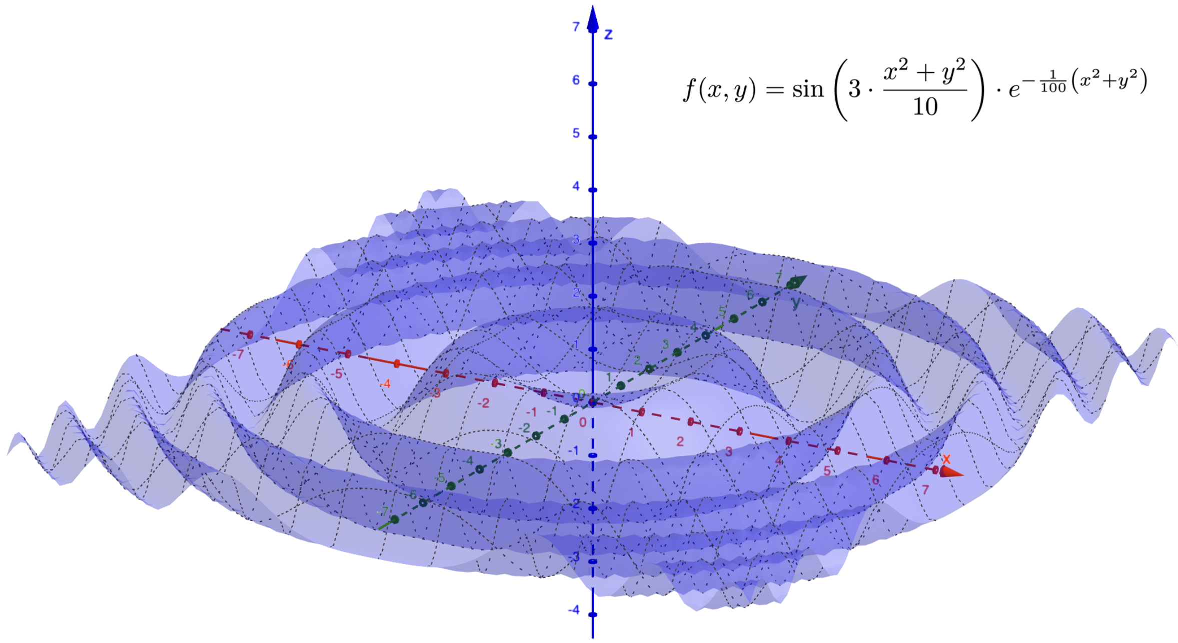


Parameteranalyse

Analyse von Parameterwirkung in Funktionsgleichungen

Autor: Ravinthrarasa Rosshan

Betreuungsperson: Unabhängig

Art der Arbeit: Mathematische Untersuchung

Schule: Bündner Kantonsschule Chur, Gymnasium

Vorwort

Keine Wissenschaft kann sich mit einer solchen Exaktheit profilieren wie die einzige exakte Wissenschaft: die Mathematik. Und diese Mathematik befasst sich nicht nur mit Problemen wie $1 + 1 = 2$, sondern auch mit Problemen wie zum Beispiel $e^{i\pi} + 1 = 0$ (übrigens: die schönste Gleichung der Welt). Von dieser Algebra über die Analysis bis zur Geometrie, die sich auch nicht nur mit der Achsen- und Punktsymmetrie befasst, sondern auch mit komplexen dreidimensionalen Problemen in der Vektorgeometrie, die eine solche Komplexität erreichen, dass ich sie nicht einmal aufzählen möchte. Dann gibt es noch die Stochastik, die ich jedoch so stiefmütterlich behandle, dass ich ihr nicht mehr als einen Satz widme. Denn ich möchte mich gern mit der Analysis befassen.

Was ist die Analysis? Die Analysis ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Veränderungen, Funktionen und deren Verhalten beschäftigt. Die Kernbereiche sind die Folgenden:

- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Grenzwerte
- Folgen und Reihen

Der sogenannte „unique selling point“ in der Analysis ist das Gleichgewicht zwischen der Algebra und der Geometrie. Man braucht sowohl die algebraischen Fertigkeiten als auch die geometrische Vorstellungskraft. Diese Schnittmenge oder auch `Algebra` ∩ `Geometrie` ist das, was mich unfassbar interessiert.

Ich habe mich entschieden, in dieser Arbeit die Funktionen, welche das Fundament der Analysis bilden, sowohl in Gleichungen als auch im Koordinatensystem zu analysieren. Dies ist eine unabhängige Untersuchung nicht im Rahmen einer Institution und im Zeitraum zwischen Dezember 2025 und Januar 2026.

In dieser Arbeit wird die KI schlicht für orthographische und grammatikalische Fragen konsultiert. Ebenfalls verzichte ich auf ein Quellenverzeichnis, da es sich um eine eigenständige mathematische Untersuchung handelt und keine externen Quellen verwendet wurden.

Abstract

In dieser Arbeit geht es um die Parameter in Funktionsgleichungen, die den Graphen verändern. Koeffizienten, die beispielsweise Streckung und Spiegelung beeinflussen, oder Exponenten, die den allgemeinen Verlauf des Graphs bestimmen. Das Zusammenspiel dieser beiden Parameter führt zu einer noch differenzierteren Formgestaltung.

Somit lautet die Fragestellung: „Wie beeinflussen Parameter in Funktionsgleichungen den dazugehörigen Graphen?“

Für die Analyse teste ich die verschiedenen Möglichkeiten des Zusammenspiels der Koeffizienten und verwende dabei GeoGebra Classic 6 zur Visualisierungen.

Schlussfolgernd kann ich sagen, dass der Parameter a, der im Term mit dem höchsten Exponent steht und somit der Leitkoeffizient ist, nebst dem Einfluss des Exponenten selbst, den sonst grössten Einfluss hat, da er den Verlauf des Graphen gegen Unendlich hinsichtlich der Steigung beziehungsweise der Krümmung bestimmt. Währenddessen bestimmen die anderen Parameter den Verlauf der Kurve in der Nähe des Ursprungs.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Ziel der Arbeit ist einerseits die Analyse selbst, nach dem Motto „Der Weg ist das Ziel“, und andererseits die Verbesserung der Intuition beim Erkennen und richtigen Lesen von Funktionsgraphen. Dazu benötigt man nicht nur grundlegendes Wissen über einzelne Parameter, sondern auch ein umfassenderes Verständnis dafür, wie welcher Parameter welchen Einfluss auf den Graphen hat.

Das Niveau der Analyse bleibt auf gymnasialem Niveau und basiert grösstenteils auf optischen Herleitungen aus graphischen Darstellungen mit GeoGebra Classic 6.

Als Ausgangslage werden die Grundlagen und teilweise erweiterte Kenntnisse zu Funktionen vorausgesetzt, die wie bereits erwähnt, auf gymnasialem Niveau liegen.

Die Arbeit ist so aufgebaut, dass zunächst erst die grundlegenden Komponenten, wie beispielsweise die Schreibweise und Terme, erklärt werden. Danach werden die Veränderbarkeiten des Graphen isoliert betrachtet. Das heisst: Welcher Parameter beeinflusst was bei einem einfachen Graphen. Am Schluss wird das Zusammenspiel behandelt, wobei die volle Funktionalität aller Komponente (Terme, Koeffizienten und Exponenten) genutzt wird.

