Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – sección 2

PROFESOR: Juan Carlos Muñóz
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía N°1: Modelación

Algunos comentarios:

El proceso de optimización se puede resumir en tres grandes etapas: Modelación, Resolución y Análisis de Resultados.

La modelación consiste en llevar un problema real a un conjunto de expresiones matemáticas, que representan las características principales del problema, las cuales son de interés para el modelador y el objetivo de este.

El formato de un modelo de optimización se puede resumir como:

$$\boxed{\begin{array}{c} Max(Min):\ F(\vec{X}) \\ s.a. \\ \vec{X} \in \Omega \end{array}}$$

En la expresión encontramos:

a) **Variables de decisión →** $\vec{X}$

Representan las condiciones del problema que el modelador puede manipular

Ej: Dinero invertido en un proyecto, horas hombre asignadas a un trabajo, proyectos elegidos, camino elegido, etc.....

b) **Función objetivo →** $Max(Min):\ F(\vec{X})$

Es un escalar en función de las variables, que se pretende maximizar (o minimizar). Representa el objetivo del problema.

Ej: Max Ingreso, Min Costos, Max Utilidad, Min Tiempo, Min Distancia, Max Probabilidad.

c) **Dominio →** Ω

Son restricciones a los posibles valores que pueden tomar las variables. Existen:

a. Restricciones que describen relaciones entre vars. ($x_1 \geq x_2 + x_3,\ x_1 = x_2^{x_3}$)
b. Restricciones que acotan variables ($3 \leq x_1 \leq 7,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \leq 0$)
c. Restricciones de conjunto ($x_1 \in \mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = \{0,1\}$)

OJO: ¡Una restricción siempre involucra a variables en ella, de lo contrario, es tan sólo un dato del problema, sobre el cual no se toman decisiones!

Ejercicios:

1. Empresa Vitivinícola

Una empresa elaboradora de vinos de exportación posee 2 bodegas procesadoras, las cuales son abastecidas por 2 viñedos (campos). Las bodegas tienen distintas capacidades de procesamiento diario (toneladas de uva por día) y cada viñedo está a una cierta distancia de cada bodega. Es importante mencionar que en cada viñedo, por restricciones de mano de obra y por capacidad logística, no se puede extraer más de 400 toneladas de uva diariamente. Considere los datos que se muestran en la siguiente tabla:

	Distancia al Viñedo 1 (Km)	Distancia al Viñedo 2 (Km)	Capacidad $(\frac{Tons}{día})$
Bodega 1	48	41	480
Bodega 2	34	36	600

Dado el alto precio del petróleo, a esta empresa le interesa minimizar su costo total de transporte, dado que éste le cuesta $150/kilómetro/tonelada de uva. La empresa debe procesar un mínimo de 600 toneladas de uva diariamente.

Formule un modelo que minimice el costo de transporte diario.

Respuesta:

Variables de decisión:
X_{ij} : Toneladas de uva que son transportadas del viñedo $i=\{1,2\}$ a la bodega $j=\{1,2\}$.

Función objetivo:

$$Min\ 150\left(48X_{11} + 34X_{12} + 41X_{21} + 36X_{22}\right)$$

Restricciones:
→ Capacidad de Producción en Bodegas:

$$X_{11} + X_{21} \leq 480$$
$$X_{12} + X_{22} \leq 600$$

→ Restricciones de Extracción en Viñedos

$$X_{11} + X_{12} \leq 400$$
$$X_{21} + X_{22} \leq 400$$

→ Restricciones de Producción Diaria:

$$X_{11} + X_{21} + X_{12} + X_{22} \geq 600$$

→ No negatividad

$$X_{ij} \geq 0\ \forall (\mathrm{i,j}) \in \{1,2\} \times \{1,2\}$$

2. Empresa Constructora

Una empresa constructora debe llevar adelante un gran proyecto de edificación. Para esto, es necesario realizar una serie de actividades (eventualmente pueden ser cientos), cada una de las cuales toma una cierta cantidad de tiempo. Por otro lado, no todas las actividades pueden hacerse al mismo tiempo, ya que algunas son prerrequisito para otras (por ejemplo, antes de construir los cimientos debe hacerse la excavación). Consideremos entonces, en forma general, que es necesario programar un total de n actividades para un proyecto, donde la actividad i tiene una duración t_i horas, $i = 1,..,n$. Las precedencias o requisitos de esta actividad se definen como un conjunto $P_i \subset \{1,..,n\}$ de otras actividades tales que i no puede efectuarse si no se han terminado las actividades dentro del conjunto P_i. Escriba un modelo de optimización que permita programar el proyecto, es decir, determinar cuando deben realizarse las actividades de modo tal que la duración total del proyecto sea mínima.

