Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2,3 y 4

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Pablo Rey ,Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía N°4:

Convexidad, Optimización Analítica Irrestricta, Optimización Unidimensional Acotada

Supongamos un problema P): $Min: f\left(\overrightarrow{X}\right)\ s.a.\ \overrightarrow{X} \in \Omega$

CONCEPTOS:

Mínimo Local (ML):
Un ML x^* cumple que $f(x^*) \leq f(x)$ para los x en la vecindad reducida de x^*.

Mínimo Global (MG):
Un MG x^* es la solución óptima del problema de minimización, se cumple que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$.

¡Interesa diferenciar mínimos globales de locales! → Estudiar Convexidad

CONVEXIDAD:

1 Conjunto Convexo:
Un conjunto $\Omega \subset R^n$ es convexo si $\forall X_1, X_2 \in \Omega \ \wedge \ \forall \lambda \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ se cumple que:
$X_3 = \left(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \ \right) \in \Omega$. → *"La combinación convexa pertenece al conjunto"*

2 Función Convexa:
Sea $f\left(\overrightarrow{X}\right): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω convexo: $f\left(\overrightarrow{X}\right)$ es convexa si $\forall X_1, X_2 \in \Omega \wedge \lambda \in [0,1]$ se cumple $f((1-\lambda)X_1 + \lambda X_2) \leq (1-\lambda) f(X_1) + \lambda f(X_2)$

→ *"La función evaluada en una combinación convexa de puntos es menor o igual a la combinación convexa de los valores de la función evaluada en dichos puntos"*

→ Se dice "Estrictamente Convexa" si es con " < ".

→ Para funciones "Cóncavas" el signo de la desigualdad cambia.

3 Problema de Optimización Convexo:
Un problema P) es convexo ⇔ 1) El dominio Ω es convexo
2) La función objetivo es convexa sobre Ω

.

OJO: Algunos resultados útiles:

→ Si f(x) es función convexa, entonces todos los puntos que satisfacen "$f(x) \leq a$" constituyen un dominio convexo.

→ Si f(x) es función cóncava, entonces todos los puntos que satisfacen "$f(x) \geq a$" constituyen un dominio convexo.

→ Si f(x) es convexa → - f(x) es cóncava

→ Si Ω_1 y Ω_2 son dos dominios convexos → $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ es un dominio convexo (La intersección es convexa. ¡No necesariamente la unión!)

Convexidad y Matriz Hessiana:

Sea $f\left(\overrightarrow{X}\right)$ dos veces diferenciable sobre su dominio Ω convexo:

→ $f(\overrightarrow{X})$ es Convexa sobre Ω $\Leftrightarrow$ $Hf(\overrightarrow{X})$ es semidefinida positiva en Ω ó equivalentemente: $d^T \; Hf(\overrightarrow{X}) \; d \geq 0, \; \forall d \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n, \; \forall \overrightarrow{X} \in \Omega$

→ $f\left(\overrightarrow{X}\right)$ es Estrictamente Convexa $\Leftrightarrow$ $Hf(\overrightarrow{X})$ es definida positiva en Ω ó equivalentemente: $d^T \; Hf(\overrightarrow{X}) \; d > 0, \; \forall d \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n, \; \forall \overrightarrow{X} \in \Omega$

¿Y para qué todo esto?

→ En un Problema Convexo cualquier Mínimo Local es Global.

→ En un Problema Estrictamente Convexo, la solución óptima es, además, Única.

1. Convexidad 1

Para el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
&Min: 5x+6y \\
&s.a. \\
&3x-y=3 \quad (1) \\
&x+10y=10 \quad (2) \\
&x,y\geq 0 \quad (3)
\end{aligned}
$$

a) Demuestre que el conjunto de soluciones factibles es convexo
b) Demuestre que el problema es convexo

Respuesta:

a)

En primer lugar, llamaremos D al dominio del problema. Este dominio está formado por la intersección de varios conjuntos (restricciones) que llamaremos D_1 D_2 y D_3 (respectivamente (1), (2) y (3)).

