Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2,3 y 4

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Pablo Rey , Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía N°14: DUALIDAD

→ Cada problema lineal (primal), tiene un problema dual asociado.
→ Los Problemas poseen exactamente las mismas condiciones KKT.
→ Los multiplicadores de Lagrange de uno son las variables del otro y viceversa.

Tabla de Max. a Min.

PP)	PD)
$Max \quad C^T X$	$Min \quad Y^T b$
$a_j^T x \geq b_j$	$y_j \leq 0$
$a_j^T x \leq b_j$	$y_j \geq 0$
$a_j^T x = b_j$	$y_j libre$
$x_i \geq 0$	$A^{iT} Y \geq c_i$
$x_i \leq 0$	$A^{iT} Y \leq c_i$
$x_i : libre$	$A^{iT} Y = c_i$

a_j :Representa la fila 'j' de la matriz A
A^i :Representa la columna 'i' de la matriz A

Tabla de Min. a Max (Es al revés).

PP)	PD)
$Min \quad C^T \overline{X}$	$Max \quad \vec{Y}^T \vec{b}$
$a_j^T x \geq b_j$	$y_j \geq 0$
$a_j^T x \leq b_j$	$y_j \leq 0$
$a_j^T x = b_j$	$y_j libre$
$x_i \geq 0$	$A^{iT} Y \leq c_i$
$x_i \leq 0$	$A^{iT} Y \geq c_i$
$x_i : libre$	$A^{iT} Y = c_i$

Observaciones:

1) **Dualidad Fuerte**: Si un problema prima con variables X es factible, entonces el dual con variables Y también lo es y en el óptimo de cada problema:

$$\boxed{C^T X^* = Y^{*T} b}$$

2) **Dualidad Débil**: Para cualquier par de soluciones factibles en sus dominios:
   X : Solución factible del primal
   Y : Solución factible del dual

Se cumple que:

Si el primal maximiza y el dual minimiza: $\boxed{C^T X \leq Y^T b}$

Si el primal minimiza y el dual maximiza: $\boxed{C^T X \geq Y^T b}$

3) **En cada iteración del método SIMPLEX**, se identifica simultáneamente una solución factible en un vértice, X para el PP y una solución complementaria Y para el PD que sólo es factible en el TABLEAU óptimo. En cualquiera de dichas iteraciones se cumple que: $C^T X = Y^T b$.

4) **Simetría,** el dual del problema dual es el primal.

¿Utilidad del problema Dual?

→ Un valor cualquiera de la Función Objetivo dual ($b^T Y$) con Y factible acota el valor de la Función Objetivo primal.

→ En el óptimo del dual existe información total sobre el óptimo primal (valor óptimo, solución óptima, configuración de la base y restricciones activas). Luego se puede escoger el problema que nos facilite más resolverlo.

→ ¿Qué información representan las variables primales en el problema dual?

En el Primal	**En el Dual**
Costos reducidos asociados a variables	Holguras y excesos
Costos reducidos asociados a holguras y excesos.	Variables
Variables	Costos reducidos asociados holguras y excesos.
Holguras y excesos	Costos reducidos asociados a variables

¿Y en el SIMPLEX?:

En el Primal	En el Dual
Variables Básicas	Costos reducidos de V. No Básicas
Variables No Básicas	Costos reducidos de V. Básicas
Costos reducidos de V. No Básicas	Variables Básicas
Costos reducidos de V. Básicas	Variables No Básicas

OJO: ¡¡Tener mucho cuidado con los signos en la conversión!! (Con los problemas de Max y Min muchas veces los costos reducidos cambian de signo, muchas veces las variables también lo hacen).

Problema 1: Pasar a formato Dual

Establezca el problema dual de:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 5x_1 + 6x_2 \\
&s.a. \\
&x_1 + 2x_2 = 5 \\
&-x_1 + 5x_2 \geq 3 \\
&4x_1 + 7x_2 \leq 8 \\
&x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Respuesta:

Por tablas de conversión:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 5x_1 + 6x_2 && \rightarrow Min \quad 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 \\
&x_1 \ libre && \rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 5 \\
&x_2 \geq 0 && \rightarrow 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 \geq 6 \\
&x_1 + 2x_2 = 5 && \rightarrow \lambda_1 \ libre \\
&-x_1 + 5x_2 \geq 3 && \rightarrow \lambda_2 \leq 0 \\
&4x_1 + 7x_2 \leq 8 && \rightarrow \lambda_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Luego el problema dual sería:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad 5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 8\lambda_3 \\
&s.a. \\
&\lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 = 5 \\
&2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3 \geq 6 \\
&\lambda_2 \leq 0 \\
&\lambda_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema 2: Obtener la solución primal resolviendo el dual

Resuelva el problema dual asociado al siguiente problema con SIMPLEX y obtenga la solución primal:

$$
\text{PP)} \quad
\begin{aligned}
&Min: 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\
&s.a. \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5 \\
&2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Respuesta:

Primeros escribimos el PD asociado:

$$
\text{PD)} \quad
\begin{aligned}
&Max: 5y_1 + 6y_2 \\
&s.a. \\
&y_1 + 2y_2 \leq 3 \\
&2y_1 + 2y_2 \leq 4 \\
&y_1 + y_2 \leq 5 \\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
\qquad
\text{PD}_{\text{ESTÁNDAR}}\text{)} \quad
\begin{aligned}
&Max: 5y_1 + 6y_2 \\
&s.a. \\
&y_1 + 2y_2 + h_1 = 3 \\
&2y_1 + 2y_2 + h_2 = 4 \\
&y_1 + y_2 + h_3 = 5 \\
&y_1, y_2, h_3, h_4, h_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

No necesitamos fase I.

Iteración 1:

Y1	Y2	h1	h2	h3	L.D.	BASE
1	2	1	0	0	3	h1
2	2	0	1	0	4	h2
1	1	0	0	1	5	h3
5	6	0	0	0	0	

Entra y_1, sale: Min(3/1,4/2,5/1) = 2 → h_2

Iteración 2:

Y1	Y2	h1	h2	h3	L.D.	BASE
0	1	1	-1/2	0	1	h1
1	1	0	1/2	0	2	Y1
0	0	0	-1/2	1	3	h3
0	1	0	-5/2	0	-10	

Entra y_2, sale: Min(1/1,2/1,*) = 1 → h_1

Iteración 3:

Y1	Y2	h1	h2	h3	L.D.	BASE
0	1	1	-1/2	0	1	Y2
1	0	-1	1	0	1	Y1
0	0	0	-1/2	1	3	h3
0	0	-1	-2	0	-11	

Luego tenemos solución óptima.......

El óptimo del problema dual es: $Y^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $h^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ con valor óptimo de V(PD) = 11

¿Cuál es el óptimo del Primal?

<u>1 El valor óptimo del primal es el mismo V(PP) = 11.</u>

2 La solución óptima del primal son los costos reducidos asociados a las holguras del dual asociado. (Cambian de signo)

Luego: $X^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ Vemos que: $C^T X^* = 3*1 + 4*2 + 5*0 = 11$.

3 También sabemos que la solución óptima básica del dual son los costos reducidos de las variables no básicas del primal. Luego: $r^T = [1,1,3]$

Con esta información podemos saber la configuración de la base óptima primal

Base =[X_1,X_2] No Base = [X_3,e_1,e_2]

5 Podemos obtener información acerca del las restricciones activas del Dual

Como los 2 excesos primales tienen costos reducidos (o mult. De Lagrange) no nulos

→ Las 2 restricciones primales están activas.

Problema 3: Obtener una solución óptima con la otra sin TABLEAU

Se tiene el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
&Máx: 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 20x_4 \\
&4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 \leq 600 \\
&x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 \leq 400 \\
&3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 500 \\
&x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1,2,3,4\}
\end{aligned}$$

Si se sabe que en el óptimo: $X_1 = 400/3$ $X_2 = 0$ $X_3 = 0$ $X_4 = 20/3$, encuentre el óptimo del problema dual sin hacer SIMPLEX.

