Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2,3 y 4

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Pablo Rey , Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía Nº15: Modelación y Resolución Lineal Entera

MODELACIÓN LINEAL ENTERA

En la programación lineal entera: Las variables pueden ser enteras, naturales y binarias. Además otras variables del problema pueden ser continuas.

<u>Algunos problemas:</u>

IP (Integer Problem): Problema únicamente con variables enteras .

MIP (Mixed Integer Problem): Problema con variables continuas y enteras.

BP (Binary Problem): Problema únicamente con variables binarias

Otros...

<u>Variables enteras:</u> ($x \in \mathbb{Z}$):
Sirven para modelar recursos que son indivisibles: Buques, Aviones, Casas, Personas, Fábricas, etc...

<u>Variables binarias:</u> ($x \in \{0,1\}$):
Sirven para modelar decisiones: $y = 1$: si se toma una cierta decisión e $y = 0$: si no se toma. (Por ejemplo si se instala fábrica o no, si se produce o no)

<u>Algunos Ejemplos de Modelación:</u>

1. Con restricciones binarias pueden modelarse relaciones entre decisiones:

$y \geq x$: nos dice que si se toma la decisión asociada a "x", entonces se debe tomar la decisión asociada a "y".

$y = x$: nos dice que deben tomarse ambas decisiones o ninguna de ellas.

$\sum_i x_i = / \geq / \leq n$: dice que deben tomarse exactamente/por lo menos/a lo más n decisiones.

2. Podemos modelar costos fijos:
Por ejemplo; una fábrica que si produce una cantidad "*x*" posee un costo por unidad c y un costo fijo *K*, que representa arriendo de máquinas para producir. Si no produce (*x = 0*), no incurre en costos fijos.

Minimizar costos sería:

$$Min: C = \begin{cases} cx + K & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Que se puede modelar como:

$$\begin{aligned} & Min: C = cx + yK \\ & s.a. \\ & My \geq x \\ & x \geq 0 \\ & y \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Con M un número muy grande cercano al infinito positivo.

3. Activación de restricciones sujeto a condiciones. Se tiene un problema:

$$\begin{aligned} & Min: C^T X \\ & s.a. \\ & a^T X \leq b \text{ ó } c^T X \leq d \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

Se debe cumplir al menos una de las 2 restricciones. Puede ser $a^T X \leq b$ ó $c^T X \leq d$.

Esto se puede modelar como:

$$\begin{aligned} & Min: C^T X \\ & s.a. \\ & a^T X \leq b + M^1 y \\ & c^T X \leq d + M^2(1-y) \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \\ & y \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Con M^1, M^2 números muy grandes cercanos al infinito positivo.

Si $y = 0$, debe estar cumpliéndose $a^T X \leq b$, caso contrario ($y = 1$), se debe cumplir $c^T X \leq d$.

Problema 1:

Se desea saber donde conviene instalar bodegas en una zona determinada de manera de abastecer desde ellas a los clientes de la zona mediante camiones. Se sabe, que por disponibilidad de terrenos en la zona, solo es posible instalar bodegas en un conjunto $U = \{u_1, u_2, .., u_n\}$ de ubicaciones. El costo de instalar una bodega en la ubicación "*i*" es $\$C_{INSTALL}{}^{i}$. Se debe atender a los $C = \{c_1, c_2, .., c_m\}$ clientes de la zona, considerando que cada uno de ellos demanda D_j toneladas de mercancía. Además se conocen las distancias d_{ij} (en Km) correspondientes a la distancias entre la ubicación "*i*" y el cliente "*j*". Se sabe que acarrear una tonelada durante un kilómetro le cuesta al proveedor $\$C_{TPTE}$. Plantee el problema de optimización equivalente.

Respuesta:

Variables:

z_i : Variable binaria, vale 1 si se instala una bodega en la ubicación "*i*" y 0 si no.

w_{ij} : Variable binaria, vale 1 si se abastece al cliente "*j*" desde la ubicación "*i*" y 0 si no.

Problema:

$$
\text{P)} \quad
\begin{aligned}
& Min : \sum_i C_{INSTALL} z_i + C_{TPTE} \sum_i \sum_j d_{ij} D_j w_{ij} \\
& s.a. \\
& z_i \geq w_{ij} \quad \forall i \in (1, .., n) \quad \forall j \in (1, .., m) \\
& \sum_i w_{ij} = 1 \quad \forall j \in (1, .., m) \\
& z_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in (1, .., n) \\
& w_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i, \mathrm{j}) \in (1, .., n) \times (1, .., m)
\end{aligned}
$$

Función objetivo: El primer término corresponde al costo de instalación de bodegas y el segundo término al costo de transporte.

Restricciones: La primera restricción señala que si se abastece desde "i" debe haber una bodega instalada. La segunda señala que se debe abastecer a todos los clientes desde las bodegas una vez.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS LINEALES ENTEROS

Resolver problemas con variables enteras puede ser muy difícil, ya que se pierde la teoría asociada a la continuidad de las variables (Derivadas, Gradientes, etc...)

A) Enumeración Completa

Una forma ingenua de resolver un problema entero (si está acotado), es probar todas las soluciones factibles (son finitas).

→ Desventaja: Problema crece exponencialmente con el número de variables.

B) Una Intuición en la resolución de MIP`s

Si tenemos un problema entero mixto dado por:

$$\text{P)} \quad \begin{array}{l} Max: c^T X \\ s.a. \\ D\begin{cases} AX \leq b \\ x_i \geq 0 \ \forall i \in N \\ x_i \in \mathbb{Z} \ \forall i \in I \subseteq N \end{cases} \end{array}$$

Definimos un **problema "relajado"**, en donde se levanta el supuesto de integralidad**:**

$$\text{PR)} \quad \begin{array}{l} Max: c^T X \\ s.a. \\ DR\begin{cases} AX \leq b \\ x_i \geq 0 \ \forall i \in N \end{cases} \end{array}$$

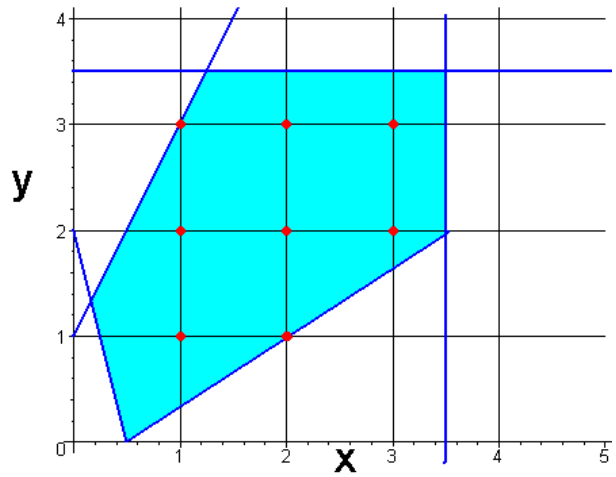
Comentarios:

- $D \subset DR$, ya que se "expande" el dominio D al dominio DR.
- El valor óptimo de PR) es mayor o igual que el valor óptimo de P).
- Si al resolver PR) la solución óptima x^* entregada es entera en las variables que interesan, entonces $x^* \in D$. Luego x^* es solución óptima de P).
- ¡Si podemos modelar el problema P) con una formulación tal que su dominio relajado DR tenga sólo vértices enteros en las variables que interesan, nos aseguramos que al resolver PR), se tiene la solución óptima para P)!

Ejemplo:

Supongamos el problema:

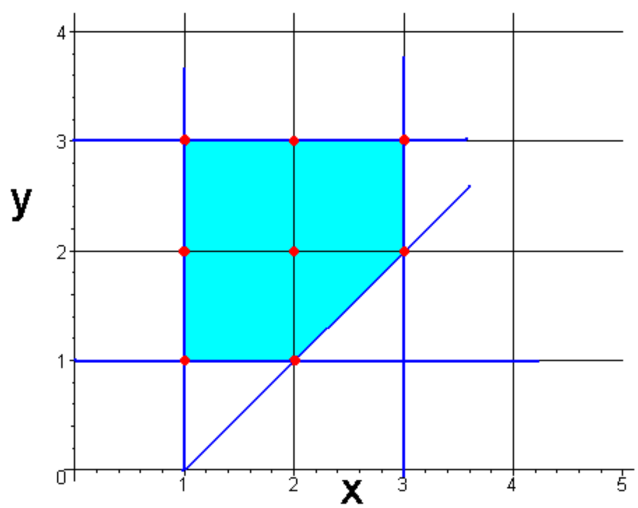
$$Max: F.O.$$
$$s.a.$$
$$D\begin{cases} -2x+y\le 1 \\ 2x+y/2\le 1 \\ 2x/3-y\le 1/3 \\ y\le 7/2 \\ x\le 7/2 \\ x,y\in\mathbb{N} \end{cases}$$



Los puntos marcados en rojo corresponden al dominio D de nuestro problema. El área pintada es el dominio relajado DR. Como los vértices de DR no son enteros, al resolver el problema relajado no obtendríamos las solución óptima entera que buscamos.

Si reformulamos el problema como:

$$Max: F.O.$$
$$s.a.$$
$$D\begin{cases} x-y\le 1 \\ x\ge 1 \\ y\ge 1 \\ y\le 3 \\ x\le 3 \\ x,y\in\mathbb{N} \end{cases}$$



El problema entero es equivalente al anterior (el dominio entero D es el mismo). Sin embargo, el nuevo dominio relajado posee todos sus vértices enteros. Esto permite resolver el problema relajado y obtener directamente la solución óptima del problema entero.

El dominio relajado de D que sólo posee vértices enteros se conoce como **Envoltura Convexa ó *"Convex Hull"*.** Mientras la formulación del problema esté más cercana al *Convex Hull*, más cerca estaremos de encontrar la solución óptima entera resolviendo el problema relajado.

C) MÉTODO B&B (BRANCH & BOUND):

Se basa en resolver el problema en particiones relajadas SR_i del dominio D del problema original.

<u>Idea del Algoritmo:</u>

Si tenemos el problema:

$$Max: c^T X \quad s.a. \quad D\begin{cases} AX \le b \\ x_i \ge 0 \ \forall i \in N \\ x_i \in \mathbb{Z} \ \forall i \in I \subseteq N \end{cases}$$

El problema relajado es:

$$Max: c^T X \quad s.a. \quad DR\begin{cases} AX \le b \\ x_i \ge 0 \ \forall i \in N \end{cases}$$

La idea es definir "n" problemas:

$$P_i) \left.\begin{matrix} Max: c^T X \\ s.a. \\ X \in S_i \end{matrix}\right\} \forall i = 1,..,n$$

Con sus problemas relajados:

$$PR_i) \begin{matrix} Max: c^T X \\ s.a. \\ X \in SR_i \end{matrix}$$

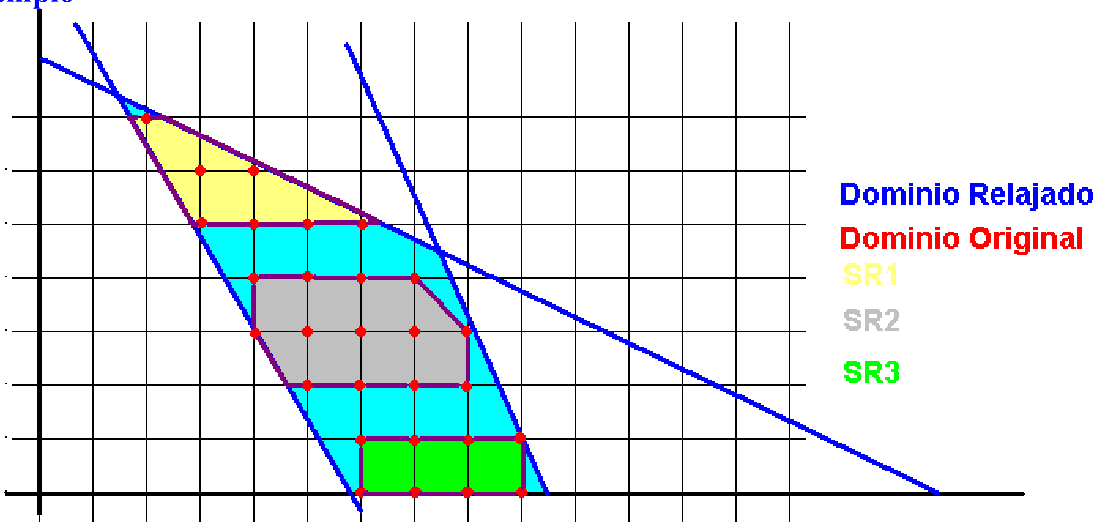
En donde $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = D \ \wedge \ S_i \cap S_j = \emptyset \ (\forall i \neq j)$, pero $\bigcup_{i=1}^{n} SR_i \subset DR$, es decir, se quitan partes fraccionarias en el dominio relajado.