Respuesta:

Variables de decisión:

X_i = Tiempo en el cual termina de procesarse la actividad i, con $i \in (1,..,n)$.

X_F = Tiempo total del proyecto.

Función objetivo:

$$Min: X_F$$

Restricciones:

→ Tiempo final mayor a todo tiempo:

$$X_F \geq X_i \quad \forall i = 1,..,n$$

→ Tarea no termina antes de lo que demora:

$$X_i \geq t_i \quad \forall i = 1,..,n$$

→ Ordenamiento de tareas:

$$X_i \geq X_j + t_i \quad \forall i = 1,..,n / P_i \neq \emptyset, \forall j \in P_i$$

→ Conjunto:

$$X_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1,..,n$$

3. Empresa productora de Zapatos con costos fijos

Un empresa puede producir zapatos en 6 máquinas diferentes. La siguiente tabla resume los costos de manufactura asociados con la producción de zapatos. En ella se distinguen costos fijos por utilizar la máquina, costos unitarios por zapato producido y la capacidad disponible en cada una de ellas. Si la compañía ha recibido una orden por 1800 zapatos.¿Cómo debería la empresa programar estas máquinas?

máquina	Costo Fijo	Costo Unitario	Capacidad
#	$	$/unidad	unidades
1	1000	21	500
2	950	23	600
3	875	25	750
4	850	24	400
5	800	20	600
6	700	26	800

Respuesta:

Variables de decisión:

X_i= Unidades producidas en la máquina i, con $i \in (1,..,6)$.

Y_i= Variable binaria, vale 1 si se produce en máquina i y 0 si no.

Función objetivo:

$$Min: \sum_{i=1}^{6} Cunitario_i X_i + \sum_{i=1}^{6} Cfijo_i Y_i$$

Restricciones:

→ Satisfacción de la orden:

$$\sum_{i=1}^{6} X_i = 1800$$

→ Si se ocupa la máquina, se produce menos que la capacidad, si no se ocupa, no se produce:

$$X_1 \le 500Y_1 \qquad X_2 \le 600Y_2$$
$$X_3 \le 750Y_3 \qquad X_4 \le 400Y_4$$
$$X_5 \le 600Y_5 \qquad X_6 \le 800Y_6$$

→ No negatividad y restricciones de conjunto:

$$X_i \ge 0 \quad \forall i = 1,..,6$$
$$Y_i \in \{0,1\} \quad \forall i = 1,..,6$$

4. Problema de distribución eléctrica

Una empresa del sector eléctrico posee m centrales de generación con las que puede abastecer a p centros de consumo. El centro de consumo j (j = 1,...,p) tiene una demanda igual a "d_j " MW (mega-Watts) de potencia. La central generadora i (i =1,...,m) tiene una capacidad máxima de generación de "K_i " MW, cumpliéndose que la cantidad ofrecida es mayor a la cantidad demandada, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} K_i \geq \sum_{j=1}^{p} d_j$$

Debido a los tendidos eléctricos, existe un costo de transmisión si una central abastece a un centro de consumo. Específicamente, el costo de enviar una cantidad igual a "v" MW desde la central i al el centro de consumo j, sigue un patrón no lineal, dado por la función $f(v)$, tal que $f(0) = 0$. Por otra parte, la generación eléctrica en la central i tiene un costo. Sea "e_i" el costo de generar un MW en la central i.

a) Escriba un modelo de optimización que permita determinar la política óptima de generación eléctrica que permita satisfacer la demanda a costo mínimo.