2 Grundlegende Komponenten einer Funktionsgleichung

Funktionsgleichungen agieren im Prinzip gleich wie beispielsweise lineare, quadratische oder kubische Gleichungen. Jedoch gibt es bestimmte Komponenten, die spezifisch für die Analysis gebraucht werden.

2.1 Schreibweise von Funktionen

Die Standardform von Funktionen besteht aus einem $f(x)$ und einer Gleichung. Hier am Beispiel einer beliebigen quadratischen Funktion.

$$f(x) = x^2 + 1 \tag{1}$$

Da $f(x) = y$ ist, kann man die Funktion ebenfalls wie folgt schreiben.

$$y = x^2 + 1 \tag{2}$$

Nebst dieser Darstellung gibt es die Zuordnungsschreibweise, die mit dem oben genannten Beispiel folgendermassen aussieht:

$$f : x \mapsto x^2 + 1 \tag{3}$$

2.2 Terme

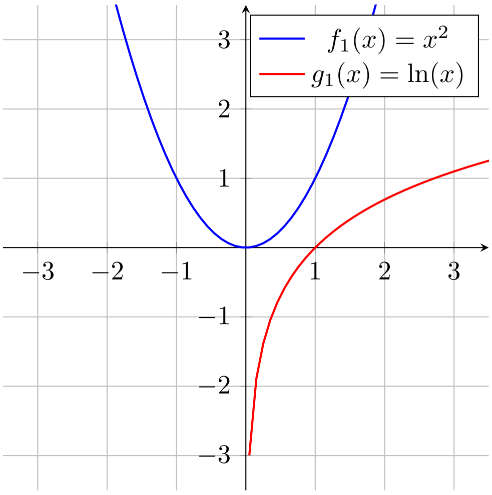
Ein Term ist ein Produkt aus Zahlen, Variablen und eventuell Exponenten, der als Einheit betrachtet wird. Terme in Funktionsgleichungen sind einzelne Bestandteile, die durch Addition oder Subtraktion miteinander verknüpft sind.

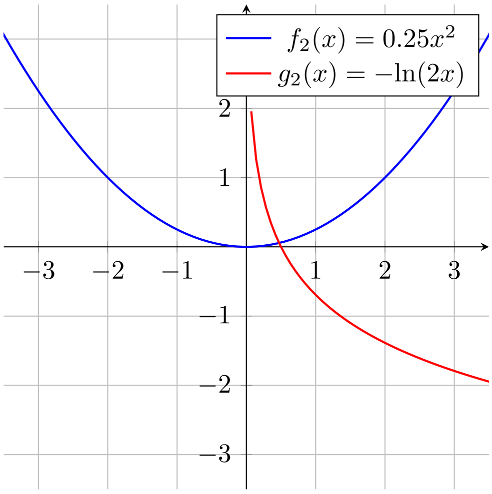
Funktionen von Termen:

- Jeder Term trägt einen Teil zur Form des Graphen bei.
- Koeffizienten bestimmen Steilheit, Spiegelung, Streckung und Stauchung.
- Konstante Terme verschieben den Graphen nach oben oder nach unten. Somit zeigt das konstante Glied den y-Achsenabschnitt.

3 Veränderbarkeit von Graphen

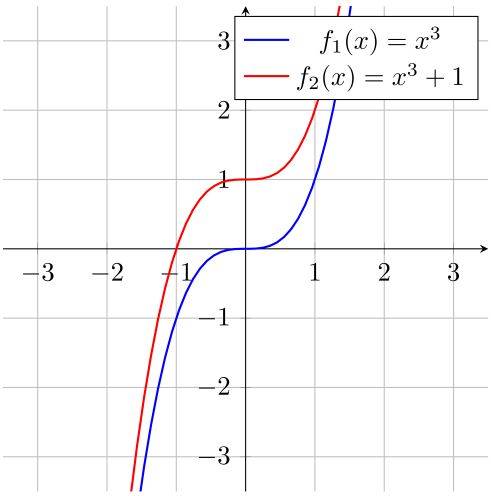
Funktionsgleichungen bestehen aus Termen mit Koeffizienten und Exponenten. Dies sind auch die Komponenten, die gebraucht werden, um eine Funktion zu verändern. Hier ein Beispiel.

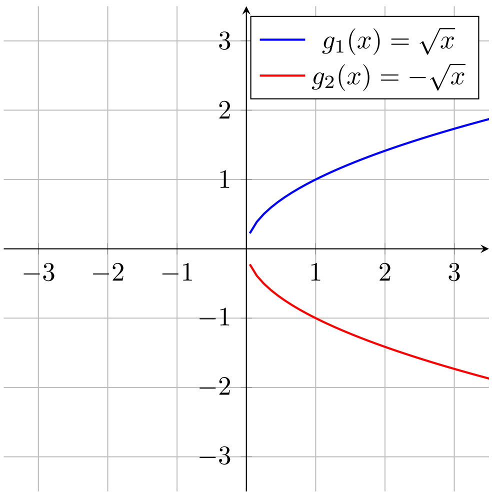




In diesem Beispiel sieht man links die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Rechts sieht man die Funktionen mit unterschiedlichen Parametern. Bei $f_2(x)$ wird die Funktion mit 0.25 multipliziert, was die Parabel staucht, und bei $g_2(x)$ hat die Funktion neu ein Minus und das Argument wird verdoppelt, was den Graph an der x-Achse spiegelt und staucht.

Folgende Funktionen zeigen die Veränderbarkeit nochmal deutlicher.





3.1 Koeffizienten

Koeffizienten sind die Zahlen, die vor Variablen stehen und deren Einfluss auf den Graphen oder die Funktion bestimmen. Sie steuern die Form des Graphen, was die Streckung oder Stauchung, Spiegelung oder Symmetrie und Schnitt- oder Nullstellen beeinflusst.
Im folgenden kommen die Begriffe „vertikaler" und „horizontaler" Koeffizient vor. Vertikale Koeffizienten stehen vor dem Funktionsterm beispielsweise bei $f(x) = a \cdot g(x)$. Horizontale Koeffizienten stehen im Funktionsterm beispielsweise bei $f(x) = g(bx)$.

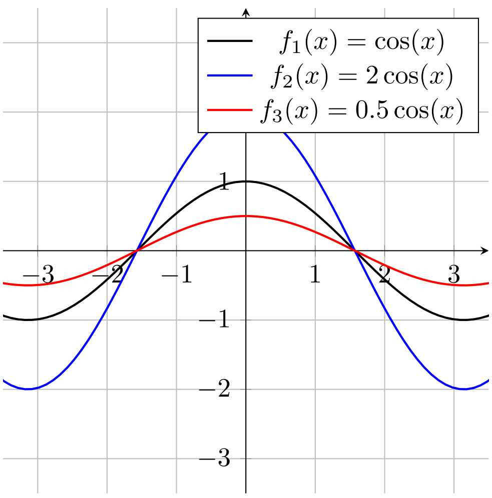
3.1.1 Streckung und Stauchung

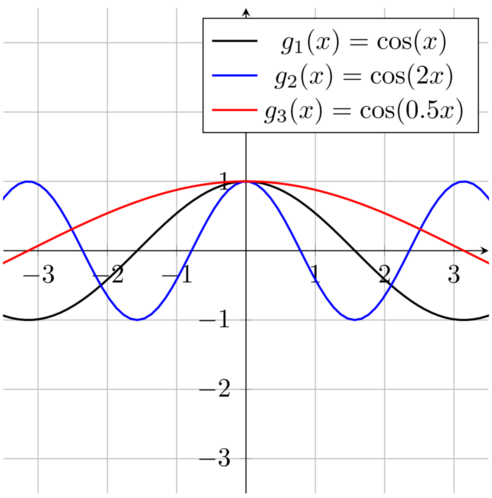
Koeffizienten verändern unter anderem die Form, sodass die finale Kurve höher, steiler, flacher oder breiter sein kann. In dieser Tabelle werden der Einfachheit halber a und b mit x substituiert.

