

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS1102 Optimización – 2do Semestre 2008 – secciones 2,3 y 4

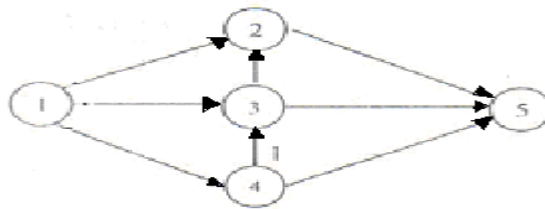
PROFESORES: Juan Carlos Muñoz, Pablo Rey , Sergio Toloza
AYUDANTE: Mathias Klapp

Ayudantía N°16: Optimización en Redes / Programación Dinámica

PROBLEMAS DE FLUJO EN REDES

Los problemas de Flujo en redes, son problemas lineales con una estructura particular que hace más fácil su resolución. Cada problema se representa en una red $G(N, A)$, en donde N es conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos dirigidos. Por otro lado n es el número de nodos y m el número de arcos.

Ejemplo de Red $G(N, A)$:



En este caso:

$N : \{1, 2, 3, 4\}$ $A : \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 3), (4, 5)\}$ $n = 4, m = 8$

Notar la importancia de la dirección del arco en la notación.

1. Problema de flujo de redes a mínimo costo (PFMC):

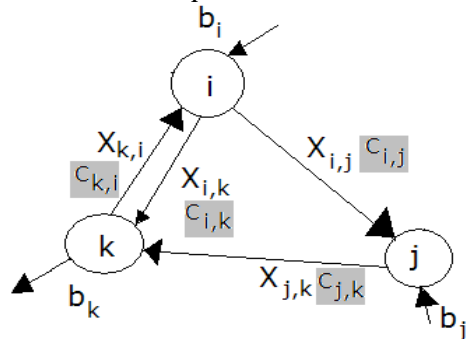
Minimiza el costo total asociado a movimientos de flujo en una red y es el problema básico de redes, de aquí salen todos los demás. La formulación al problema es:

$$\text{Min: } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} X_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j/(i,j) \in A} X_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in A} X_{ki} = b_i \quad \forall i \in N \quad (*)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$



Donde:

$X_{i,j}$: Es la variable del problema y representa el flujo por el arco (i, j) .

b_i : Es la oferta generalizada del nodo "i" (> 0 si es nodo oferta, < 0 si es demanda, 0 si es trasbordo).

$c_{i,j}$: Costo unitario de pasar flujo por arco (i, j)

La restricción (*) se llama "Balance de Masa":

Para cada uno de los nodos, todo el flujo que sale de este ($\sum_{j/(i,j) \in A} X_{ij}$) menos todo el flujo que entra a este ($\sum_{k/(k,i) \in A} X_{ki}$) es igual a la oferta generalizada del nodo (b_i).

Notas:

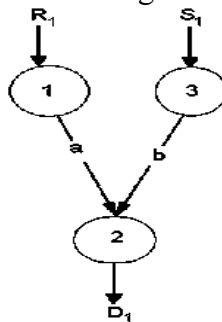
- 1) Un arco inexistente tiene costo infinito (inutilizable bajo cualquier circunstancia)
- 2) El problema debe estar balanceado $\rightarrow \sum_{i=1}^n b_i = 0$
- 3) Si existen capacidades o flujos mínimos en los arcos, se agrega la siguiente restricción: $l_{ij} \leq X_{ij} \leq u_{ij}$. En donde l_{ij} es el flujo mínimo y u_{ij} el flujo máximo.
- 4) Unimodularidad: La matriz A del Dominio cumple con una estructura particular en donde los elementos de sus columnas tienen exactamente un 1, un -1 y ceros. Esto asegura que si las ofertas generalizadas son enteras, la solución óptima estará obligada a serlo.
- 5) Una solución básica factible en estos problemas se llama "árbol básico factible" y es de máxima envergadura (alcanza a todos los nodos). Existen siempre "n-1" flujos básicos que conforman el árbol (Hay una restricción L.D.). La base nunca tiene ciclos.

Problema 1 (Planteamiento a un problema de redes):

Una fábrica tiene que planificar la producción para los 4 siguientes periodos. En cada periodo hay una capacidad de producción ordinaria y extraordinaria. Los costos unitarios de producir en horas ordinarias y extraordinarias son $\$a$ y $\$b$ respectivamente, con $a < b$. Adicionalmente se arrienda una bodega con la opción de guardar producción de un periodo a otro. El costo de inventario para un periodo es $\$c$ por unidad de producto. En cada periodo se debe satisfacer una demanda de D_j unidades, con $j = (1, \dots, 4)$ y se poseen capacidades máximas de producción (ordinaria y extraordinaria) dadas por R_j y S_j respectivamente, con $j = (1, \dots, 4)$. Suponga que la Oferta total es mayor que la Demanda total. Plantee el problema que minimice los costos de la empresa como un PFMC.

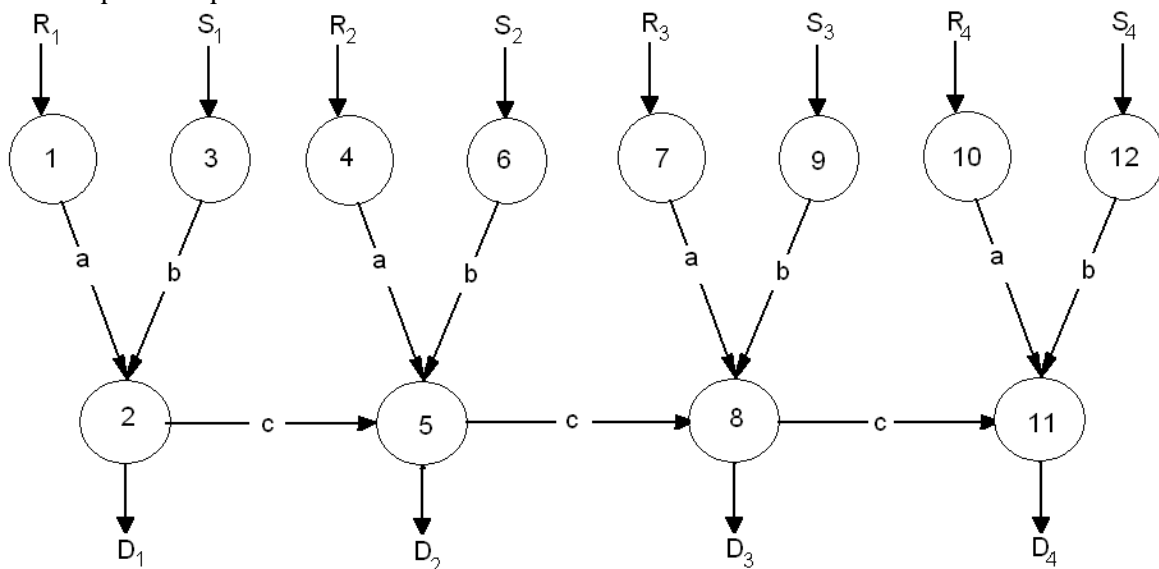
Respuesta:

Pensemos primero en el periodo 1, veamos la siguiente red:



El nodo 1 representa la oferta en horas ordinarias del periodo 1 (Ofrece su capacidad R_1), el nodo 3 representa la oferta en horas extraordinarias del periodo 1 (S_1) y el nodo 2 representa la demanda en el periodo 1 (demanda D_1). En los arcos (1,2) y (2,3) se modelan los envíos a la demanda con los respectivos costos de producción. Esto se puede hacer para cada periodo. ¿Cómo representamos lo que tenemos en bodega? → Lo que tenemos en bodega cuesta 'a' ó 'b' producirlo y además cuesta 'c' llevarlo de un periodo a otro.

Esto se puede representar así:



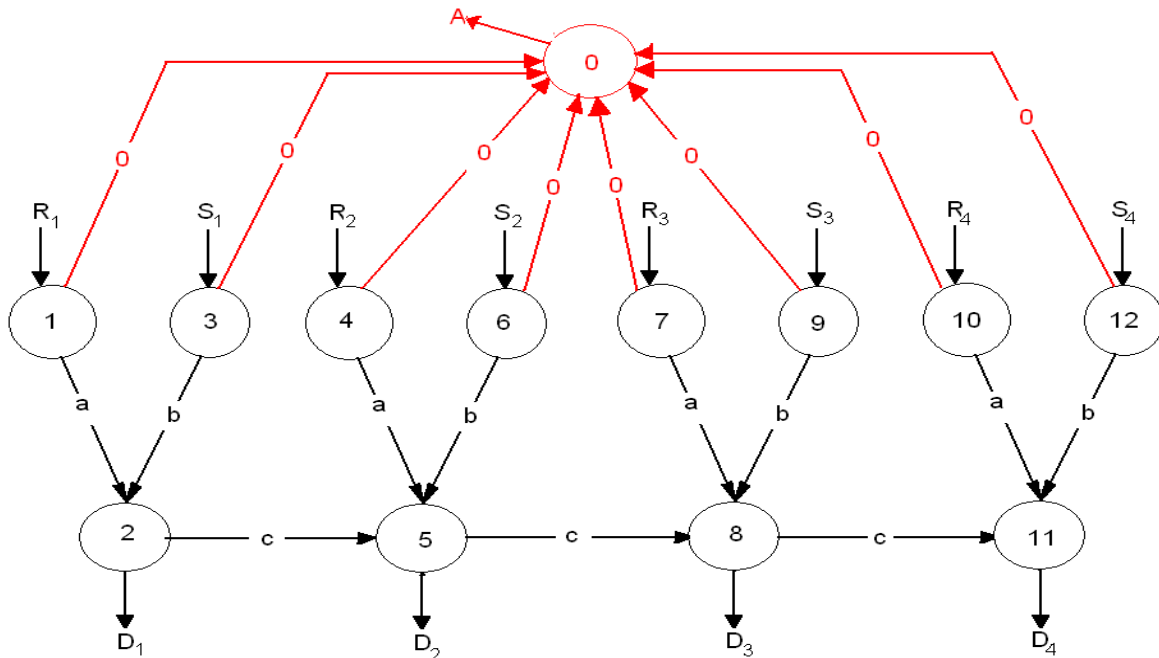
Entre las demandas se han colocado arcos que representan el costo de bodega 'c' por periodo.

