidentes mortales en una carretera particular se producen en promedio una vez cada 6 meses.

Si podemos suponer que la incidencia de los accidentes en esta carretera constituye un proceso de Poisson, con tasa de incidencia media de  $1/6$  accidentes por mes, el tiempo  $T_1$  hasta la aparición del primer accidente puede describirse como una variable aleatoria exponencial con función densidad:

$$f_{T_1}(t) = \frac{1}{6} e^{-t/6}$$



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Gamma

### Ejemplo 3.28

El tiempo  $T_2$  hasta la ocurrencia del segundo accidente puede describirse como una variable aleatoria Gamma con función de densidad:

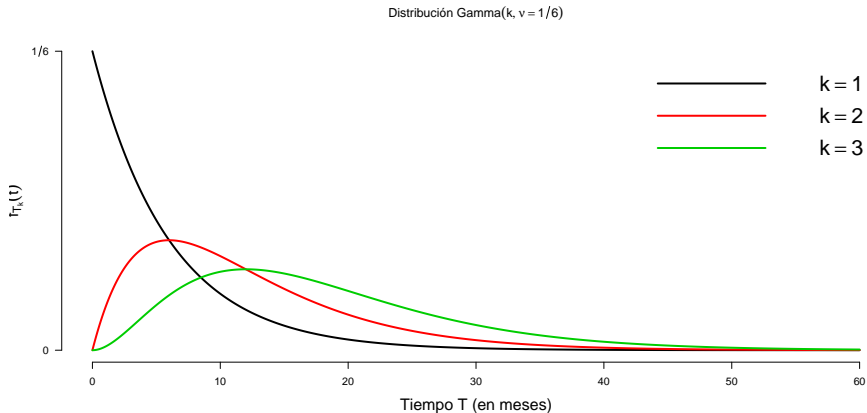
$$f_{T_2}(t) = \frac{(1/6)^2}{\Gamma(2)} t^{2-1} e^{-t/6}$$

Y el tiempo  $T_3$  hasta la ocurrencia del tercer accidente como una variable aleatoria Gamma con función de densidad:

$$f_{T_3}(t) = \frac{(1/6)^3}{\Gamma(3)} t^{3-1} e^{-t/6}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Gamma



# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Gamma

Una variable aleatoria  $X$  tiene **distribución Gamma trasladada** si su función de densidad esta dada por

$$f_X(x) = \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} (x - \gamma)^{k-1} e^{-\nu(x-\gamma)}, \quad x \geq \gamma$$

donde  $k$ ,  $\mu$  y  $\gamma$  son parámetros de la distribución.

Su valor esperado y varianza son:

$$\mu_X = \frac{k}{\nu} + \gamma, \quad \sigma_X^2 = \frac{k}{\nu^2}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Hipergeométrica

La distribución **Hipergeométrica** se produce cuando se estudia una muestra de una población finita la cual se puede está divida en dos grupos.

Considere un lote de tamaño  $N$ , de los  $m$  son defectuosos y  $N - m$  no defectuosos.

Si se toma una muestra aleatoria de tamaño  $n$  al azar, la probabilidad que  $x$  sean defectuosos esta dada por la función de probabilidad de la distribución hipergeométrica:

$$p_X(x) = \frac{\binom{m}{x} \binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max\{0, n + m - N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$$

con

$$X \sim \text{Hipergeométrica}(n, N, m)$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Hipergeométrica

El cálculo de su valor esperado y varianza requiere un desarrollo bastante complejo cuyo resultado final es el siguiente

$$\mu_X = n \cdot \frac{m}{N}, \quad \sigma_X^2 = \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \cdot n \cdot \frac{m}{N} \cdot \left( 1 - \frac{m}{N} \right)$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Hipergeométrica

**Ejemplo 3.30** En una caja de 100 medidores de tensión, se sospecha que puede haber cuatro que están defectuosos.

Si seis de los medidores de la caja se utilizaron en un experimento, la probabilidad de que un medidor defectuoso fuese usado se evalúa como siguiente.

