Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2,3 y 4

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Pablo Rey , Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía Nº8: Método de Karush-Kuhn-Tucker

REPASO:

Sirve para problemas con $f(X)$ diferenciable y $X=[x_1,x_2,....,x_n]$ un vector de variables del estilo:

$$\text{P)}\quad \begin{aligned} &Min\ f(X)\\ &s.a.\\ &g_j(X)\le b_j\ \forall j=\{1,..,m\}\\ &x_i\ge 0\ \forall i=\{1,..,n\}\end{aligned}$$

Este es el método general para problemas continuos (Cualquier problema no lineal continuo tiene un equivalente en este formato) **Tarea**: pensar esta afirmación........

El **Lagrangeano** de este problema sería:

$$L(X,\mu)=f(X)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j(g_j(X)-b_j)$$

Restricción Activa / Holgura

Una restricción "j" está activa en un punto X_0, si y sólo si la holgura $h_j(X_0)=b_j-g(X_0)$ es cero. Es decir, dicha restricción se cumple en igualdad evaluada en X_0.

Punto regular:

En este caso un punto X_0 será regular si la matriz Jacobiana de las restricciones activas en X_0 es de rango máximo:

$$RANGO(J(X))=\#\ \text{de rest. activas}$$

Condición Necesaria y Suficiente para ser un Mínimo Local (puntos singulares):

1^{er} Orden:

Condición Necesaria (Condiciones de KKT):

$$(1)\ \frac{dL}{dx_i} \geq 0\ \ \forall i = \{1,..,n\}$$

$$(2)\ \frac{dL}{dx_i} x_i = 0\ \ \forall i = \{1,..,n\}$$

$$(3)\ \frac{dL}{d\mu_j} \leq 0\ \ \forall j = \{1,..,m\}$$

$$(4)\ \frac{dL}{d\mu_j} \mu_j = 0\ \ \forall j = \{1,..,m\}$$

$$(5)\ \mu_j \geq 0\ \ \forall j = \{1,..,m\}$$

$$(6)\ x_i \geq 0\ \ \forall i = \{1,..,n\}$$

Combinando con el método de Lagrange:

a. Si existe en la formulación un x_r libre de signo, se cambian sus condiciones (1), (2) y (6) por: $\frac{dL}{dx_r} = 0$ (Colapsa al método de Lagrange en esa variable).

b. De la misma forma si $g_s(X) = b_s$ cambiamos sus condiciones (3), (4) y (5) por $\frac{dL}{d\mu_s} = 0$ (Colapsa al método de Lagrange en esa restricción).

2^{do} Orden:

Condición Necesaria:

Si X* cumple la condición de 1^{er} orden y que $\Delta d^T\ \ D^2L(X^*, \mu^*)\ \ \Delta d \geq 0,\ \ \forall \Delta d \neq 0$.

Condición Suficiente:

Si X* cumple la condición de 1^{er} orden y que $\Delta d^T\ \ D^2L(X^*, \mu^*)\ \ \Delta d > 0,\ \ \forall \Delta d \neq 0$

OJO→

Se tiene que cumplir para Δd, vector elemento de las direcciones de las restricciones activas en el punto. (Si se satisface para todo Δd, obviamente se satisface para un Δd en particular, pero basta con las direcciones de las restricciones activas en el punto).

Comentarios acerca de Mínimos Globales:

1) Si P) es convexo:
Si X* cumple CN de primer orden, entonces X* es solución óptima del problema.

2) Si P) no es convexo:
Hay que probar existencia y después evaluar cuál de los candidatos al óptimo minimiza el objetivo. Este será la solución óptima.

OJO:
Si existen puntos singulares, estos deberán probarse aparte.

Interpretación de los Multiplicadores de Lagrange:

Si tenemos una restricción del tipo $g_j(X) \leq b_j$, entonces para un punto (X^*, μ^*):

$$\frac{dL(X^*,\mu^*)}{db_j} = \frac{df(X^*)}{db_j} = -\mu_j^*$$

Se deduce la siguiente aproximación para un Δb_j pequeño:

$$\Delta f(X^*) \approx -\Delta b_j \mu_j^*$$

OJO:
¡Esto sólo vale, si en la variación de su lado derecho, la restricción respectiva se mantiene activa o inactiva!

Complementariedad de la Holgura:

A la condición $\frac{dL}{d\mu_j}\mu_j = 0$ se le conoce como "Complementariedad de la Holgura".

Rescribiéndola:

$$\frac{dL}{d\mu_j}\mu_j = \left(g\left(\overrightarrow{X}\right) - b_j\right)\mu_j = -h_j\mu_j = 0 \qquad \rightarrow \qquad h_j\mu_j = 0$$

Es decir:

→ Si $\mu_j \neq 0$ → la restricción "j" está activa en ese punto ($h_j = 0$).