Por ejemplo un producto hecho en el periodo 1 en horas ordinarias y que se guarda para la demanda del periodo 3, toma la siguiente ruta: 1-2-5-8. Es decir cuesta a +2c, su producción más 2 periodos en bodega.

¿Estamos listos? → ¡No! Hay que balancear, puede ser que las ofertas no distribuyan toda su capacidad (sobre oferta). Agregamos un nodo que absorba la sobreoferta a costo cero, es decir, lo que no se produjo en cada oferta queda representado en esos arcos.

Debe demandar: $A = \sum_{i=1}^4 R_i + \sum_{i=1}^4 S_i - \sum_{i=1}^4 D_i$

La red queda:



Formulación del problema de Optimización Equivalente:

$$\text{Min} : aX_{12} + bX_{32} + cX_{25} + aX_{45} + bX_{65} + cX_{58} + aX_{78} + bX_{98} + cX_{8(11)} + aX_{10(11)} + bX_{12(11)}$$

s.a:

$$\text{Nodo } 0 \rightarrow X_{01} + X_{03} + X_{04} + X_{06} + X_{07} + X_{09} + X_{0(10)} + X_{0(12)} = -A$$

$$\text{Nodo } 1 \rightarrow X_{12} + X_{10} = R_1$$

$$\text{Nodo } 2 \rightarrow X_{25} - X_{12} - X_{32} = -D_1$$

$$\text{Nodo } 3 \rightarrow X_{32} + X_{30} = S_1$$

$$\text{Nodo } 4 \rightarrow X_{45} + X_{40} = R_2$$

$$\text{Nodo } 5 \rightarrow X_{52} - X_{25} - X_{45} - X_{65} = -D_2$$

$$\text{Nodo } 6 \rightarrow X_{65} + X_{60} = S_2$$

$$\text{Nodo } 7 \rightarrow X_{78} + X_{70} = R_3$$

$$\text{Nodo } 8 \rightarrow X_{8(11)} - X_{58} - X_{78} - X_{98} = -D_3$$

$$\text{Nodo } 9 \rightarrow X_{98} + X_{90} = S_3$$

$$\text{Nodo } 10 \rightarrow X_{10(11)} + X_{10(0)} = R_4$$

$$\text{Nodo } 11 \rightarrow -X_{8(11)} - X_{10(11)} - X_{12(11)} = -D_4$$

$$\text{Nodo } 12 \rightarrow X_{12(11)} + X_{12(0)} = S_4$$

$$\text{No negatividad} \rightarrow X_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A$$

2. El problema de transporte (PT)

Es un caso particular del PPMC y por lo tanto se resuelve como tal. Se tiene 'm' productores que desean enviar sus productos a mínimo costo a 'n' consumidores:

$$\text{Min: } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_{ij} \text{ s.a.}$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = D_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j)$$

Donde:

X_{ij} : Flujo desde el productor 'i' hacia la demanda 'j' (variable del problema)

S_i : Oferta del productor 'i'.

D_j : Demanda del consumidor 'j'.

C_{ij} : costo unitario de transporte de productor 'i' a demanda 'j'.

Restricciones: Balances de masa

(1)→ La suma de todo el flujo saliente del productor i es igual a su oferta.

(2)→ La suma de todo el flujo entrante al consumidor j es igual a su demanda de este.

Notas

→ Gráficamente el problema queda como un grafo bipartito, es decir un grafo en donde todos los arcos van de un subconjunto X de nodos a otro Y. Con $X \cup Y = N$.

→ El problema debe estar balanceado: $\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j$

Problema 2: Problema del Banquetero

Un banquetero tiene que programar banquetes para 'N' días. En cada día hay una demanda por manteles ' D_i '. Para Abastecerse puede recurrir a 2 servicios de lavado: Lavado rápido a costo ' a ' por unidad (del día para el siguiente) y lavado lento a costo ' b ' por unidad (del día para el subsiguiente). Además siempre se puede comprar manteles a un costo ' c ' por unidad. En el mercado existen M_0 manteles y asuma un stock inicial de ' S_0 ' manteles limpios. Suponga que $b < a < c$. Modele el problema minimizando costos a través de un Problema de Transporte (dibuje la red).

Respuesta:

En este caso las demandas están claras. Cada día representa una demanda. Así representamos cada día por un nodo que demanda D_j , $j=\{1,...,N\}$

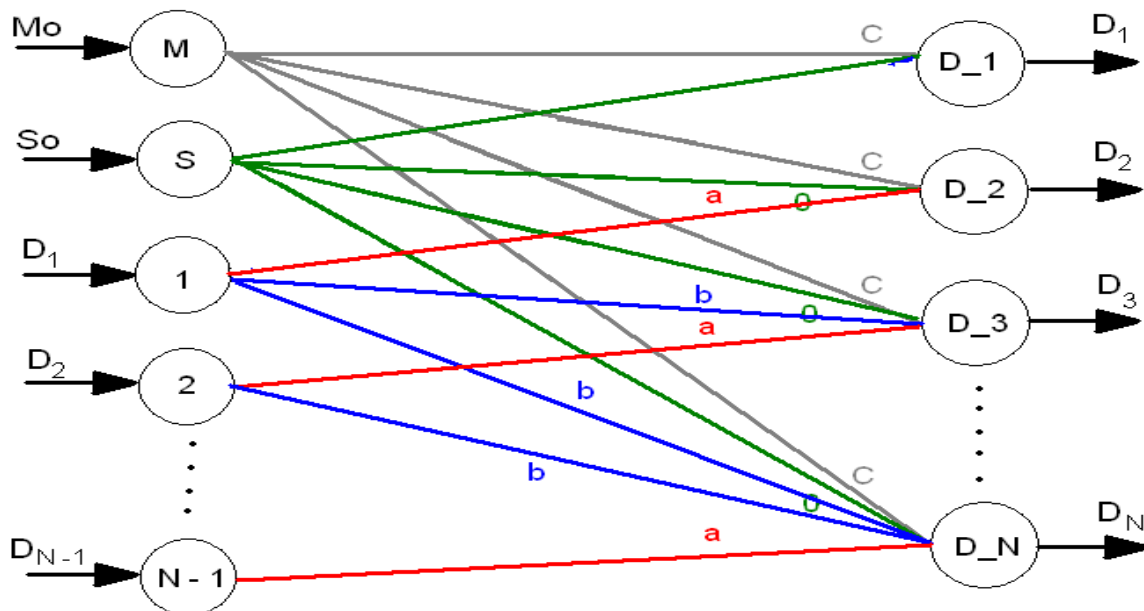
Las ofertas:

- 1) Un nodo de oferta ' M ', representa el mercado. Este nodo ofrece M_0 .
- 2) Un nodo de oferta ' S ', el Stock.
- 3) Un nodo de oferta ' k ' por lo que se mandó a lavar el día k , que queda a disposición para ser reutilizado en los próximos días. Ojo: $k = \{1,...,N-1\}$ (El último día no se manda a lavar).

Los costos:

- 1) El costo de la oferta del mercado ' M ' hacia las demandas es " c ".
- 2) El costo del Stock a cualquier demanda es " 0 ".
- 3) El costo de las ofertas ' k ' son " a " hacia las demandas del día ' $k+1$ ' y " b " hacia los días ' $k+2$ ' en adelante.

Luego la red es la siguiente:

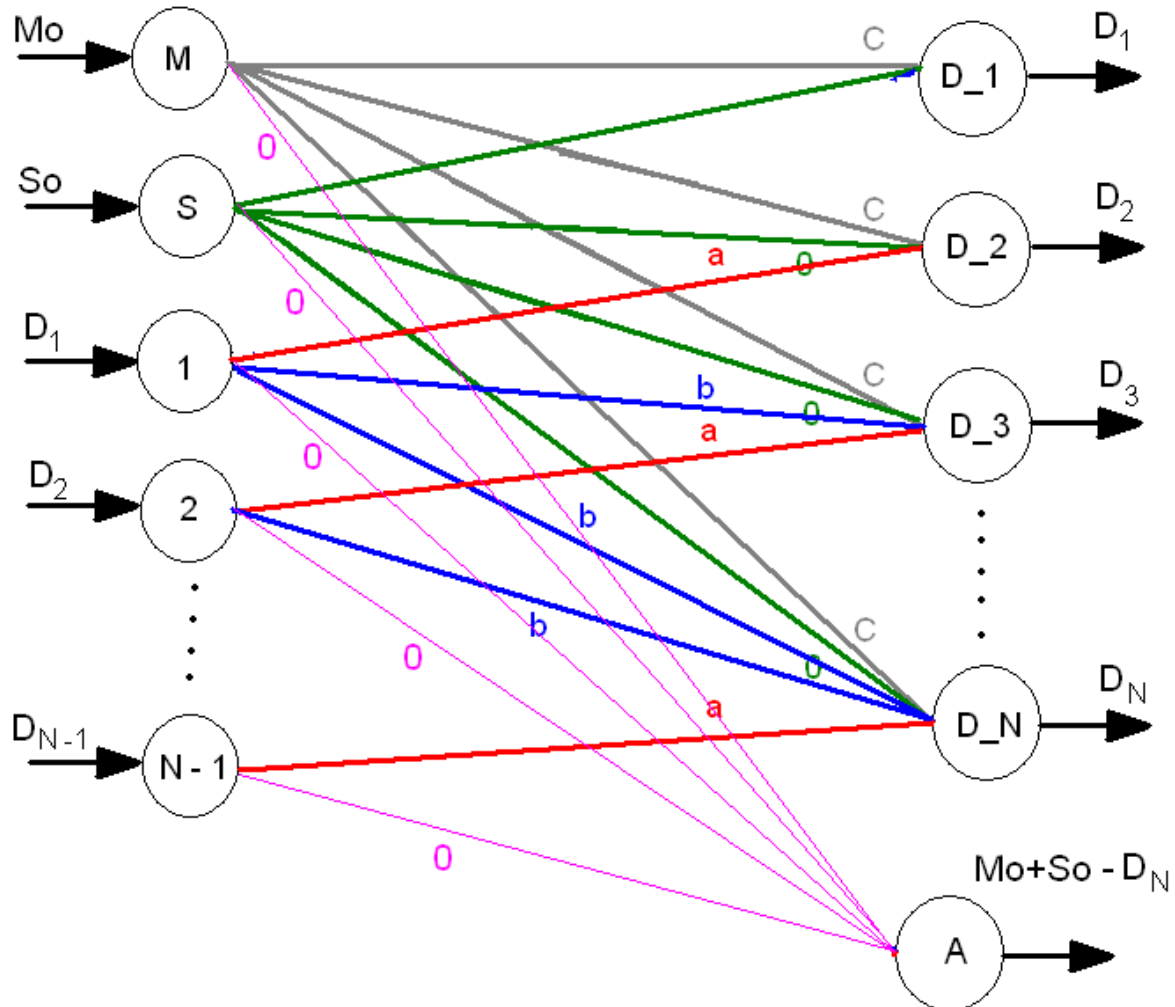


¿Estamos listos? → Falta balancear el problema.