x	**als vertikaler Koeffizient** (a)	**als horizontaler Koeffizient** (b)
$x > 1$	vertikale Streckung Graph wird höher / steiler	horizontale Stauchung Graph zieht sich zusammen
$0 < x < 1$	vertikale Stauchung Graph wird flacher	horizontale Streckung Graph wird breiter
$x < 0$	Spiegelung an der x-Achse	Spiegelung an der y-Achse

Tabelle 1: Streckung und Stauchung von Funktionen durch vertikale und horizontale Koeffizienten

Die Spiegelung wird im folgenden Unterkapitel behandelt. Die Streckung beziehungsweise die Stauchung sieht man unter anderem in der Kosinus-Kurve.





Schlussfolgernd kann man sagen, dass die vertikalen Koeffizienten die Kurve auf der y-Achse verändern, da…

$$f(x) = a \cdot g(x) \overset{g(x)=y}{\overset{\downarrow}{=}} a \cdot y \qquad \text{q.e.d.} \tag{4}$$

…und die horizontalen Koeffizienten die Kurve auf der x-Achse verändern, da $f(x) = g(bx)$.

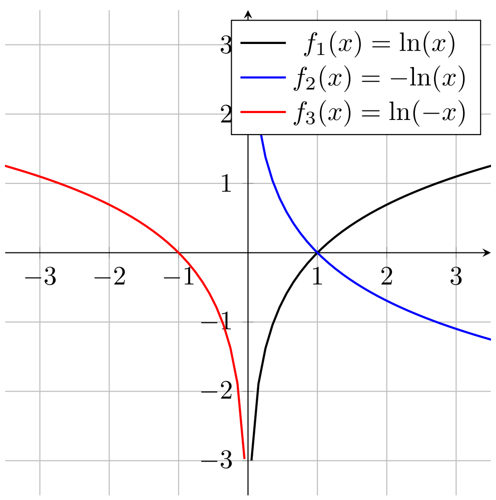
3.1.2 Spiegelung und Symmetrie

Koeffizienten oder in diesem Fall eher deren Vorzeichen beeinflussen die Orientierung der Kurve. Damit ist die Spiegelung sowie deren Symmetrieeigenschaft gemeint.

$f(x)$	**Spiegelung**	**Symmetrie**
$-f(x)$	an der x-Achse	Ursprungssymmetrie
$f(-x)$	an der y-Achse	y-Achsensymmetrie

Tabelle 2: Spiegelung und Symmetrie von Funktionen

Die Symmetrie ist zusätzlich abhängig von den anderen Terme. Die Spiegelung sieht man unter anderem in der Logarithmus-Kurve.



Schlussfolgernd kann man sagen, dass die Vorzeichen vor dem Funktionsterm die Kurve an der x-Achse spiegelt, da…

$$f(x) = -a \cdot g(x) \overset{g(x)=y}{\overset{\downarrow}{=}} -a \cdot y = a \cdot (-y) \qquad \text{q.e.d.} \tag{5}$$

…und die Vorzeichen im Funktionsterm die Kurve an der y-Achse spiegelt, da $f(x) = g(-bx)$.

3.1.3 Schnitt- und Nullstellen

Für die Schnitt- und Nullstellen sind die Koeffizienten massgebend, da sie diese Stellen bestimmen. Hier am Beispiel der Funktionen $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = x^3 + 1$.

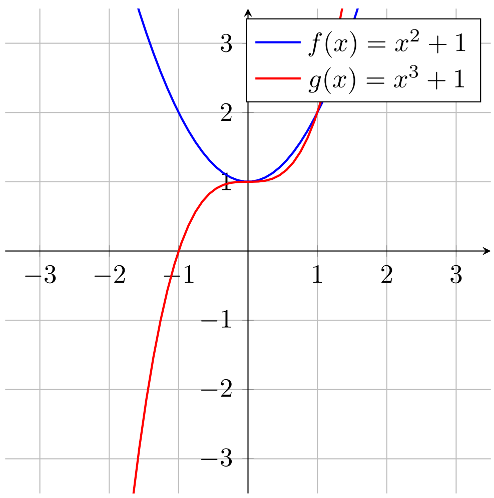
Schnittstellen

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= x^3 + 1 \\ 0 &= x^3 - x^2 \\ 0 &= x^2(x-1) \\ x &= 1 \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned} \tag{6}$$

Nullstelle

$$\begin{aligned} x^3 + 1 &= 0 \\ x^3 &= -1 \\ x &= \sqrt[3]{-1} = -1 \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned} \tag{7}$$

Dies scheint nun sehr intuitiv zu sein, dennoch ist diese Eigenschaft essentiell, denn ohne Koeffizienten wäre die Berechnung dieser Stellen schlicht nicht möglich. Das folgende Koordinatensystem verdeutlicht die obigen Berechnungen.



3.2 Exponenten

Die Exponenten von Termen in Funktionsgleichungen (beispielsweise n in ax^n) beeinflussen die Form vom Graphen massgeblich. Das liegt unter anderem daran, dass alle Zahlen in den Exponenten eingesetzt werden können.

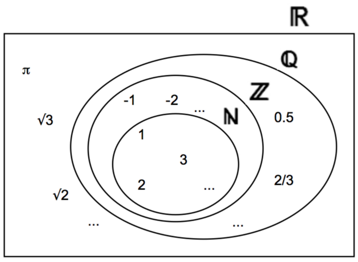
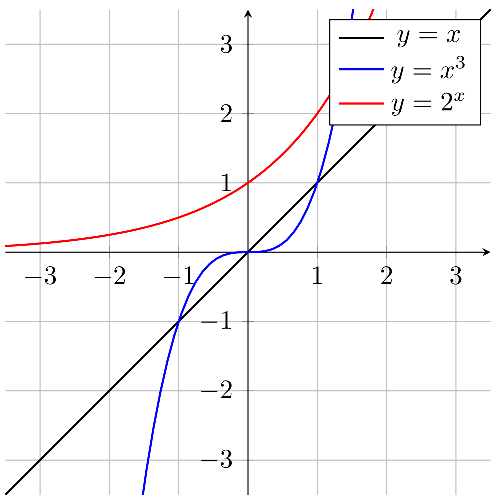


Abbildung 1: Zahlenmengen

Diese Darstellung der verschiedenen Zahlenmengen zeigen, welche Zahlen im Exponenten stehen können.

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
- Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

Jede dieser Zahlenmengen enthält, wie auch im obigen Bild sichtbar, die vorherige Zahlenmenge. Das heisst $\mathbb{R} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{N}$. In den folgenden Unterkapiteln liegt der Fokus auf auf den jeweils spezifischen Teil der Zahlenmenge.