→ Si la restricción no está activa: $h_j > 0$ →El multiplicador de L. es cero: $\mu_j = 0$.

Caso Especial:
En un caso degenerado[1], se indefinen multiplicadores y para mantener consistencia tanto $\mu_j = 0$ como $h_j = 0$, es decir, restricción activa con un multiplicador de Lagrange cero. Es muy raro.

[1] Veremos un ejercicio

Problema 1 (Introducción al Método):
Considere el siguiente problema:

$$Min\ (x_1-3)^2+(x_2-5)^2$$
$$s.a.$$
$$x_1+x_2\le 6$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

Escriba las condiciones de KKT y encuentre la solución óptima.

Respuesta:
Primero veamos la factibilidad de KKT en este problema. Vemos que solo tenemos una restricción lineal, por lo que es de rango máximo. No existe, por lo tanto, singularidad.
Luego el Lagrangeano queda: $L(X,\mu)=((x_1-3)^2+(x_2-5)^2)+\mu(x_1+x_2-6)$

Las condiciones KKT son:

(1) $\frac{dL}{dx_1}x_1=x_1(2(x_1-3)+\mu)=0$ (2) $\frac{dL}{dx_1}=2(x_1-3)+\mu\ge 0$

(3) $\frac{dL}{dx_2}x_2=x_2(2(x_2-5)+\mu)=0$ (4) $\frac{dL}{dx_2}=2(x_2-5)+\mu\ge 0$

(5) $\frac{dL}{d\mu}\mu=\mu(x_1+x_2-6)=0$ (6) $\frac{dL}{d\mu}=x_1+x_2-6\le 0$

(7) $\mu,x_1,x_2\ge 0$

Tenemos 3 ecuaciones y 3 incógnitas, por lo que podemos resolver el problema. Sin embargo, es más fácil ponerse en casos.

$\boxed{\text{Si } x_1=0}$
De (2) → $\mu\ge 6$. Luego dividiendo por μ en (5)→ $x_2=6$. Esto en (3) → $\mu=-2$ →←
$\boxed{\text{Si } x_1 \text{ no nulo}}$
De (1)→ $2(x_1-3)+\mu=0$ (*)

$\boxed{\text{Si } x_2=0}$
De (4)→ $\mu\ge 10$ y esto en (5)→ $x_1=6$. Esto en (*) → $\mu=-6$ →←
$\boxed{\text{Si } x_2 \text{ no nulo}}$
De (3) → $2(x_2-5)+\mu=0$ (**)

$\boxed{\text{Si } \mu=0}$ En (*) y (**) → $x_1=3\wedge x_2=5$ →← contradice (6)
$\boxed{\text{Si } \mu \text{ no nulo}}$ De (5) → $x_1+x_2=6$ (***)

Con (*), (**) y (***) tenemos un sistema de ecuaciones y se obtiene $X^*=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ y $\mu^*=2$, solución que cumple todas las condiciones KKT.

Vemos que el problema es estrictamente convexo en todo el dominio → El punto es solución óptima y única. La restricción está activa en el óptimo

Problema 2 (KKT más difícil):
Considere el problema de minimización:

$$
\begin{aligned}
&Min: x_1^2 + x_2 x_1 \\
&s.a. \\
&x_1 + x_2 \geq 1 \\
&0 \leq x_1 \leq 3/4 \\
&0 \leq x_2 \leq 3/4
\end{aligned}
$$

a) Indique la existencia de solución óptima. Analice también la convexidad
b) Resuelva el problema a través de las condiciones de KKT.

Respuesta:
a) Ocupemos el Teorema de Existencia de solución óptima:
La función es continua en su dominio, dominio es cerrado (restricciones del tipo $\leq$, $\geq$ y =).
El dominio es no vacío ($x_1 = ½$, $x_2 = ½$, es solución factible).
El dominio es acotado ($0 \leq x_1 \leq 3/4$ y $0 \leq x_2 \leq 3/4$). → Existe Solución Óptima

Para ver si la función objetivo es convexa veamos el Hessiano:
$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Luego esta matriz no es definida positiva en su dominio. Luego no se puede decir que la F.O. sea convexa en todo el plano (no podremos asegurar a priori que los puntos que encontremos por KKT sean óptimos globales). Para ver la regularidad y convexidad del dominio, podemos ver que está formado por restricciones lineales, lo que asegura que es convexo y de rango máximo.

b) Sólo hay restricciones lineales, por lo que no hay que probar regularidad.