Agregamos un nodo de demanda artificial que absorba todo lo que se ofrece y no llega a las demandas a costo cero.

$$\text{Debe demandar : } M_0 + S_0 + \sum_{j=1}^{N-1} D_j - \sum_{j=1}^N D_j = M_0 + S_0 + D_N$$

El grafo queda:



3. El Problema de ruta mínima (PRM):

Consiste en encontrar la ruta mínima desde un nodo “O” a todos los demás “n-1” nodos. También es un subconjunto del PFMC y se puede resolver como tal:

$$\begin{aligned} \text{Min: } & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} X_{ij} \quad s.a. \\ & \sum_{j \in N} X_{Oj} - \sum_{k \in N} X_{kO} = n-1 \\ & \sum_{j \in N} X_{ij} - \sum_{k \in N} X_{ki} = -1 \quad \forall i \in N - \{O\} \\ & X_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

El nodo origen ofrece “n-1” pulsos y cada destino demanda 1 pulso. Así el resultado del problema será la ruta mínima del nodo “O” a cada uno de los destinos.

Si bien se puede resolver por SIMPLEX en redes, existe un algoritmo especializado llamado **Algoritmo de Dijkstra**:

Para implementarlo se define:

- P : Vector de nodos predecesores
- D : Vector de distancias desde el origen
- C : Conjunto de nodos abiertos
- k : Índice del nodo pivote

Algoritmo:

Paso 1: Inicialización:

- $C = N = \{0, \dots, n-1\}$
- $P(i) = -1 \wedge D(i) = \infty \quad \forall i = 1, \dots, n-1$
- $P(0) = -1 \wedge D(0) = 0$
- $k = 0$

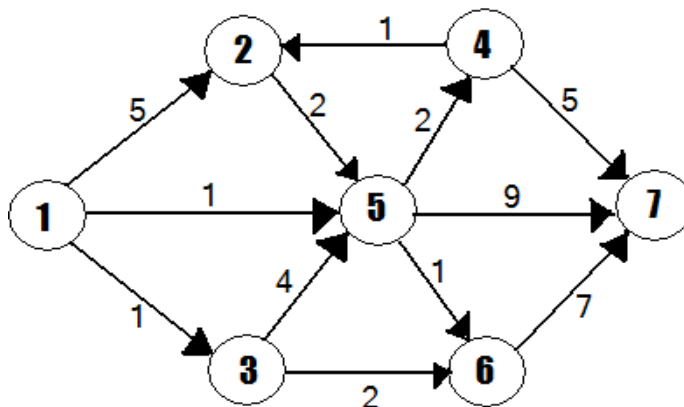
Pasa 2: Iteración

Mientras ($C \neq \emptyset$)

{ Para todo j tal que $j \in C$:
 Si $D(j) > D(k) + C_{kj} \rightarrow D(j) = D(k) + C_{kj} \wedge P(j) = k$
 $C = C - \{k\}$
 $k = i: D(i) = \text{Min} \{D(j), \forall j \in C\}$
}

Problema 3:

Se pide encontrar el camino más corto del nodo 1 al resto. En la siguiente red se representan los distintos caminos que se pueden realizar con los respectivos costos en arcos.

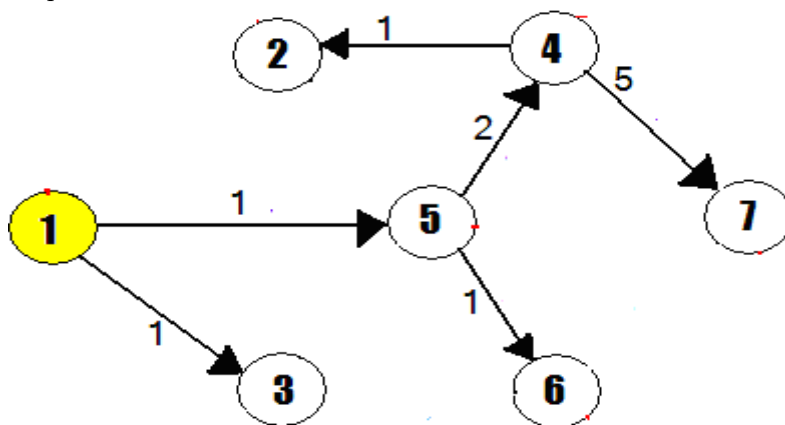


Respuesta:

Con el algoritmo de Dijkstra podemos obtener el resultado:

Iteración	Inic.		2		3		4		5		6		7	
Nodo	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D
1	1	0												
2	-1	∞	1	5	1	5	1	5	1	5	4	4		
3	-1	∞	1	1										
4	-1	∞	-	∞	-	∞	5	3	5	3				
5	-1	∞	1	1	1	1								
6	-1	∞	-	∞	3	3	5	2						
7	-1	∞	-	∞	-	∞	5	10	6	9	4	8	4	8
C	1,2,3,4,5,6,7		2,3,4,5,6,7		2,4,5,6,7		2,4,6,7		2,4,7		4,7		7	
k	1		3		5		6		4		2		7	

Luego las rutas óptimas son:



Es decir:

1 a 2: $1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

1 a 3: $1 \rightarrow 3$

1 a 4: $1 \rightarrow 5 \rightarrow 4$

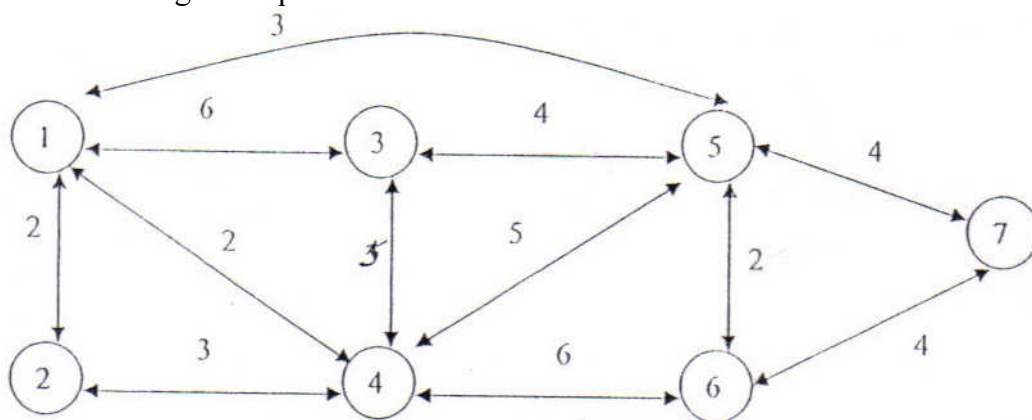
1 a 5: $1 \rightarrow 5$

1 a 6: $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6$

1 a 7: $1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7$

Problema 4: Planteado

Resolver el siguiente problema de rutas mínimas de 1 a todos los nodos.



4. Problema de asignación de tareas (PAT)

Es un problema de Transporte, y por lo tanto un PPMC, en donde cada productor representa a la tarea “i” y cada demanda el encargado “j” en realizar tareas. El costo en el arco (i,j) es el costo del encargado “j” en realizar la tarea “i”. Los flujos iguales a 1 indican la asignación de la tarea “i” al individuo “j”:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, m \\
 & x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Notas:

- Es un problema entero, pero como los problemas de redes siempre tienen soluciones enteras no hay problema.
- Las restricciones indican que para cada tarea solo un individuo la realizará y que cada individuo debe realizar exactamente una tarea.
- Debe haber igual número de tareas que de encargados a realizarlas (Balance)

5. Problema de flujo máximo (PFM):

El problema consiste en obtener el máximo flujo posible de transportar desde un nodo "O" hacia otro nodo "D" sujeto a capacidades en los arcos:

$$\begin{aligned}
 &Max : F \quad s.a. \\
 &\sum_{j \in N} X_{Oj} - \sum_{k \in N} X_{kO} = F \\
 &\sum_{j \in N} X_{Dj} - \sum_{k \in N} X_{kD} = -F \\
 &\sum_{j \in N} X_{ij} - \sum_{k \in N} X_{ki} = 0 \quad \forall i \in N - \{O, D\} \\
 &0 \leq X_{ij} \leq U_{i,j} \quad \forall (i, j) \in A
 \end{aligned}$$

Donde $U_{i,j}$: capacidad del arco

No es un PFMC (ahora la oferta generalizada es variable, no existen costos al pasar por arcos y maximiza), pero existe un PFMC equivalente dado por:

$$\begin{aligned}
 &Min : -X_{DO} \quad s.a. \\
 &\sum_{j \in N} X_{Oj} - \sum_{k \in N} X_{kO} - X_{DO} = 0 \\
 &\sum_{j \in N} X_{Dj} - \sum_{k \in N} X_{kD} + X_{DO} = 0 \\
 &\sum_{j \in N} X_{ij} - \sum_{k \in N} X_{ki} = 0 \quad \forall i \in N - \{O, D\} \\
 &0 \leq X_{ij} \leq U_{i,j} \quad \forall (i, j) \in A
 \end{aligned}$$

→ Es un PFMC con todos los arcos a costo cero menos (D,O) a costo -1.

