Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2,3 y 4

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Pablo Rey , Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía Nº9: Introducción a la Programación Lineal (LP)

FORMATOS DE UN PROBLEMA LINEAL

Cualquier problema de programación lineal puede escribirse en cualquiera de los siguientes formatos:

1) $\begin{array}{l} Max: C^T x \\ s.a. \\ Ax = b \\ x_i \geq 0 \ \forall \mathrm{i} \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} Min: C^T x \\ s.a. \\ Ax = b \\ x_i \geq 0 \ \forall \mathrm{i} \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} Min: C^T x \\ s.a. \\ Ax \leq b \end{array}$ 4) $\begin{array}{l} Max: C^T x \\ s.a. \\ Ax \leq b \end{array}$ 5) $\begin{array}{l} Min: C^T x \\ s.a. \\ Ax \leq b \\ x_i \geq 0 \ \forall \mathrm{i} \end{array}$ 6) $\begin{array}{l} Max: C^T x \\ s.a. \\ Ax \leq b \\ x_i \geq 0 \ \forall \mathrm{i} \end{array}$ ......

y muchos más, incluyendo equivalentes y transformaciones.....

Hay dos formas muy utilizadas:

<u>Forma canónica (KKT):</u>

$$Min: c^T \vec{x}$$
$$s.a: A\vec{x} \leq b, x_i \geq 0 \ \forall i$$

<u>Forma estándar (SIMPLEX):</u>

$$Min: c^T \vec{x}$$
$$s.a: A\vec{x} = b, x_i \geq 0 \ \forall i$$

con $b_j \geq 0 \ \forall \mathrm{j}$

Problema 1:

Transformar el siguiente problema a sus equivalentes en formato canónico y formato estándar:

$$\begin{aligned}
&Max: -x_1 + 6x_2 - 3x_3 \\
&s.a. \\
&x_1 - 4x_2 + 5x_3 \geq 6 \\
&-7x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 7 \\
&x_1 + x_3 = 10 \\
&0 \leq x_1 \leq 6 \\
&-7 \leq x_2 \leq 2
\end{aligned}$$

Respuesta:

Primero todas las variables deben ser positivas: x_2 y x_3 se redefinen con variables positivas: $x_2 = x_2' - x_2''$ y $x_3 = x_3' - x_3''$, $x_2', x_2'', x_3', x_3'' \geq 0$

Pasamos el problema a minimización:

$$\begin{aligned}
&Min: x_1 - 6x_2 + 3x_3 \\
&s.a. \\
&x_1 - 4x_2 + 5x_3 \geq 6 \\
&-7x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq 7 \\
&x_1 + x_3 = 10 \\
&0 \leq x_1 \leq 6 \\
&-7 \leq x_2 \leq 2
\end{aligned}$$

Forma canónica:

$$\begin{aligned}
&Min: x_1 - 6x_2' + 6x_2'' + 3x_3' - 3x_3'' \\
&s.a. \\
&-x_1 + 4x_2' - 4x_2'' - 5x_3' + 5x_3'' \leq -6 \\
&-7x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - 6x_3' + 6x_3'' \leq 7 \\
&x_1 + x_3' - x_3'' \leq 10 \\
&-x_1 - x_3' + x_3'' \leq -10 \\
&x_1 \leq 6 \\
&x_2' - x_2'' \leq 2 \\
&-x_2' + x_2'' \leq 7 \\
&x_1, x_2', x_2'', x_3', x_3'' \geq 0
\end{aligned}$$

Forma estándar:

$$\begin{aligned}
&Min: x_1 - 6x_2' + 6x_2'' + 3x_3' - 3x_3'' \\
&s.a. \\
&x_1 - 4x_2' + 4x_2'' + 5x_3' - 5x_3'' - x_4 = 6 \\
&-7x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - 6x_3' + 6x_3'' + x_5 = 7 \\
&x_1 + x_3' - x_3'' = 10 \\
&x_1 + x_6 = 6 \\
&x_2' - x_2'' + x_7 = 2 \\
&-x_2' + x_2'' + x_8 = 7 \\
&x_1, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_{4,} x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0
\end{aligned}$$

PROGRAMACIÓN LINEAL CON KKT:

En programación lineal sabemos 4 cosas *a priori*:

1. El problema es siempre convexo → si existe un óptimo local es óptimo global

2. KKT de 1er orden se vuelve condición necesaria y suficiente.

3. La fórmula $\Delta f = -\mu_j \Delta b_j$ se vuelve exacta y deja de ser una aproximación, si la restricción "j" sigue activa después del cambio Δb_j.