¡Si cada uno de estos conjuntos es convexo, la intersección también lo es!

D_1:

Sean $X_1=(x_1,y_1)$, $X_2=(x_2,y_2)$ puntos que pertenecen a *D_1*. Sea X_3 una combinación convexa de estos dos puntos:

$$X_3=(x_3,y_3)=\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda y_1+(1-\lambda)y_2\right] \ ,0\leq\lambda\leq 1$$

Se tiene que:

$$3x_3-y_3=3(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$$

Reordenado:

$$3x_3-y_3=\lambda\underbrace{(3x_1-y_1)}_{=3}+(1-\lambda)\underbrace{(3x_2-y_2)}_{=3}=3\lambda+3-3\lambda=3$$

Por lo que el punto X_3 pertenece a *D_1*, luego *D_1* es convexo.

D_2:

Sean $X_1=(x_1,y_1)$, $X_2=(x_2,y_2)$ puntos que pertenecen a *D_2*. Sea X_3 una combinación convexa de estos dos puntos:

$$X_3=(x_3,y_3)=\left[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda y_1+(1-\lambda)y_2\right] \ ,0\leq\lambda\leq 1$$

Se tiene que:

$$x_3+10y_3=(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+10(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$$

Reordenado:

$$3x_3-y_3=\lambda\underbrace{(x_1+10y_1)}_{=10}+(1-\lambda)\underbrace{(x_2+10y_2)}_{=10}=10\lambda+10-10\lambda=10$$

Por lo que el punto X_3 pertenece a *D_2*, luego *D_2* es convexo

D_3 :

Se procede de la misma manera que antes; sean $X_1, X_2 \in D_3$, y X_3 una combinación convexa de. Entonces:

$$X_3 = (x_3, y_3) = \left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\ \right] \ ,0 \le \lambda \le 1$$

Pero como se sabe que $[x_1, y_1], [x_2, y_2]$, λ y $(1-\lambda)$ son todos positivos, se puede concluir que $[x_3, y_3]$ también es positivo en sus dos componentes, es decir, también pertenece a D_3, lo que prueba que D_3 también es convexo.

Entonces, ***D* es convexo.**

b)

Sabemos que para demostrar que el problema es convexo, debemos demostrar que el dominio D es convexo (ya demostrado) y que la función objetivo lo es. A simple vista, al ser una función lineal, todas sus segundas derivadas son cero por lo que el Hessiano es semi-definido positivo. Esto implica que la función es convexa.

(Propuesto: Demostrar con la definición de convexidad). **Luego el problema es convexo.**

2. Convexidad 2

Considere el problema:

$$
\begin{array}{ll}
P) & \underset{x}{\text{Max}} \left\{ \min \, \{f_i(x); \; i = 1, 2, ..n\} \right\} \\
s.a & x \in D, \; D \; convexo
\end{array}
$$

Si uno transforma este problema en uno equivalente con función objetivo lineal. ¿Qué condiciones deben cumplir las funciones $f_i(x)$ para que el espacio factible de este nuevo problema sea convexo?

Respuesta:

La equivalencia es:

$$
\begin{array}{ll}
\tilde{P}) & \underset{x}{\text{Max}} \;\; \mu \\
s.a & \min \, \{f_i(x); \; i = 1, 2, ..n\} \geq \mu \\
 & x \in D.
\end{array}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{array}{lll}
\tilde{\tilde{P}}) & \underset{x}{\text{Max}} \;\; \mu & \\
s.a & f_i(x) \geq \mu & i = 1, 2, ..n \\
 & x \in D. &
\end{array}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{array}{lll}
\tilde{\tilde{\tilde{P}}}) & \underset{x}{\text{Max}} \;\; \mu & \\
s.a & -f_i(x) + \mu \leq 0 & i = 1, 2, ..n \\
 & x \in D. &
\end{array}
$$

Se requiere que $f_i(x)$ sea cóncava, de modo que - $f_i(x)$ sea convexa. Luego al ser una suma de funciones convexas en la restricción→ La restricción será convexa.