SIMPLEX DE REDES:

Tomemos el PFMC general:

$$\begin{aligned} \text{Min: } & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} X_{ij} \\ \text{s.a.} & \\ & \sum_{j/(i,j) \in A} X_{ij} - \sum_{k/(k,i) \in A} X_{ki} = b_i \quad \forall i \in N \quad (*) \\ & X_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

El problema dual es:

$$\begin{aligned} \text{Max: } & \sum_{i \in N} b_i \cdot \pi_i \\ \text{s.a.: } & \pi_i - \pi_j \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \\ & \pi_i \text{ libre} \end{aligned}$$

Este problema:

- No tiene solución única, si $\vec{\pi}^*$ es óptimo, $\vec{\pi}^* + cte \cdot \vec{1}$ también lo es, por lo que podemos fijar una variable a nuestro antojo. (Ejercicio: demostrar esto)
- Los costos reducidos del problema original son las holguras del problema Dual. Así:

Si $X_{i,j}$ **está en la base** \rightarrow su costo reducido es cero, por lo tanto:

$$\pi_i - \pi_j = C_{i,j}$$

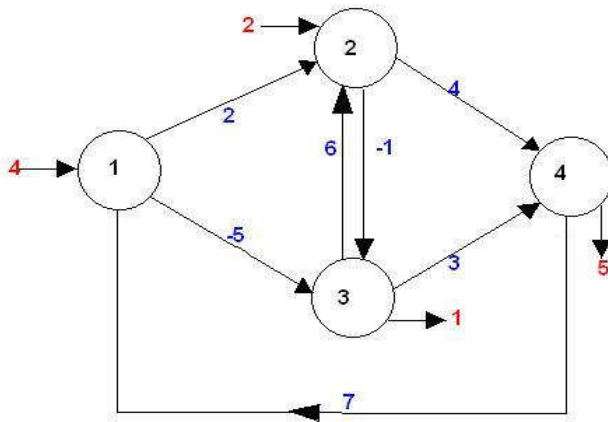
Si $X_{i,j}$ **no está en la base** \rightarrow su costo reducido es distinto de cero y vale:

$$r_{i,j} = C_{i,j} - \pi_i + \pi_j$$

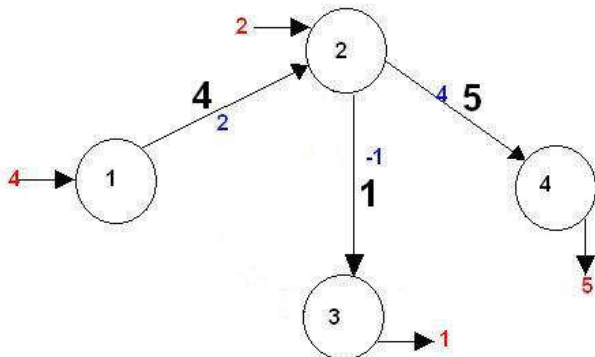
Si todos los costos reducidos son mayores que cero, entonces, estaremos en el óptimo.....

Problema 5 (Introdutorio al SIMPLEX de Redes):

Resolver la siguiente red de flujos (costos de arcos en azul):



Dado el siguiente árbol básico factible (flujos básicos en letra más grande y color negro):



Respuesta:

Se tiene: $b^T := [4, 2, -1, -5]$ y $C^T = [2, -5, -1, 4, 6, 3, 7]$. Vemos que el problema está balanceado: $4+2-1-5=0$. El árbol de envergadura máxima tiene 3 flujos básicos.

El problema de programación lineal es:

$$\text{Min: } 2X_{1,2} - 5X_{1,3} - X_{2,3} + 4X_{2,4} + 6X_{3,2} + 3X_{3,4} + 7X_{4,1}$$

s.a:

$$X_{1,2} + X_{1,3} - X_{4,1} = 4$$

$$X_{2,3} + X_{2,4} - X_{1,2} - X_{3,2} = 2$$

$$X_{3,2} + X_{3,4} - X_{1,3} - X_{2,3} = -1$$

$$X_{4,1} - X_{3,4} - X_{2,4} = -5$$

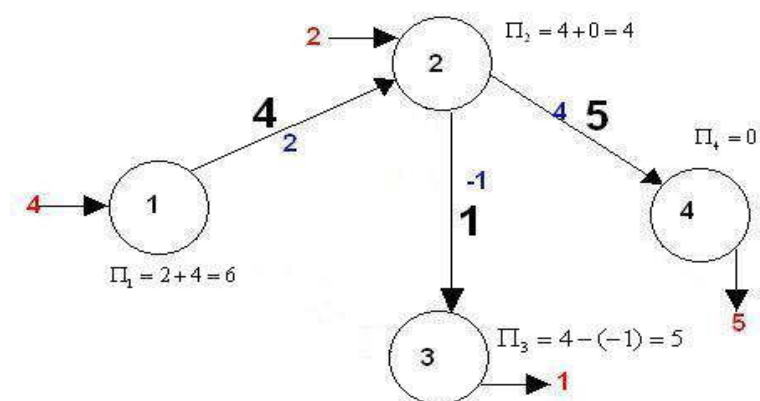
$$X_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A$$

Resolución: **Iteración 1:**

Cálculo de las variables duales: Usando la fórmula para variables básicas $\pi_i - \pi_j = C_{i,j}$ y fijando $\pi_4 = 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} \pi_4 = 0 & & \pi_1 = 6 \\ \pi_2 - \pi_4 = 4 & \rightarrow & \pi_2 = 4 \\ \pi_1 - \pi_2 = 2 & & \pi_3 = 5 \\ \pi_2 - \pi_3 = -1 & & \pi_4 = 0 \end{array}$$

Por lo que queda:



Costos reducidos de variables no básicas:

De la fórmula $r_{i,j} = C_{i,j} - \Pi_i + \Pi_j$ calculamos los costos reducidos no básicos:

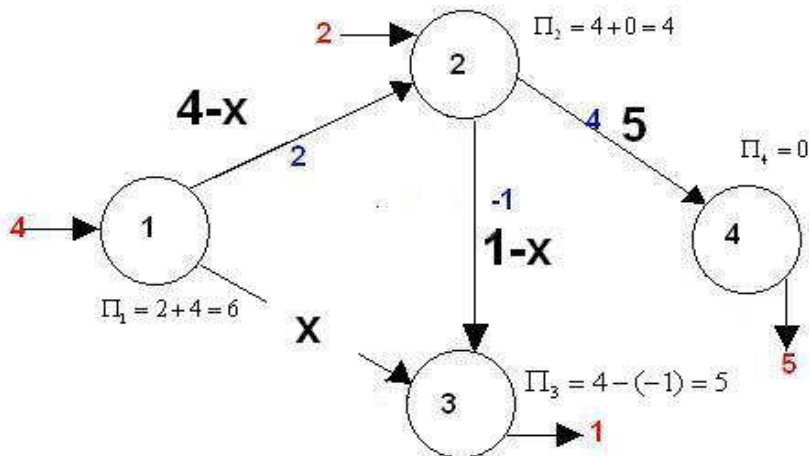
$$r_{4,1} = 7 - 0 + 6 = 13$$

$$r_{3,2} = -1 - 5 + 4 = -2$$

$$r_{3,4} = 3 - 5 + 0 = -2$$

$$r_{1,3} = -5 - 6 + 5 = -6 \quad \rightarrow \quad \text{Entremos a } X_{1,3} \text{ a la base.}$$

Actualización de la Base:



La variable entrante sube en X unidades (arco (1,3)). Vemos que se cierra un ciclo, que debe ser compensado para mantener los balances de masa en cada nodo.

En este caso:

Si entra X por (1,3) al nodo 3, debe dejar de entrar X por (2,3)

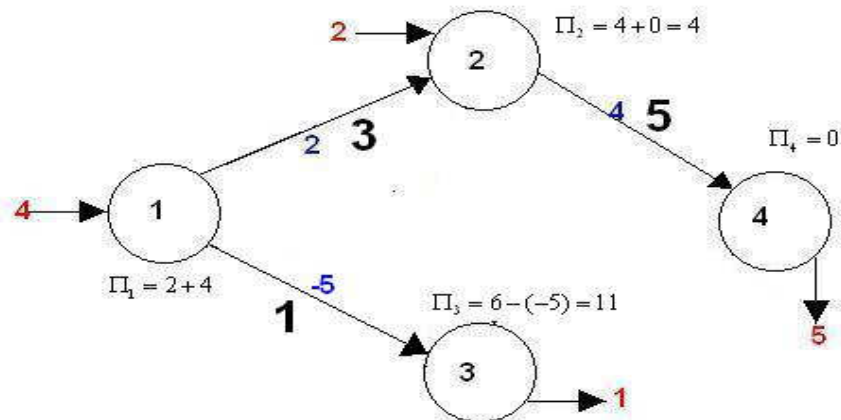
Si deja de salir X por (2,3) en el nodo 2, debe dejar de entrar X por (1,2)

Si deja de salir X por (1,2) en el nodo 1, debe salir X por (1,3)

Y se completa el ciclo de compensación.....

¿Cuánto vale X? $\rightarrow X = \min(1,4)$, es decir hasta que alguna variable salga de la base haciéndose cero. En este caso $X_{2,3}$ sale primero y $X = 1$.

