Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2 y 3

PROFESORES: Juan Carlos Muñóz, Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía Nº2: Más Modelación, Solución Gráfica

Supongamos un problema P): $Max: f\left(\overrightarrow{X}\right)$ $s.a.$ $\overrightarrow{X} \in \Omega$

DEFINICIONES:

Para P) se dice:

1) Solución Factible: A cualquier valor $\overrightarrow{X_0}$ que sea parte del dominio (es decir $\overrightarrow{X_0} \in \Omega$)

2) Solución Óptima: A cualquier solución factible $\overrightarrow{X^*}$, tal que para todo $\overrightarrow{X_0} \in \Omega$ se cumple que $f\left(\overrightarrow{X^*}\right) \geq f\left(\overrightarrow{X_0}\right)$, es decir, evaluada en la función objetivo entregue el mayor valor entre las soluciones factibles. Ojo: Puede haber más de una o puede no existir.

3) Valor óptimo: Al valor $\hat{V}$ que toma la función objetivo evaluada en la solución óptima, es decir $\hat{V} = f\left(\overrightarrow{X^*}\right)$. Ojo: Este valor es único.

1. Planificación de producción en el tiempo:

Una fábrica tiene que planificar la producción para los T siguientes periodos. En cada periodo hay una capacidad máxima de producción S_i y una demanda específica del cliente de D_i unidades de producto ($\forall i = 1,..,T$). Esta demanda debe ser satisfecha. Asuma que también se compran envíos extra.

Se tienen los siguientes datos:
→ \$g: Ganancia por unidad entregada en cada periodo a la demanda.
→ \$c: Costo de producción por unidad
→ \$b: Costo de mantener en bodega de un periodo al otro por producto

Adicionalmente el cliente acepta que se produzcan atrasos en la entrega del producto de a los más un periodo, pero se desembolsa \$a menos por unidad producida. Asumir que no existen otros costos, por ejemplo de transporte...

Se pide: Plantear modelo de optimización equivalente que maximice utilidades

Respuesta:

Variables de decisión:

Como tenemos un desfase temporal entre la producción y la demanda (ya que las demandas pueden ser satisfechas en periodos distintos a los de producción), se necesitan dos subíndices en las variables de decisión. El primero indicará donde se produjo esa cantidad (en que periodo) y el segundo donde se entregó a la demanda.

$X_{i,j}$: cantidad de producto hecho en periodo "i" que satisface la demanda en periodo "j" ($\forall i = 1,..T \wedge \forall j = 1,..,T$).

Ojo:

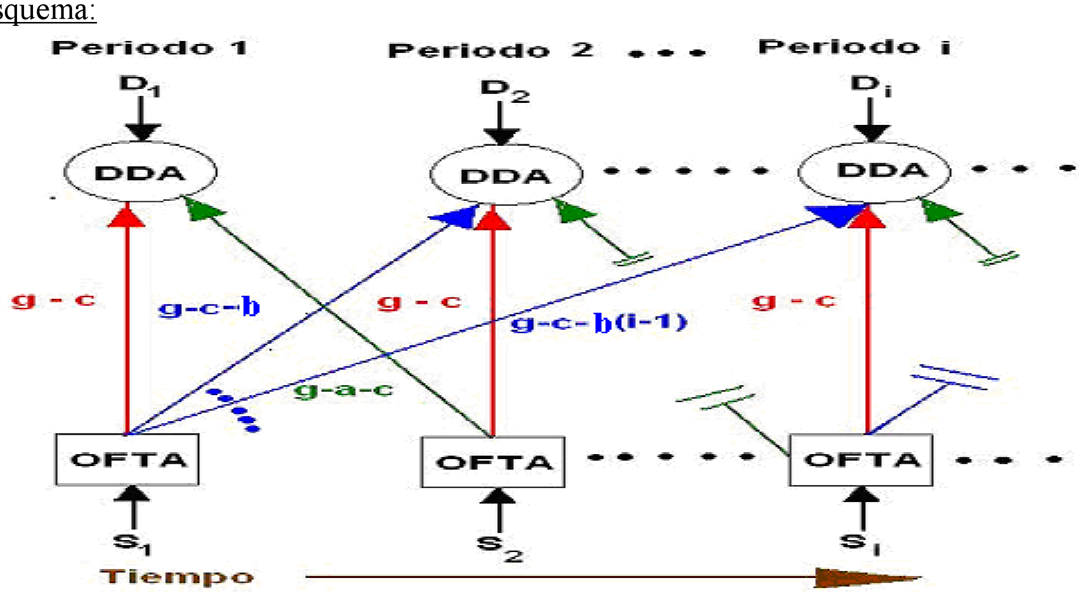
→ La producción $X_{i,i}$ representa una entrega en el mismo periodo de producción y su costo es $\$cX_{i,i}$