Tenemos que

$$N = 100, \quad m = 4 \quad n = 6$$

Luego

$$P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{100 - 4}{6 - 1}}{\binom{100}{6}} = 0.205$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Beta

Una variable aleatoria  $X$  con **distribución Beta** tiene función densidad

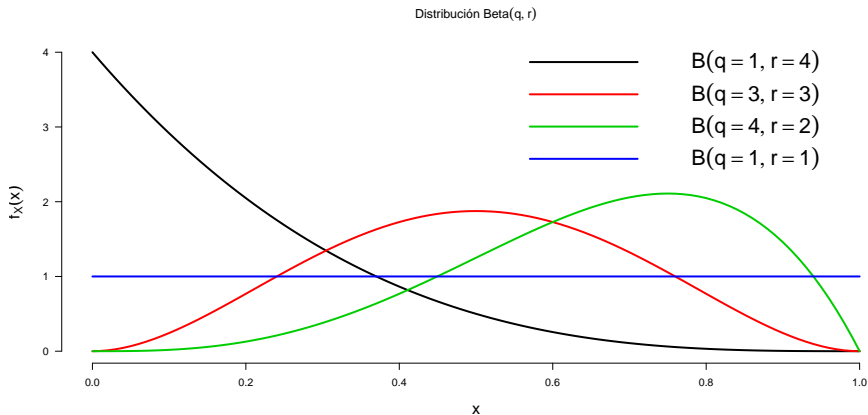
$$f_X(x) = \frac{1}{B(r, q)} \cdot \frac{(x-a)^{q-1} (b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}, \quad a \leq x \leq b$$

donde  $q$  y  $r$  son los parámetros de la distribución, y  $B(q, r)$  es la función beta dada por

$$B(q, r) = \int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{r-1} dx = \frac{\Gamma(q) \Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

# Distribuciones de Probabilidad

## Distribución Beta





# Múltiples Variables Aleatorias

Los conceptos esenciales definidos para una variable aleatoria pueden ser extendidos a dos o más con la correspondiente distribución de probabilidades conjunta.

Considere por ejemplo dos variables aleatorias:

- $X$ , pluviosidad en cierta estación meteorológica
- $Y$ , nivel de un río.

Así, el evento  $(X = x, Y = y)$  se puede definir como  $(X = x \cap Y = y)$ , digamos evento conjunto, de igual forma el evento  $(X < x, Y < y)$  puede definirse como el evento conjunto  $(X < x \cap Y < y)$  definido para el espacio  $\Theta_{xy}$  de las variables aleatorias.

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribución de Probabilidad Conjunta y Condicional

Para el par de variables aleatorias  $X$  e  $Y$  se define la función de distribución de probabilidad acumulada como

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

La cual satisface la axiomática fundamental de probabilidades:

- $F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0.$
- $F_{X,Y}(-\infty, y) = 0.$
- $F_{X,Y}(x, -\infty) = 0.$
- $F_{X,Y}(x, +\infty) = F_X(x).$
- $F_{X,Y}(+\infty, y) = F_Y(y).$
- $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1.$

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribución de Probabilidad Conjunta y Condicional

Si las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son **discretas**, la función de distribución de probabilidad conjunta es

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

siendo su función de distribución de probabilidad acumulada igual a

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j),$$

con  $(x_i, y_j) \in \Theta_{X,Y}$ .

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribución de Probabilidad Conjunta y Condicional

Ahora, si las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son **continuas**, la función de densidad de probabilidad conjunta se define como:

$$f_{X,Y}(x, y) dx dy = P(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy)$$

Entonces,

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) dv du.$$

Si las derivadas parciales existen, entonces

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$$

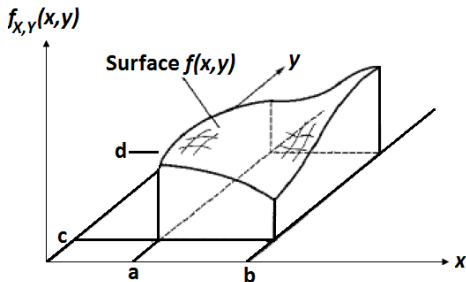
# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribución de Probabilidad Conjunta y Condicional

También, se puede observar que la siguiente probabilidad puede ser obtenida como

$$P(a < X \leq b, c < y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(u,v) du dv$$

que representa el volumen bajo la superficie  $f_{X,Y}(x,y)$  como se muestra en la figura.



# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

Para variables aleatorias discretas  $X$  e  $Y$ , la probabilidad de  $(X = x)$  puede depender de los valores que puede tomar  $Y$  (viceversa).

Con base a lo visto en probabilidades, se define la función de distribución de probabilidad condicional como:

$$p_{X|Y=y}(x) = P(X = x | Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}, \quad p_Y(y) > 0$$

De manera similar, se tiene que

$$p_{Y|X=x}(y) = P(Y = y | X = x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}, \quad p_X(x) > 0$$

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

La distribución marginal de una variable aleatoria se puede obtener aplicando el teorema de probabilidades totales.

Para determinar la distribución marginal de  $X$ ,  $p_X(x)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{y \in \Theta_Y} p_{X|Y=y}(x) \cdot p_Y(y) \\ &= \sum_{y \in \Theta_Y} p_{X,Y}(x, y) \end{aligned}$$

De la misma forma se tiene que

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \Theta_X} p_{X,Y}(x, y)$$

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

En el caso que ambas sean variables aleatorias **continuas** se define la función de densidad condicional de  $X$  dado que  $Y = y$  como

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad f_Y(y) > 0$$

De manera similar se tiene que

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \quad f_X(x) > 0$$

Las respectivas marginales se obtienen como sigue:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$



# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

En el caso mixto, supongamos  $X$  discreta e  $Y$  continua, el cálculo de las respectivas marginales es

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y) dy$$
$$f_Y(y) = \sum_{x \in \Theta_X} f_{Y|X=x}(y) \cdot p_X(x)$$

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

Si **ambas variables aleatorias son independientes**, entonces se tiene que

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

**Ejemplo:** Considere un autopista concesionada y un portico TAG en particular.

Datos históricos indica que el  $p \times 100\%$  de los automóviles adulteran su placa patente para no pagar TAG. Suponga que en promedio pasan en una hora  $\nu$  automóviles según un proceso de Poisson.

Proponga una distribución conjunta para las siguientes variables aleatorias:

- $X$ : Número de vehículos que pasan en una hora por el portico.
- $Y$ : Número de vehículos que pasan con patente adulterada en una hora por el portico.

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

Tenemos que

$$X \sim \text{Poisson}(\nu) \quad \text{y} \quad Y | X = x \sim \text{Binomial}(x, p)$$

Luego

$$\begin{aligned} p_{X,Y}(x, y) &= p_{Y|X=x}(y) \cdot p_X(x) \\ &= \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \cdot \frac{\nu^x e^{-\nu}}{x!} \end{aligned}$$

$$\Theta_{X,Y} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}_0, y \leq x\}.$$

Por probabilidades totales se tiene que

$$Y \sim \text{Poisson}(\nu p)$$

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

```
p.xy = function(x, y, p = 0.05, nu = 50){  
  n.r = length(x)  
  n.c = length(y)  
  M = matrix(NA, ncol = n.c, nrow = n.r)  
  for(i in 1:n.r){  
    M[i,] = dbinom(y, size = x[i], prob = p)*dpois(x[i],  
    lambda = nu)  
  }  
  M  
}  
  
x = 0:100  
y = 0:20  
z = p.xy(x, y, p = 0.20, nu = 50)
```

