Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2,3 y 4

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Pablo Rey , Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía Nº7: Método de Lagrange

REPASO:

Si $f(X)$ diferenciable, con $X=[x_1,x_2,....,x_n]$ un vector de variables, el método sirve para:

$$\text{P)}\qquad \begin{aligned} & Min\ f(X) \\ & s.a. \\ & g_j(X)=b_j\ \forall j=\{1,..,m\} \end{aligned}$$

Lagrangeano:

Para el problema P) es posible construir un problema equivalente con el Lagrangeano:

$$Min: L(X,\mu)=f(X)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j(g_j(X)-b_j)$$

→ La variable μ se llama "multiplicador de Lagrange" (Hay una por restricción)

Punto regular:

Se dice que X es punto regular si la matriz Jacobiana de las restricciones evaluada en X es de rango máximo (Filas L.I.) . Es decir:

$$RANGO\big(J(X)\big)=RANGO\left(\begin{bmatrix}\nabla g_1(X)\\ .\\ .\\ \nabla g_m(X)\end{bmatrix}\right)=m$$

Condición Necesaria y Suficiente para ser un Mínimo Local (sólo puntos regulares):

<u>1</u>

1er Orden:

Condición Necesaria (Condiciones de Lagrange):

$$(1)\ \ \frac{dL}{dx_i}(X^*,\mu^*)=0\ \ \forall i=\{1,..,n\}$$

$$(2)\ \ \frac{dL}{d\mu_j}(X^*,\mu^*)=0\ \ \forall j=\{1,..,m\}$$

2do Orden:

Condición Necesaria:

Si X* cumple la condición de 1er orden y $\Delta d^T H\left(L(X^*,\mu^*)\right)\Delta d\geq 0,\ \ \forall\Delta d\neq 0$.

Condición Suficiente:
Si X* cumple la condición de 1[er] orden y $\Delta d^T H\left(L(X^*,\mu^*)\right)\Delta d > 0, \quad \forall \Delta d \neq 0$

OJO→
Se tiene que cumplir para Δd, vector elemento de las direcciones de las restricciones. Si se satisface para todo Δd, obviamente se satisface para un Δd en particular, pero basta con las direcciones de las restricciones.

Comentarios acerca de Mínimos Globales:

1) Si P) es convexo:
Si X* cumple CN de primer orden, entonces X* es solución óptima del problema.

2) Si P) no es convexo:
Hay que probar existencia y después evaluar cuál de los candidatos al óptimo minimiza el objetivo. Este será la solución óptima.

OJO:
Si existen puntos singulares, estos deberán probarse aparte.

Interpretación de los Multiplicadores de Lagrange:

Si tenemos una restricción del tipo $g_j(X) = b_j$, entonces para un punto (X^*, μ^*):

$$\frac{dL(X^*,\mu^*)}{db_j} = \frac{df(X^*)}{db_j} = -\mu_j^*$$

El multiplicador de Lagrange con signo negativo nos dice cuanto podría variar la función objetivo si variara la parte derecha de la restricción en una unidad.

Se deduce la siguiente aproximación para un Δb_j pequeño:

$$\Delta f(X^*) \approx -\Delta b_j \mu_j^*$$

Problema 1:

Considere el siguiente problema de programación no lineal:

$$Max: x_2x_3 - (x_1 - 1)^2$$
$$s.a.$$
$$x_1 + x_3 = 10$$
$$2x_2 + x_3 = 5$$

a) Verifique la existencia de una solución óptima.
b) Escriba explícitamente la función de Lagrange para el problema.
c) ¿Cuáles son las condiciones de Lagrange?
d) En base a estas condiciones, encuentre todos los puntos críticos para el problema e identifique el óptimo.
e) Si le dieran a escoger aumentar en 0,1 unidades el lado derecho de cualquiera de las 2 restricciones. ¿Cuál aumentaría? ¿Por qué?