Luego la intersección (el Dominio) de varios conjuntos (restricciones) convexas será convexa.

3. Convexidad 3

Demuestre formalmente si la siguiente función es convexa o no. Para su demostración debe utilizar la definición básica de convexidad. (No debe utilizar ni intuición, ni dibujos, ni el criterio de la matriz Hessiana para realizar su demostración).

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 5x - 4$$

Respuesta:

Intuitivamente se sabe que esta función es convexa. Para que quede demostrado se debe cumplir la siguiente inecuación:

$$\lambda f(x_1, y_1) + (1-\lambda) f(x_2, y_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$$

Reemplazando la función se tiene:

$$\lambda[2x_1{}^2 + 3y_1{}^2 - 5x_1 - 4] + (1-\lambda)[2x_2{}^2 + 3y_2{}^2 - 5x_2 - 4] \geq$$

$$2\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right]^2 + 3\left[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\right]^2 - 5\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] - 4$$

Los términos lineales $-5\lambda x_1 - 5(1-\lambda)x_2 - 4$ se repiten en ambos lados de la inecuación, por lo que pueden ser simplificados, con esto se tiene la siguiente expresión:

$$\lambda[2x_1{}^2 + 3y_1{}^2] + (1-\lambda)[2x_2{}^2 + 3y_2{}^2] \geq 2\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right]^2 + 3\left[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\right]^2$$

Resolviendo y agrupando términos se llega a:

$$\lambda(1-\lambda)\left[2x_1{}^2 - 4x_1x_2 + 2x_2{}^2 + 3y_1{}^2 - 6y_1y_2 + 3y_2{}^2\right] \geq 0$$

Agrupando los términos cuadráticos se obtiene la siguiente expresión:

$$\lambda(1-\lambda)\left[2(x_1 - x_2)^2 + 3(y_1 - y_2)^2\right] \geq 0$$

que sabemos que siempre se cumple, debido a que $0 \leq \lambda \leq 1$ y la suma de los términos cuadráticos es siempre mayor que cero. Con esto queda demostrado que la función es convexa.

4. Convexidad 4

Sea P) un problema de minimización, irrestricto, que admite solución óptima y que su función objetivo es convexa. Demuestre que en caso de existir más de una solución óptima, el conjunto de éstas es un conjunto convexo.

Respuesta:

Sean $x_1{*}$ y $x_2{*}$ dos soluciones óptimas del problema de minimización. Sea además x_3 una combinación convexa de $x_1{*}$ y $x_2{*}$. Esto implica que:

$$x_3 = \lambda x_1 {*} + (1-\lambda) x_2 {*} \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Evaluando x_3 en la función objetivo:

$$f(x_3) = f(\lambda x_1 {*} + (1-\lambda) x_2 {*}) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

La función objetivo es convexa por lo que:

$$f(x_3) = f(\lambda x_1 {*} + (1-\lambda) x_2 {*}) \leq \lambda f(x_1 {*}) + (1-\lambda) f(x_2 {*})$$

Además como $x_1{*}$ y $x_2{*}$ dos soluciones óptimas del problema:

$$f(x_1 {*}) = f(x_2 {*}) = V^*$$

$$\boxed{f(x_3) \leq V^*}$$

Por otro lado por definición de optimalidad (en el óptimo la función es mínima y todo otro valor es mayor o igual):

$$\boxed{f(x_3) \geq V^*}$$

De esto se concluye que:

$$\boxed{f(x_3) = V^*}$$

Por lo tanto la combinación convexa de soluciones óptimas también es óptima. Luego hemos demostrado que el conjunto de soluciones óptimas del problema es convexo.