# Múltiples Variables Aleatorias

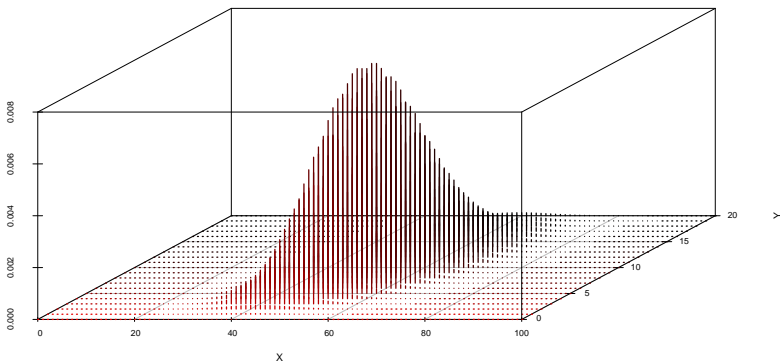
## Distribuciones Marginales y Condicionales

```
Z = c(z)
X = rep(x, length(y))
Y = sort(rep(y, length(x)))

install.packages("scatterplot3d")
library(scatterplot3d)
scatterplot3d(x = X, y = Y, z = Z, type = "h", lwd=2, pch= "",
xlab = "X", ylab = "Y", zlab = "", highlight.3d=TRUE, angle = 45)
```

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales



# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

**Ejemplo:** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias continuas, relacionadas de la siguiente manera:

$$Y \sim \text{Gamma}(k, \nu) \quad \text{y} \quad X | Y = y \sim \text{Uniforme}(0, y)$$

Luego

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\nu^k}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-\nu y} \cdot \frac{1}{y}, \quad 0 \leq x \leq y$$



# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

```
f.xy = function(x, y, k = 3, nu = 2){  
  n.r = length(x)  
  n.c = length(y)  
  M = matrix(NA, ncol = n.c, nrow = n.r)  
  for(i in 1:n.r){  
    M[i,] = dgamma(y, rate = nu, shape = k)*dunif(x[i], 0, y)  
  }  
  M  
}  
  
x = seq(0,5,.05)  
y = seq(0,5,.05)  
z = f.xy(x, y)  
install.packages("rgl")  
library(rgl)  
rgl.surface(x = x, y = z, z = y, color = "red", back="lines")
```

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

**Ejemplo:** Dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  tienen distribución conjunta Normal-Bivariada si su función de densidad conjunta está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right\}$$

A partir de esto se puede deducir que

$$X \sim \text{Normal}(\mu_X, \sigma_X), \quad Y \sim \text{Normal}(\mu_Y, \sigma_Y)$$

$$Y | X = x \sim \text{Normal}\left(\mu_Y + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X), \sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}\right)$$

# Múltiples Variables Aleatorias

## Distribuciones Marginales y Condicionales

```
f.xy = function(x, y, mu.x = 0, mu.y = 0, s.x = 1, s.y = 1,
rho = 0){
n.r = length(x)
n.c = length(y)
M = matrix(NA, ncol = n.c, nrow = n.r)
for(i in 1:n.r){
M[i,] = dnorm(x[i], mean = mu.x, sd = s.x) * dnorm(y, mean = mu.y
+ rho*s.y*(x[i]-mu.x)/s.x, sd = s.y*sqrt(1-rho^2))
}
M
}

x = seq(-5,5,0.1)
y = seq(-5,5,0.1)
z = f.xy(x, y, rho = 0)
rgl.surface(x = x, y = z*10, z = y, color = "red", back="lines")
```

# Múltiples Variables Aleatorias

## Covarianza y Correlación

Cuando hay dos variable aleatoria  $X$  e  $Y$ , puede haber una relación entre las variables.

En particular, la presencia o ausencia de relación estadística lineal se determina observando el primer momento conjunto de  $X$  e  $Y$  definido como

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Si  $X$  e  $Y$  son estadísticamente independientes, entonces

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) dx dy = E(X) \cdot E(Y)$$

# Múltiples Variables Aleatorias

## Covarianza y Correlación

La covarianza corresponde al segundo momento central y se define como:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y$$

Si  $X$  e  $Y$  son estadísticamente independientes, entonces

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

El significado físico de la covarianza se puede inferir de la ecuación.