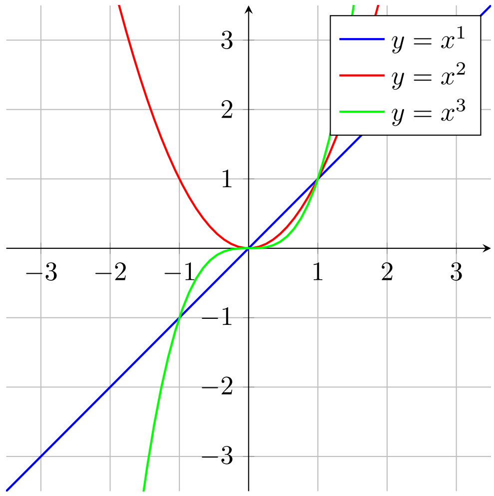


3.2.1 Natürliche (positive) Exponenten

Die natürlichen Zahlen bestehen beispielsweise aus $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$. In der folgenden Tabelle werden die y-Werte für die unterschiedlichen Parameter x bei den natürlichen Exponenten n aufgezeigt. Somit bezieht sich die Tabelle auf die Funktion $f(x) = x^n = y$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^1$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = x^3$	-27	-8	-1	0	1	8	27

Tabelle 3: y-Werte für die Funktion $y = x^n$

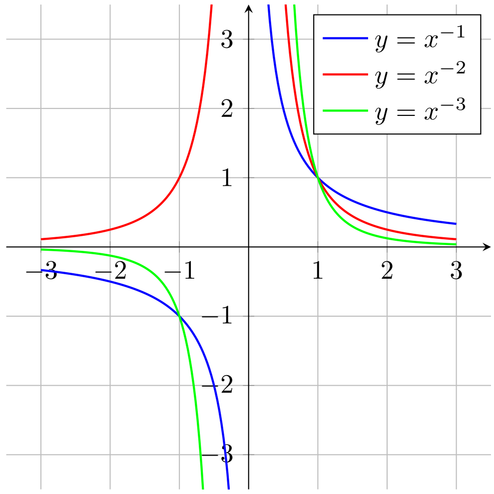


3.2.2 Negative Exponenten

Die negativen Zahlen bestehen beispielsweise aus $\mathbb{Z} = \{-1; -2; -3; \ldots\}$. In der folgenden Tabelle werden die y-Werte für die unterschiedlichen Parameter x bei den natürlichen Exponenten n aufgezeigt. Somit bezieht sich die Tabelle auf die Funktion $f(x) = x^{-n} = y$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^{-1}$	-0.33	-0.5	-1	∞	1	0.5	0.33
$y = x^{-2}$	0.11	0.25	1	∞	1	0.25	0.11
$y = x^{-3}$	-0.04	-0.13	-1	∞	1	0.13	0.04

Tabelle 4: y-Werte für die Funktion $y = x^{-n}$

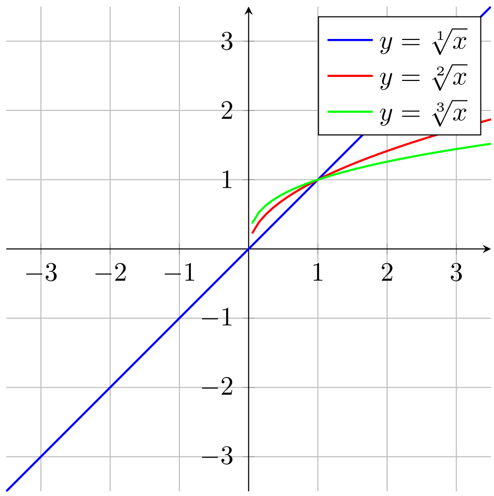


3.2.3 Rationale Exponenten

Die natürlichen Zahlen bestehen beispielsweise aus $\mathbb{Q} = \left\{\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots\right\}$ oder . In der folgenden Tabelle werden die y-Werte für die unterschiedlichen Parameter x bei den rationalen Exponenten n aufgezeigt. Somit bezieht sich die Tabelle auf die Funktion $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = y$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^{\frac{1}{1}}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^{\frac{1}{2}}$	↯	↯	↯	0	1	1.41	1.73
$y = x^{\frac{1}{3}}$	↯	↯	↯	0	1	1.26	1.44

Tabelle 5: y-Werte für die Funktion $y = x^{\frac{1}{n}}$



3.2.4 Reelle Exponenten

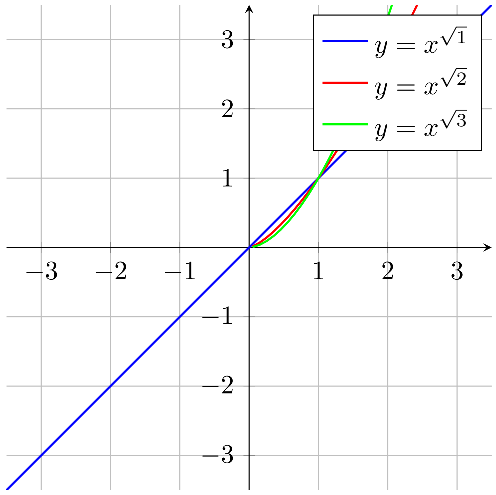
Die reellen Zahlen bestehen beispielsweise aus $\mathbb{R} = \{-8.3071336697; \sqrt{2}; e; \ldots\}$. Das sind prinzipiell nur Dezimalzahlen, die man nicht als Bruch darstellen kann, da sie sonst zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ angehören. Wie in der Menge $\mathbb{R}$ dargestellt, sind reelle Zahlen entweder willkürliche Zahlen (z. B. -8.3071336697), Wurzeln ($\sqrt{2} \approx 1.41$) oder spezielle Zahlen ($e \approx 2.72 \mathrel{\widehat{=}}$ Euler'sche Zahl).

Der Einfachheit halber wird nun zwischen *Wurzeln*, *speziellen Zahlen* und Beispiele mit *willkürlichen Dezimalzahlen* unterschieden.
In der folgenden Tabelle werden die y-Werte für die unterschiedlichen Parameter x bei den reellen Exponenten n aufgezeigt. Somit bezieht sich die Tabelle auf die Funktion $f(x) = x^n = y$.