5. Convexidad 5

Sea el problema:

$$\text{Min } (x-y)^2 + 2x$$
$$\text{s.a.}$$
$$1 \le |x\text{-}y| \le 2$$

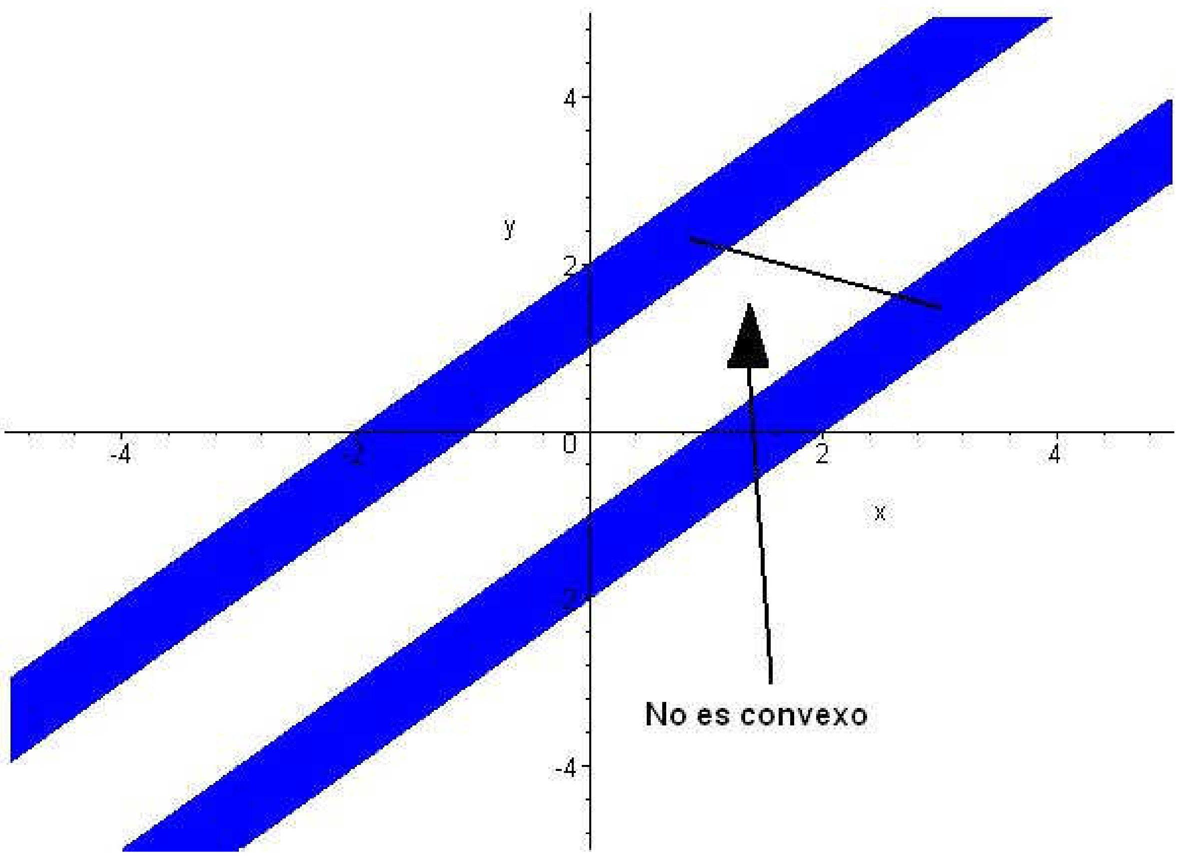
¿Es convexo?