$$L(X,\mu) = (x_1^2 + x_2 x_1) + \mu_1(-x_1 - x_2 + 1) + \mu_2(x_1 - 3/4) + \mu_3(x_2 - 3/4)$$

$$\frac{dL}{dx_1} = 2x_1 + x_2 - \mu_1 + \mu_2 \qquad \frac{dL}{d\mu_1} = -x_1 - x_2 + 1$$

$$\frac{dL}{dx_2} = x_1 - \mu_1 + \mu_3 \qquad \frac{dL}{d\mu_2} = x_1 - 3/4$$

$$\frac{dL}{d\mu_3} = x_2 - 3/4$$

→ Las condiciones serían:

$$
\begin{array}{llll}
x_1(2x_1 + x_2 - \mu_1 + \mu_2) = 0 & (1) & 2x_1 + x_2 - \mu_1 + \mu_2 \geq 0 & (2) \\
(x_1 - \mu_1 + \mu_3)x_2 = 0 & (3) & x_1 - \mu_1 + \mu_3 \geq 0 & (4) \\
(-x_1 - x_2 + 1)\mu_1 = 0 & (5) & -x_1 - x_2 + 1 \leq 0 & (6) \\
(x_1 - 3/4)\mu_2 = 0 & (7) & x_1 - 3/4 \leq 0 & (8) \\
(x_2 - 3/4)\mu_3 = 0 & (9) & x_2 - 3/4 \leq 0 & (10) \\
x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 & (11) & &
\end{array}
$$

Resolvámoslo por casos:

$\boxed{\text{Si } x_1 = 0}$ De (6)→ $x_2 \geq 1$ lo que contradice (10) →←

$\boxed{\text{Si } x_1 \text{ no nulo}}$ De (1)→ $2x_1 + x_2 - \mu_1 + \mu_2 = 0$ (*)

$\boxed{\text{Si } x_2 = 0}$ De (6)→ $x_1 \geq 1$ lo que contradice (8) →←

$\boxed{\text{Si } x_2 \text{ no nulo}}$ De(3)→ $x_1 - \mu_1 + \mu_3 = 0$ (**)

$\boxed{\text{Si } \mu_1 = 0}$ De (**)→ $\mu_3 = -x_1 < 0$ →←

$\boxed{\text{Si } \mu_1 \text{ no nulo}}$ De (5)→ $x_1 + x_2 = 1$ (***)

$\boxed{\text{Si } \mu_2 = 0}$

$\boxed{\text{Si } \mu_3 = 0}$ De (**)→ $x_1 = \mu_1$ Esto en (*)→ $\mu_1 + x_2 = 0$

Lo que implica que $x_2 < 0$ →←

$\boxed{\text{Si } \mu_3 \text{ no nulo}}$ De (9)→ $x_2 = 3/4$ y de (***) $x_1 = 1/4$.

Luego reemplazando en (*) → $2*1/4 + 3/4 - \mu_1 + 0 = 0$ →

$\mu_1 = 5/4$. De (**)→ $\mu_3 = 1$

Luego se tiene un punto que cumple KKT:

$$X = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \text{ y } \mu = \begin{bmatrix} 5/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seguimos, ya que no hemos demostrado unicidad de solución:

$\boxed{\text{Si } \mu_2 \text{ no nulo}}$ De (7)→ $x_1 = 3/4$, en (***) → $x_2 = 1/4$ (****)

$\boxed{\text{Si } \mu_3 = 0}$ De (**)→ $\mu_1 = 3/4$, en (*)→ $\mu_2 = -1$ →←

$\boxed{\text{Si } \mu_3 \text{ no nulo}}$ De (9)→ $x_2 = 3/4$ Contradice (****) →←

Revisamos todos los casos, luego, no existen más puntos. El gradiente de la F.O. es combinación lineal de los gradientes de las restricciones activas:

$$\begin{bmatrix} 2x_1^* + x_2^* & x_1^* \end{bmatrix} = -\mu_1^* \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} - \mu_3^* \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debemos probar entonces las condiciones de segundo orden:

$$\begin{bmatrix} \Delta x, \Delta y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \geq 0 \quad \rightarrow \Delta x \;\; 2\Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y \geq 0$$

Tomando las direcciones de una de las restricciones activas (1) $x + y = 1$ y diferenciando...

→ $\Delta x + \Delta y = 0 \rightarrow \Delta x = -\Delta y$ Luego: $2\Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y \geq 0$ → $2\Delta x^2 - 2\Delta x^2 = 0 \geq 0$

Demostramos la condición necesaria pero no la suficiente. Este punto puede ser un mínimo local, pero no hemos asegurado que lo sea.

Hay que considerar que no existen puntos irregulares y que existe solución óptima. El único candidato al óptimo debe ser solución óptima.