Si la  $\text{Cov}(X, Y)$  es grande y positivo, los valores de  $X$  e  $Y$  tienden a ser grandes o pequeños en relación a sus respectivos medias, mientras que si la  $\text{Cov}(X, Y)$  es grande y negativo, los valores de  $X$  tienden a ser grandes con respecto a su media, mientras que los de  $Y$  tienden a ser pequeños.

# Múltiples Variables Aleatorias

## Covarianza y Correlación

El significado físico de la covarianza se puede inferir de la ecuación anterior:

- Si  $\text{Cov}(X, Y)$  es grande y positiva, los valores de  $X$  e  $Y$  tienden a ser grandes (o pequeños) en relación a sus respectivos medias.
- Si  $\text{Cov}(X, Y)$  es grande y negativo, los valores de  $X$  tienden a ser grandes con respecto a su media, mientras que los de  $Y$  tienden a ser pequeños y viceversa.
- Si  $\text{Cov}(X, Y)$  es pequeña o cero, la relación (lineal) entre los valores de  $X$  e  $Y$  es poca o nula, o bien la relación es No lineal.

# Múltiples Variables Aleatorias

## Covarianza y Correlación

La covarianza mide el grado de asociación lineal entre dos variables, pero es preferible su normalización llamada correlación para poder cuantificar la magnitud de la relación.

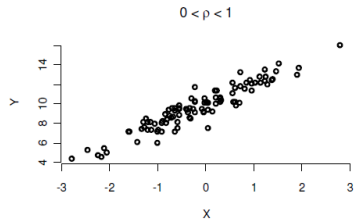
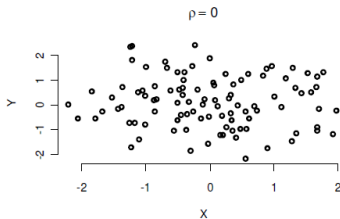
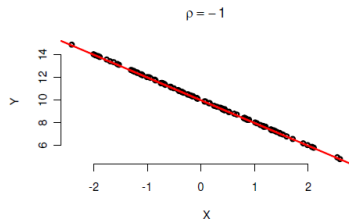
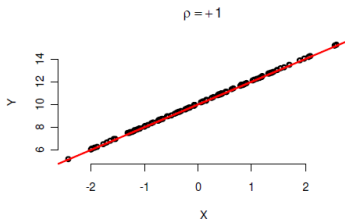
La Correlación está definida como:

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Este coeficiente toma valores en el intervalo  $(-1, 1)$ .

# Múltiples Variables Aleatorias

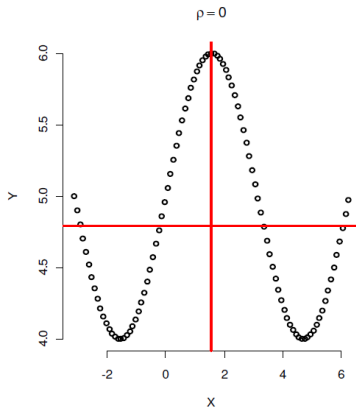
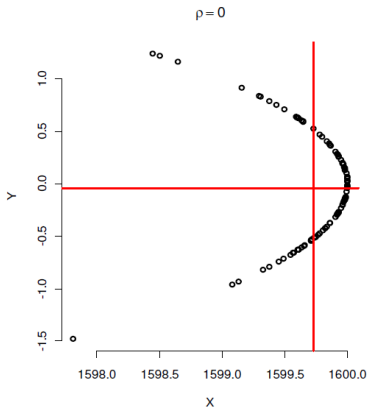
## Covarianza y Correlación





# Múltiples Variables Aleatorias

## Covarianza y Correlación



# Esperanza Condicional y Predicción (Rice Sec 4.4)

## Definiciones y Ejemplos

El valor esperado de una variable aleatoria  $Y$  condicionado a la realización  $x$  de una variable aleatoria  $X$  esta dado por

$$E(Y | X = x) = \begin{cases} \sum_{y \in \Theta_{Y | X=x}} y \cdot P(Y = y | X = x), & \text{caso discreto} \\ \int_{y \in \Theta_{Y | X=x}} y \cdot f_{Y | X=x}(y) dy, & \text{caso continuo} \end{cases}$$