2^{da} Iteración:



$$\Pi_4 = 0$$

luego

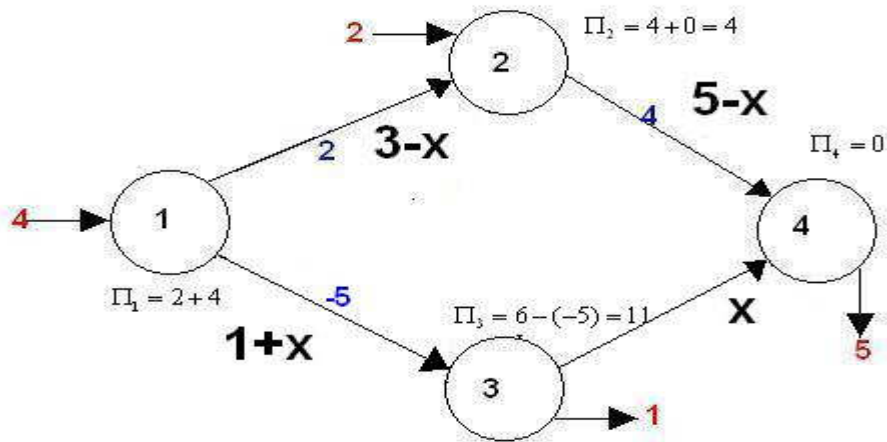
$$\Pi_2 = 4$$

$$\Pi_1 = 6$$

$$\Pi_3 = 6 - (-5) = 11$$

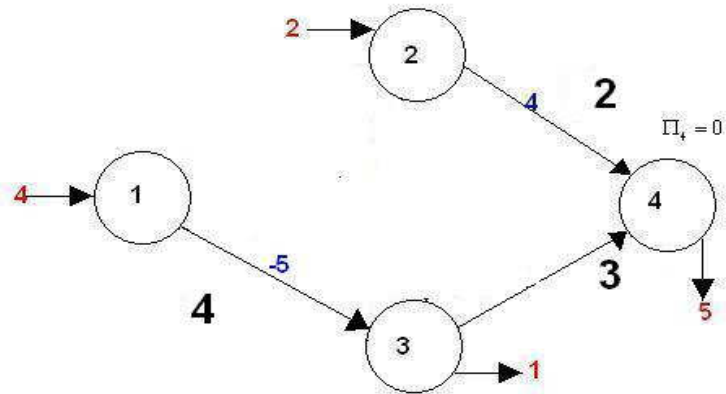
Tomando un costo reducido no básico negativo, p. ej: $r_{3,4} = 3 - 11 + 0 = -8$.

Por lo que $X_{3,4}$ entra a la base.



Luego $X = \min(5, 3, \cdot) = 3 \rightarrow X_{1,2}$ deja la base.

3^{ra} Iteración:

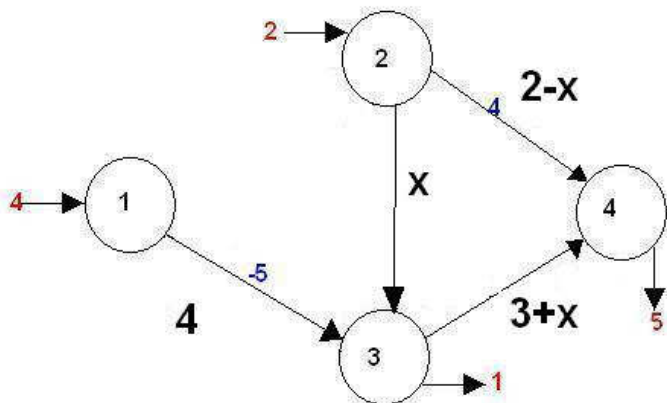


$$\Pi_2 = 4 + 0 = 4$$

$$\Pi_3 = 3 + 0 = 3$$

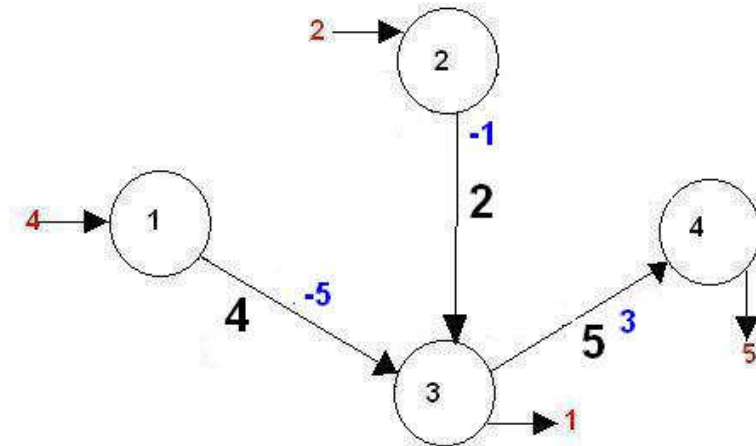
$$\Pi_1 = -5 + 3 = -2$$

Luego $r_{2,3} = -1 - 4 + 3 = -2 \rightarrow X_{2,3}$ entra a la base.



$X = \min(2, \cdot) = 2 \rightarrow X_{2,4}$ sale de la base.

4^{ta} Iteración :



$$\Pi_4 = 0$$

Luego :

$$\Pi_3 = 5 + 0 = 5$$

$$\Pi_2 = -1 + 3 = 2$$

$$\Pi_1 = -5 + 3 = -2$$

Viendo los costos reducidos no básicos:

$$r_{1,2} = 2 + 2 - 2 = 2$$

$$r_{3,2} = 6 - 3 + 2 = 5$$

$$r_{4,1} = 7 + 0 + (-2) = 5$$

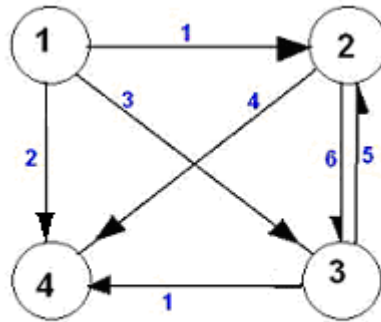
$$r_{2,4} = 4 + 2 + 0 = 6$$

→ Todos mayores a cero → Solución es óptima y única.

Valor óptimo igual a $3 \cdot 5 + (-5) \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = -7$.

Problema 6 (Con solución degenerada):

Resolver la siguiente red de flujo con costos en los arcos:

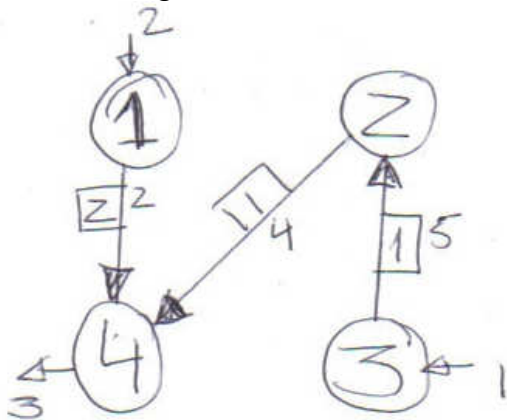


Con: $b^T = [2, 0, 1, -3]$ y con $X_{14} = 2$, $X_{32} = 1$, $X_{24} = 1$ como base factible inicial.

Respuesta:

Iteración 1:

Se tiene la siguiente base inicial factible:



$$\pi_4 = 0 \rightarrow \pi_1 = 2, \pi_2 = 4, \pi_3 = 9.$$

→ Calculando costos reducidos:

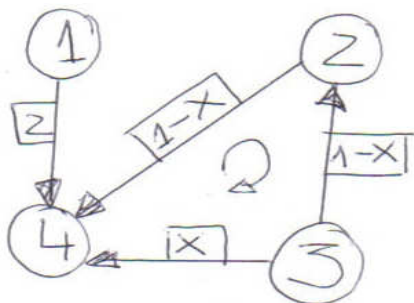
$$r_{1,2} = 1 - \pi_1 + \pi_2 = 1 - 2 + 4 = 3$$

$$r_{1,3} = 3 - \pi_1 + \pi_3 = 3 - 2 + 9 = 10$$

$$r_{2,3} = 6 - \pi_2 + \pi_3 = 6 - 4 + 9 = 13$$

$$r_{3,4} = 1 - \pi_3 + \pi_4 = 1 - 9 + 0 = -8$$

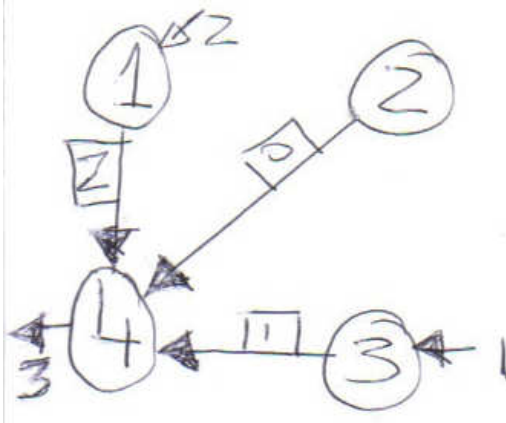
→ Entramos $X_{3,4}$



$$X = 1.$$

Vemos que tenemos un empate en la salida de variables. Puede salir tanto $X_{3,2}$ como $X_{2,4}$, por lo tanto tendremos en la base un valor básico igual a cero. **→ Solución degenerada.** Procedemos escogiendo cualquiera de las 2 variables, saquemos por ejemplo $X_{3,2}$.

Iteración 2:



$$\pi_4 = 0 \rightarrow \pi_1 = 2, \pi_2 = 4, \pi_3 = 1.$$

→ Calculando costos reducidos:

$$r_{1,2} = 1 - \pi_1 + \pi_2 = 1 - 2 + 4 = 3$$

$$r_{1,3} = 3 - \pi_1 + \pi_3 = 3 - 2 + 1 = 2$$

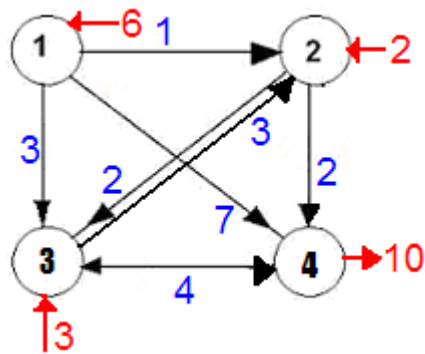
$$r_{2,3} = 6 - \pi_2 + \pi_3 = 6 - 2 + 1 = 5$$

$$r_{3,2} = 1 - \pi_3 + \pi_2 = 1 - 1 + 4 = 4$$

Tenemos solución óptima con valor óptimo = $2*2+0*4+1*1 = 3$

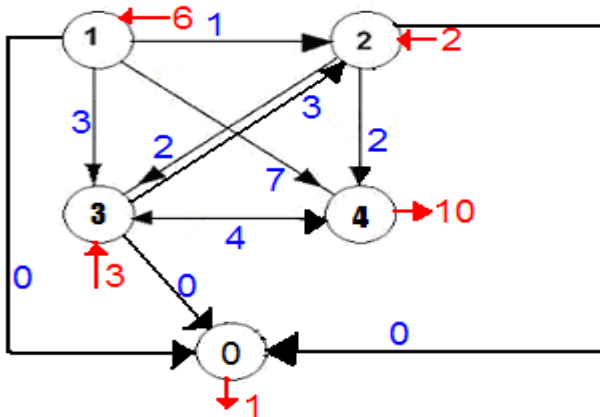
Problema 7 (más difícil):

Resuelva el siguiente problema de flujo de redes:



Respuesta:

No podemos comenzar a resolver el ejercicio, ya que la red no está balanceada ($6+2+3-10=1$). Debemos agregar un nodo que absorba toda la sobre oferta a costo 0.