→ Las producción $X_{i,i+1}$ representa que la demanda está siendo satisfecha por unidades producidas en el periodo anterior, es decir fue almacenada un periodo. Su costo es de $\$(c+b)X_{i,i+1}$.

→La producción $X_{i,i-1}$ representa entregar producciones atrasadas (producidos en i que se demandaron en $i-1$) . El costo de esta producción sería: $(c+a)X_{i,i-1}$.

→ El costo de un producto hecho durante el primer periodo que luego es distribuido en el periodo i es de $b(i-1)+c$.

Esquema:



Función Objetivo:

$$Max:\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(g-c)X_{i,i}}_{Utilidad\ Normal}+\underbrace{\sum_{i=2}^{n}(g-c-a)X_{i,i-1}}_{\text{Utilidad de atraso}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i}(g-c-bj)X_{i,i+j}}_{\text{Utilidad de productos almacenados j periodos}}$$

Restricciones:

→Por un lado nos faltan T restricciones de Oferta en donde se cumpla que la cantidad ofrecida por cada periodo será menor o igual a la oferta máxima en cada periodo:

$$X_{1,1}+\sum_{j=2}^{T}X_{1,j}\leq S_1$$

$$X_{i,i}+\sum_{j=i+1}^{T}X_{i,j}+X_{i,i-1}\leq S_i \qquad \forall i=(2,..,T-1)$$

$$X_{T,T}+X_{T,T-1}\leq S_T$$

→ Por otro lado nos faltan T restricciones de Demanda en donde se cumpla que la cantidad entregada a cada demanda será mayor o igual a lo que pide:

$$X_{1,1}+X_{2,1}\geq D_1$$

$$X_{i,i}+X_{i+1,i}+\sum_{j=1}^{i-1}X_{j,i}\geq D_i \qquad \forall i=(2,..,T-1)$$

$$X_{T,T}+\sum_{j=1}^{T-1}X_{j,T}\geq D_T$$

→No negatividad y anulación de producciones inaceptables:

$$X_{i,j}\geq 0\ \ \forall(i,j)/\ j\geq i-1$$

$$X_{i,j}=0\ \ \forall(i,j)/\ j<i-1$$

RESOLUCIÓN GRÁFICA:

2. Problema

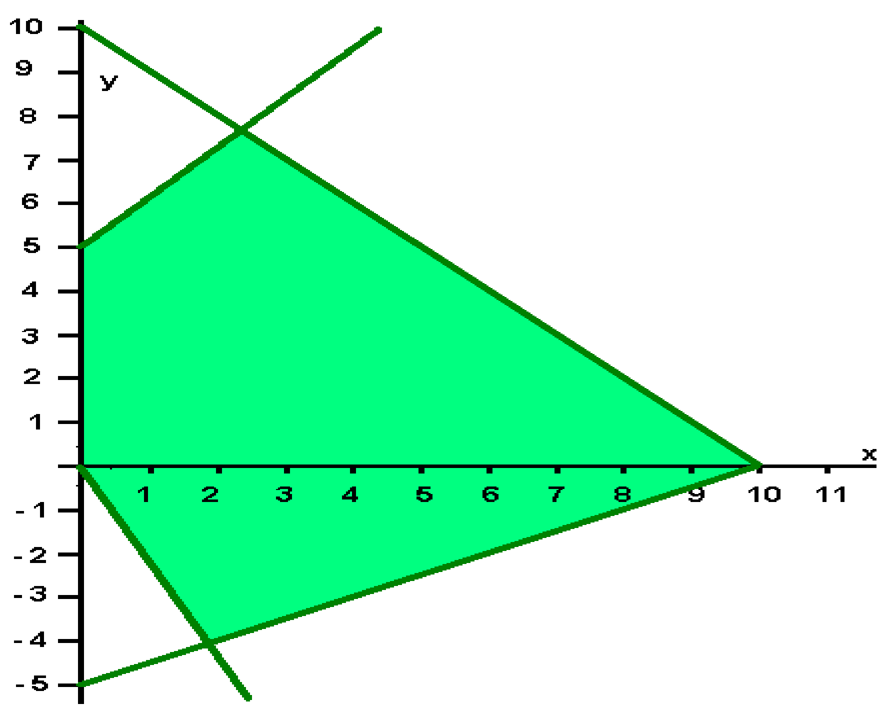
Considere el siguiente problema de optimización:

$$Max: f\left(X\right) = x + 3y$$
$$s.a.$$
$$(1)\ y - x \le 5$$
$$(2)\ x + y \le 10$$
$$(3)\ x - 2y \le 10$$
$$(4)\ 2x + y \ge 0$$
$$(5)\ x \ge 0$$

Resuelva el problema de manera gráfica entregando la solución y el valor óptimo.

Respuesta:

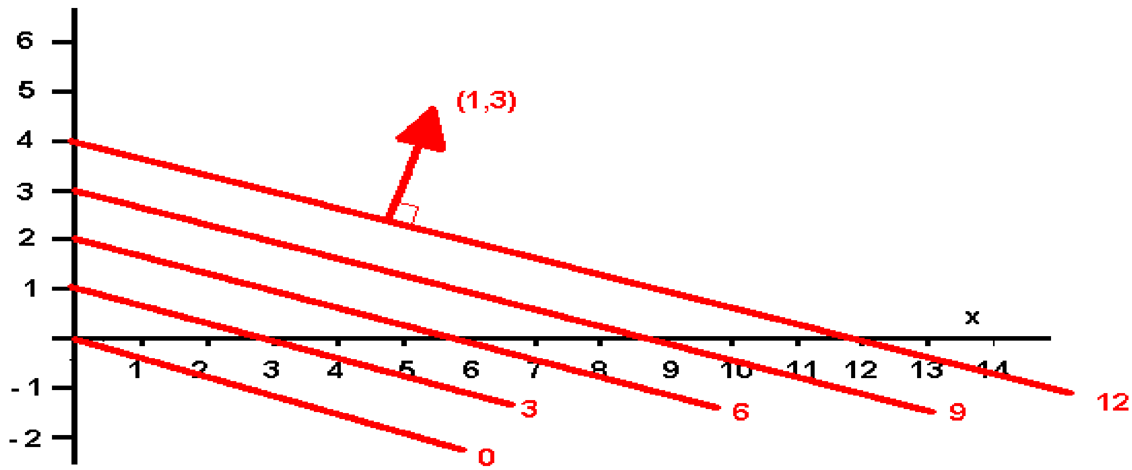
Para resolver un problema de manera gráfica es esencial graficar primero el dominio. Considerando las restricciones (1), (2), (3), (4) y (5), el espacio de soluciones factibles es:



Ahora interesa ver que punto dentro de la región verde maximiza la función objetivo. Para ello consideramos el uso de curvas de nivel tomando la función objetivo e igualándola a una constante arbitraria “C”. Con ello se obtiene la isocuanta “C”, es decir, todos las soluciones factibles que, evaluadas en la función objetivo, entregan el valor “C”:

$$x + 3y = C$$

Graficando arbitrariamente las isocuantas C = 0, 3, 6, 9 y 12:



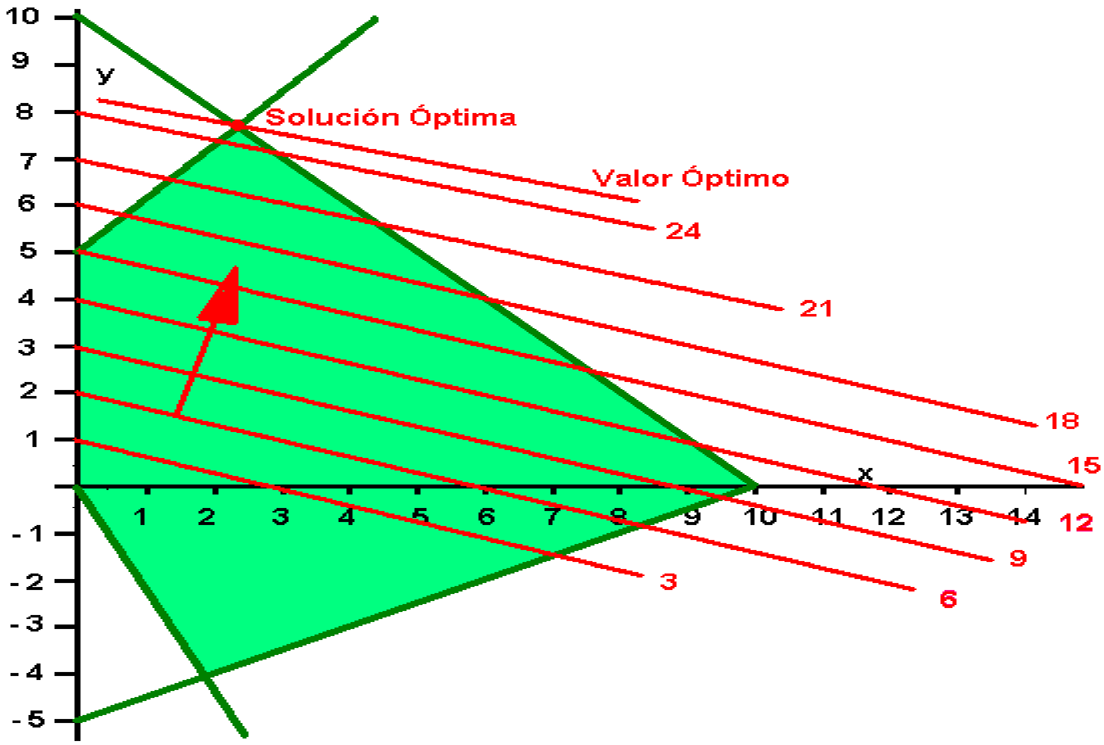
Se ve claramente que la función objetivo crece hacia la dirección (1,3). Esta dirección se llama **gradiente** y se define como el vector de derivadas parciales de la función objetivo:

$$grad(F.O.) = \nabla(F.O.)$$

$$grad(F.O.) = \nabla\left(x+3y\right) = \left(\frac{d\left(x+3y\right)}{dx}, \frac{d\left(x+3y\right)}{dy}\right) = \left(1,3\right)$$

El gradiente representa la dirección de máximo crecimiento de la función objetivo.

Luego la solución óptima a este problema se encontrará en la mayor isocuanta que se encuentre dentro del dominio. Gráficamente:



La solución óptima se encuentra en la intersección de las restricciones (1) y (2). La obtenemos resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y - x &= 5 \\ x + y &= 10 \end{aligned} \quad \rightarrow \text{Solución Óptima:} \quad \left. \begin{aligned} x^* &= 2,5 \\ y^* &= 7,5 \end{aligned} \right| = X^*$$

Evaluando en la función objetivo obtenemos el valor óptimo: $V^* = f\left(X^*\right) = 25$

3. **Problema:**

Considere ahora el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
&Min: f(X) = y^2 - 10y + x^2 - 15x \\
&s.a. \\
&(1)\ y - x \le 5 \\
&(2)\ x + y \le 10 \\
&(3)\ x - 2y \le 10 \\
&(4)\ 2x + y \ge 0 \\
&(5)\ x \ge 0
\end{aligned}
$$

Resuelva el problema de manera gráfica entregando las solución y el valor óptimo.

Respuesta:

El dominio de este problema es idéntico a anterior, pero ahora minimizamos y tenemos una función objetivo no lineal.