Respuesta:

Probemos primero la convexidad de la función objetivo, su Hessiano es:

$$H(f(X)) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

El cual es definido positivo sin importar el valor de X, por lo que la función es convexa en todo $\mathbb{R}^2$. Para probar la convexidad del dominio $1 \le |x\text{-}y| \le 2$, veámoslo gráficamente:



Luego podemos decir que el **problema no es convexo. Tarea: Probar formalmente que el dominio no es convexo (Por contradicción).**

6. Convexidad 6

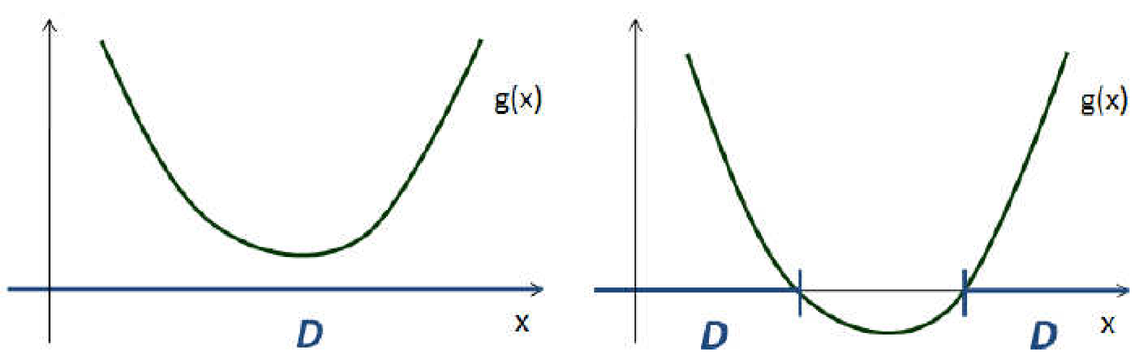
Comente la veracidad de las siguientes 3 afirmaciones:

1. "Si un conjunto está definido por $D = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le 0\}$ donde A es una matriz de $m \times n$, entonces D no es un conjunto convexo"
2. "Si un dominio está definido por $D = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \ge 0 \ \forall i = 1,..,p\}$ con $g_i(x)$ funciones convexas, entonces D no es un conjunto convexo"
3. "Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función cóncava definida sobre un dominio convexo $D \subset \mathbb{R}^n$, entonces el problema $Max : f(x) \ s.a. \ x \in D$ no puede ser un problema convexo"

Respuesta:

1.
Falso, este es un conjunto definido por rectas lineales, por lo que es convexo. Incluso es convexo si no existe una solución factible, ya que el conjunto vacío es convexo.

2.
Esta afirmación es falsa sólo cuando todas las funciones $g_i(x) \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Cuando existe a lo menos un "i" tal que $g_i(x) < 0$ para algún $x \in \mathbb{R}$ entonces la afirmación es verdadera, es decir, el dominio D que se forma en este caso no es convexo. Esto ocurre ya que cada función $g_i(x)$ que cruza el eje x separa el dominio en dos (ver figura).



3.
Falso, este problema es convexo, ya que cumple con las condiciones de convexidad. Las condiciones dicen que $Max : f(x) \ s.a. \ x \in D \ \Leftrightarrow \ Min : -f(x) \ s.a. \ x \in D$ es un problema convexo si la función $-f$ es convexa y D es convexo. Para que $-f$ sea convexa $\rightarrow$ f debe ser cóncava.

OPTIMIZACIÓN ANALÍTICA SIN RESTRICCIONES:

Supongamos un problema P): $Min: f\left(\vec{X}\right)$ $s.a.$ $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$

Condición Necesaria y Suficiente para ser un Mínimo Local:

1er Orden:

Condición Necesaria: X^* debe ser un punto crítico, es decir tal que $\nabla f(X^*) = \vec{0}$ o donde $f\left(\vec{X}\right)$ no es diferenciable

2do Orden:

Condición Necesaria: Si $f\left(\vec{X}\right)$ es dos veces diferenciable, entonces debe cumplirse la condición de 1er orden y que la matriz Hessiana $H\left(f(X^*)\right)$ sea semi-definida positiva.

Condición Suficiente: Si verifica 1er orden y $H\left(f(X^*)\right)$ es definida positiva, entonces X^* es un punto mínimo local estricto de $f\left(\vec{X}\right)$.

Comentarios acerca de Optimalidad: Mínimos Globales

1) Si $H\left(f(X)\right)$ es definida positiva en todo el Dominio → Existe sólo un mínimo local el cual es también global (Unicidad).