Ahora está balanceado y podemos partir.

Pero no tenemos una solución básica inicial factible: ¿Cómo partimos?

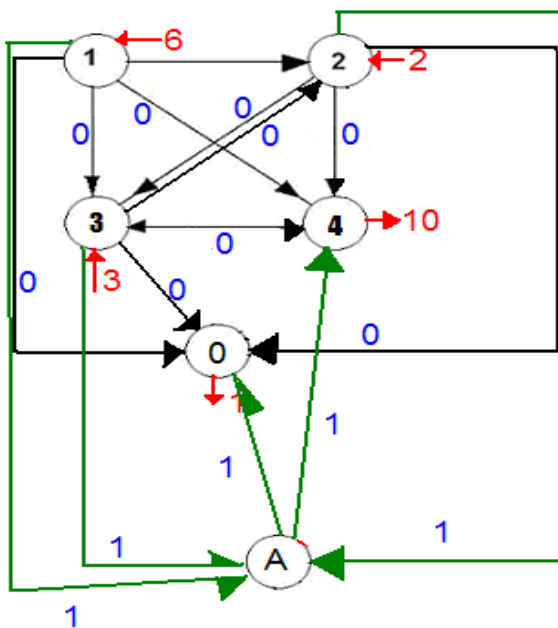
1) Podemos obtener una solución básica “al ojo” (Debe tener “n-1” flujos básicos, para problemas pequeños se puede).

2) Caso más formal:

¡Hay que hacer **FASE I**! Agregamos un **nodo artificial**.

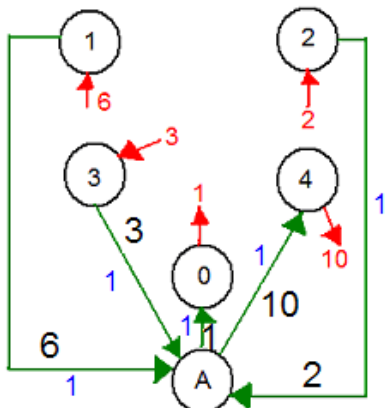
- Este nodo absorberá y demandará todo lo que se pida/ofrezca desde los otros nodos de la red.
- Su oferta generalizada es 0
- Todas los arcos conectados con este nodo son a costo 1. Satisfacen todas las demandas absorben todas las ofertas (flujos artificiales).
- El resto de los arcos tiene por el momento costo cero.
- La idea es sacar los flujos artificiales de la base.

Fase I: El problema queda \rightarrow



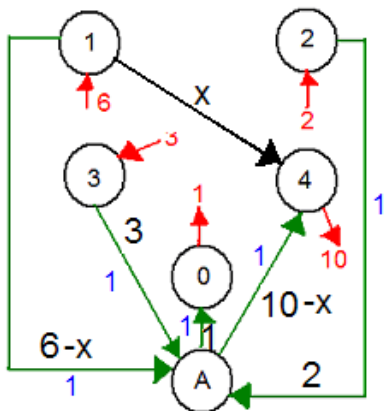
Iteración 1:

Nuestra solución inicial factible para FASE I:



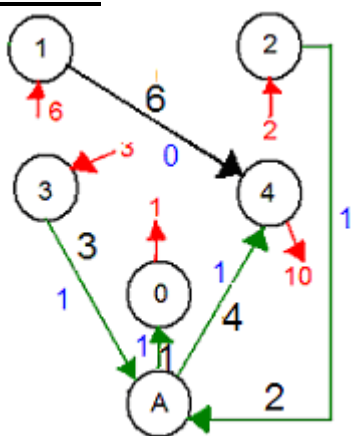
$$\pi_A = 0 \rightarrow \pi_1 = 1, \pi_2 = 1, \pi_3 = 1, \pi_4 = -1, \pi_0 = -1$$

$$r_{1,4} = 0 - 1 + (-1) = -2 \rightarrow X_{1,4} \text{ entra.}$$



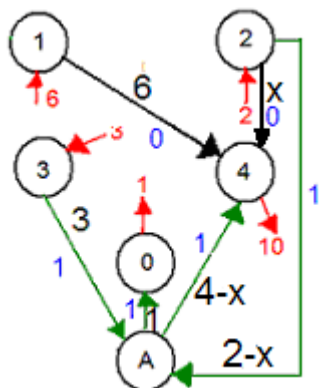
$$X = 6 \rightarrow \text{sale } X_{1,4}$$

Iteración 2:



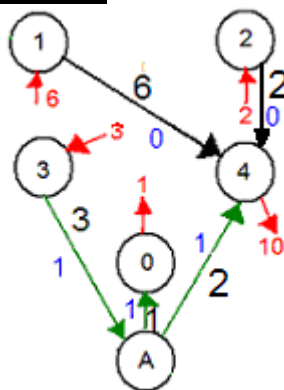
$$\pi_A = 0 \rightarrow \pi_1 = -1, \pi_2 = 1, \pi_3 = 1, \pi_4 = -1, \pi_0 = -1$$

$$r_{2,4} = 0 - 1 + (-1) = -2 \rightarrow X_{2,4} \text{ entra.}$$



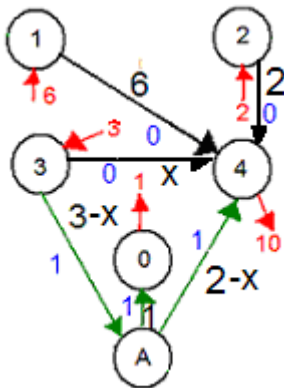
$$X = 2 \rightarrow \text{sale } X_{2,4}$$

Iteración 3:



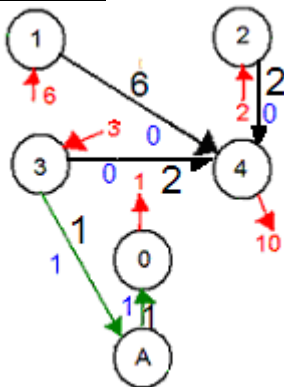
$$\pi_A = 0 \rightarrow \pi_1 = -1, \pi_2 = -1, \pi_3 = 1, \pi_4 = -1, \pi_0 = -1$$

$$r_{3,4} = 0 - 1 + (-1) = -2 \rightarrow X_{3,4} \text{ entra.}$$



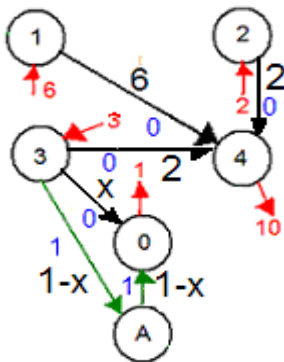
$X = 2 \rightarrow$ sale $X_{A,4}$

Iteración 4:

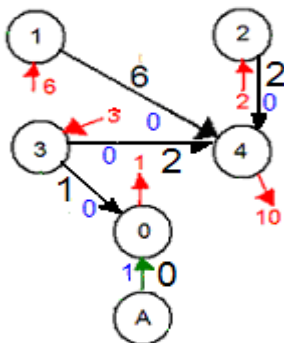


$\pi_A = 0 \rightarrow \pi_1 = 1, \pi_2 = 1, \pi_3 = 1, \pi_4 = 1, \pi_0 = -1$

$r_{3,0} = 0 - 1 + (-1) = -2 \rightarrow X_{3,0}$ entra.

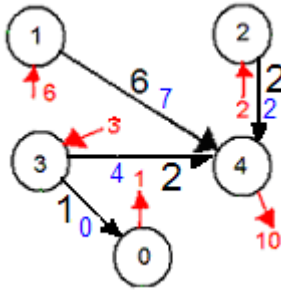


$X = 1 \rightarrow X_{3,4}$ sale y terminamos Fase I.



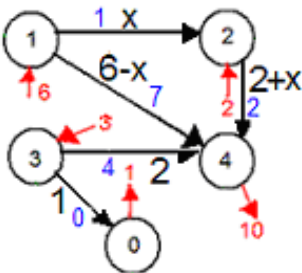
Ya no quedan flujos artificiales....

Fase II: Retomamos los costos originales y eliminamos el nodo artificial \rightarrow **Iteración 1:**



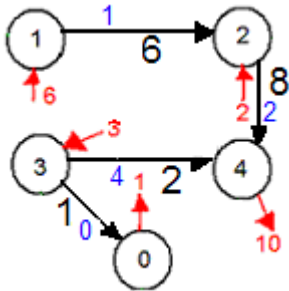
$$\pi_4 = 0 \rightarrow \pi_1 = 7, \pi_2 = 2, \pi_3 = 4, \pi_0 = 4$$

$$r_{1,2} = 1 - 7 + 2 = -4 \rightarrow X_{1,2} \text{ entra.}$$



$$X = 6 \rightarrow \text{sale } X_{1,4}$$

Iteración 2:



$$\pi_4 = 0 \rightarrow \pi_1 = 3, \pi_2 = 2, \pi_3 = 4, \pi_0 = 4$$

$$r_{1,0} = 0 - 3 + 4 = 1, r_{1,3} = 3 - 3 + 4 = 4, r_{1,4} = 7 - 3 + 0 = 4$$

$$r_{2,0} = 0 - 2 + 4 = 2, r_{2,3} = 2 - 2 + 4 = 4$$

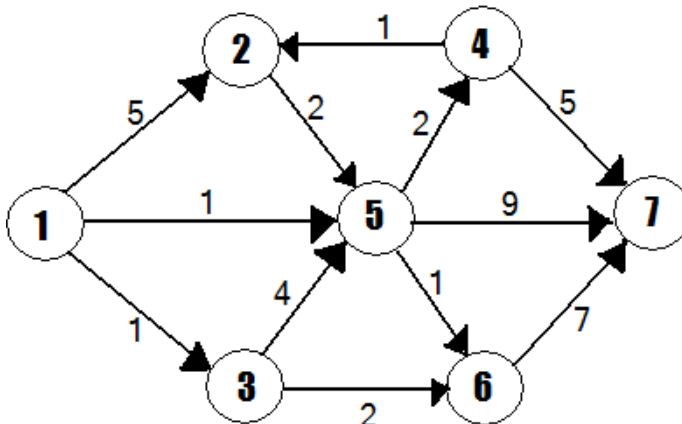
$$r_{3,2} = 3 - 4 + 2 = 1$$

$$r_{4,3} = 4 - 0 + 4 = 8$$

\rightarrow Estamos en el óptimo con valor óptimo: $1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 30$.