Luego:

Si X_i es la solución óptima de $P_i)$ y $X^R{}_i$ es la solución óptima de $PR_i)$. Entonces la solución óptima del problema original será:

$$X^* = \left\{ X \ : \ c^T X = \max\left(c^T X_i^* : i = 1,..,n \right) \right\}$$

Ejemplo



Descripción del método en la práctica:
Supongamos que P) es el problema de programación entera y PR_0) el problema relajado.

Definimos:

D **:** Dominio del problema entero.
Z **:** Valor óptimo y X^* solución óptima de P).

SR_0 **:** Dominio del problema relajado.
ZR_0 **:** Valor óptimo de la relajación PR_0) y X_0^R solución óptima de la relajación.

Primero resolvemos PR_0):

- Si X_0^R es entero → $X^* = X_0^R$. ¡No hay necesidad de hacer más!
- Si no es entero, debemos aplicar B&B. Este método realiza una partición inteligente del dominio en nuevos problemas que facilitan encontrar vértices enteros sus relajaciones.

  Se va ramificando el dominio según se encuentren soluciones fraccionarias. En cada rama se resuelven estos problemas relajados que se acercan más a la envoltura convexa.

¿Cómo ramificamos? (BRANCH)
Si $X_i^R = [x_1,..,x_n]$ es solución óptima de PR_i, la relajación de P_i, con:

$$\begin{aligned}
&P_i)\\
&Max: C^T X\\
&s.a.\\
&X \in S
\end{aligned}$$

Entonces si tenemos algún $x_k = e + f$, donde e es la parte entera de la solución de x_k y $f \neq 0$ la parte fraccionaria, se agregan los siguientes problemas que sustituyen a P_i:

$$\begin{array}{ll}
P_{i,1}) & P_{i,2}) \\
Max: C^T X & Max: C^T X \\
s.a. & s.a. \\
X \in S & X \in S \\
x_k \le e & x_k \ge e+1
\end{array}$$

¿Cómo resolver los problemas en cada rama?

- Resolución Gráfica (2 variables)
- Problema de Mochila (1 restricción)
- SIMPLEX (Caso General) → Problema: Base crece con más restricciones. Se usa SIMPLEX con cotas (fuera de este curso)

Paramos de ramificar un problema P_i y lo podamos (BOUND) si:

- El problema P_i no tiene dominio factible (La rama hacia abajo tampoco tendrá...)
- $Z_i < I$: El valor óptimo Z_i de la rama es peor que la mejor solución entera encontrada anteriormente llamada **Incumbente**.

  ¿Cómo sabemos cuanto vale Z_i?
  Se puede revisar con ZR_i, ya que $Z_i \leq ZR_i$, cortamos la rama si $ZR_i < I$

- La solución relajada X_i^R es entera ($X_i = X_i^R$ y $Z_i = ZR_i$).

  Si $Z_i > I$ actualizamos el Incumbente haciendo $I = Z_i$ y guardando la mejor solución óptima encontrada hasta el momento.

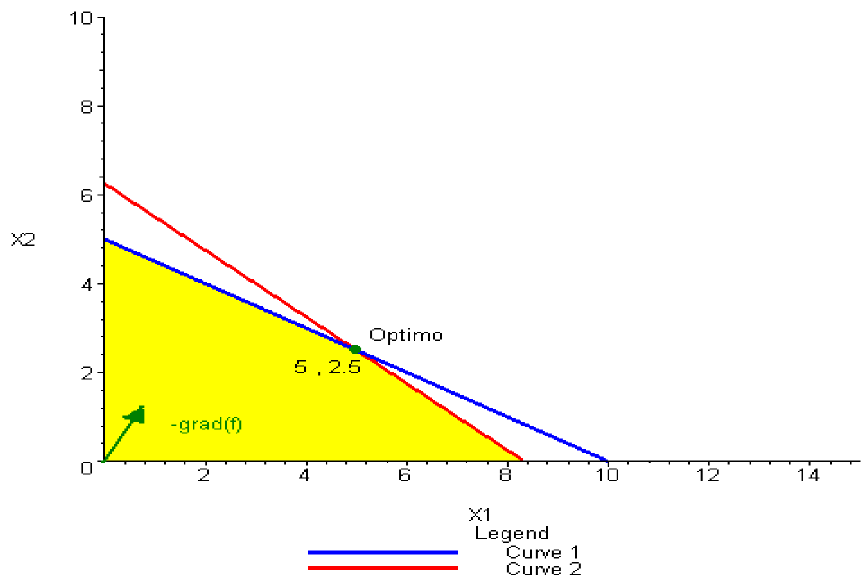
Problema 2: B&B con resoluciones gráficas

Resuelva mediante B&B el siguiente problema P) :

$$Máx: 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 25$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

Respuesta:

Primero: resolvemos el problema relajado:



El óptimo relajado es X_0^R = (5; 2.5) con ZR_0 = 17.5.

Comentarios:

- X_0^R no salió entero y hay que hacer B&B.
- Notemos que tenemos una cota máxima de P) dada por 17
- Por ahora $I = -\infty$

El problema relajado 0 se divide en 2 casos:

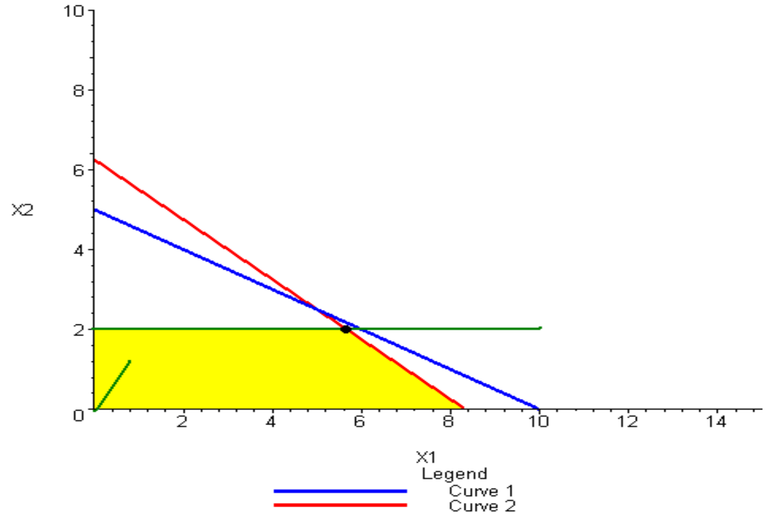
CASO 1:

$$Max: 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 25$$
$$x_2 \le 2$$

CASO2:

$$Max: 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 25$$
$$x_2 \ge 3$$

CASO1:



El óptimo es: X_1^R = (5.67; 2). Luego ZR_1 = 17.333.