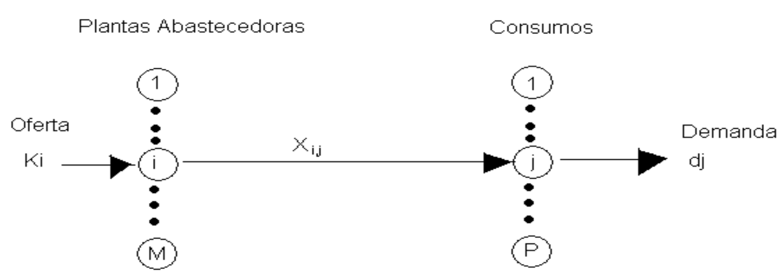
b) Suponga ahora que existe un subconjunto de las centrales, T $\subseteq$ {1,...,m} tales que para esas centrales, existe un costo de partida en el cual se incurre si esta se pone en marcha (tal es el caso, por ejemplo, de las centrales térmicas, no así las hidroeléctricas). Sea H_i el costo fijo de partida en el que se incurre si se usa la central $i \in$ T. Agregue (o modifique) las variables y restricciones necesarias al modelo de a) para incorporar ahora este costo en la formulación (no necesita escribir todo el modelo nuevamente, defina las eventuales nuevos elementos e indique donde se agregan).

Respuesta

a)

Variables de Decisión:

$X_{i,j}$: = MW producidos en central i que son consumidos en j



Función Objetivo:

$$Min : Costos\ Transp. + Costos\ Generac.$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{P} f(X_{i,j}) + \sum_{i=1}^{M} \left(e_i \left(\sum_{j=1}^{P} X_{i,j} \right) \right)$$

Restricciones:

→Satisfacción de demanda (todo lo que llega a centro 'j' igual a lo que demanda 'j'):

$$\sum_{i=1}^{M} X_{i,j} = d_j \ \forall j \in \{1,..,P\}$$

→Satisfacción de oferta (todo lo que sale de planta 'i' menor a la máxima oferta):

$$\sum_{j=1}^{P} X_{i,j} \leq K_i \ \forall i \in \{1,...,M\}$$

→No negatividad y conjunto:

$$X_{i,j} \geq 0 \ \wedge \ X_{i,j} \in \mathbb{R} \quad \forall (i,j) \in (1,...,M) \times (1,...,P)$$

b)

Se agrega la variable de decisión binaria que representa la actividad de una central:

$$Y_i = \begin{cases} 1 \text{ si planta "i" produce} \\ 0 \text{ si no} \end{cases} \quad \forall i \in T$$

El modelo quedaría:

$$Min: Costos\ Transp. + Costos\ Gen. = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{P} f\left(X_{i,j}\right) + \sum_{i=1}^{M} \left(e_i \left(\sum_{j=1}^{P} X_{i,j}\right)\right) + \sum_{i \in T} \left(H_i Y_i\right)$$

s.a.

→Restricciones parte a)

+

→ Relación entre ambas variables:

$$Y_i * M \geq \sum_{j=1}^{P} X_{i,j} \quad \forall i \in T$$

(Con un $M \to \infty$, es decir un número lo suficientemente grande)

→ Conjunto de variable binaria:

$$Y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in T$$

5. Maquinarias Inc.

La empresa Maquinarias Inc. ha construido una planta para la producción de n tipos de productos. El gerente de producción necesita definir un plan de producción para los próximos T periodos. Su objetivo es minimizar los costos totales de producción.

Cada productos debe pasar por q procesos . El tiempo (horas hombre) requerido por un producto tipo i en el proceso j durante el periodo t es $b_{i,j,t}$. Adicionalmente cada producto requiere pasar por cada una de las m máquinas existentes en la planta. El tiempo (en horas) que requiere el producto i en la máquina k es $a_{i,k}$. Actualmente se cuenta con $HH_{j,t}$ horas hombre para el proceso j en el periodo t y se cuenta con $HM_{k,t}$ horas hombre para operar la máquina k en el periodo t.

La empresa espera para el periodo t una demanda por el producto i de $D_{i,t}$ unidades. Esta demanda debe ser satisfecha. Sin embargo, es posible mantener en inventario productos que serán entregados en períodos futuros. Cada producto i ocupa un volumen en bodega de v_i. La capacidad máxima (en volumen) de almacenamiento de la bodega es V. La empresa enfrenta un costo de $C_{i,t}$ por cada producto de tipo i que queda en almacenaje al final del periodo t. El costo unitario de producción de productos tipo i en el periodo t es $Q_{i,t}$.