Problema 8:

Se pide encontrar el camino más corto del nodo 1 al todo el resto. En la siguiente red se representan los distintos caminos que se pueden realizar con los respectivos costos de viaje en cada arco. Se debe resolver por SIMPLEX de redes.

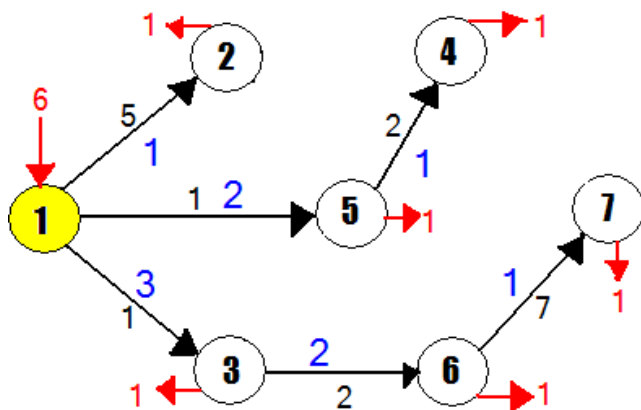


Respuesta:

Se procede de la misma manera que si fuera un problema de flujo de redes a mínimo costo, es decir obteniendo costos reducidos a través de las variables duales:

Iteración 1:

Obtenemos una solución inicial factible “al Ojo” debido a la sencillez del problema (formalmente deberíamos hacer Fase I).



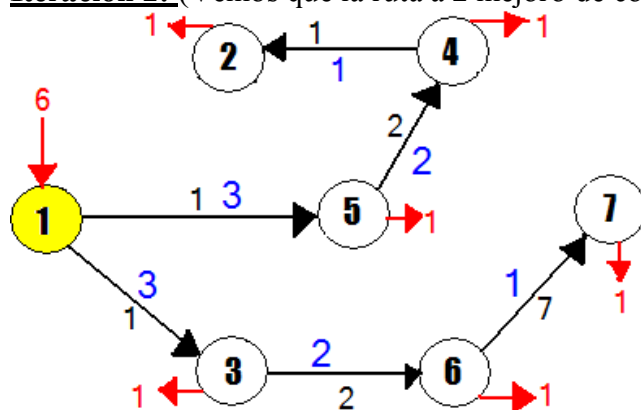
$$\begin{aligned} \pi_2 &= -5 \\ \pi_3 &= -1 \\ \pi_4 &= -3 \\ \pi_5 &= -1 \\ \pi_6 &= -3 \\ \pi_7 &= -10 \end{aligned} \quad \pi_1 = 0 \rightarrow$$

$$r_{4,2} = 1 - (-3) + (-5) = -1 \rightarrow x_{4,2} \text{ entra} \rightarrow x_{1,2} \text{ sale.}$$

OJO

En el PRM, al hacer $\pi_1 = 0$, las demás variables duales nos indican el costo de la ruta que se tiene hasta el momento con signo cambiado. Por ejemplo $\pi_7 = -10$, esto significa que la ruta que tenemos ahora de 1 a 7, es decir $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7$, cuesta 10

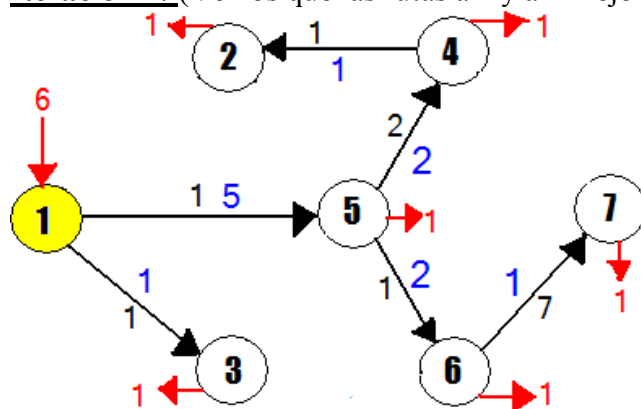
Iteración 2: (Vemos que la ruta a 2 mejoró de costo 5 a 4)



$$\pi_1 = 0 \rightarrow \begin{aligned} \pi_2 &= -4 \\ \pi_3 &= -1 \\ \pi_4 &= -3 \\ \pi_5 &= -1 \\ \pi_6 &= -3 \\ \pi_7 &= -10 \end{aligned}$$

$$r_{5,6} = 1 - (-1) + (-3) = -1 \rightarrow x_{5,6} \text{ entra} \rightarrow x_{3,6} \text{ sale.}$$

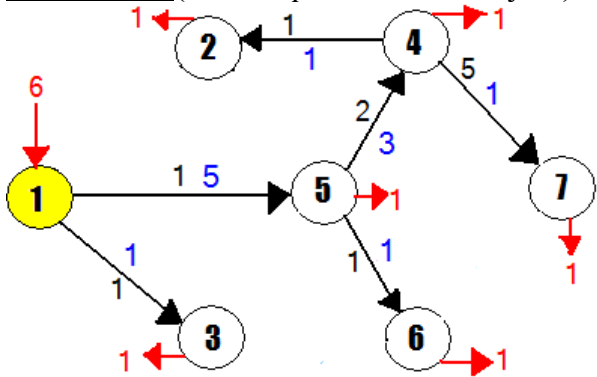
Iteración 3: (Vemos que las rutas a 6 y a 7 mejoraron)



$$\pi_1 = 0 \rightarrow \begin{aligned} \pi_2 &= -4 \\ \pi_3 &= -1 \\ \pi_4 &= -3 \\ \pi_5 &= -1 \\ \pi_6 &= -2 \\ \pi_7 &= -9 \end{aligned}$$

$$r_{4,7} = 5 - (-3) + (-9) = -1 \rightarrow x_{4,7} \text{ entra} \rightarrow x_{6,7} \text{ sale.}$$

Iteración 4: (Vemos que la ruta a 7 mejoró)



$$\pi_1 = 0 \rightarrow \begin{aligned} \pi_2 &= -4 \\ \pi_3 &= -1 \\ \pi_4 &= -3 \\ \pi_5 &= -1 \\ \pi_6 &= -2 \\ \pi_7 &= -8 \end{aligned}$$

Obtenemos algún costo reducido negativo:

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= 5 - (0) + (-4) = 1 & r_{2,5} &= 2 - (-4) + (-1) = 5 & r_{3,5} &= 4 - (-1) + (-1) = 4 \\ r_{3,6} &= 2 - (-1) + (-2) = 1 & r_{5,7} &= 9 - (-1) + (-8) = 2 & r_{6,7} &= 7 - (-2) + (-8) = 1 \end{aligned}$$

No pudimos, son todos positivos por lo que estamos en el óptimo.

Luego: $ruta_{\min}(1, 2) = 4$, $ruta_{\min}(1, 3) = 1$, $ruta_{\min}(1, 4) = 3$, $ruta_{\min}(1, 5) = 1$, $ruta_{\min}(1, 6) = 1$, $ruta_{\min}(1, 7) = 8$

PROGRAMACIÓN DINÁMICA:

La gracia de la programación dinámica es transformar problemas complejos en problemas más simples, teniendo estructuras especiales que nos permiten separar las variables.

Problema 9: P. Dinámico Entero (Introductorio)

Una familia está interesada en planificar sus vacaciones a fin de año y tiene la posibilidad de visitar 3 ciudades. El presupuesto alcanza para salir de vacaciones durante 5 días. En una comida familiar el Padre preguntó a cada uno de los integrantes de la familia y calibró la siguiente función de utilidad del viaje:

$$2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 3\sqrt{x_3}$$

Donde x_i es el número de días en la ciudad “i”. Plantee y resuelva en forma dinámica el problema que maximiza la utilidad de la familia.

Respuesta:

El problema de optimización es:

$$\text{Max: } 2\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + 3\sqrt{x_3}$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_i \in \text{Enteros} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

¡Procedamos a resolver el problema por programación dinámica!

PASO 1: Vamos de atrás para adelante

- Supongamos que la familia está decidiendo por la última ciudad, dadas las elecciones en la primera y segunda ciudad, que ya se hicieron y son óptimas.
- Supongamos que nos quedan y_3 días disponibles (recursos disponibles).

¿Cuál es la mejor decisión en la tercera ciudad?

Si este fuera el caso, el problema quedaría:

ETAPA 3:

$$f_3(y_3) = \begin{cases} \text{Max: } 3\sqrt{x_3} \\ \text{s.a.} \\ 0 \leq x_3 \leq y_3 \\ x_3 \in \text{Entero} \end{cases}$$

La solución óptima de este problema es fácil, hay que asignar todo lo que nos sobra en visitar la tercera ciudad.

Hagamos una tabla:

y_3	$f_3(y_3)$	x_3^*
0	0	0
1	3	1
2	4.24	2
3	5.20	3
4	6	4
5	6.71	5

Nota: El óptimo es en función de los recursos que tenemos disponibles

ETAPA 2:

Ahora suponemos que sólo se ha elegido los días en la primera ciudad y es óptimo. Los días óptimos a elegir en la segunda ciudad dado que tenemos y_2 días para visitar la segunda y la tercera se determinan con el siguiente problema:

$$f_2(y_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max: } \sqrt{x_2} + f_3(y_2 - x_2) \\ \text{s.a.} \\ 0 \leq x_2 \leq y_2 \\ x_2 \in \text{Entero} \end{array} \right.$$

Nota: Lo que nos sobraría para visitar la tercera ciudad sería $(y_2 - x_2)$.