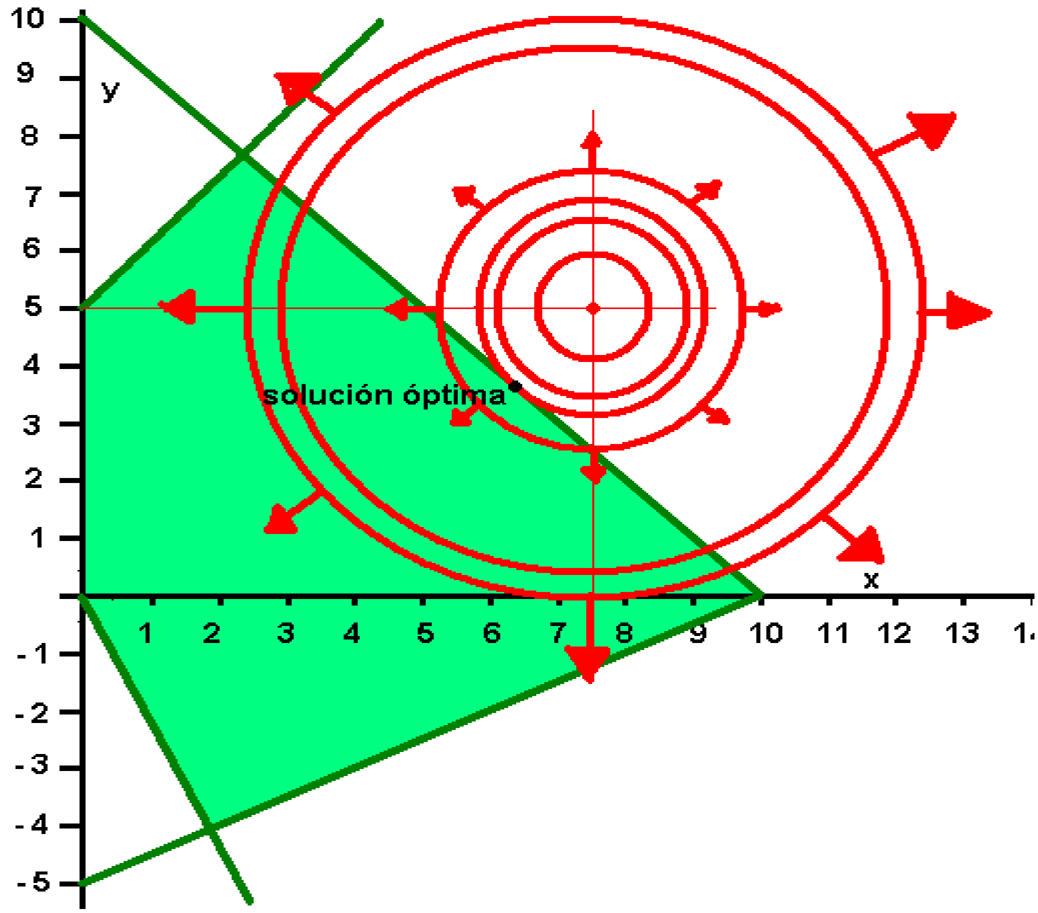
Podemos darnos cuenta que las curvas de nivel de la función objetivo son circunferencias centradas en (5 , 15/2):

$$
\begin{aligned}
&f(X) = y^2 - 10y + x^2 - 15x \\
&\Leftrightarrow \\
&f(X) = (y-5)^2 + (x-15/2)^2 - 25 - 225/4
\end{aligned}
$$

El gradiente, en este caso, depende del punto del espacio en donde es evaluado y está dado por:

$$grad(F.O.) = (2x - 15, 2y - 10)$$

Graficando el dominio y algunas curvas de nivel arbitrarias, con el fin de obtener la mínima isocuanta dentro del dominio:



Vemos que la solución óptima es tal, que la curva de nivel óptima es tangente con los restricción (2). Como la pendiente de la restricción es -1, la curva de nivel deberá tener la misma. Derivado la curva de nivel óptima implícitamente en función de "x":

$$(y-5)^2+(x-15/2)^2-25+225/4=V^* \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$2(y-5)\frac{dy}{dx}+2(x-15/2)=0$$

Luego como $\frac{dy}{dx}=-1$ en el óptimo se tiene que:

$$2(y-5)=2(x-15/2)$$
$$y-5=x-15/2 \qquad ***$$

El óptimo es la solución del sistema d ecuaciones entre *** y la recta que define la restricción (2): $x+y=10$. Resolviendo se obtiene:

$$y-5=(10-y)-15/2 \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x^*=25/4 \\ y^*=15/4 \end{array}\right| = X^*$$

El valor óptimo sería $V^*=f(X^*)$.