Por lo que dividimos en 2 nuevos casos:

CASO 1,1:

$Max: 2x_1 + 3x_2$

$x_1 + 2x_2 \le 10$

$3x_1 + 4x_2 \le 25$

$x_2 \le 2$

$x_1 \le 5$

CASO 1,2:

$Max: 2x_1 + 3x_2$

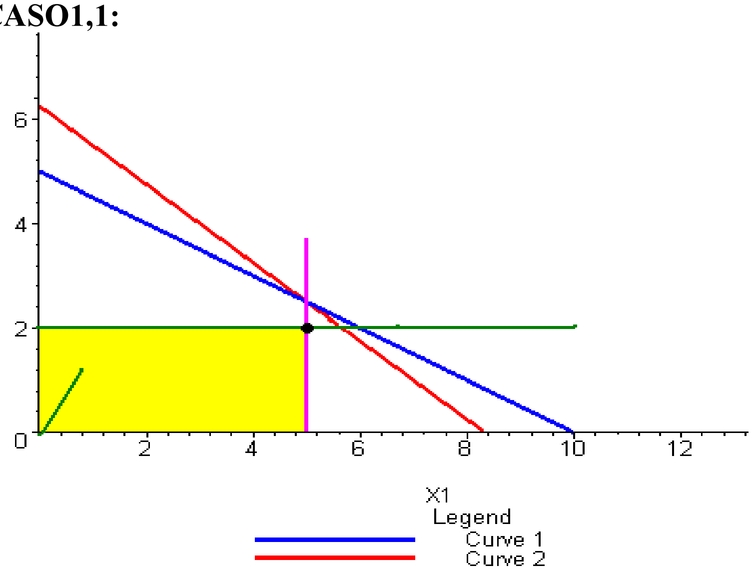
$x_1 + 2x_2 \le 10$

$3x_1 + 4x_2 \le 25$

$x_2 \le 2$

$x_1 \ge 6$

CASO1,1:

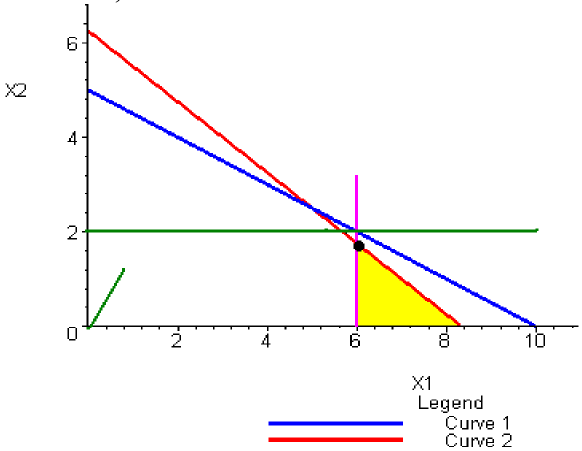


El óptimo es: $x_1 = 5 \wedge x_2 = 2$. Con valor óptimo $\mathbf{ZR_{1,1} = Z_{1,1} = 16.}$

Hemos encontrado una solución entera. Este será nuestro **Incumbente** $(I = 16)$**.** Como sabemos que la solución sólo empeorará al agregar más restricciones, terminamos con esta rama.

Y seguimos resolviendo por la otra rama:

CASO 1,2:



La solución es→ $x_1 = 6 \wedge x_2 = 1.75$ Con $ZR_{1,2} = 17.25$

Dividimos en casos:

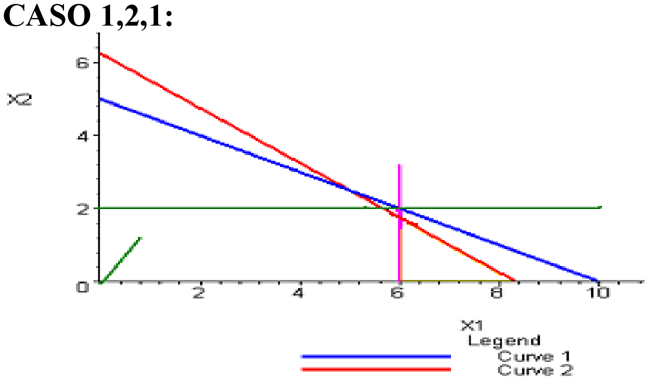
CASO 1,2,1:

$$
\begin{aligned}
&Max: 2x_1 + 3x_2 \\
&x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&3x_1 + 4x_2 \le 25 \\
&x_2 \le 2 \\
&x_1 \ge 6 \\
&x_2 \ge 2
\end{aligned}
$$

CASO 1,2,2:

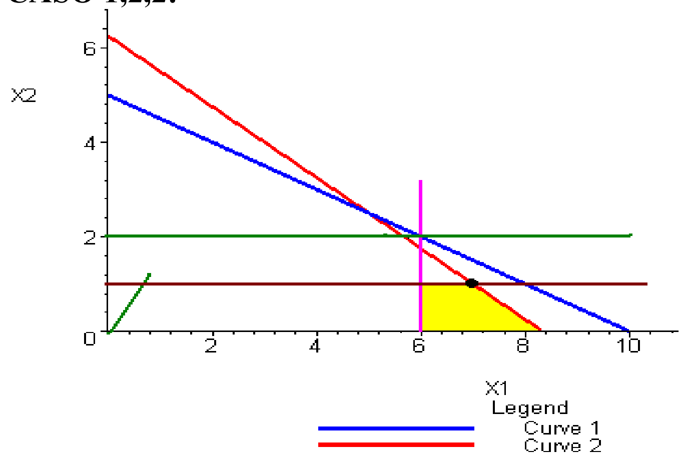
$$
\begin{aligned}
&Max: 2x_1 + 3x_2 \\
&x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&3x_1 + 4x_2 \le 25 \\
&x_2 \le 2 \\
&x_1 \ge 6 \\
&x_2 \le 1
\end{aligned}
$$

CASO 1,2,1:



No tiene solución factible en el dominio. Podamos esta rama.