Respuesta:

a) Ocupando el Teorema de Existencia de Solución:

- Vemos que la F. O. es continua, ya que es suma de funciones continuas.
- El dominio es cerrado (sólo existen restricciones del tipo =)
- El dominio es no vacío (solución factible: $x_1=0$, $x_3=10$, $x_2=2$)
- La función no diverge al infinito negativo:

  De la primera restricción: $x_1 = 10 - x_3$

  De la segunda restricción: $x_2 = \dfrac{5 - x_3}{2}$

  Reemplazando en la F.O. tenemos: $-(\dfrac{5 - x_3}{2})x_3 + 5(-x_3 + 9)^2$

  Por lo que si x_3 tiende al infinito negativo o positivo, la función siempre tiende al infinito positivo (no se minimiza eternamente).

Esto nos asegura existencia de solución óptima.

b) Tomando el problema equivalente de minimización:

$$Min: -x_2x_3 + (x_1 - 1)^2$$
$$s.a.$$
$$x_1 + x_3 = 10$$
$$2x_2 + x_3 = 5$$

Se tiene: $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Vemos a priori que el Jacobiano es de rango máximo = 2, por lo que podemos usar las condiciones de Lagrange para todos los puntos.

La función de Lagrange es:

$$L(X,\mu)=(-x_2x_3+(x_1-1)^2)+\mu_1(x_1+x_3-10)+\mu_2(2x_2+x_3-5)$$

c) Las condiciones serían:

$$\frac{dL}{dx_1}=2x_1-2+\mu_1=0 \qquad (1) \qquad\qquad \frac{dL}{d\mu_1}=x_1+x_3-10=0 \qquad (4)$$

$$\frac{dL}{dx_2}=-x_3+2\mu_2=0 \qquad (2) \qquad\qquad \frac{dL}{d\mu_2}=2x_2+x_3-5=0 \qquad (5)$$

$$\frac{dL}{dx_3}=-x_2+\mu_1+\mu_2=0 \qquad (3)$$

d) Tenemos un sistema lineal con 5 ecuaciones y 5 incógnitas.

Resolvemos el sistema de ecuaciones y queda:

$$X^*=\begin{pmatrix}19/6\\-11/12\\41/6\end{pmatrix} \text{ y } \mu^*=\begin{pmatrix}-13/6\\41/12\end{pmatrix}$$

Veamos si es óptimo, para esto verificaremos si el problema es estrictamente convexo.

Veamos el Hessiano de Lagrangeano:

$$H\left(L(X,\mu)\right)=\begin{pmatrix}\frac{d^2L}{dx_1^2} & \frac{d^2L}{dx_1x_2} & \frac{d^2L}{dx_1x_3}\\ \frac{d^2L}{dx_2x_1} & \frac{d^2L}{dx_2^2} & \frac{d^2L}{dx_2x_3}\\ \frac{d^2L}{dx_3x_1} & \frac{d^2L}{dx_3x_2} & \frac{d^2L}{dx_3^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

, $\Delta_1=2,\Delta_2=0,\Delta_3=-2$, lo que no nos dice nada[1].

Probemos entonces con las condiciones de segundo orden, con

$$\Delta d^T\ D^2L(X^*,\mu^*)\ \Delta d,\ \forall \Delta d\neq 0$$

$$D^2L(X^*,\mu^*)\ =\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix} \qquad \text{y } \Delta d=\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\end{bmatrix}$$

[1] En este caso es igual al Hessiano de f(x,y), porque las restricciones son lineales

Diferenciando las restricciones→ $\begin{matrix} \Delta x_1 + \Delta x_1 = 0 \\ 20\Delta x_2 + \Delta x_3 = 0 \end{matrix}$ → $\begin{matrix} \Delta x_1 = -\Delta x_3 \\ \Delta x_2 = -\Delta x_3 / 20 \end{matrix}$

Luego:

$$\begin{pmatrix} -\Delta x_3 & -\Delta x_3 / 2 & \Delta x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Delta x_3 \\ -\Delta x_3 / 2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} = 3\Delta x_3{}^2 > 0, \forall \Delta x_3 \neq 0$$

Luego podemos ver que el punto en cuestión es mínimo local en su vecindad reducida.

Como no existen puntos singulares y existe solución, se puede concluir que el punto encontrado, al ser el único candidato, es mínimo global, y así, solución óptima del problema.