Respuesta:

Primero, obtengamos la solución con las holguras:

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 + h_1 = 600 \\
&x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 + h_2 = 400 \\
&3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + h_3 = 500
\end{aligned}$$

Reemplazando valores: $h_1 = 0, \ \ h_2 = 0, \ \ h_3 = 280/3$

Luego obtengamos el problema Dual:

$$\begin{aligned}
&Min: 600y_1 + 400y_2 + 500y_3 \\
&s.a. \\
&4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 6 \ (1) \\
&9y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 10 \ (2) \\
&7y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 9 \ (3) \\
&10y_1 + 40y_2 + y_3 \geq 20 \ (4) \\
&y_j \geq 0 \ \forall j = (1,2,3)
\end{aligned}$$

Luego si X_1 es distinto de cero, entonces el costo reducido del exceso 1 es no nulo→ restricción 1 activa (exceso nulo)→ $\boxed{4y_1 + y_2 + 3y_3 = 6}$

Si X_4 es distinto de cero, entonces el costo reducido del exceso 4 no nulo → restricción 4 activa (exceso nulo) → $\boxed{10y_1 + 40y_2 + y_3 = 20}$

Si h_3 es distinto de cero, entonces el costo reducido de la variable Y_3 no nulo → variable Y_3 nula → $\boxed{y_3 = 0}$

Luego de la resolución del sistema de ecuaciones → $Y = \begin{bmatrix} 22/15 & 2/15 & 0 \end{bmatrix}$

Con estos valores podemos calcular los excesos restantes:

$$9y_1 + y_2 + 4y_3 - e_2 = 10 \quad \rightarrow \quad e_2 = 10/3$$
$$7y_1 + 3y_2 + 2y_3 - e_3 = 9 \quad \rightarrow \quad e_3 = 5/3$$

Por lo tanto los excesos del dual en el óptimo son: $e = \begin{bmatrix} 0 & 10/3 & 5/3 & 0 \end{bmatrix}$

Problema 4: Uno para pensar

Considere:

$$\begin{aligned} &Max \quad C^T X \\ &s.a. \\ &AX \leq b \\ &x \geq 0 \ \forall i \end{aligned}$$

a) Formule el PD.

b) Explique las condiciones que se deben cumplir para que este problema y el original sean equivalentes.

Respuesta:

a)

Establezcamos el problema dual:

$$\text{PP)} \begin{aligned} &Max \quad C^T X \\ &s.a. \\ &AX \leq b \\ &x_i \geq 0 \ \forall i \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \text{PD)} \begin{aligned} &Min : b^T Y \\ &s.a. \\ &A^T Y \geq C \\ &y_j \geq 0 \ \forall j \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &Min \quad b^T Y \\ &s.a. \\ &A^T Y \geq C \\ &y_j \geq 0 \ \forall j \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} &Max \quad -b^T Y \\ &s.a. \\ &-A^T Y \leq -C \\ &y_j \geq 0 \ \forall j \end{aligned}$$

Las condiciones serían $A = -A^T$ y $b = -C$.

Problema 5: Dominios no acotados, vacíos Dualidad

Considere el problema:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 6x_1 + 5x_3 + x_4 \\
&s.a. \\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
&-2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\
&x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1,2,3\} \\
&x_4 libre
\end{aligned}
$$

Encuentre su valor óptimo considerando el uso del problema dual.

Respuesta:

Pasando problema dual:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad 3y_1 + 2y_2 \\
&s.a. \\
&y_1 - 2y_2 \geq 6 \\
&2y_1 - y_2 \geq 0 \\
&y_1 + 2y_2 \geq 5 \\
&y_1 = 1
\end{aligned}
$$

Se ven las ventajas de ocupar el problema dual, ya que se pasa de un problema de 4 variables y 2 restricciones, a uno en donde las variables están prácticamente determinadas. Reemplazando la última restricción en las demás ($y_1 = 1$):

$$
\begin{array}{lcl}
2y_2 \leq -5 & & y_2 \leq -2.5 \\
-y_2 \geq -2 & \rightarrow & y_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad \text{El dominio dual es vacío.} \\
2y_2 \geq 4 & & y_2 \geq 2
\end{array}
$$

No existe una solución factible para el problema dual. Es decir no existe valor de la función objetivo dual que acote la función objetivo primal (ver Observaciones 2) Luego el problema primal es no acotado (Siempre y cuado este no sea vacío también).