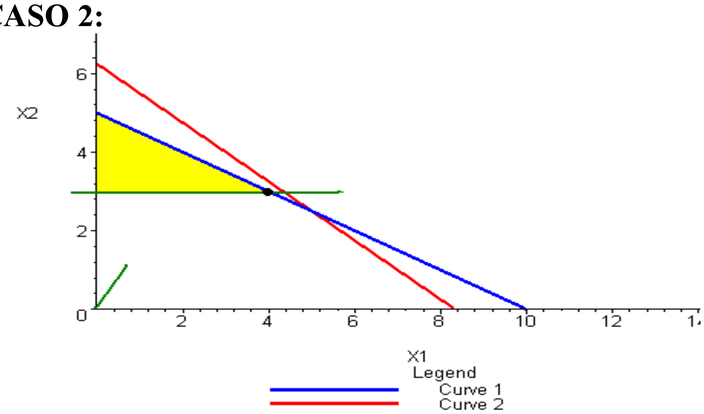
CASO 1,2,2:



El óptimo es: $x_2 = 1 \wedge x_1 = 7$ → **$ZR_{1,2,2} = Z_{1,2,2} = 17$**
Esta solución es entera y es mejor que nuestro Incumbente $(I = 16)$, establecemos un nuevo Incumbente $I = 17$. Terminamos esta rama.

Retomamos por otra rama:

CASO 2:



El óptimo es:
$x_2 = 3 \rightarrow De(1): x_1 = 4$ Luego **$ZR_2 = Z_2 = 17$**. (igual a I = 17)

¡Se nos han acabado las ramas para buscar mejores soluciones!

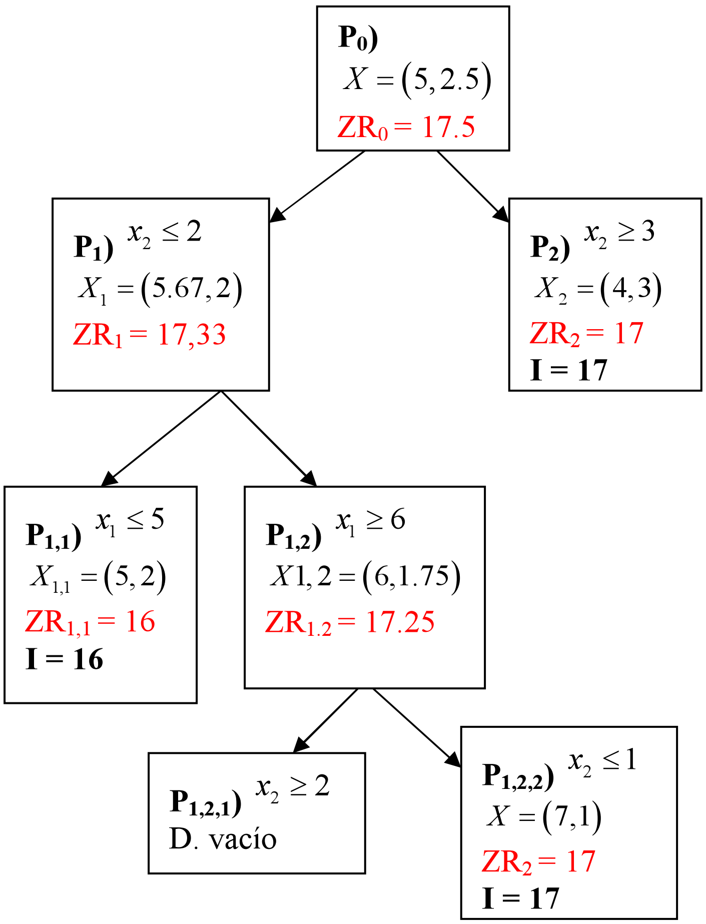
Luego las soluciones óptimas del IP que hemos encontrado son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ con } Z = 17$$

Comentarios:

- ¡Son 2 soluciones! ¡No infinitas! ¡No la combinación convexa!

- Generalmente se hace el árbol de solución, el cual muestra el avance del problema y nos ayuda a ordenarnos:



Problema 3: B&B y SIMPLEX

Resolver mediante Branch & Bound:

$$\begin{aligned}&Max\ 5x+6y+z\\&s.a\\&3x+3y+z\leq 6\\&5x+20y+4z\leq 30\\&x,y,z\geq 0\ \wedge\ x,y,z\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Respuesta:

Resolvamos primero el problema relajado:

$$\begin{aligned}&Max\ 5x+6y+z\\&s.a\\&3x+3y+z\leq 6\\&5x+20y+4z\leq 30\\&x,y,z\geq 0\end{aligned}$$

X	Y	Z	h1	h2	L.D.	Base
3	3	1	1	0	6	h1
5	20	4	0	1	30	h2
-5	-6	-1	0	0	0	

Entra X sale h1.

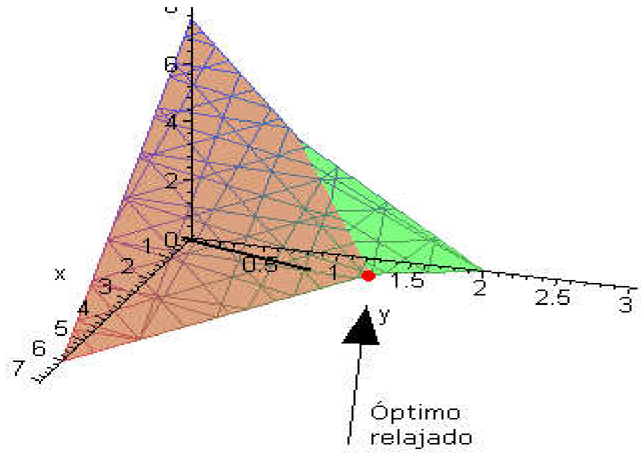
X	Y	Z	h1	h2	L.D.	Base
1	1	1/3	1/3	0	2	X
0	15	7/3	-5/3	1	20	h2
0	-1	2/3	5/3	0	10	

Entra Y sale h2.