X* es solución óptima.

Observación**:** Podemos apreciar como el gradiente de la F.O. es combinación lineal de los gradientes de las restricciones:

$$[2(x_1 * -1), -x_3 *, -x_2 *] = -\mu_1 * [1, 0, 1] - \mu_2 * [0, 2, 1]$$

Reemplazando:

$$\left[\frac{13}{3}, -\frac{41}{6}, \frac{11}{12}\right] = -\left[-\frac{13}{3}, 0, -\frac{13}{3}\right] - \left[0, \frac{41}{6}, \frac{41}{12}\right]$$

e) Para esto ocuparemos la aproximación $\Delta f(X^*) \approx -\Delta b_j \mu_j *$:

En la primera restricción→ $\Delta f(X^*) \approx -\Delta b_1 \mu_1 * = -0.1 * -13/3 > 0$, por lo que empeoro mi solución.

En la segunda restricción→ $\Delta f(X^*) \approx \Delta b_2 \mu_2 * = -0,1 * 41/12 < 0$, por lo que mejora mi solución.

Por lo tanto escogería la segunda restricción.

Problema 2:

Considere el problema:

$$\text{P)} \quad \begin{array}{l} Min: x^2 + y^2 \\ s.a. \\ (x-3)^3 - y^2 = 0 \end{array}$$

a) Demuestre que existe solución óptima para el problema.

b) Identifique los puntos que satisfacen las condiciones necesarias de primer orden.

c) Encuentre la solución óptima.

Nota: No puede basarse en argumentos gráficos.

Respuesta:

a) Para este caso la función es continua sobre D, ya que de hecho es continua sobre todo el espacio $\mathbb{R}^2$. Además, sabemos que el dominio D es cerrado y no vacío, ya que, por ejemplo, el punto $(3,0) \in D$.

Reordenando la restricción: $y^2 = (x-3)^3$, tenemos 2 casos en que $|x| \to \infty$:

Caso 1: Si $y \to \infty$ → $x \to \infty$ y esto implica $x^2 + y^2 \to \infty$

Caso 2: Si $y \to -\infty$ → $x \to \infty$ y esto implica $x^2 + y^2 \to \infty$

Por lo tanto la función no diverge al infinito negativo→ Luego existe solución óptima.

b) Las condiciones necesarias de primer orden se obtienen del siguiente Lagrangeano:

$$L(x,y,\mu) = x^2 + y^2 + \lambda(y^2 - (x-3)^3)$$

Luego:

$$\frac{dL}{dx} = 2x - 3\lambda(x-3)^2 = 0$$

$$\frac{dL}{dy} = 2y + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = y^2 - (x-3)^3 = 0$$

De este sistema se observa que no existen puntos que lo satisfacen.

La única posibilidad que nos queda es encontrar un punto singular:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 3(x-3)^2 & -2y \end{bmatrix}$$

Se puede ver que el punto $X = (3,0)$ hace que el Jacobiano pierda su rango máximo y lo anule. Esto hace que en X se pierda regularidad y no se pueda detectar por Lagrange.

Como demostramos existencia de solución, que no fue detectada por las condiciones de Lagrange, entonces, el punto óptimo se debe encontrar necesariamente en el punto singular $X = (3,0)$.

Problema 3:

Considere el siguiente problema de optimización no lineal con restricciones:

$$
\begin{aligned}
&Min: (x_1-10)^2+2x_2{}^2-x_3\\
&s.a.\\
&(x_2-8)^2+x_3=2 \ (1)\\
&x_1+3x_2=10 \ (2)
\end{aligned}
$$

a) Encuentre los puntos extremos que cumplen con las restricciones necesarias de primer orden.
b) Analice la regularidad del dominio.
c) Utilizando las condiciones suficientes de segundo orden verifique si los puntos corresponden a un mínimo.
d) Sin resolver nuevamente el problema, indique en cuánto cambiaría aproximadamente el valor óptimo si se aumenta en una unidad el lado derecho de la restricción (2).