Para enfrentar la producción, la empresa puede solicitar horas extras a su personal actual o contratar más personal (por hora) tanto para procesos o para trabajos en máquinas. El valor de la hora extra (de su personal actual) en el proceso j durante el periodo t es $ep_{j,t}$ y en la máquina k durante el periodo t es $em_{k,t}$. El valor de la hora de personal adicional en el proceso j durante el periodo t es $ap_{j,t}$ y en la máquina k durante el periodo t es $am_{k,t}$. Las horas extra que se pueden solicitar al personal no puede exceder un 30% de las horas actuales contratadas. No se puede solicitar horas extra a un trabajador para que trabaje en una función distinta a la propia. Asuma que al final de cada periodo no quedan productos incompletos. Asuma que el sistema está actualmente sin inventarios.

Formule un problema de programación lineal que preemitía decidir la programación de mínimo costo para la planta. En su solución indique primero cuáles son sus variables de decisión.

Respuesta:

Variables:

$x_{i,t}$: Cantidad de producto i a producir en periodo t .

$I_{i,t}$: Inventario de producto i almacenado al final del periodo t (disponible en $t+1$).

$ye_{j,t}$: Horas extra de personal actual en el periodo t para el proceso j.

$ya_{j,t}$: Horas extra de personal adicional en el periodo t para el proceso j.

$ze_{k,t}$: Horas extra de personal actual en el periodo t para la máquina k.

$za_{k,t}$: Horas extra de personal adicional en el periodo t para la máquina k.

Función objetivo:

$$Min: \underbrace{\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} Q_{i,t}x_{i,t}}_{\text{Costo de produccion}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} C_{i,t}I_{i,t}}_{\text{Costo de inventario}} +$$

$$\underbrace{\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{q} ye_{j,t}ep_{j,t} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{m} ze_{k,t}em_{k,t} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{q} ya_{j,t}ap_{j,t} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{m} za_{k,t}am_{k,t}}_{\text{Costo horas extra}}$$

Restricciones:

1) Horas en procesos → $\sum_{i=1}^{n} b_{i,j,t}x_{i,t} \le HH_{j,t} + ye_{j,t} + ya_{j,t} \quad \forall j = 1,..,q \ \forall t = 1,..,T$

2) Horas en máquinas → $\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}x_{i,t} \le HM_{k,t} + ze_{k,t} + za_{k,t} \quad \forall k = 1,..,m \ \forall t = 1,..,T$

3) Horas extra en procesos → $ye_{j,t} \le 0.3HH_{j,t} \forall j = 1,..,q \ \forall t = 1,..,T$

4) Horas extra en máquinas → $ze_{k,t} \le 0.3HM_{k,t} \forall k = 1,..,m \ \forall t = 1,..,T$

5) Inventario → $I_{i,t} = x_{i,t} + I_{i,t-1} - D_{i,t} \quad \forall i = 1,..,n \ \forall t = 1,..,T$

6) Inventario inicial → $I_{i,o} = 0 \ \forall i = 1,...,n$

7) Inventario positivo → $I_{i,t} \ge 0 \ \forall i = 1,...,n \ \forall t = 1,...,T$

8) Capacidad de bodega → $\sum_{i=1}^{n} I_{i,t}v_i \le V \ \forall t = 1,...,T$

9) Producción positiva → $x_{i,t} \ge 0 \ \forall i = 1,..,n \ \forall t = 1,..,T$

10) Horas extra de proc. positivas → $ye_{j,t}, ya_{j,t} \ge 0 \ \forall j = 1,..,q \ \forall t = 1,..,T$

11) Horas extra de maq. positivas → $ze_{k,t}, za_{k,t} \ge 0 \ \forall k = 1,..,m \ \forall t = 1,..,T$

6. Problema de asignación de tareas

Una empresa tiene M trabajadores y N tareas que se deben completar en el día. Cada trabajador está capacitado para realizar cualquier tarea y sólo puede realizar una diaria. Asuma que $M > N$, para que el problema sea factible. El costo de la empresa al asignarle la tarea i al trabajador j es d_{ij}. La empresa quiere minimizar costo asociado a realizar estas tareas.