X	Y	Z	h1	h2	L.D.	Base
1	0	8/45	4/9	-1/15	2/3	X
0	1	7/45	-1/9	1/15	4/3	Y
0	0	37/45	14/9	1/15	34/3	

Estamos en el óptimo → $X^R{}_0=[2/3\quad 4/3\quad 0]$ y $ZR_0=34/3\approx 11,33$

Gráficamente:

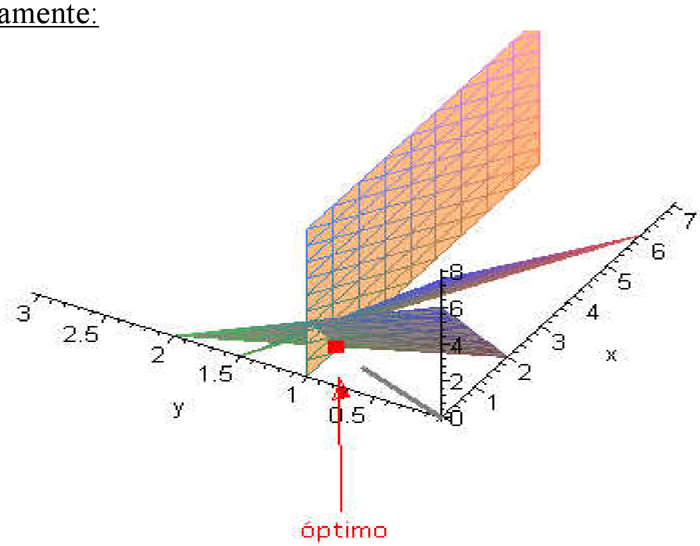


Luego comenzamos la ramificación, ramifiquemos primero Y. Nos quedan 2 subproblemas:

$$\textbf{P1)}\ \begin{aligned} &Max\ 5x+6y+z\\ &s.a\\ &3x+3y+z\le 6\\ &5x+20y+4z\le 30\\ &y\ge 2\\ &x,y,z\ge 0 \end{aligned} \qquad \textbf{P2)}\ \begin{aligned} &Max\ 5x+6y+z\\ &s.a\\ &3x+3y+z\le 6\\ &5x+20y+4z\le 30\\ &y\le 1\\ &x,y,z\ge 0 \end{aligned}$$

- El problema P1) es Infactible, no cumple con la restricción 2 y 3 al mismo tiempo.
- Para resolver el problema 2 podríamos volver a aplicar SIMPLEX, pero cada vez que agreguemos una restricción adicional se nos complica enormemente. Esto pasa, porque aumenta el número de variables (una holgura o exceso más) y restricciones.

Resolvamos Gráficamente:



La solución es $X_2 = X^R{}_2 = [1,1,0]$ y $Z_2 = ZR_2 = 11$

Corroboremos este resultado con análisis matricial:

Nuestra base está compuesta por $x, y, h2$.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C_B = [-5, -6, -1] \wedge C_D = [-11, 0, 0]$$

Luego: $r_D^{\ T} = C_D - C_B B^{-1} D$

$$= [-1, 0, 0] - [-5, -6, 0] \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5/3 & 1 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [2/3, 5/3, 1]$$

Es óptimo. Luego al ser entera la solución cortamos la rama y al no quedar ninguna rama más por buscar: $X^* = [1, 1, 0]$ con valor óptimo $Z = 11$.

Problema 4: Knapsack Problem (Problema de Mochila Binaria)
Resolver mediante Branch & Bound:

$$\begin{aligned}
&Max: 17x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 \\
&s.a. \\
&2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 5 \\
&X \in \{0,1\}^4
\end{aligned}$$

Respuesta:
El problema relajado es:

$$\textbf{Po)}\quad \begin{aligned}
&Max: 17x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4 \\
&s.a. \\
&2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 5 \\
&0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall \text{i=1,..,4}
\end{aligned}$$

¡Es un problema de Mochila continuo!

Definamos primero: Problema de Mochila Continuo
En general el problema de la mochila está dado por:

$$\begin{aligned}
&Max: \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
&s.a. \\
&\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \qquad\qquad Con: a_i, c_i \geq 0 \\
&x_i \geq 0 \ \forall i = 1,..,n \\
&x_i \leq \mu_k \ \forall i = 1,..,n \ \leftarrow \text{ Puede tener cotas}
\end{aligned}$$

Resolución:

- Si no existen cotas en variables:

  Se toma el mayor $r_k = \frac{c_k}{a_k}$ (valor por unidad de volumen) y se asigna todo lo posible de x_k hasta saturar la restricción (Demostración por dualidad).

- Si existen restricciones de cota ($x_k \leq u_k$)

  Se asigna todo lo posible de x_k y luego se procede a tomar el segundo mayor r_k y se repite el algoritmo hasta “llenar la mochila”. Se realiza este procedimiento hasta que no queden más variables o se sature la restricción.

Resolviendo P_0:

P0)
$$\begin{aligned}&Max: 17x_1+5x_2+10x_3+x_4\\&s.a.\\&2x_1+x_2+4x_3+3x_4\le 5\\&0\le x_i\le 1\ \ \forall \text{i=1,..,4}\end{aligned}$$

$r_1=17/2,\ r_2=5,\ r_3=5/2,\ r_4=1/3$

1. Asignamos todo lo posible de x_1, es decir $x_1{*}=1$.
2. Queda 5-2 = 3 de espacio en la mochila. Asignamos todo lo posible de x_2, es decir $x_2{*}=1$.
3. Queda 2 de espacio en la mochila, luego $x_3{*}=1/2$

$$\boxed{X^R{}_0=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1/2 & 0\end{bmatrix}\ \text{con}\ ZR_0=27}$$

Haciendo Branching en x_3:

P1)
$$\begin{aligned}&Max: 17x_1+5x_2+10x_3+x_4\\&s.a.\\&2x_1+x_2+4x_3+3x_4\le 5\\&x_3=0\\&0\le x_i\le 1\ \ \forall \text{i=1,..,4}\end{aligned}\quad\rightarrow\quad\begin{aligned}&Max: 17x_1+5x_2+x_4\\&s.a.\\&2x_1+x_2+3x_4\le 5\\&0\le x_i\le 1\ \ \forall \text{i=1,2,4}\end{aligned}$$

$$\boxed{X^R{}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2/3\end{bmatrix}\wedge ZR_1=23,6666}$$

Haciendo Branching en x_4:

P11)
$$\begin{aligned}&Max: 17x_1+5x_2+10x_3+x_4\\&s.a.\\&2x_1+x_2+4x_3+3x_4\le 5\\&x_3=0\\&x_4=0\\&0\le x_i\le 1\ \ \forall \text{i=1,..,4}\end{aligned}\quad\rightarrow\quad\begin{aligned}&Max: 17x_1+5x_2\\&s.a.\\&2x_1+x_2\le 5\\&0\le x_i\le 1\ \ \forall \text{i=1,2}\end{aligned}$$

$$\boxed{X_{11}=X_{11}{}^R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\wedge ZR_{11}=Z_{11}=22}\rightarrow \mathbf{I=22}$$