4. Problema

Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{gathered} Max: \max\left\{x^2+y^2, 2x\right\} \\ s.a. \\ |x+y| \leq 2 \\ |x-y| \leq 2 \end{gathered}$$

Resuelva el problema de manera gráfica entregando las solución y el valor óptimo.

Ojo: La función "máximo" se define como:

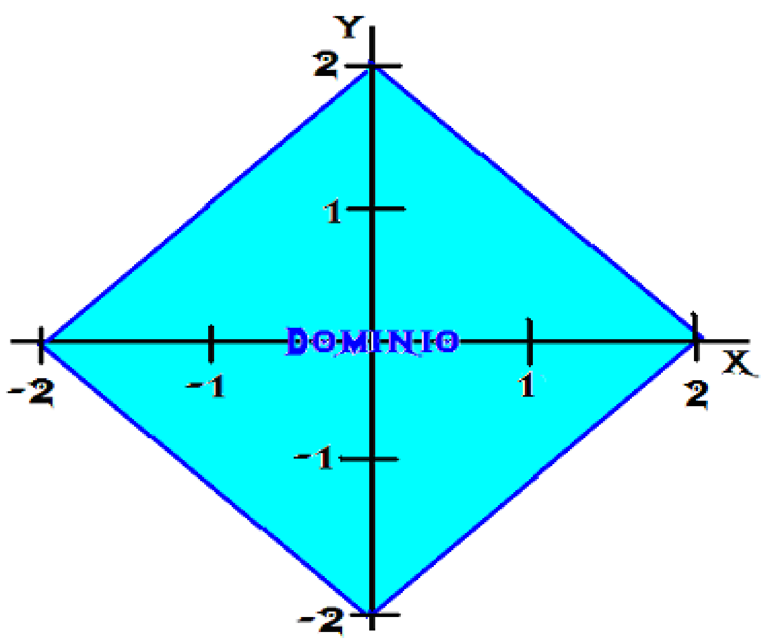
$$\max\left\{f(X); g(X)\right\} = \begin{cases} f(X) & \text{si } f(X) \geq g(X) \\ g(X) & \text{si } f(X) < g(X) \end{cases}$$

Respuesta:

Consideremos primero el dominio:

$$\begin{aligned} |x+y| \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x+y \leq 2 \ \wedge \ x+y \leq -2 \\ |x-y| \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad x-y \leq 2 \ \wedge \ x-y \leq -2 \end{aligned}$$

Graficando:



Consideremos ahora la función objetivo. Para facilitar su entendimiento, calculemos en que puntos las curvas de nivel de "$2x$" son iguales a las de "$x^2 + y^2$".

$$x^2 + y^2 = 2x$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1^2$$

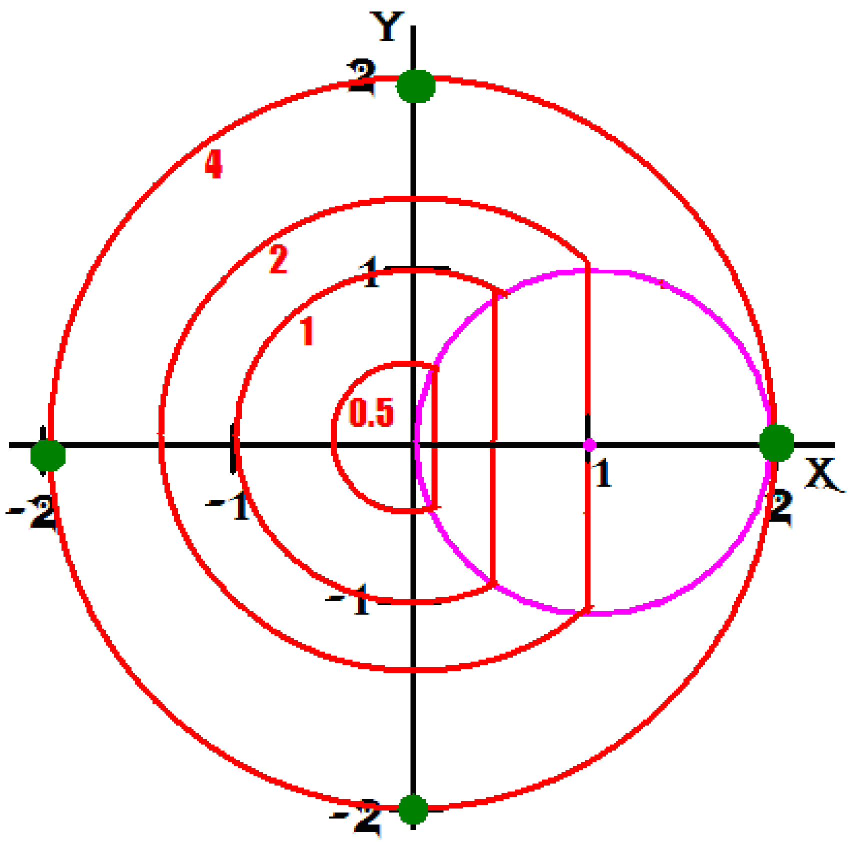
El espacio resultante es una circunferencia de radio 1 centrada en (1,0). Esta es la frontera de las dos curvas de nivel.