Wurzel

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^{\sqrt{1}}$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^{\sqrt{2}}$	↯	↯	↯	0	1	2.67	4.73
$y = x^{\sqrt{3}}$	↯	↯	↯	0	1	3.32	6.70

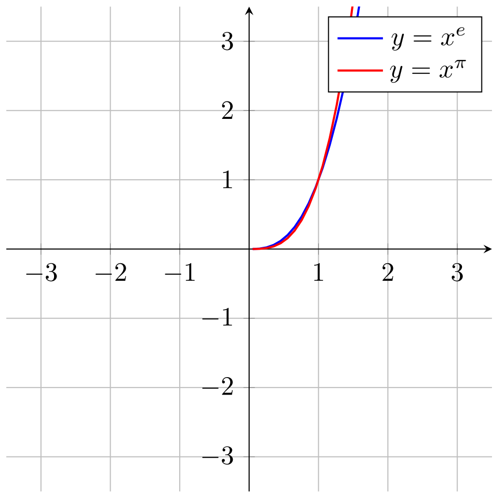
Tabelle 6: y-Werte für die Funktion $y = x^n$ ($n \mathrel{\widehat{=}}$ Wurzel)



Spezielle Zahlen

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^e$	↯	↯	↯	0	1	6.58	19.81
$y = x^\pi$	↯	↯	↯	0	1	8.82	31.54

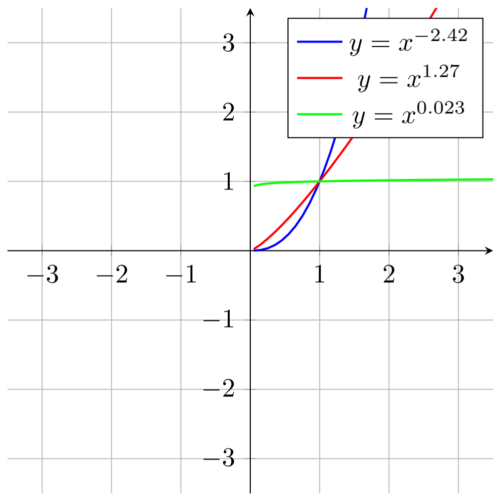
Tabelle 7: y-Werte für die Funktion $y = x^n$ ($n \mathrel{\widehat{=}}$ spezielle Zahlen)



Willkürliche Dezimalzahlen

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^{2.42}$	↯	↯	↯	0	1	5.35	14.28
$y = x^{1.27}$	↯	↯	↯	0	1	2.41	4.04
$y = x^{0.023}$	↯	↯	↯	0	1	1.02	1.03

Tabelle 8: y-Werte für die Funktion $y = x^n$ ($n \mathrel{\widehat{=}}$ willkürliche Zahlen)



4 Zusammenwirken von Terme, Koeffizienten & Exponenten

Einzelne Parameter haben, wie im vorherigen Kapitel aufgezeigt, Auswirkungen auf beispielsweise Streckung, Stauchung, und Spiegelung des Graphen. Nun folgt die Untersuchung der Parameterwirkung im Kontext von Funktionsgleichungen. Das heisst, dass mehrere Terme mit den verschiedenen Koeffizienten und Exponenten zusammenwirken.
Diese Untersuchung ist strukturiert nach den einzelnen Funktionstypen (linear, quadratisch, kubisch usw.), da die Höhe des Grades die Anzahl der Terme beeinflusst, was wiederum den Verlauf des Graphen ändert.

In der folgenden Untersuchung werden folgende Begriffe verwendet:

Polynomfunktion
Ein Polynom ist eine Summe von Termen der Form...

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{8}$$

...wobei...

- ...die Exponenten $n \in \mathbb{N}$ sind.
- ...die Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$ sind.

Beispiel: $3x^3 - 2x + 5$

Wenn ein solches Polynom als Funktionsgleichung agiert, ist dies eine Polynomfunktion. Jede Polynomfunktion besteht aus einer oder mehreren Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten.

Potenzfunktion
Eine Potenzfunktion hat die Form...

$$f(x) = x^n \tag{9}$$

...mit einem reellen Exponenten n.

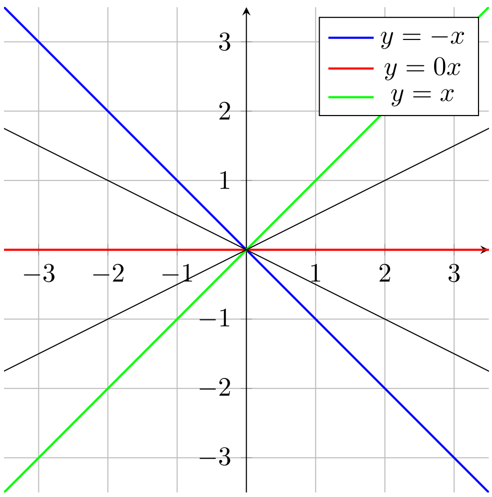
Beispiele:

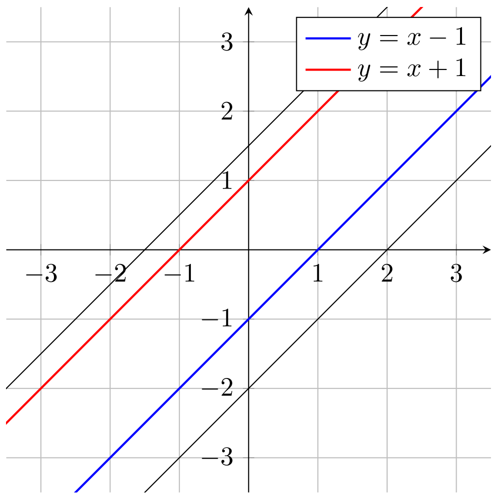
$$\begin{aligned} f(x) = x^2 \quad &\rightarrow \quad \text{Potenzfunktion und Polynom} \\ f(x) = x^{\sqrt{2}} \quad &\rightarrow \quad \text{Potenzfunktion, kein Polynom} \end{aligned} \tag{10}$$

Nicht jede Potenzfunktion ist ein Polynom.

4.1 Lineare Funktionen / 1. Grad

Die allgemeine Form der linearen Funktionen lautet $f(x) = ax + b$, wobei a die Steigung und b der y-Achsenabschnitt darstellen.





Parameter a

Die Steigung bei linearen Funktionen entspricht bei $b = 0$:

$$\begin{aligned} y &= ax \\ \frac{y}{x} &= a \end{aligned} \tag{11}$$

Somit entspricht $m = \frac{y}{x}$. Das heisst für $a \in \{-1; 0; 1\}$ müssen folgende Berechnungen gemacht werden.

$$\begin{aligned} a = -1 = \frac{-1}{1} \quad &\Rightarrow \quad -1 \text{ in } y\text{-Richtung und } 1 \text{ in } x\text{-Richtung} \\ a = 0 = \frac{0}{1} \quad &\Rightarrow \quad 0 \text{ in } y\text{-Richtung und } 1 \text{ in } x\text{-Richtung} \\ a = 1 = \frac{1}{1} \quad &\Rightarrow \quad 1 \text{ in } y\text{-Richtung und } 1 \text{ in } x\text{-Richtung} \end{aligned} \tag{12}$$

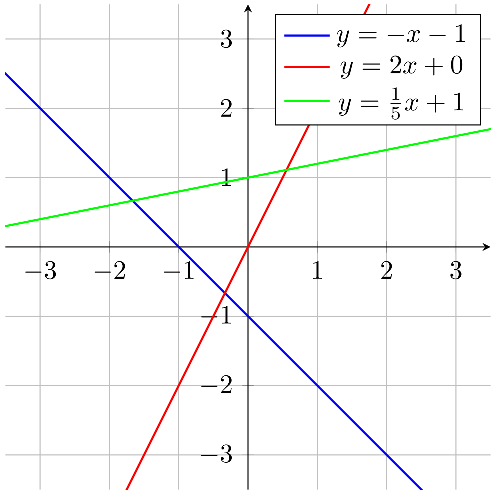
Parameter b

Da b der y-Achsenabschnitt entspricht, reicht es, wenn die Gerade um b in y-Richtung herauf- oder heruntergeschoben wird.