Hagamos una tabla:

y_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	$f_2(y_2)$	x_2^*
0	0						0	0
1	3	1					3	0
2	4.24	4	1.41				4.24	0
3	5.20	5.24	4.41	1.73			5.24	1
4	6.00	6.20	5.65	4.73	2		6.20	1
5	6.71	7	6.61	5.97	5	2.23	7	1

ETAPA 1:

Ahora no hemos elegido anteriormente nada. Tenemos por enunciado 5 días de recurso ($y_1 = 5$), esto se llama condición de borde. El problema para elegir la cantidad de días óptimos a visitar la ciudad 1 es:

$$v^* = f_1(5) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max: } 3\sqrt{x_1} + f_2(5 - x_1) \\ \text{s.a.} \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ x_1 \in \text{Entero} \end{array} \right.$$

Nota: $f_1(5)$ corresponde justamente al valor de la función objetivo de nuestro problema.

Hagamos una tabla:

y_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$	$f_1(y_1)$	x_1^*
5	7	8.20	8.06	7.70	7	4.47	8.20	1

Luego tenemos que el valor óptimo es 8.20.
¿Cómo obtenemos la solución objetivo?

PASO 2: Vamos de adelante para atrás

→Sabemos que $x_1^* = 1$ (de la 3ra tabla).

→Esto implica que dejamos $y_2 = 4$. Con este recurso $x_2^* = 1$ (De la 2da tabla).

→Esto implica que $y_3 = 3$, luego $x_3^* = 3$ (tabla 1).

IMPORTANTE: Notemos que las variables x_1, x_2, x_3 fueron escogidas de forma arbitraria. Puede haber sido en cualquier orden.

Problema 2: Dinámico Continuo

Resolver el siguiente problema a través de programación dinámica:

$$\text{Max} : x_1^2 x_2^2 x_3$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i=1,2,3$$

Respuesta:

Nota: Esta vez tenemos un problema continuo pero la base es la misma.

ETAPA 3

Si tenemos y_3 recursos para la tercera variable, ya habiendo elegido x_1^* y x_2^* , el problema es:

$$f_3(y_3) \begin{cases} \text{Max} : x_3 \\ 0 \leq x_3 \leq y_3 \end{cases}$$

Se tiene que el óptimo es:

$$x_3^*(y_3) = y_3$$

$$f_3(y_3) = y_3$$

ETAPA 2

Si tenemos y_2 recursos, ya habiendo elegido x_1^* , el problema es:

$$f_2(y_2) \begin{cases} \text{Max} : x_2^2 f_3(y_2 - x_2) \\ 0 \leq x_2 \leq y_2 \end{cases} \longleftrightarrow f_2(y_2) \begin{cases} \text{Max} : x_2^2 (y_2 - x_2) \\ 0 \leq x_2 \leq y_2 \end{cases}$$

Se tiene que el óptimo es:

$$x_2^*(y_2) = \frac{2}{3} y_2$$

$$f_2(y_2) = \frac{4}{27} y_2^3$$

ETAPA 1

Ahora si tenemos $y_1 = 10$ recursos el problema es:

$$v^* = f_1(10) \begin{cases} \text{Max} : x_1^2 f_2(10 - x_1) \\ 0 \leq x_1 \leq 10 \end{cases} \longleftrightarrow v^* = f_1(10) \begin{cases} \text{Max} : x_1^2 \frac{4}{27} (10 - x_1)^3 \\ 0 \leq x_1 \leq 10 \end{cases}$$

Se tiene que el óptimo es:

$$x_1^* = 4$$

$$v^* = f_1(10) = 512$$

Luego la solución óptima se obtiene en cadena:

Si $x_1^* = 4 \rightarrow$ queda $y_2 = 6 \rightarrow x_2^* = 4 \rightarrow$ queda $y_3 = 2 \rightarrow x_3^* = 2$

Problema 3: Producción e Inventario

Una planta produce un solo producto y enfrenta las siguientes demandas en los periodos 1,..4:

Periodo	1	2	3
Demanda: d_n	1	3	2

Las demandas pueden ser satisfechas con lo producido el periodo anterior.

Sean:

- K: Costo fijo de producción = 5
- C: Costo unitario variable de producción = 2
- Q: Capacidad mensual máxima de producción = 3
- h: Costo unitario de manutención de inventario = 1

Se debe decidir cuánto producir en cada periodo para satisfacer la demanda a mínimo costo.

Respuesta:

Las variables de decisión son:

Y_n : Tamaño del lote de producción del período n

X_n : Inventario al final del período n

Z_n : 1 si $Y_n > 0$, 0 en caso contrario

El problema de optimización es:

$$\text{Min} : \sum_{k=1}^n KZ_n + CY_n + hX_n$$

s.a.

$$X_n = X_{n-1} + Y_n - d_n \quad \forall n$$

$$Y_n \leq QZ_n \quad \forall n$$

$$Z_n \in \{0,1\}$$

$$\text{Min} : \sum_{k=1}^3 5Z_n + 2Y_n + X_n$$

s.a.

$$X_1 = Y_1 - 1$$

$$X_2 = X_1 + Y_2 - 3$$

$$X_3 = X_2 + Y_3 - 2$$

$$Y_3 \leq 3Z_3$$

$$Y_2 \leq 3Z_2$$

$$Y_1 \leq 3Z_1$$

$$Z_n \in \{0,1\}$$

Para el modelo de programación dinámica definimos:

→ $f_n(S_n) :=$ Costo mínimo asociado a los periodos $n, n+1, \dots, N$ si el inventario al principio del periodo “ n ” es $S_n = X_{n-1}$.

Por lo tanto, el modelo en cada etapa queda:

$$f_n(S_n) = \begin{cases} \text{Min} : \alpha(Y_n) + f_{n+1}(S_n + Y_n - d_n) \\ \text{s.a.} \\ S_n + Y_n - d_n \geq 0 \\ Y_n \leq 3 \end{cases}$$

Con:

$$\alpha(Y_n) = \begin{cases} h(S_n - d_n) & \text{si } Y_n = 0 \\ K + CY_n + h(S_n + Y_n - d_n) & \text{si } Y_n > 0 \end{cases}$$

→ Luego el valor óptimo será $f_1(0) = \bar{V}$ (inicialmente no hay inventario).

→ $f_k(S_k) = 0 \quad \forall k > 3$ (son sólo 3 periodos)

ETAPA 3:

s_3	$Y_3 = 0$	$Y_3 = 1$	$Y_3 = 2$	$Y_3 = 3$	$v_3(s_3)$	Y_3^* (óptimo)
0			9	12	9	2
1		7	10	13	7	1
2	0	8	11	14	0	0
3	1	9	12	15	1	0

Es decir, en cada caso lo óptimo es producir lo menos posible, como es lógico.

ETAPA 2:

s_2	$Y_2 = 0$	$Y_2 = 1$	$Y_2 = 2$	$Y_2 = 3$	$v_2(s_2)$	Y_2^* (óptimo)
0				11+9	20	3
1			9+9	12+7	18	2
2		7+9	10+7	13+0	13	3
3	0+9	8+7	11+0	14+1	9	0

ETAPA 1:

s_1	$Y_1 = 0$	$Y_1 = 1$	$Y_1 = 2$	$Y_1 = 3$	$v_1(s_1)$	Y_1^* (óptimo)
0		7+20	10+18	13+13	26	3

Por lo tanto, resolviendo de vuelta hacia adelante, lo óptimo es producir 3 unidades en el primer periodo, 3 en el segundo y ninguna en el tercero. El costo total entonces será 26.

Problema 4:

Se ha encargado un estudio a la Escuela. El problema es tan complejo que ésta ha formado 3 equipos diferentes para resolverlo; sin embargo, las probabilidades de fallar aún son altas. Para asegurarse, la Escuela ha decidido contratar hasta 2 investigadores adicionales, que deben repartirse entre los equipos de alguna forma. Se sabe que las probabilidades de fallar de cada equipo por separado, en función de la cantidad de investigadores extra asignados a cada uno, es

Investigadores extra	Equipo		
	1	2	3
0	0,4	0,6	0,8
1	0,2	0,4	0,5
2	0,15	0,2	0,3

Usando programación dinámica, encuentre la asignación óptima de investigadores a equipos.

Respuesta:

Sean:

→ X_i = Número de investigadores asignados al equipo “i”

→ $P_i(X_i)$ = probabilidad de fallar del equipo “i” al agregarle X_i investigadores.

La probabilidad total de fallar es que los 3 equipos fallen simultáneamente, por lo que el problema de optimización es:

$$\text{Min} : P_1(X_1)P_2(X_2)P_3(X_3)$$

s.a.

$$X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Usando programación dinámica, necesitamos definir:

$f_n(Y_n)$ = Mínima probabilidad de falla asociada a los equipos $n, n+1, \dots, N$ si quedan Y_n investigadores por asignar. El problema dinámico queda definido por:

$$f_n(Y_n) \begin{cases} \text{Min} : P_n(X_n) * f_{n+1}(Y_n - X_n) \\ \text{s.a.} \\ X_n \leq Y_n \\ X_n \in \text{Entero} \geq 0 \end{cases}$$

→ El valor óptimo entonces es $f_1(2)$ y $f_k(Y_k) = 1 \forall k > 3$

ETAPA 3:

y_3	$v_3(y_3)$	x_3^*
0	0,8	0
1	0,5	1
2	0,3	2

ETAPA 2:

y_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$v_2(y_2)$	x_2^*
0	$0,6 \times 0,8$			0,48	0
1	$0,6 \times 0,5$	$0,4 \times 0,8$		0,3	0
2	$0,6 \times 0,3$	$0,4 \times 0,5$	$0,2 \times 0,8$	0,16	2

ETAPA 3:

y_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$v_1(y_1)$	x_1^*
2	$0,4 \times 0,16$	$0,2 \times 0,3$	$0,15 \times 0,48$	0,06	1

Por lo que resolviendo de vuelta, conviene asignar uno de los investigadores al equipo 1 y el otro al equipo 3. Al hacerlo así, se obtiene una probabilidad total de fallar de 0,06.