Problema 3 (Lagrange y KKT combinados):
Considere el problema de minimización:

$$
\begin{aligned}
&Min: x^2 + y^2 \\
&s.a. \\
&x^2 + 2x + y^2 \leq 3 \\
&x \geq -3 \\
&y \geq 0
\end{aligned}
$$

Escriba el Lagrangeano, luego formule las condiciones KKT e identifique todos los puntos que las satisfagan. ¿Hay algún punto mínimo local que este método no capture? Justifique cual es el punto óptimo.

Respuesta:
El Lagrangeano está dado por: $L = x^2 + y^2 + \mu_1\left(x^2 + 2x + y^2 - 3\right) + \mu_2\left(-x-3\right)$

Las condiciones KKT son:

(1) $\dfrac{dL}{dx} = 2x + 2\mu_1 x + 2\mu_1 - \mu_2 = 0$

(2) $\dfrac{dL}{dy} = 2y + 2\mu_1 y \geq 0$

(3) $\dfrac{dL}{dy} y = \left(2y + 2\mu_1 y\right) y = 0$

(4) $\dfrac{dL}{d\mu_1} = x^2 + 2x + y^2 - 3 \leq 0$

(5) $\dfrac{dL}{d\mu_1}\mu_1 = \left(x^2 + 2x + y^2 - 3\right)\mu_1 = 0$

(6) $\dfrac{dL}{d\mu_2} = -x - 3 \leq 0$

(7) $\dfrac{dL}{d\mu_2}\mu_2 = \left(-x-3\right)\mu_2 = 0$

(8) $y, \mu_1, \mu_2 \geq 0$

Encontremos los puntos que cumplan KKT:

$\boxed{\text{Si } \mu_1 = \mu_2 = 0}$

Tenemos de (3) que $y = 0$ y de (1) que $x = 0$. No se viola ninguna condición. Por lo tanto $(0,0,0,0)$ satisface KKT

$\boxed{\text{Si } \mu_1 > 0 \wedge \mu_2 = 0}$

De (3) se tiene $y = 0$. Usando esto de (5): $x^2 + 2x - 3 = 0$ → $x = -3$ ó $x = 1$.
Si $x = -3$ y de (1) se tiene que $\mu_2 = -3/2$ que contradice (8) y si $x = 1$, también de (1) se tiene que $\mu_2 = -1/2$ que también contradice (8).

$\boxed{\text{Si } \mu_1 = 0 \wedge \mu_2 > 0}$

De (3) se tiene $y = 0$ y de (7) se tiene $x = -3$. Esto en (1) obtenemos $\mu = -6$, que contradice (8).

$\boxed{\text{Si } \mu_1 > 0 \wedge \mu_2 > 0}$

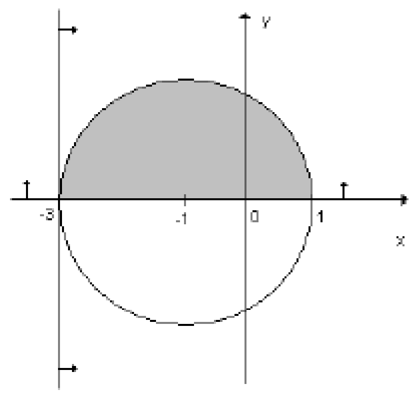
De (3) se tiene $y = 0$ y de (7) se tiene $x = -3$. En (1) se obtiene $\mu_2 = -6 - 4\mu_1 < 0$ que contradice (8).

Luego el único punto que satisface todas las condiciones es el origen con multiplicadores nulos.

Para verificar que no hay otro punto mínimo que no haya sido detectado por el método utilizamos el Jacobiano, dado por:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x+2 & 2y \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con este podemos detectar los puntos irregulares del problema, que son todos los puntos en donde esta matriz no es de rango máximo. Esto ocurre cuando $y = 0$ y $x \neq -1$. Observando el gráfico el punto con las 2 restricciones activas es (-3,0), pero no es un mínimo local, sino un máximo. Por lo tanto no existe ningún punto mínimo local que KKT no haya detectado.



La solución óptima es (0,0), que es la misma del problema irrestricto.

Problema 4:

Supongamos el siguiente problema de minimizar el gasto en insumos de capital (K) y de mano de obra (J) utilizados para producir "Q" unidades de algún producto según la siguiente función de producción: $Q = \sqrt{KJ}$.

OJO: Las variables del problema son K y J, mientras que Q es un dato.

a) Si los precios de los insumos son \$5 y \$10 respectivamente para K y J plantee el problema de optimización resultante que minimiza el costo de producir "Q".
b) Obtenga las condiciones KKT
c) Obtenga la solución óptima y el valor óptimo en función del dato "Q".
d) Interprete para este caso el significado del multiplicador de Lagrange.