Ergo

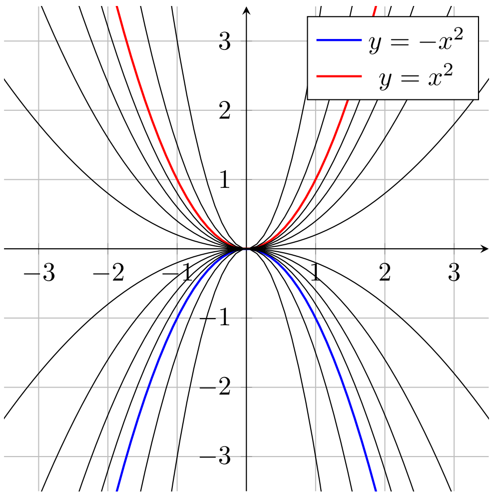
Wie der Name der „linearen“ Funktion bereits sagt, wirken sich die Parameter auf den Graphen in anschaulicher Weise aus. Der Parameter a bestimmt die Steigung der Geraden, während der Parameter b als y-Achsenabschnitt eine parallele Verschiebung in y-Richtung verursacht.

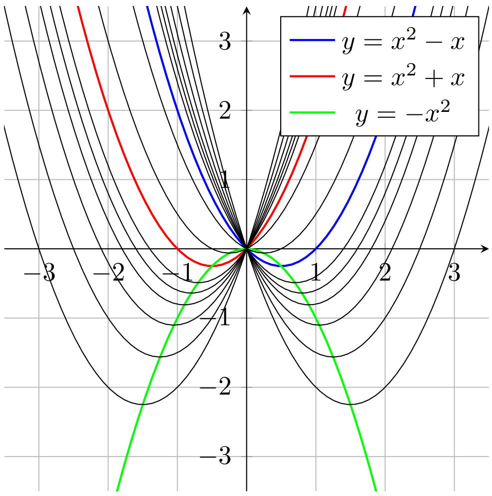
Im folgenden Koordinatensystem sind Geraden mit beliebigen a und b dargestellt.



4.2 Quadratische Funktionen / 2. Grad

Die allgemeine Form der quadratischen Funktionen lautet $f(x) = ax^2 + bx + c$, wobei a die Krümmung, b das lineare Glied und c den y-Achsenabschnitt darstellen.





Parameter a

Da die Steigung bei quadratischen Funktionen nicht konstant ist, wird die Änderung der Steigung, was der Krümmung entspricht (siehe Koordinatensystem links), mit a definiert. Die Krümmung a entspricht bei $b = 0$ und $c = 0$:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 \\ \frac{y}{x^2} &= a \end{aligned} \tag{13}$$

Somit entspricht $a = \frac{y}{x^2}$. Das heisst, für $a \in \{-1; 1\}$ ergeben sich die folgenden Parabelkrümmungen.

$$\begin{aligned} a = -1 = \frac{-1}{1^2} &\quad \Rightarrow \quad -1 \text{ in } y\text{-Richtung und } 1 \text{ in } x\text{-Richtung} \\ a = 1 = \frac{1}{1^2} &\quad \Rightarrow \quad 1 \text{ in } y\text{-Richtung und } 1 \text{ in } x\text{-Richtung} \end{aligned} \tag{14}$$

Wenn a einer rationalen Zahl entspricht, wird dem Nenner die Wurzel gezogen. Beispiel:

$$\begin{gathered} a = \frac{y}{x^2} = \frac{1}{9} \\ \\ y = 1 \\ x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{gathered} \tag{15}$$

Mit diesen x- und y-Werten kann der Verlauf des Graphen dargestellt werden.

Parameter b

Der lineare Koeffizient, dessen Variationen im rechten Koordinatensystem zu sehen ist, verschiebt die Position des Scheitelpunktes auf der gespiegelten Kurve. Dies folgt aus:

$$\begin{aligned} y &= x^2 + bx \\ y - x^2 &= bx \\ \frac{y - x^2}{x} &= b \end{aligned} \tag{16}$$

Bei gegebenem b fehlt somit nur noch der x-Wert, was mit der ersten Ableitung berechnet wird (bei $a = 1$).

$$\begin{aligned} y &= x^2 \; + bx + c \\ y' &= 2x + b \qquad y' \,\widehat{=}\, 0, \text{ weil Scheitelpunktbedingung (Steigung } \widehat{=}\, 0) \\ 0 &= 2x + b \\ -b &= 2x \\ -\frac{b}{2} &= x \end{aligned} \tag{17}$$

Somit entspricht $b = \frac{y - x^2}{x}$ beziehungsweise $\frac{y}{x} - x$ mit $x = -\frac{b}{2}$. Das heisst für (beispielsweise) $b = 4$ müssen folgende Berechnungen gemacht werden.

$$\begin{aligned} \text{Bei } x = -\frac{4}{2} = -2 \;\Rightarrow 4 &= \frac{y - (-2)^2}{-2} \\ -8 &= y - 4 \\ y &= -4 \end{aligned} \tag{18}$$

Mit diesen x- und y-Werten kann der Scheitelpunkt eingezeichnet werden. Wenn $a = -1$ ist, werden die Operationszeichen von a und b umgedreht.

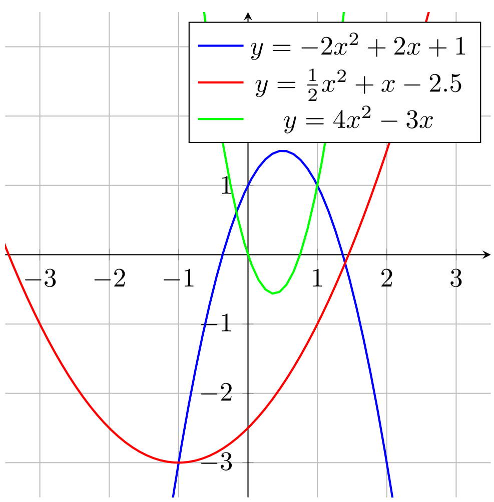
Parameter c

Wie bei linearen Funktionen bestimmt das konstante Glied c den y-Achsenabschnitt der Parabel. In diesem Fall orientiert sich der y-Achsenabschnitt am Scheitelpunkt der Parabel. Beispiel:

$$f(x) = x^2 + 2 \tag{19}$$

Die Funktion $f(x)$ mit $a = 1$ (Normalform) hat $b = 0$, was heisst, dass der Scheitelpunkt im Ursprung liegt. Das konstante Glied $c = 2$ verschiebt jedoch den Scheitelpunkt und somit auch die ganze Parabel um zwei Einheiten in die positive y-Richtung. Somit liegt der Scheitelpunkt bei $S(0; 2)$.

Im folgenden Koordinatensystem sind Parabeln mit beliebigen a, b und c dargestellt.