P12)

$$\begin{aligned}&Max: 17x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4\\&s.a.\\&2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 5\\&x_3 = 0\\&x_4 = 1\\&0 \le x_i \le 1 \ \ \forall \text{i=1,..,4}\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}&Max: 17x_1 + 5x_2 + 1\\&s.a.\\&2x_1 + x_2 \le 2\\&0 \le x_i \le 1 \ \ \forall \text{i=1,2}\end{aligned}$$

$\boxed{X_{12} = X^R{}_{12} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \wedge Z_{12} = ZR_{12} = 18}$ → Podamos $ZR_{12} < I = 22$

P2)

$$\begin{aligned}&Max: 17x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_4\\&s.a.\\&2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 5\\&x_3 = 1\\&0 \le x_i \le 1 \ \ \forall \text{i=1,..,4}\end{aligned} \rightarrow \begin{aligned}&Max: 17x_1 + 5x_2 + x_4 + 10\\&s.a.\\&2x_1 + x_2 + 3x_4 \le 1\\&0 \le x_i \le 1 \ \ \forall \text{i=1,2,4}\end{aligned}$$

$\boxed{X^R{}_2 = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \wedge ZR_2 = 18,5}$ → Podamos $ZR_2 < I = 22$

No quedan más ramas. El mayor Incumbente es el valor óptimo:

$$\boxed{X = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \wedge Z = 22}$$

D) PLANOS CORTANTES

Un "plano cortante" es una restricción redundante para la formulación entera (no agrega ni quita soluciones enteras), pero elimina soluciones fraccionarias de la relajación. La idea, es llegar al *Convex Hull*. No existe un algoritmo general y depende de la estructura de cada problema en particular.

<u>Algunos tipos de planos cortantes más usados:</u>

1) Cover Inequalities para Problemas de Mochila Binarios

Si tenemos:

$$Max: \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad Con: a_i, c_i \geq 0$$

$$s.a.$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad \forall \mathrm{i} \in \mathrm{N}$$

<u>Definimos un Cover:</u>

Un Cover es un conjunto $C \subseteq N$ tal que $\sum_{i \in C} a_i > b$. Como no pueden ir todos los elementos del Cover juntos en la mochila, se deduce el plano cortante:

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

Donde $|C|$ es el número de elementos en el cover C.

Problema 5: Mochila Binaria

Resolver el problema mediante planos cortantes:

$$\begin{aligned} &Max \quad x_1 + 2x_2 \\ &s.a. \\ &3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ &0 \le x_1, x_2 \le 1 \ \wedge \ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Respuesta:

Relajamos y resolvemos el problema de Mochila Continuo:

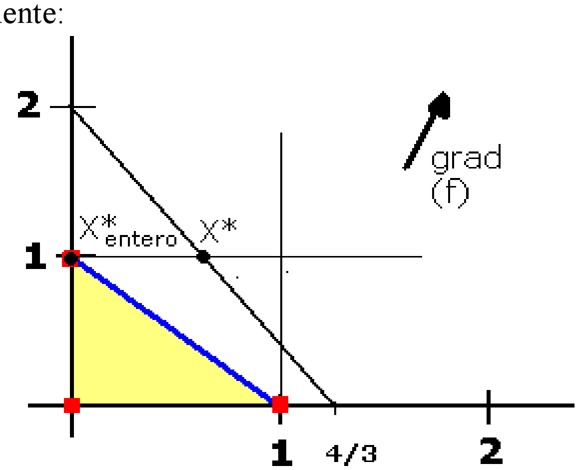
$$\begin{aligned} &Max \quad x_1 + 2x_2 \\ &s.a. \\ &3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ &0 \le x_1, x_2 \le 1 \end{aligned}$$

$$r_1 = 1/3, r_2 = 2/2 = 1 \rightarrow X_0{}^* = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 \end{bmatrix} \ \wedge \ Z_0 = 8/3 \approx 2,67$$

Agreguemos un plano cortante:

Sabemos que $C = \{1,2\}$ es un Cover, pues no pueden ir las dos variables en la mochila. Luego $x_1 + x_2 \le 1$ se agrega como plano cortante.

Resolviendo gráficamente:



■ Soluciones factibles del problema entero

La solución relajada ahora es entera: $X^* = [0,1]$. Con $Z = 2$.

Problema 6:

Un explorador posee de varios implementos, los cuales debe llevar a su próxima travesía por el mundo. Entre ellos cuenta con una carpa con un volumen de 20 Litros , una chaqueta con un volumen de 5 Litros, una linterna con un volumen de 1 Litro, una cocinilla de 6 Litros, un saco de dormir de 10 Litros y una cantimplora de 2 Litros.

Lamentablemente no puede llevar todos sus accesorios ya que dispone de una mochila con 30 Litros de capacidad. Si no puede llevar los implementos deberá comprárselos cada vez que necesite uno. El ahorro por llevar cada uno de los implementos es:

Carpa	Chaqueta	Linterna	Cocinilla	Saco de Dormir	Cantimplora
$50	$20	$2	$5	$6	$1

a) Formule el problema que permita ahorrarle la mayor cantidad de dinero al explorador.
b)¿Puede establecer una cota "a priori" del valor óptimo?
c) Tome el problema como un "Problema de Mochila" y agregue un plano cortante.

Respuesta:
a)
El problema queda:

$$\begin{aligned}&Max: 50x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 + x_6\\&s.a.\\&20x_1 + 5x_2 + x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 2x_6 \leq 30\\&x_i \in \{0,1\}\end{aligned}$$

Primero resolvemos el problema relajado:

$$\begin{aligned}&Max: 50x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 + x_6\\&s.a.\\&20x_1 + 5x_2 + x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 2x_6 \leq 30\\&0 \leq x_i \leq 1\end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned}r_1 &= 2.5\\ r_2 &= 4\\ r_3 &= 2\\ r_4 &\approx 0.83\\ r_5 &= 0.6\\ r_6 &= 0.5\end{aligned} \quad \rightarrow \quad X_0^* = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\2/3\\0\\0\end{bmatrix} \text{ Con } Z_0 \approx 75.33$$

b) Tenemos una cota de 75 para el valor óptimo del problema entero.

b) Agreguemos un plano cortante:

Sabemos que $C = \{1,2,4\}$ es un cover, por lo que agregamos: $x_1 + x_2 + x_4 \le 2$

Luego el siguiente problema posee las mismas soluciones factibles que el problema entero original, pero borra del dominio relajado valores fraccionarios que no nos interesan:

$$\begin{aligned}
&Max: 50x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 + x_6 \\
&s.a. \\
&20x_1 + 5x_2 + x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 2x_6 \le 30 \\
&x_1 + x_2 + x_4 \le 2 \\
&0 \le x_i \le 1
\end{aligned}$$

Solver de Excel arroja la siguiente solución: $X = [1;1;1;0;2/5;0]$ y $Z_1 = 74.4$. La cota del valor óptimo, en este caso, es de 74 (costos enteros). Hay que denotar que cada corte adicional, a pesar de que pueda no entregar una solución óptima para el problema entero, fija una cota superior cada vez mejor.