Relación Dual-Primal para dominios no acotados / vacíos:

PD con Dominio vacío	$\Longrightarrow$	PP no acotado ó PP con Dominio vacío
PD no acotado	$\Longrightarrow$	PP con Dominio vacío
PD con solución óptima	$\Longleftrightarrow$	PP con solución óptima

Problema 6: Resolución dual gráfica

Resuelva el problema indicado de la siguiente forma:

i) Primero resuelva gráficamente el problema dual.

ii) A partir de esta información, determine que variables del problema primal toman el valor cero en el óptimo.

iii) Finalmente a partir de lo anterior, encuentre el óptimo de las variables básicas del problema primal.

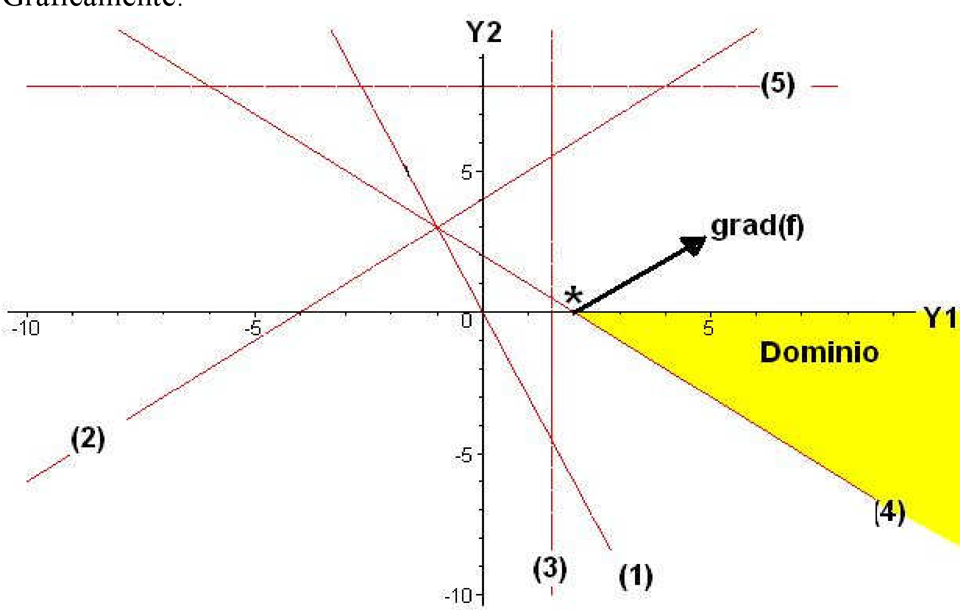
$$
\begin{aligned}
&Max \quad -4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 8x_5 \\
&s.a. \\
&3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\
&x_1 - x_2 + x_4 - x_5 \geq 2 \\
&x_i \geq 0 \ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}
\end{aligned}
$$

Respuesta:

El problema dual queda:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad 3y_1 + 2y_2 \\
&s.a. \\
&(1)\ 3y_1 + y_2 \geq 0 \\
&(2)\ y_1 - y_2 \geq -4 \\
&(3)\ 2y_1 \geq 3 \\
&(4)\ y_1 + y_2 \geq 2 \\
&(5)\ -y_2 \geq -8 \\
&y_1 libre, y_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

Gráficamente:



Vemos que el óptimo está en el punto (2,0).

ii)
Observamos que la única restricción activa es (4). Por lo que el único costo reducido distinto de cero será el asociado a esta restricción, o sea, X_4.
Luego:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$$
$$x_4 \neq 0$$

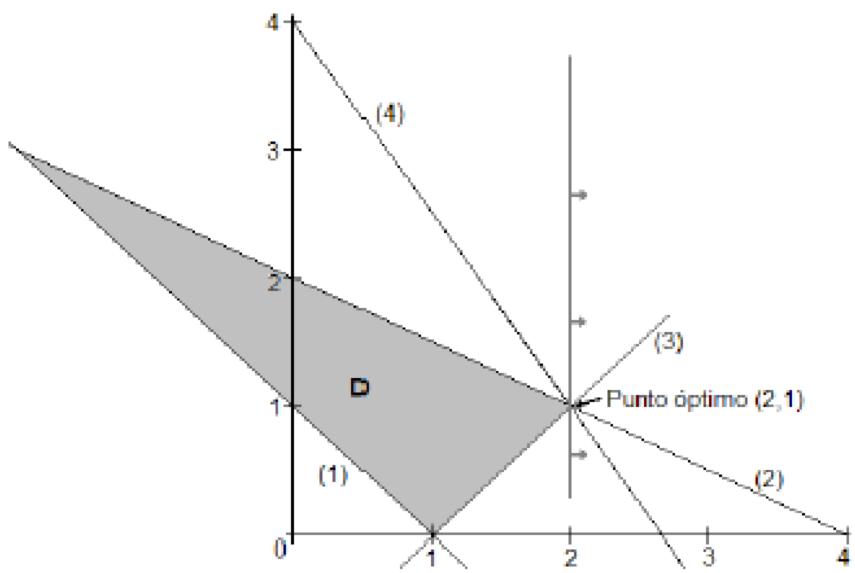
iii)
Reemplazando en la primera restricción del problema primal:
$3*0 + 0 + 2*0 + X_4=3 \rightarrow$ **X_4=3.**
Y el valor óptimo del problema es **v = 6.**