Respuesta:

a) El problema queda:

$$\begin{aligned} &Min: C = 5K + 10J \\ &s.a. \\ &\sqrt{KJ} = Q \ (*) \\ &K, J \geq 0 \end{aligned}$$

b)

El lagrangeano es: $L = 5K + 10J + \lambda\left(\sqrt{KJ} - Q\right)$

Las condiciones KKT de primer orden son:

(1) $dL/_{dK} K = \left(5 + \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{J}{K}}\right) K = 0$

(2) $dL/_{dJ} J = 2\left(10 + \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{K}{J}}\right) J = 0$

(3) $\sqrt{KJ} - Q = 0$

(4) $K, J \geq 0$

(6) $5 + \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{J}{K}} \geq 0$

(7) $10 + \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{K}{J}}$

Resolviendo este problema se tiene que:

$$K^*(Q) = 2Q/\sqrt{2}$$

$$L^*(Q) = Q/\sqrt{2}$$

y

$$\lambda^* = -10\sqrt{2}$$

c)
El problema admite solución y no existen puntos irregulares (verificar) por lo que esta es la solución óptima.
El gasto óptimo en función de “Q” será:

$$C(Q) = 5K^* + 10L^* = 20Q/\sqrt{2} = 10\sqrt{2}Q$$

d)
Se tiene por definición que $\lambda = -\frac{dC}{dQ}$, es decir, la variación en negativo de la función objetivo al aumentar el lado derecho de la restricción (*) en una unidad. En este problema en particular corresponde al costo marginal de producción con signo cambiado.

Corroboremos este resultado calculando directamente el costo marginal:

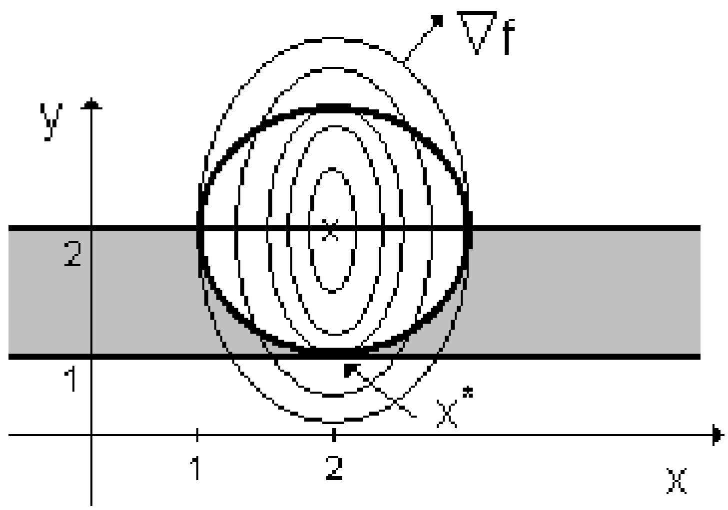
$$\frac{dC(Q)}{dQ} = C_{MG} = \frac{d\left(10\sqrt{2}Q\right)}{dQ} = 10\sqrt{2} = -\lambda .$$

Problema 5 (Análisis gráfico):
Considere el siguiente problema de optimización:

$$Min: 2(x-2)^2 + (y-2)^2$$
$$s.a.$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 1$$
$$y \geq 1$$
$$y \leq 2$$

a) Determine la solución óptima de este problema gráficamente, verifique si ésta cumple las condiciones de KKT y si el punto es regular o no.
b) Muestre que en el punto $X = (1,2)$ se cumple KKT. ¿Es regular ese punto?

Respuesta:
a) La solución óptima de este problema puede ser encontrada gráficamente como se muestra en la figura. El punto dentro del dominio donde la función objetivo es mínima es $X = (2,1)$.



Para encontrar las condiciones KKT del problema se plantea el siguiente Lagrangeano:

$$L = 2(x-2)^2 + (y-2)^2 + \mu_1\left(-(x-2)^2 - (y-2)^2 + 1\right) + \mu_2(-y+1) + \mu_3(y-2)$$

Las condiciones de KKT del problema son:

(1) $dL/dx = 4(x-2) - 2\mu_1(x-2) = 0$

(2) $dL/dy = 2(y-2) - 2\mu_1(y-2) - \mu_2 + \mu_3 = 0$

(3) $(x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 1$

(4) $\mu_1\left(-(x-2)^2 - (y-2)^2 + 1\right) = 0$

(5) $y \geq 1$

(6) $\mu_2(-y+1) = 0$

(7) $y \leq 2$

(8) $\mu_3(y-2) = 0$

(9) $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$

Se puede demostrar que el punto óptimo cumple con las condiciones KKT.
→ En primer lugar, claramente cumple con las restricciones (1), (3), (5) y (7).
→ De la condición (8) obtenemos que $\mu_3 = 0$.
→ De la condición (4) obtenemos que μ_1 no necesariamente vale cero, es decir $\mu_1 \geq 0$, lo mismo con μ_2 de la condición (6).
→ De la condición (2) obtenemos que $2\mu_1 - \mu_2 - 2 = 0$ ó $\mu_2 = 2(\mu_1 - 1)$. Pero $\mu_1 \geq 0$ y $\mu_2 \geq 0$ para que se cumpla la condición (9), por lo tanto $2(\mu_1 - 1) \geq 0 \Rightarrow \mu_1 \geq 1$. Con $\mu_1 \geq 1$ y $\mu_2 = 2(\mu_1 - 1)$ obtenemos infinitos multiplicadores de Lagrange que cumplen con las condiciones de KKT en el punto $X = (2,1)$.

En este caso, el resolver "a priori" las condiciones de KKT para encontrar el punto no habría servido (pero si las cumple, una vez sabiendo el punto). Esto es debido a la singularidad del punto.

Para verificar esto, utilizaremos el Jacobiano de las restricciones activas del problema. Este Jacobiano está dado por:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} -2(x-2) & -2(y-2) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Las filas son L.D., por lo tanto el punto X es singular.

b)
En el punto $X = (1,2)$ efectivamente se cumple KKT. Este se comprueba fácilmente. En ese punto la restricción que no está activa es la 2, por lo tanto $\mu_2 = 0$ y se cumpliría la condición (6). Las condiciones (5) y (7) también se cumplen. El multiplicador $\mu_1 = 2$ por la condición (1). De (2) tenemos que $\mu_3 = 0$. La condición (3) se cumple, ya que $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1 \geq 1$. Para que se cumpla la condición (4) verificamos que se cumpla $-(x-2)^2 - (y-2)^2 + 1 = 0$, lo que es cierto. Las condiciones (9) también se cumplen.

Vemos que el Jacobiano de las restricciones activas es de rango máximo y es $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ por lo que el punto es regular.

Problema 6 (Conceptual):

Deduzca el problema que genera las siguientes condiciones KKT:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}\geq 0 \quad \forall \text{i=1,..,q} \qquad\qquad x_i\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}\right)=0 \quad \forall \text{i=1,..,q}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}\mu_j\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}=0 \quad \forall \text{i=q+1,..,n}$$

$$\mathrm{g_j}(x)-b_j\leq 0 \quad \forall j\text{=1,..,p} \qquad\qquad \mu_j\left(\mathrm{g_j}(x)-b_j\right)=0 \quad \forall j\text{=1,..,p}$$

$$\mathrm{g_j}(x)-b_j=0 \quad \forall j\text{=p+1,..,m}$$

$$x_i\geq 0 \quad \forall \text{i=1,..,q} \qquad\qquad \mu_j\geq 0 \quad \forall j\text{=1,..,p}$$

Respuesta:

El problema está dado por:

$$\begin{aligned}
&Min: f(x)\\
&s.a.\\
&g_j(x)\leq b_j \quad \forall j\text{=1,..,p}\\
&g_j(x)\leq b_j \quad \forall j\text{=p+1,..,m}\\
&x_i\geq 0 \qquad \forall i\text{=1,..,q}
\end{aligned}$$

ó bien:

$$\begin{aligned}
&Max: -f(x)\\
&s.a.\\
&g_j(x)\leq b_j \quad \forall j\text{=1,..,p}\\
&g_j(x)\leq b_j \quad \forall j\text{=p+1,..,m}\\
&x_i\geq 0 \qquad \forall i\text{=1,..,q}
\end{aligned}$$

OJO: por cada problema de minimización hay uno de maximización equivalente.

Problema 7 (Degeneración : Indeterminación de los multiplicadores de Lagrange):

Sea el problema de minimización:

$$\begin{aligned}
&Min\ -3x - y \\
&s.a. \\
&(1)\quad \frac{x^2}{3} - y \leq -1 \\
&(2)\quad x + \frac{3y^2}{16} \leq 6 \\
&(3)\quad x \leq 3 \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}$$

a) Encuentre la solución óptima gráficamente
b) Verifique las condiciones KKT en el punto encontrado
c) Que pasaría si $x \leq 2.9$ o si $x \leq 3{,}1$. De una aproximación y comente su resultado.

Respuesta:

a) Hagamos un gráfico, primero veamos los bordes del dominio:

Intercepto de (1) con ejes:

Si x = 0 → y = 1
Si y = 0 → no existe x

Intercepto de (2) con ejes:

Si x = 0 → $y = 4\sqrt{2}$
Si y = 0 → x = 6

Intersección restricción (1) con (3):

La restricción (3) nos dice que en el borde x = 3, luego reemplazando en (1), tenemos y = 4. Por lo tanto (1) con (3), se interceptan en (3,4).