Sigamos agregando cortes:
Otro cover es $C = \{1,2,5\}$, por lo que agregamos: $x_1 + x_2 + x_5 \le 2$. El problema relajado queda:

$$\begin{aligned}
&Max: 50x_1 + 20x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 + x_6 \\
&s.a. \\
&20x_1 + 5x_2 + x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 2x_6 \le 30 \\
&x_1 + x_2 + x_4 \le 2 \\
&x_1 + x_2 + x_5 \le 2 \\
&0 \le x_i \le 1
\end{aligned}$$

Solver entrega: $X = [1,1,1,0,0,1]$ que es también óptima en el problema binario, con valor óptimo 73.

2) Planos Cortantes de Gomory

- Este método funciona sólo para problemas que contienen únicamente variables enteras (Puede extenderse, pero queda fuera de la materia del curso).

- Usa el TABLEAU del problema relajado óptimo como punto de partida, tomando una restricción en donde el lado derecho es fraccionario.

$$X_B{}^j + \sum_{i=1}^{n-m} a_{ij} X_{NB}{}^i = d_j \qquad con\ d_j \notin \mathbb{Z}$$

- Como $X_B{}^j$ debe ser entera, su valor no puede ser más que $\lfloor d_j \rfloor$ (d_j truncado al entero inferior). Luego las variables no básicas deben tener asignado al menos la diferencia agregando el siguiente corte:

$$\sum_{i=1}^{n-m} f_{ij} X_{NB}{}^i \geq f_d{}^j \quad \text{Con:} \quad \begin{aligned} f_{ij} &= a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor \\ f_d{}^j &= d_j - \lfloor d_j \rfloor \end{aligned}$$

- Este corte asegura que el exceso de esta restricción sea también entero.

Problema 7: El mismo que hicimos con B&B.......

Resolver por planos cortantes de Gomory:

$$\begin{aligned} &Min: 2x_1 + 3x_2 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 10 \ (1) \\ &3x_1 + 4x_2 \leq 25 \ (2) \\ &x_1, x_2 enteros \end{aligned}$$

Respuesta:

El tableau óptimo del problema relajado es:

X1	X2	h1	H2	L.D.	Base
0	1	1,5	-0.5	2.5	X2
1	0	-2	1	5	X1
0	0	0.5	0.5	17.5	

No tenemos solución entera. Tomamos la restricción que presenta una solución básica fraccionaria (en gris):

$$x_2 + 1.5h_1 - 0.5h_2 = 2,5$$

Y separamos la parte entera de la fraccionaria redondeando hacia abajo:

$$(x_2 + h_1 - h_2) + (0,5h_1 + 0,5h_2) = (2) + (0,5)$$

Agregamos como corte a:

$$0,5h_1 + 0,5h_2 \geq 0,5 \ (*)$$

Obteniendo de (1) y de (2):

$$h_1 = 10 - x_1 - x_2$$
$$h_2 = 25 - 3x_1 - 4x_2$$

Y reemplazando en (*) se obtiene un corte equivalente:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 17$$

Luego se resuelve:

$$Min: 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \ (1)$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 25 \ (2)$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 17 \ (3)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

El tableau óptimo es:

X1	X2	h1	h2	h3	L.D.	Base
1	0	-3	0	2	4	X1
0	1	2	0	-1	3	X2
0	0	1	1	-2	1	h2
0	0	0	0	1	17	

Luego se tiene solución entera. Si no la hubiéramos obtenido, procedemos de la misma forma que antes, tomando la restricción fraccionaria.

Vemos que hay un costo reducido no básico nulo, por lo que existe solución múltiple. Debemos ver si con una iteración más nos queda otra solución entera:

X1	X2	h1	h2	h3	L.D.	Base
1	0	0	3	-4	7	X1
0	1	0	-2	3	1	X2
0	0	1	1	-2	1	h1
0	0	0	0	1	17	

Efectivamente había otra solución entera (Las mismas 2 del problema por B&B)....

La otra solución entera podría no haber estado en un vértice, sino que dentro del trazo óptimo relajado. Habría que buscar integralidad en la combinación convexa lo que es muy difícil.

Problema 8:
Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned}
&Max: 14x_1 + 18x_2 \\
&s.a. \\
&-x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
&7x_1 + x_2 \leq 35 \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{N} + \{0\}
\end{aligned}$$

El TABLEAU óptimo del problema relajado es el siguiente:

x_1	x_2	h_1	h_2	
0	1	$7/22$	$1/22$	$7/2$
1	0	$-1/22$	$3/22$	$9/2$
0	0	$56/11$	$30/11$	-126

Identifique un corte de Gomory y resuelva gráficamente el nuevo problema relajado.

Respuesta:
Tomando la primera restricción dada por: $x_2 + \frac{7}{22}h_1 + \frac{1}{22}h_2 = \frac{7}{2}$ se puede descomponer en: $x_2 + 0h_1 + 0h_2 - 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{22}h_1 - \frac{1}{22}h_2$. Por lo tato se identifica el siguiente corte de Gomory:

$$\frac{7}{22}h_1 + \frac{1}{22}h_2 \geq \frac{1}{2}.$$

Para representar esta restricción en función de x_1 y de x_2, utilizamos la restricción (1) y (2) del problema original:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= 6 + x_1 - 3x_2 \\ h_2 &= 35 - 7x_1 - x_2 \end{aligned}\right\} 11 - 7(6 + x_1 - 3x_2) - 1(35 - 7x_1 - x_2) \leq 0 \qquad \rightarrow \qquad x_2 \leq 3$$

En el siguiente gráfico se aprecia el dominio del problema relajado en gris, y el dominio del problema entero como puntos negros. El corte de Gomory aparece como CG en la figura, y la curva de nivel óptima de la función objetivo aparece como F.O. El óptimo es igual a $X = [4,3]$.