Problema 7: Degeneración, Solución Múltiple y Dualidad
Considere el siguiente problema de Programación Lineal:

$$Max: 2x_1 \text{ s.a.}$$
$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad (2)$$
$$x_1 - x_2 \leq 1 \quad (3)$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (4)$$

a) Resuelva gráficamente el primal
b) Determine todas las soluciones óptimas de los problemas primal y dual.

Respuesta:
a) Graficando se tiene:



b) Podemos darnos cuenta que la solución óptima del problema primal $X = (2,1)$, es degenerada (restricción 4 ó 2 sobra). Considerando a las variables de exceso y holgura en el óptimo: $h = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, se tiene a 3 variables no nulas, mientras que el número de variables en base es 4. Por otro lado sabemos que las variables del problema primal, son costos reducidos del problema dual, por lo tanto, habrá más costos reducidos en el problema dual nulos (3), que variables en su base (2). Esto nos dice que existirá solución múltiple.

Relación Dual-Primal para solución degenerada / múltiple

PD con solución múltiple	$\Leftrightarrow$	PP con solución degenerada
PD con solución degenerada	$\Leftrightarrow$	PP con solución múltiple

En este caso el problema dual es:

$$
\begin{aligned}
&Min: y_1 + 4y_2 + y_3 + 8y_4 \\
&s.a. \\
&y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 = 2 \quad (1) \\
&y_1 + 2y_2 - y_3 + 2y_4 = 0 \ (2) \\
&-y_1 \geq 0 \rightarrow y_1 \leq 0 \\
&y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Como $X = (2,1)$ en el primal, los costos reducidos de las holguras y excesos del dual son no nulos. Esto implica que las holguras y excesos del dual son nulos (estarán fuera de base). En este caso es obvio, ya que son restricciones de igualdad.

Con $h = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ en el primal, el costo reducido de y_1 en el dual es no nulo, esto implica que la variable estará fuera de la base, es decir, es nula.→ $y_1 = 0$. El resto de las holguras y excesos primales indican que las variables y_2, y_3, y_4 pueden ser no nulas.

Con esta información se obtiene de las restricciones del problema dual el siguiente dominio de soluciones óptimas:

$$
\begin{aligned}
&y_2 + y_3 + 3y_4 = 2 \\
&2y_2 - y_3 + 2y_4 = 0 \\
&y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Sabemos que debe haber sólo 2 variables en la base dual para obtener los vértices de esta solución optima, por lo que probemos cual puede salir de la base dual:

Si $y_4 = 0$ (restricción primal 4 desactivada en el primal)→ $y_2 = 2/3 \ \wedge \ y_3 = 4/3$

Si $y_3 = 0$ (restricción primal 3 desactivada en el primal)→ $y_4 = 1 \ \wedge \ y_2 = -1$. Es un vértice infactible dual (sacamos la restricción 3 primal que debe estar activa en el óptimo, ya que de lo contrario uno de los costos reducidos primales (variables duales) se hace negativo).

Si $y_2 = 0$ (restricción primal 2 desactivada en el primal)→ $y_4 = 2/5 \ \wedge \ y_3 = 4/5$.

Por lo que la solución óptima dual también se puede expresar en función de los vértices óptimos como:

$$
Y^* = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 4/3 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\lambda/3 \\ 8\lambda/15 + 4/5 \\ 2/5 - 2\lambda/5 \end{bmatrix} \text{ con } \lambda \in [0,1]
$$

Esta formulación es equivalente al dominio óptimo encontrado.