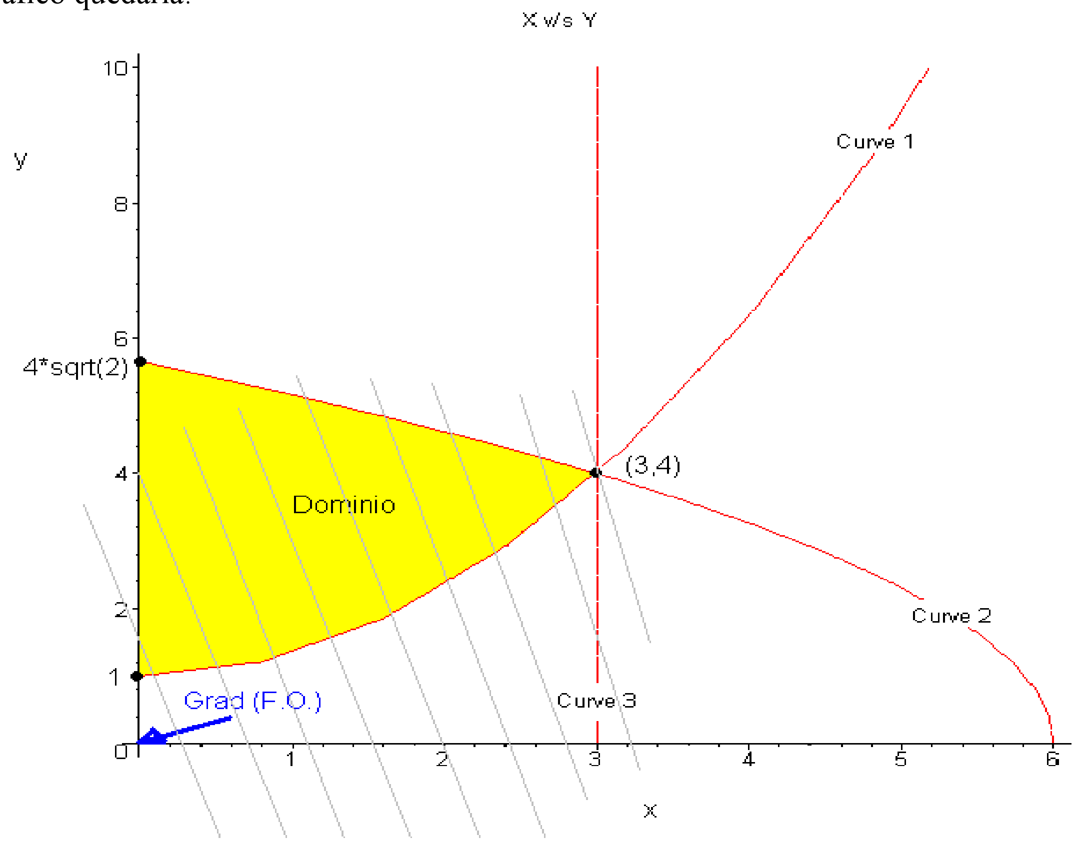
Intersección restricción (2) con (3):

Remplazando x = 3 en (2), tenemos que en el borde y = 4. Por lo tanto (2) con (3) se interceptan en (3,4).

Por este mismo motivo (1) con (2) también se interceptan en (3,4).

El gradiente de la F.O. es (-3,-1), lo que nos dice que la F.O. se minimiza hacia (3,1).

El gráfico quedaría:



Viendo el gráfico y trazando líneas perpendiculares al gradiente de la F.O. hacia la dirección de máximo decrecimiento, podemos concluir que el punto que minimiza la F.O. es (3,4).

b)

Construyamos la función de Lagrange:

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (-3x - y) + \mu_1(\frac{x^2}{3} - y + 1) + \mu_2(x + \frac{3y^2}{16} - 6) + \mu_3(x - 3)$$