4. No existen puntos irregulares (A excepción de un caso degenerado).

LAS 3 PROPIEDADES DEL LP Y GEOMETRÍA DE LOS PROBLEMAS

1. Si existe solución óptima única, debe estar en un vértice. En problemas acotados, si hay varias soluciones optimas, al menos hay 2 o más en vértices adyacentes (El resto de las soluciones es combinación convexa de estas soluciones en los vértices).

2. Existe siempre un número finito de vértices, y por lo tanto, de candidatos al óptimo.

   ¿Cuantos? $$Max : V = \binom{\text{restricciones}}{\text{variables}}$$

3. Si existe una solución en un vértice, que es igual o mejor a la de los vértices adyacentes, entonces es óptima (Porque un mínimo local es global en un LP).

Inexistencia de Solución en LP's

Existen dos tipos de inexistencia de solución en LP's cerrados:

1) Dominio vacío.
2) Función objetivo diverge minimizando infinitamente.

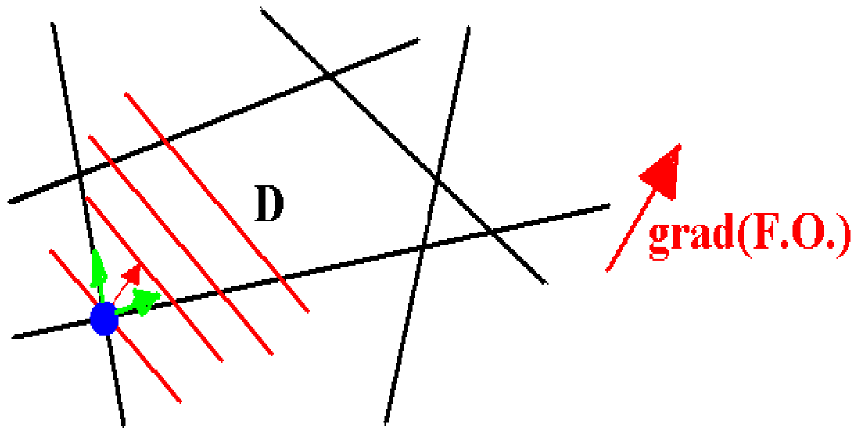
EJEMPLOS:

1. Dominio acotado:

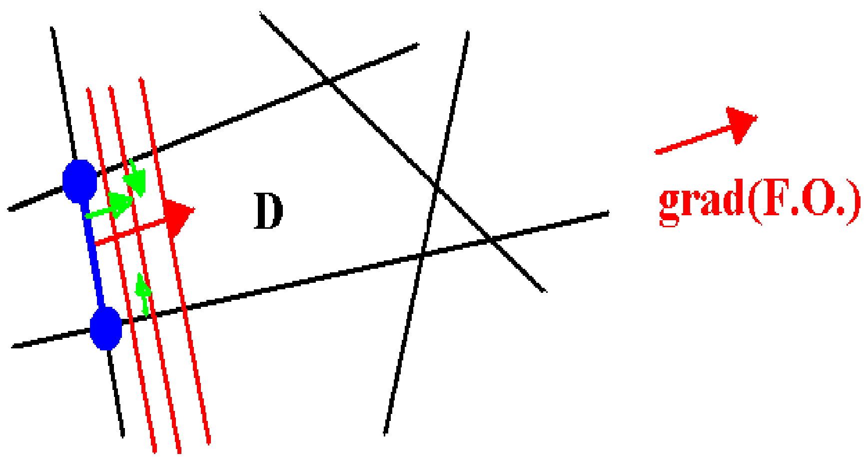
→ La única forma de inexistencia de solución es con dominio vacío

→ Por KKT: $\nabla f = \sum_{j \text{ activas}} \mu_j \left(-\nabla g_j\right)$

A) Existe solución única en un vértice:



B) Existen infinitas soluciones y existen al menos 2 en los vértices:

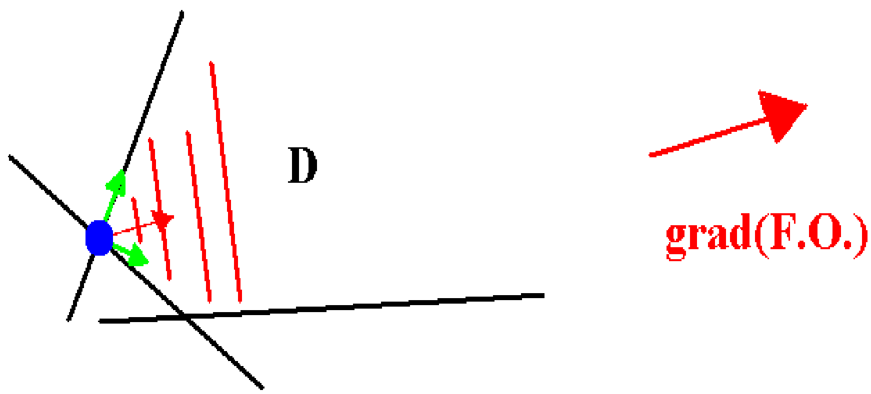


2. **Dominio no Acotado:**

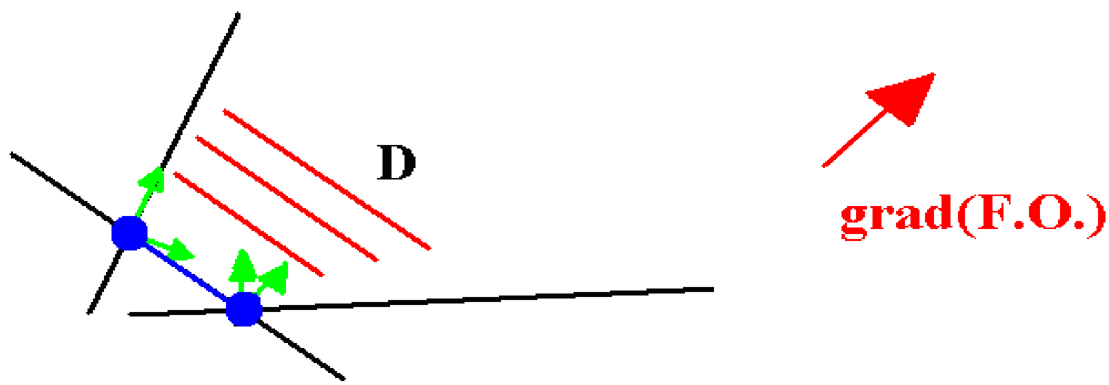
→ Puede haber inexistencia de solución con el dominio vacío y con solución óptima no acotada (diverge)

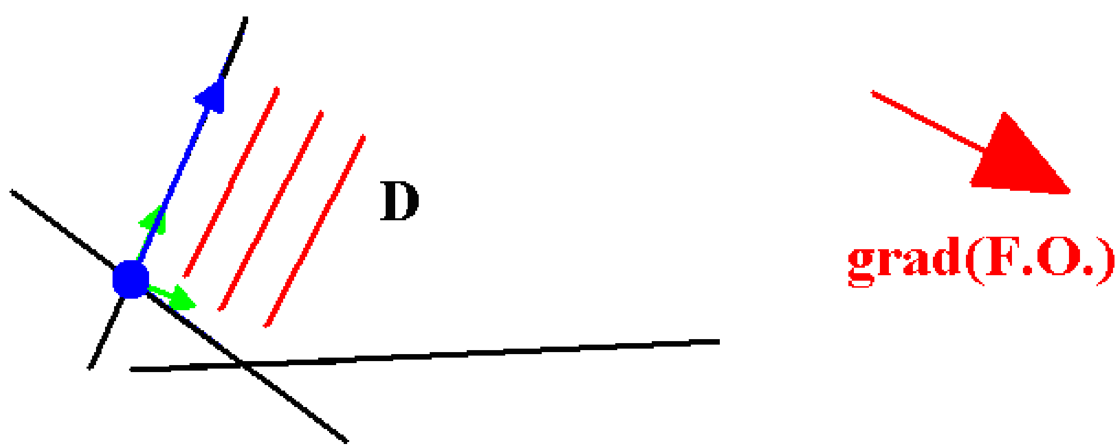
<u>A) Solución única o múltiple (igual que en dominio acotado):</u>

Ejemplo con s. única:

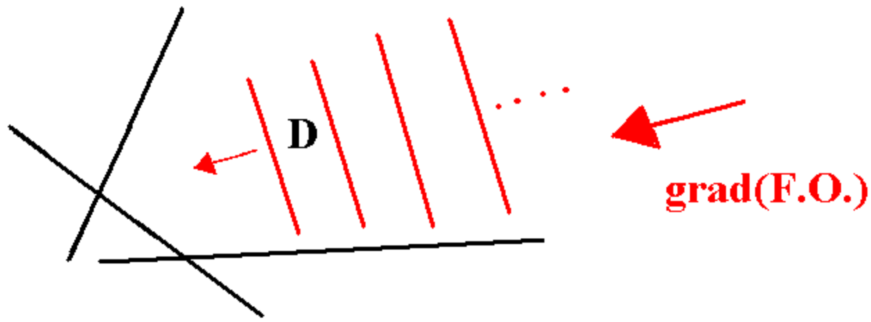


Ejemplos con s. múltiples:





B) Divergencia de solución óptima



¡ La inexistencia por divergencia y el número de soluciones óptimas depende del gradiente de la F.O! No cambió en nada el dominio.