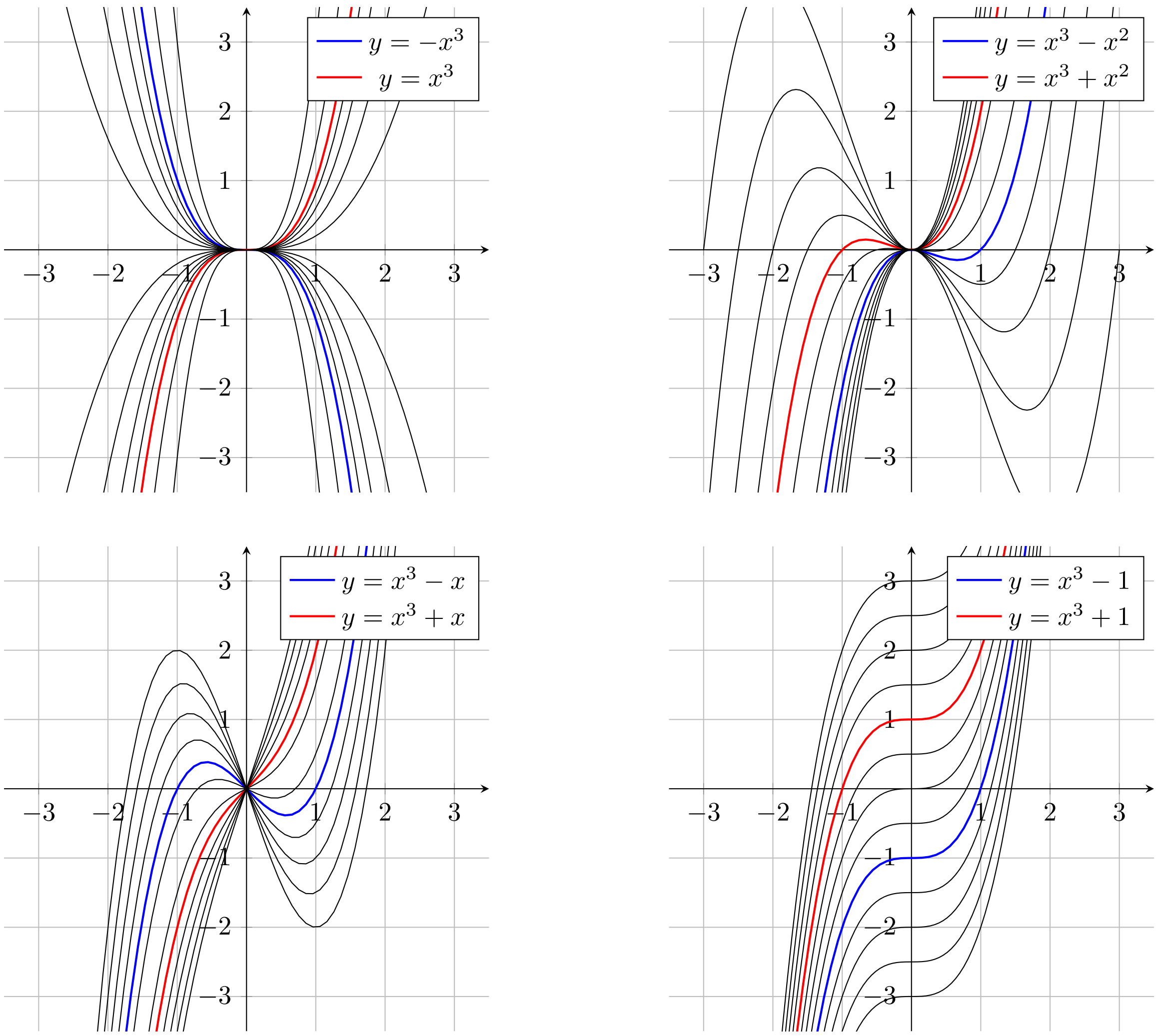
Ergo

Bei den quadratischen Funktionen ist es im Gegensatz zu den anschaulicheren linearen Funktionen weniger direkt anschaulich, da die Werte sich nicht mehr linear verhalten.

Der Parameter a bestimmt die Krümmung, also Streckung, Stauchung, Öffnung, der Parabel, der Parameter b bestimmt die Position des Scheitelpunktes und der Parameter c zeigt den y-Achsenabschnitt und bewirkt eine Verschiebung der Parabel entlang der y-Achse.

4.3 Kubische Funktionen / 3. Grad

Die allgemeine Form der kubischen Funktionen lautet $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wobei a den Verlauf der Kurve für $x \to \pm\infty$ darstellt, b und c die Lage und Form der Extremalstellen und d dem y-Achsenabschnitt entspricht.



Parameter a

Da die Krümmung bei kubischen Funktionen nicht konstant ist, wird die Krümmungsänderung mit a definiert. Die Krümmungsänderung entspricht bei $b = 0$, $c = 0$ und $d = 0$:

$$\begin{aligned} y &= ax^3 \\ \frac{y}{x^3} &= a \end{aligned} \tag{20}$$

Somit entspricht $a = \frac{y}{x^3}$. Das heisst, für $a \in \{-1; 1\}$ ergeben sich die folgenden Krümmungsverhalten.

$$\begin{aligned} a = -1 = \frac{-1}{1^3} \quad &\Rightarrow \quad -1 \text{ in } y\text{-Richtung und } 1 \text{ in } x\text{-Richtung} \\ a = 1 = \frac{1}{1^3} \quad &\Rightarrow \quad 1 \text{ in } y\text{-Richtung und } 1 \text{ in } x\text{-Richtung} \end{aligned} \tag{21}$$

Wenn a eine rationale Zahl ist, kann man aus dem Nenner die entsprechende Wurzel zeihen, um die Werte für x zu bestimmen. Beispiel:

$$\begin{aligned} a &= \frac{y}{x^2} = \frac{1}{-8} \\ \\ y &= 1 \\ x^3 &= -8 \Rightarrow x = -2 \end{aligned} \tag{22}$$

Mit diesen x- und y-Werten kann der Verlauf des Graphen dargestellt werden.

Parameter b

Der quadratische Koeffizient, dessen Variationen im oberen Koordinatensystem zu sehen sind, bildet bei $b \neq 0$ einen Hoch- bzw. Tiefpunkt, der bei $b > 0$ höher und bei $b < 0$ tiefer wird.

$$\begin{aligned} y &= x^3 + bx^2 \\ y - x^3 &= bx^2 \\ \frac{y - x^3}{x^2} &= b \end{aligned} \tag{23}$$

Bei gegebenem b fehlt somit nur noch der x-Wert, der mit der zweiten Ableitung berechnet wird (bei $a = 1$ und $d = 0$), da es einen Zusammenhang mit den Wendepunkten hat.

$$\begin{aligned} y &= x^3 + bx^2 + cx \\ y' &= 3x^2 + 2bx + c \\ y'' &= 6x + 2b \qquad y'' \mathrel{\widehat{=}} 0, \text{ weil Wendepunktbedingung} \\ \\ 0 &= 6x + 2b \\ -\frac{b}{3} &= x \end{aligned} \tag{24}$$

Somit entspricht $b = \frac{y-x^3}{x^2}$ beziehungsweise $\frac{y}{x^2} - x$ mit $x = -\frac{b}{3}$. Das heisst für (beispielsweise) $b = -3$ müssen folgende Berechnungen gemacht werden.

$$\begin{aligned} \text{Bei } x = -\frac{-3}{3} = 1 \ \Rightarrow -3 &= \frac{y-1^3}{1^2} \\ -3 &= y - 1 \\ y &= -2 \end{aligned} \tag{25}$$

Mit diesen x- und y-Werten kann der Wendepunkt eingezeichnet werden.