Respuesta:

a) Tenemos: $L=(x_1-10)^2+2x_2{}^2-x_3+\lambda_1\left((x_2-8)^2+x_3-2\right)+\lambda_2\left(x_1+3x_2-10\right)$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\frac{dL}{dx_1}&=2(x_1-10)+\lambda_2=0\\
\frac{dL}{dx_2}&=4x_2+2\lambda_1(x_2-8)+3\lambda_2=0\\
\frac{dL}{dx_3}&=-1+\lambda_1=0\\
\frac{dL}{d\lambda_1}&=\left(x_2-8\right)^2+x_3-2=0\\
\frac{dL}{d\lambda_2}&=x_1+3x_2-10=0
\end{aligned}
$$

Resolviendo este sistema: $X^*=\left(8,\frac{2}{3},-\frac{466}{9}\right)\wedge\lambda^*=\left(1,4\right)$

b)

Utilizando el Jacobiano: $J=\begin{bmatrix}0 & 2(x_2-8) & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$, podemos ver que es de rango máximo $\forall x_2$.

c)
Para caracterizar este punto, se estudia en primer lugar el Hessiano del Lagrangeano para ver si el problema es estrictamente convexo:

$$H\left(L\left(X,\lambda\right)\right)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 4+2\lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Que resulta ser semi-definido positivo en x^*, condición necesaria pero no suficiente. Por esta razón debemos proyectar el Hessiano en la dirección de las restricciones.

Diferenciando las restricciones:

$$\begin{aligned}&2\left(x_2^*-8\right)\Delta x_2+\Delta x_3=0\\ &\Delta x_1+3\Delta x_2=0\end{aligned} \rightarrow \Delta x_1=-3\Delta x_2 \text{ y } \Delta x_3=\frac{44}{3}\Delta x_2$$

$$\Rightarrow \Delta d^T H\left(L\left(X^*,\lambda^*\right)\right)\Delta d=\begin{bmatrix}-3\Delta x_2 & \Delta x_2 & \frac{44}{3}\Delta x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\Delta x_2\\ \Delta x_2\\ \frac{44}{3}\Delta x_2\end{bmatrix}=24\Delta x_2^{\;2}>0\,,$$

$$\forall \Delta x_2 \neq 0$$

Por lo que se cumple la condición suficiente de segundo orden y el punto encontrado es un mínimo local.

d)
Por el significado del multiplicador de Lagrange, si aumentamos en una unidad el lado derecho de la segunda restricción, el valor de la función objetivo disminuye 4.

Problema 4:
Resuelva el siguiente ejercicio a través de Lagrange:

$$\begin{aligned} &Max\ 2\ln\left(x_1\right)+\frac{1}{2}x_2 \\ &s.a. \\ &5x_1+2x_2=16 \end{aligned}$$

Respuesta:

Tenemos Jacobiano con rango máximo, por lo que aplicamos Lagrange en todo el dominio. Nuestro Lagrangeano sería:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=2\ln(x_1)+\frac{1}{2}x_2+\lambda(5x_1+2x_2-16)$$

Luego→

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{2}{x_1}+5\lambda=0\rightarrow\lambda=-\frac{2}{5x_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{1}{2}+2\lambda=0\rightarrow\lambda=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=5x_1+2x_2-16=0\rightarrow 5x_1+2x_2=16$$

Tenemos:

$$X^*=\left(\frac{8}{5},4\right)\wedge\lambda^*=\frac{1}{4}$$

Veamos el Hessiano:

$$H=\begin{bmatrix}\frac{-2}{x_1{}^2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad H(X^*,\lambda^*)=\begin{bmatrix}\frac{-25}{32} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Es semi-definida negativa. Debemos revisar la dirección de las restricciones: $5\Delta x_1+2\Delta x_2=0$.

Luego:

$$\begin{bmatrix}\Delta x_1 & -5\Delta x_1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-25/32 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ -5\Delta x_1/2\end{bmatrix}=-25(\Delta x_1)^2/32<0,\ \forall\Delta x_1\neq 0$$

Por lo tanto el punto es máximo local (se cumple suficiencia). El problema tiene solución óptima (Tarea: Demostrar Existencia). Luego X^* es óptimo y el valor óptimo será 2.94.