Luego derivando:

$$\frac{dL}{dx} = -3 + \frac{2}{3}\mu_1 x + \mu_2 + \mu_3 = -3 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

$$\frac{dL}{dy} = -1 - \mu_1 + \frac{3}{8}\mu_2 y = -1 - \mu_1 + \frac{3}{2}\mu_2$$

$$\frac{dL}{d\mu_1} = \frac{x^2}{3} - y + 1$$

$$\frac{dL}{d\mu_2} = x + \frac{3y^2}{16} - 6$$

$$\frac{dL}{d\mu_3} = x - 3$$

Luego podemos ver que en el óptimo de debe cumplir:

$$\frac{dL}{d\mu_1}\mu_1 = (\frac{x^2}{3} - y + 1)\mu_1 = 0 \qquad \frac{dL}{d\mu_1} = (\frac{x^2}{3} - y + 1) \le 0$$

$$\frac{dL}{d\mu_2}\mu_2 = (x + \frac{3y^2}{16} - 6)\mu_2 = 0 \qquad \frac{dL}{d\mu_2} = (x + \frac{3y^2}{16} - 6) \le 0$$

$$\frac{dL}{d\mu_3}\mu_3 = (x-3)\mu_3 = 0 \qquad \frac{dL}{d\mu_3} = (x-3) \le 0$$

$$\frac{dL}{dx}x = x(-3 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = 0 \qquad \frac{dL}{dx} = (-3 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \ge 0$$

$$\frac{dL}{dy}y = y(-1 - \mu_1 + \frac{3}{2}\mu_2) = 0 \qquad \frac{dL}{dy} = (-1 - \mu_1 + \frac{3}{2}\mu_2) \ge 0$$

$$x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \ge 0$$

En este caso, al estar todas las restricciones activas, las condiciones asociadas a las restricciones no nos aportan información de los multiplicadores de Lagrange. Como en el óptimo x e y son no nulos se tiene que:

$$\frac{dL}{dx} = -3 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \qquad \frac{dL}{dy} = -1 - \mu_1 + \frac{3}{2}\mu_2 = 0$$

Vemos que nos quedan 2 ecuaciones para determinar 3 valores de los multiplicadores de Lagrange, esto se debe a la "**degeneración del problema**". <u>Esto ocurre cuando se sobredetermina el punto óptimo</u> (tenemos 3 restricciones pasando por un punto en un espacio 2D y solo necesitamos 2 activas en el punto).

Procedimiento→
Hay que ver cual es la restricción que podría estar inactiva (es decir sobra) en el punto óptimo sin cambiárnoslo (es decir que nos entregue el resto de los multiplicadores positivos). Probemos:

1) Si $\mu_1 = 0$ (Es decir (1) inactiva), se tiene que: $-3 + \mu_2 + \mu_3 = 0$; $-1 + \frac{3}{2}\mu_2 = 0$

De esto obtenemos: $\mu_2 = 2/3$, $\mu_3 = 7/3$, lo que nos dice que estaríamos en el óptimo, ya que tenemos multiplicadores positivos. La restricción (1) sobra en este problema, es decir si la desactivamos y dejamos las restantes no cambia el valor de la función objetivo.

2) Si $\mu_2 = 0$ ((2) inactiva), se tiene que: $\mu_1 = -1$ y $\mu_3 = 5$.
Tenemos multiplicadores negativos, por lo que si sacamos la restricción (2) nos cambiaría el punto óptimo, es por este motivo que la restricción (2) debe estar activa en el óptimo.

3) Si $\mu_3 = 0$, o sea (3) inactiva, se tiene que: $\mu_1 = \mu_2 = 1$.
Otra vez estaríamos en el óptimo si desactivamos la restricción (3) y dejamos las otras dos.

Luego podemos ver que se verifican las condiciones KKT con restricciones activas (1) y (2) o bien (1) y (3).

Observación:
Vemos que existen 2 puntos que satisfacen KKT, sin embargo, la solución es la misma, esto se debe a que están 2 vértices concentrados en 1 punto. Si moviéramos un Δb muy pequeño el lado derecho de alguna de las restricciones inactivas podríamos ver esos 2 vértices.

c) Podemos usar la aproximación $\Delta(F.O.) \approx -\mu_j * \Delta b_j$, para valores pequeños de variación de b_j. (En este caso usamos las restricción (3) como activa).

En el primer caso si la restricción varía de 3 a 2.9, es decir $\Delta b_3 = -0.1$ se tendría que la función objetivo variaría aproximadamente en -7/3*(-0.1) = 7/30. Es decir empeoraría (para un problema de minimización) el valor de la F.O. Hay que decir que la solución óptima también cambiaría moviéndose hacia la izquierda.

En el segunda caso si la restricción variara de 3 a 3.1, es decir $\Delta b_3 = 0.1$ se tendría que la función objetivo variaría aproximadamente en 0*(0.1) = 0, ya que desactivamos la restricción (3) al moverla hacia el lado derecho sacándola del dominio y quedarían activadas (2) y (1) por lo que el valor de la función objetivo no cambiaría, manteniéndose el mismo punto óptimo de antes.

Importante: Hay que recordar que $\Delta(F.O.) \approx -\mu_j * \Delta b_j$ es una aproximación cuando las restricciones que están activas no cambian. En este caso hemos desactivado la restricción (3).