Problema 2:

A) Resolver el problema de manera gráfica:

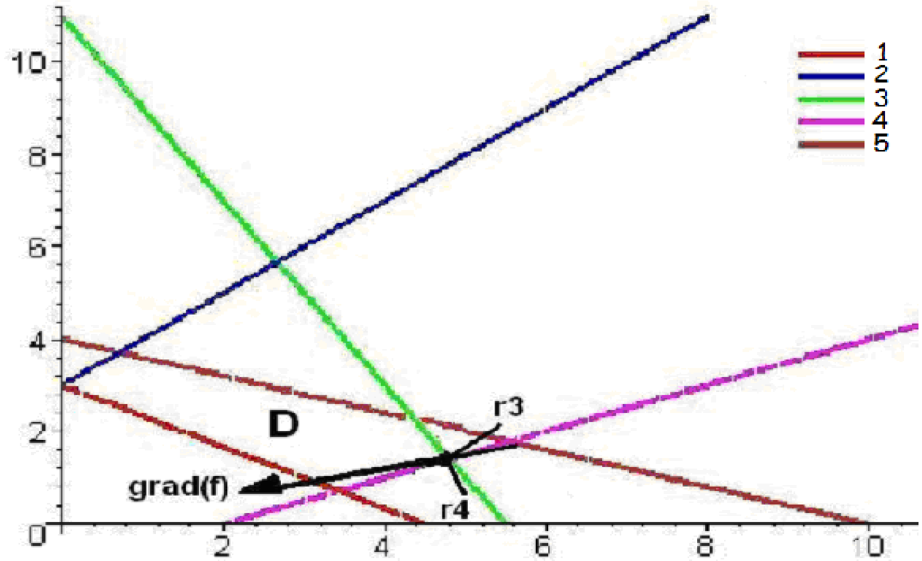
$$\begin{aligned}
&Min: \; Min \; -3x - y \\
&s.a: \\
&2x + 3y \geq 9 \;\; (1) \\
&-x + y \leq 3 \;\; (2) \\
&2x + y \leq 11 \;\; (3) \\
&x - 2y \leq 2 \;\; (4) \\
&10y + 4x \leq 40 \;\; (5) \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}$$

B) Responder las siguientes preguntas:

¿Cuanto debiera cambiar el ponderador de y, en la función objetivo, para que la solución óptima se encuentre en la intersección de (3) con (5)? Por otro lado. ¿cuanto tiene que aumentar el lado derecho de la restricción (3) para que la solución esté en la intersección de (4) con (5)?

Respuesta:

A) Gráficamente podemos ver que la solución queda en la intersección de (3) con (4), es decir el punto $\left[24/5\ ,\ 14/10\right]$.



Actualmente:

La pendiente del negativo del gradiente de la función objetivo se encuentra entre las pendientes de los gradientes de las restricciones activas.

Es decir:

$$\frac{-2}{1} \leq \frac{-f_y}{-f_x} \leq \frac{1}{2}\ \text{, y actualmente: } \frac{-f_y}{-f_x} = 1/3\ .$$

B)
Si queremos que el óptimo se encuentre en la intersección de (3) con (5):

$$\frac{1}{2} \leq \frac{-f_y}{-f_x} = \frac{-f_y}{3} \leq \frac{10}{4} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{1.5 \leq -f_y \leq 7.5}$$

Ojo: Si $f_y = -1.5$, es decir $f_y / f_x = 1/2$, la solución es múltiple en cualquier punto en el dominio con (3) activa.

Por otro lado, si deseamos que la solución se pose sobre (4) y (5) debemos correr (3) por lo menos hasta ese punto (desactivarla). El punto de intersección entre (4) y (5) es: $\left[50/9\ ,\ 16/9\right]$

Luego (3) tiene que pasar por lo menos por ese punto→ $2x + y = 2 * \frac{50}{9} + \frac{16}{9} = 116/9$

Por lo tanto el lado derecho debe variar de 11 a $116/9 \approx 12.9$.