Probando valores.......

→ Dentro de la circunferencia "$2x$" es mayor que "$x^2 + y^2$".

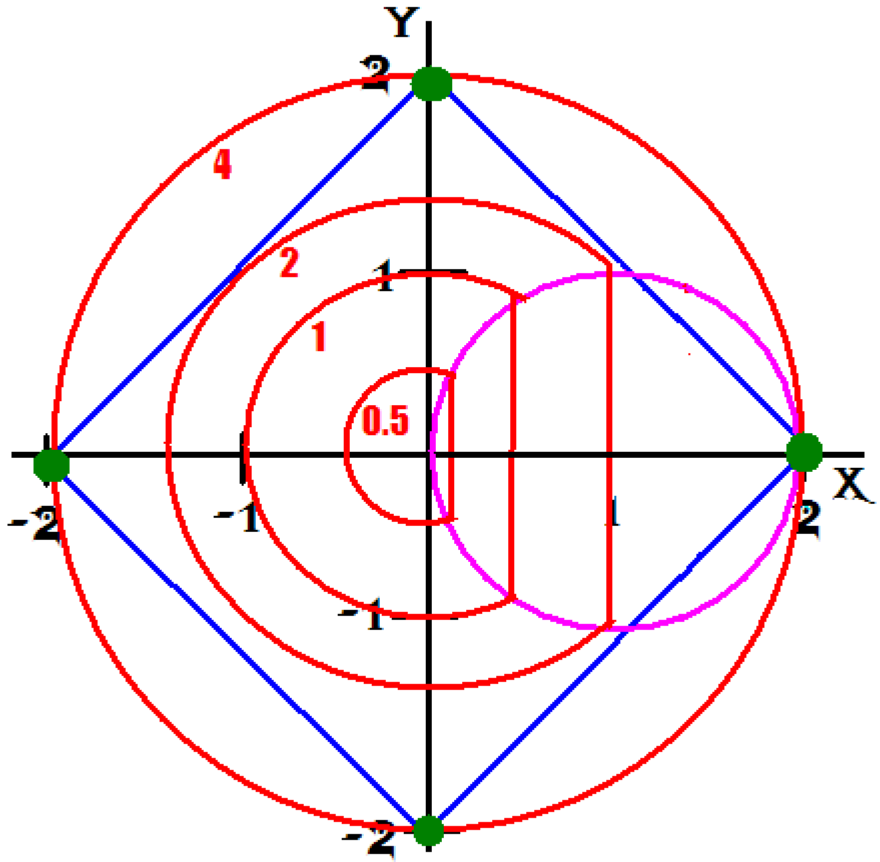
→ Fuera de la circunferencia "$x^2 + y^2$" es mayor que "$2x$".

Gráficamente, las curvas de nivel resultantes serían:



Las curvas en rojo representan las isocuantas dado un valor de la función objetivo. La circunferencia en rosa es la frontera en donde las dos funciones "$x^2 + y^2$" y "$2x$" valen lo mismo.

Graficando el dominio y las isocuantas en conjunto podemos obtener la solución óptima:



Se ve con claridad que la solución óptima son 4 puntos: (0,2) (2,0) (0,-2) (-2,0).

El valor óptimo es 4