2) Si $H\left(f(X)\right)$ no es definida positiva (en todo el dominio). Para saber acerca del mínimo global, primero hay que probar su existencia.

Una vez probada la existencia del mínimo global, hay que probar todos los ML y ver cual minimiza la función objetivo. Este será el MG.

7. Conceptos:

a) Comente para un problema irrestricto: Para encontrar un mínimo global basta con probar todos los mínimos locales y luego, evaluándolos en la función objetivo y encontrando el menor valor, determinar cual de ellos es el mínimo global. ¿Verdadero o falso?

b) Considere un problema de minimización no restringido de la forma $Min\left\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\right\}$. Suponga que estamos en un punto x tal que $\nabla f(x) = 0$. Si la matriz Hessiana de la función objetivo en x no es definida positiva, entonces x no es mínimo local. ¿Verdadero o falso?

Respuesta:

a) Falso, también se requiere revisar la frontera del dominio, es decir comprobar existencia de solución y así corroborar que la función objetivo no se esté minimizando infinitamente.

b) Falso, el punto x podría ser un mínimo local. Por ejemplo, si la matriz hessiana en x fuera semidefinida positiva, entonces podría serlo. (Revisar condición suficiente y necesaria)

8. Primer ejemplo:

Considere el siguiente problema:

$$Min: -x + x^3 + y + y^2$$

Encuentre los puntos críticos de la función y caracterícelos según las condiciones de segundo orden. ¿Cuál es la solución óptima?

Respuesta:

Para encontrar los puntos críticos aplicamos las condiciones de primer orden; en este caso:

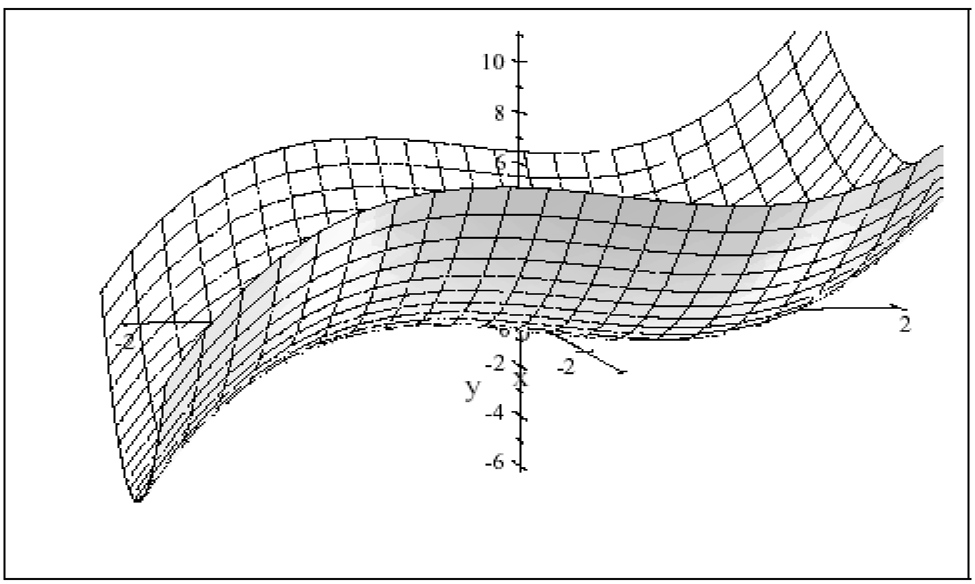
$$\nabla f(x,y) = \left[3x^2 - 1 \quad 1+2y\right] = \left[0 \quad 0\right]$$

Obtenemos dos candidato: $X_1 = \left(1/\sqrt{3} \quad -1/2\right) \wedge X_2 = \left(-1/\sqrt{3} \quad -1/2\right)$.