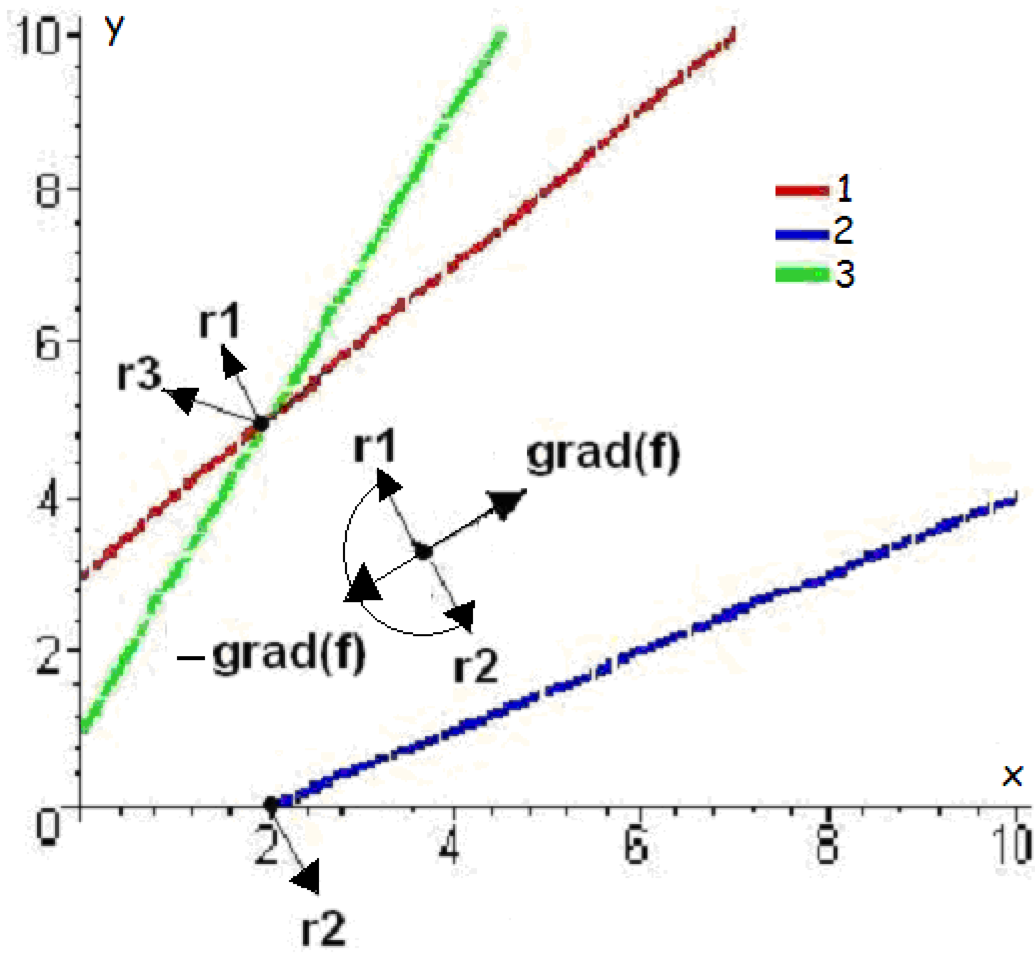
Problema 3:

Establecer las condiciones que debe cumplir F.O. de manera que el problema de minimización P) tenga solución óptima:

$$
\text{P)} \quad
\begin{aligned}
&Min: ax + by \\
&s.a: \\
&-x + y \leq 3 \ (1) \\
&0.5x - y \leq 1 \ (2) \\
&-2x + y \leq 1 \ (3) \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Respuesta:

El dominio gráficamente se representa como:



En el gráfico se demuestra que para que exista solución el negativo del gradiente de la función objetivo debe rotar entre los gradientes de las restricciones de las direcciones extremas (1) y (2).

Se tiene que: $r1 = [-1,1]$ y $r2 = [0.5,-1]$

Es decir para que exista solución se debe cumplir que:

$$\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda + 0.5\mu \\ \lambda - \mu \end{bmatrix}$$

$$Con\ \lambda, \mu \geq 0$$

OJO:
No se puede definir la condición en función de la pendiente, ya que existen 2 gradientes para cada pendiente.

Por ejemplo el gradiente $[1,1]$ que si cumple la condición ($\lambda = 3, \mu = 4$) posee la misma pendiente que el gradiente $[-1,-1]$ que no la verifica ($\lambda = -3, \mu = -4$).