Respuesta:

Variables:

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si se asigna la tarea i al trabajador j} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si no} \end{cases}.$$

Función Objetivo:

$$Min: \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} d_{i,j} X_{i,j}$$

Restricciones:

→ Cada tarea debe ser realizada una vez:

$$\sum_{j=1}^{M} X_{i,j} = 1 \;\; \forall i = 1,..,N$$

→ Un trabajador no puede realizar más de una tarea:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{i,j} \leq 1 \;\; \forall j = 1,..,M$$

→Restricción de Conjunto:

$$X_{i,j} \in \{0,1\} \;\; \forall (i,j)$$

7. Compañía de inversiones

Una compañía de inversiones dispone de un fondo inicial igual a K millones de dólares para invertir a lo largo de los doce meses de un año. Existen un total de M instrumentos de inversión, que al final del mes, entregan una cierta rentabilidad. En cada mes, debe decidirse en cuáles instrumentos invertir el dinero disponible (es decir, lo que tengo del fondo inicial, más las ganancias acumuladas) y en qué cantidad. Sea $\alpha_{i,t}$ la rentabilidad que se obtiene al final del mes t de invertir un peso en el instrumento i al comienzo del mes (expresada en fracción, por ejemplo, α_{it}= 1,03 corresponde a un 3%). Suponga que todas las rentabilidades α_{it} son mayores que 1. El problema se complica adicionalmente debido a que existen restricciones a las inversiones, las que se expresan del siguiente modo. Sea $J_1 \subset \{1,...,M\}$ un cierto conjunto de instrumentos, y $J_2 \subset \{1,...,M\}$, otro, con $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, es decir, son excluyentes entre sí. Esto significa que si en algún periodo de tiempo se invierte en algún instrumento de J_1, entonces no puede invertirse en ningún instrumento de J_2 y viceversa. Además para cada instrumento, en cada periodo de tiempo, existe un límite de inversión dado por U_{it}. Escriba un modelo de optimización que permita determinar el plan óptimo de inversión, es decir, aquel que maximiza los retornos al final del año, cumpliendo las restricciones indicadas.

Respuesta:

Variables de decisión:

$X_{i,t}$: cantidad de dinero invertido en instrumento i en el periodo t,

$\forall i = 1,..,M \;\; y \;\; \forall t = 1,..,T$.

${Y^1}_t$: variable binaria

$$\begin{cases} 1 \text{ si se invierte en } \mathrm{J}_1 \text{ en el periodo t, o sea, si } \sum_{i \in J_1} X_{it} > 0 \\ 0 \text{ si no se invierte en } \mathrm{J}_1 \text{ en el periodo t, o sea, si } \sum_{i \in J_1} X_{it} = 0 \end{cases}, \quad \forall t = 1,..,T$$

${Y^2}_t$: variable binaria

$$\begin{cases} 1 \text{ si se invierte en } \mathrm{J}_2 \text{ en el periodo t, o sea, si } \sum_{i \in J_2} X_{it} > 0 \\ 0 \text{ si no se invierte en } \mathrm{J}_2 \text{ en el periodo t, o sea, si } \sum_{i \in J_2} X_{it} = 0 \end{cases}, \quad \forall t = 1,..,T$$

El modelo a optimizar es el siguiente (con N un número suficientemente grande):

$$Max : \sum_{i=1}^{M} \alpha_{iT} X_{iT} \ \ , \ \ con\ T = 12$$

s.a.

→ Se invierte todo el dinero al comienzo

$$\sum_{i=1}^{M} X_{i1} = K$$

→ Relación: dinero al final de "t" = dinero al comienzo de "t+1"

$$\sum_{i=1}^{M} \alpha_{it} X_{(i,t)} = \sum_{i=1}^{M} X_{(i,t+1)}, \ \forall t = 1,..,11$$

→ Relación con las variables binarias

$$\sum_{i \in J_1} X_{it} \leq Y_t^1 N, \forall t = 1,..,12$$

$$\sum_{i \in J_2} X_{it} \leq Y_t^2 N, \forall t = 1,..,12$$

→ No se puede invertir en ambos conjuntos

$$Y_t^1 + Y_t^2 = 1, \forall t = 1,..,12$$

→ Conjunto, cotas y no negatividad

$$Y_t^1 \in \{1, 0\}, \ \ \forall t = 1,..,12$$

$$Y_t^2 \in \{1, 0\}, \ \ \forall t = 1,..,12$$

$$0 \leq X_{i,t} \leq U_{it} \ \ \forall i \forall j$$