La matriz Hessiana es: $H\left(f(x,y)\right) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Fácilmente vemos que $H\left(f(X_1)\right)$ es definida positiva y $H\left(f(X_2)\right)$ es indefinida. X_1 es un mínimo local estricto, ya que la función es estrictamente convexa en la vecindad de ese punto. De X_2 en cambio, no hay información, de hecho es un punto silla.

Gráficamente:



OJO:
En este caso no existe solución óptima. La función diverge al infinito negativo, si $x \to -\infty$. Vemos que la existencia de mínimos locales, no nos dice nada acerca de la existencia de mínimos globales, excepto que se trate de una función convexa en todo el Dominio. ¡Hay que probar existencia!

9. Más ejemplos:

Comente acerca de la solución óptima de los siguientes problemas irrestrictos:

a) $Min\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$

b) $Min\ x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$

c) $Min: (x_1 - 3x_2)^4 + (x_1 - 1)^2$

Respuesta:

a) $$Min\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2$$

Puntos críticos:

$\nabla f(x_1, x_2) = [2x_1 - 4; 8x_2 - 8] = \vec{0}$, por lo que tenemos un punto crítico X* = (2,1).

Hessiano:

$H\left(f(X)\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, es claramente definido positivo en todo el Dominio de X. Con esto podemos afirmar que el punto encontrado es mínimo global y es único. El problema tiene solución óptima $X^* = (2,1)$ con valor óptimo $\widehat{V} = f(X^*) = -8$.

b) $$Min\ x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

Puntos críticos:

$\nabla f(x) = f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 2x + 16 = 0 \rightarrow$ 3 p. críticos: $x_1 = -1{,}057$, $x_2 = 1{,}456$, $x_3 = 2{,}601$.

Hessiano:

$D^2 f(x) = 12x^2 - 24x + 2$. Vemos que: H($x_1$) = 40.753, H($x_2$) = -7.509, H($x_3$) = 20.757 por lo que los puntos x_1 y x_3 son mínimos locales. Luego vemos que existe solución, ya que la función en los extremos sólo crece, por lo que uno de estos dos puntos seleccionados es mínimo global. Luego el valor óptimo será $\widehat{V} = \min(f(x_1), f(x_2)) = f(x_2) = -1{,}766$ con x_2 como solución óptima.

c) $$Min: (x_1 - 3x_2)^4 + (x_1 - 1)^2$$

Puntos críticos:

$\nabla f\left(\vec{X}\right) = \left[4(x_1 - 3x_2)^3 + 2(x_1 - 1); -12(x_1 - 3x_2)^3\right] = \vec{0}$ $\rightarrow$ Único punto crítico (1, 1/3).

Hessiano: $$D^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12(x_1 - 3x_2)^2 + 2 & -36(x_1 - 3x_2)^2 \\ -36(x_1 - 3x_2)^2 & 108(x_1 - 3x_2)^2 \end{pmatrix}$$

Vemos que: $$\Delta_1 = 12(x_1 - 3x_2)^2 \geq 0$$
$$\Delta_2 = 1296(x_1 - 3x_2)^4 + 216(x_1 - 3x_2)^2 - 1296(x_1 - 3x_2)^4 = 216(x_1 - 3x_2)^2 \geq 0$$

Es semidefinido positivo para todo el dominio, por lo que el punto es mínimo local. Como la función crece en los bordes, existe solución y al tener sólo un ML este debe ser necesariamente mínimo global. El valor óptimo es igual a 0.

PROBLEMA UNIDIMENSIONAL ACOTADO:

Para problemas del tipo $P)\ Min:\{f(x)\ s.a.\ a \le x \le b \ \wedge \ x \in \mathbb{R}\}$ con $f(x)$ diferenciable.