# Esperanza Condicional y Predicción (Rice Sec 4.4)

## Definiciones y Ejemplos

Por otra parte, para una función de  $Y$ , llamemos  $h(Y)$ , el valor esperado condicional esta dado por

$$E[h(Y) | X = x] = \begin{cases} \sum_{y \in \Theta_{Y|X=x}} h(y) \cdot P(Y = y | X = x), & \text{caso discreto} \\ \int_{y \in \Theta_{Y|X=x}} h(y) \cdot f_{Y|X=x}(y) dy, & \text{caso continuo} \end{cases}$$

# Esperanza Condicional y Predicción (Rice Sec 4.4)

## Definiciones y Ejemplos

### Ejemplo

Considere un proceso de Poisson cuyo número de eventos esperado en  $[0, 1]$  es  $\lambda$ . Si  $N$  y  $X$  son variables aleatorias que determinan la cantidad de eventos en los intervalos  $[0, 1]$  y  $[0, p]$  respectivamente, con  $0 < p < 1$ , muestre que  $E(X | N = n) = np$ .

# Esperanza Condicional y Predicción (Rice Sec 4.4)

## Definiciones y Ejemplos

### Ejemplo

Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias cuya distribución de probabilidad conjunta está determinada por una Normal bivariada de parámetros  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$ ,  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$  y  $\rho$ .

Muestre que

$$E(Y | X = x) = \mu_Y + \rho(x - \mu_X) \sigma_Y / \sigma_X \quad \text{y} \quad \text{Var}(Y | X = x) = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)$$

# Esperanza Condicional y Predicción (Rice Sec 4.4)

## Definiciones y Ejemplos

### Teorema

$$E(Y) = E[E(Y | X)]$$

### Teorema

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}[E(Y | X)] + E[\text{Var}(Y | X)]$$

### Ejemplo

Sea  $N$  una variable aleatoria cuyo valor esperado es  $\mu_N$  y varianza  $\sigma_N^2$ . Además consideremos la secuencia de variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots$  con valor esperado  $\mu_X$  y varianza  $\sigma_X^2$ . Si

$$T = \sum_{i=1}^N X_i$$

y  $N$  es independiente de  $X_1, X_2, \dots$ . Muestre que

$$E(T) = \mu_N \cdot \mu_X \quad \text{y} \quad \text{Var}(T) = \mu_X^2 \sigma_N^2 + \mu_N \sigma_X^2$$

# Esperanza Condicional y Predicción (Rice Sec 4.4)

## Predicción

Predecir el valor de una variable aleatoria a partir de otra es el propósito de esta sección.

Consideremos primero la siguiente situación: “Predecir la realización de una variable aleatoria  $Y$ ”. El “mejor” valor  $c$  para predecir la realización de  $Y$  se puede obtener minimizando el error cuadrático medio definido como

$$\text{ECM} = E[(Y - c)^2]$$

Mostrar que la constante  $c$  que minimiza el ECM es  $E(Y)$ .

# Esperanza Condicional y Predicción (Rice Sec 4.4)

## Predicción

Si ahora queremos predecir  $Y$  basado en una función de una variable aleatoria  $X$ , llamemos  $h(X)$ , que minimice el error cuadrático medio definido como

$$\begin{aligned}\text{ECM} &= E \{ [Y - h(X)]^2 \} \\ &= E (E \{ [Y - h(X)]^2 | X \})\end{aligned}$$

Entonces, la función  $h(X)$  que minimiza ECM necesariamente debe corresponder a  $E(Y | X)$ .

Por ejemplo, si  $X$  e  $Y$  distribuyen conjuntamente según una Normal bivariada, entonces el mejor predictor  $Y$  basado en  $X$  es una función lineal dada por

$$E(Y | X) = \left( \mu_Y - \mu_X \frac{\rho \sigma_Y}{\sigma_X} \right) + X \frac{\rho \sigma_Y}{\sigma_X}$$