<u>Condición Necesaria y Suficiente para ser un Mínimo Local:</u>

<u>1er Orden:</u>

Condición Necesaria:

Si $a < x < b$ → $f'(x) = 0$

Si $x = a$ → $f'(a) \ge 0$

Si $x = b$ → $f'(b) \le 0$

Condición Suficiente:

Si $a < x < b$ → No existe condición suficiente de primer orden

Si $x = a$ → $f'(a) > 0$

Si $x = b$ → $f'(b) < 0$

<u>2do Orden:</u>

Condición Necesaria:

Si $a < x < b$ → $f'(x) = 0$ y $f''(x) \ge 0$

Si $x = a$ → $f'(a) \ge 0$ y ($f''(a) \ge 0$ si sucede que $f'(a) = 0$)

Si $x = b$ → $f'(b) \le 0$ y ($f''(b) \ge 0$ si sucede que $f'(b) = 0$)

Condición Suficiente:

Si $a < x < b$ → $f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0$

Si $x = a$ → $f'(a) > 0$ ó ($f''(a) > 0$ si sucede que $f'(a) = 0$)

Si $x = b$ → $f'(b) < 0$ ó ($f''(b) > 0$ si sucede que $f'(b) = 0$)

OJO: Si existen puntos no diferenciables hay que agregar:

Condición Necesaria:

$Si\ f'(x)^- \ne f'(x)^+$ → $f'(x)^- \le 0$ y $f'(x)^+ \ge 0$

Condición Suficiente:

$Si\ f'(x)^- \ne f'(x)^+$ → $f'(x)^- < 0$ y $f'(x)^+ > 0$

10. Conceptos:

Considere el problema: $P)\ Min: f(x)\ s.a.\ \ a \leq x \leq b$

¿En que caso es útil la condición suficiente de segundo orden, en contraposición a la condición suficiente de primer orden? Analice todos los casos.

Respuesta:

Hay dos casos principales, uno que el punto extremo a examinar se encuentra dentro del dominio, y el otro caso en que el punto extremo se encuentra en los bordes.

Si ocurre que se encuentra un punto $\overline{x}$ tal que $a < \overline{x} < b$ y $f'(\overline{x}) = 0$, es decir dentro del dominio, entonces no existe una condición suficiente de 1er orden. Sin embargo, la condición suficiente de 2do orden existe si $f''(\overline{x}) > 0$.

Existen dos casos si estamos examinando los bordes del dominio, cuando $\overline{x} = a$ y cuando $\overline{x} = b$. Analizaremos el primer caso, ya que el segundo es análogo.

Si ocurre que $\overline{x} = a$ y $f'(\overline{x}) > 0$, entonces la condición de 1er orden es suficiente para demostrar que es un punto mínimo local. En cambio, si $\overline{x} = a$ y $f'(\overline{x}) = 0$ la condición de 1er orden no es suficiente. La condición suficiente de 2do orden puede servir en este caso, pero sólo si se cumple que $\overline{x} = a$, $f'(\overline{x}) = 0$ y $f''(\overline{x}) > 0$.

11. Ejemplo Unidimensional Acotado:

Explique la siguiente frase basándose en el problema unidimensional acotado:
"La condición necesaria de primer orden para el problema $Min: f(x)\ s.a.\ x \geq 0$ se puede expresar como $f'(x)x = 0$ y $f'(x) \geq 0$"

Respuesta:
Podemos ver que el problema de la frase no es más que un caso particular del problema unidimensional acotado. En este caso sólo hay cota inferior y $a = 0$. Tomando las condiciones necesarias de primer orden:

$Min: f(x);\ s.a.\ x \geq 0$ → C. N. 1er Orden: (*) $f'(x) = 0$ si $x > 0$
(**) $f'(x) \geq 0$ si $x = 0$

Si $x > 0$ efectivamente la condición $f'(x)x = 0$ y $f'(x) \geq 0$ colapsa a $f'(x) = 0$
Si $x = 0$ la condición $f'(x)x = 0$ y $f'(x) \geq 0$ será $f'(x) \geq 0$.

Es decir, es una forma de expresar ambos casos en una sola condición y existe equivalencia entre ambas. Estas condiciones son un caso particular de las condiciones de primer orden KKT (Karush-Kuhn-Tucker), que veremos más adelante en el curso.