Parameter c

Der lineare Koeffizient der kubischen Funktionen bildet bei $c \neq 0$ punktsymmetrisch einen Hoch- und Tiefpunkt, der sich mit dem Parameter c ändert.

$$\begin{aligned} y &= x^3 + cx \\ y - x^3 &= cx \\ \frac{y-x^3}{x} &= c \end{aligned} \tag{26}$$

Bei gegebenem $c < 0$ fehlt somit nur noch der x-Wert, was mit der ersten Ableitung berechnet wird (bei $a = 1$, $b = 0$ und $d = 0$), da es im Zusammenhang mit Hoch- und Tiefpunkten steht.

$$\begin{aligned} y &= x^3 + cx \\ y' &= 3x^2 + c \qquad y' \mathrel{\widehat{=}} 0, \text{ weil Extremalstellenbedingung} \\ \\ 0 &= 3x^2 + c \\ \sqrt{-\frac{c}{3}} &= x \end{aligned} \tag{27}$$

Somit entspricht $c = \frac{y-x^3}{x}$ beziehungsweise $\frac{y}{x^2} - x^2$ mit $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{3}}$ (bei $c < 0$). Das heisst für (beispielsweise) $c = -3$ müssen folgende Berechnungen gemacht werden.

$$\begin{aligned} \text{Bei } x = \sqrt{-\frac{-3}{3}} = 1 \ \Rightarrow -3 &= \frac{y-1^3}{1^2} \\ -3 &= y - 1 \\ y &= -2 \end{aligned} \tag{28}$$

Mit diesen x- und y-Werten kann der Wendepunkt eingezeichnet werden.

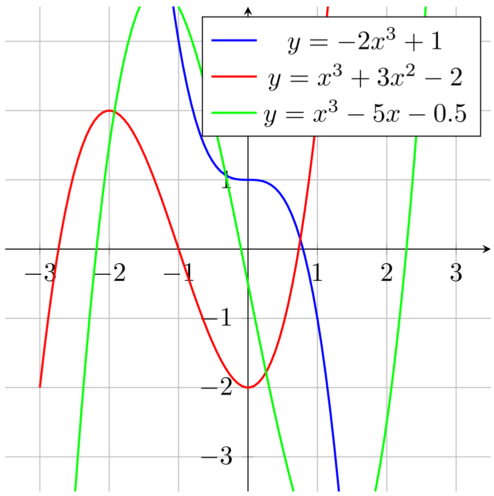
Parameter d

Wie bei linearen Funktionen bestimmt das konstante Glied d den y-Achsenabschnitt des Graphen. In diesem Fall orientiert sich der y-Achsenabschnitt am Wendepunkt der Graphen. Beispiel:

$$f(x) = x^3 + 2 \tag{29}$$

Die Funktion $f(x)$ mit $a = 1$ (Normalform) hat $b = 0$ und $c = 0$, was heisst, dass der Wendepunkt im Ursprung liegt. Das konstante Glied $d = 2$ verschiebt jedoch den Wendepunkt und somit auch den ganzen Graphen um zwei Einheiten in die positive y-Richtung. Somit liegt der Wendepunkt bei $W(0; 2)$.

Im folgenden Koordinatensystem sind Graphen mit beliebigen a, b, c und d dargestellt.

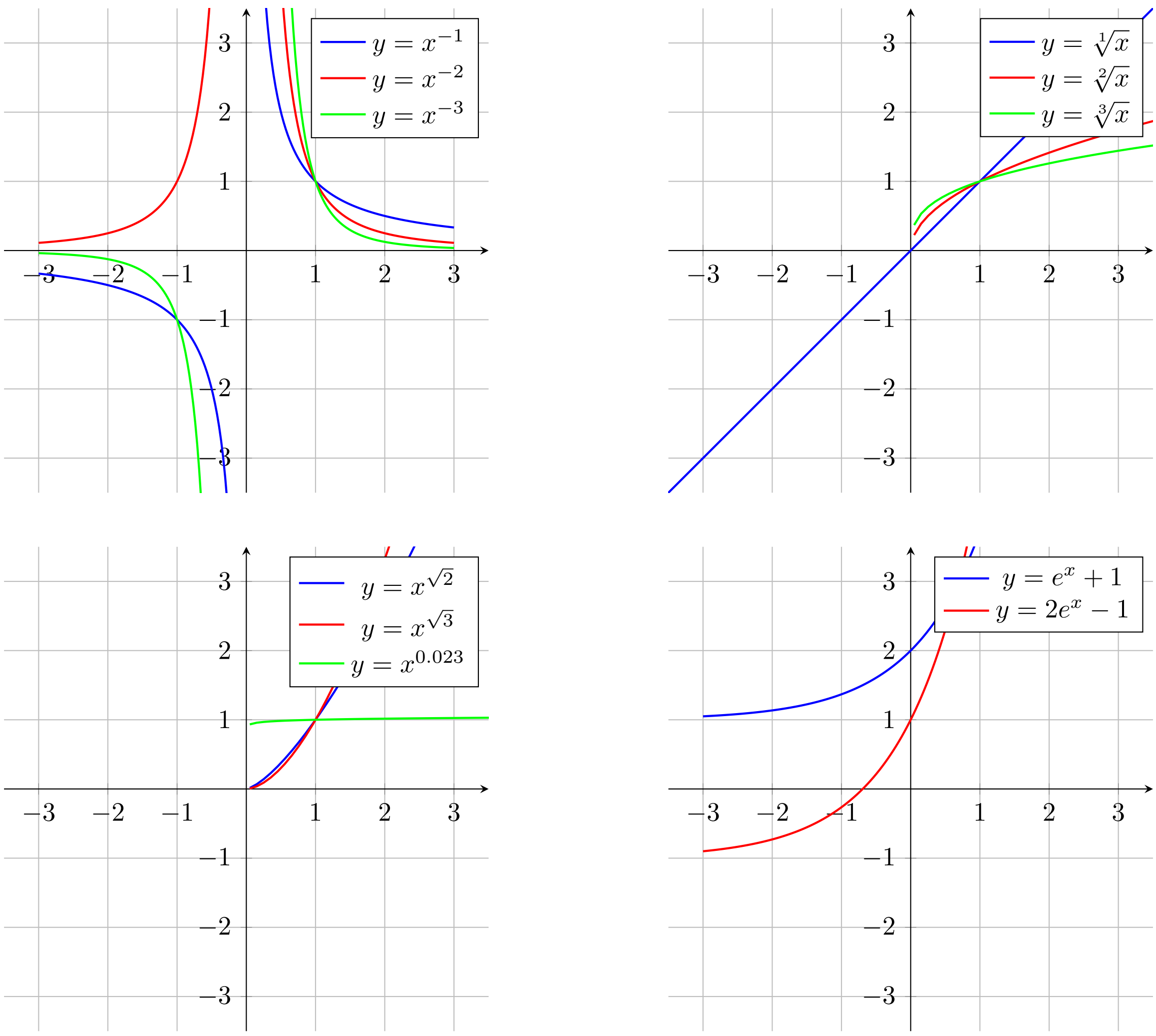


Ergo

Der Parameter a bestimmt das Verhalten der Kurve gegen $\pm\infty$, der Parameter b verändert die Extremalstellen, wobei c die Extremalstellen punktsymmetrisch ändert, was die Funktion auch punktsymmetrisch macht. Der lineare Koeffizient d bestimmt den y-Achsenabschnitt, was die Position der Wendestelle und des Graphen parallel der y-Achse entlang verschiebt.

4.4 Nicht-polynomiale Fälle

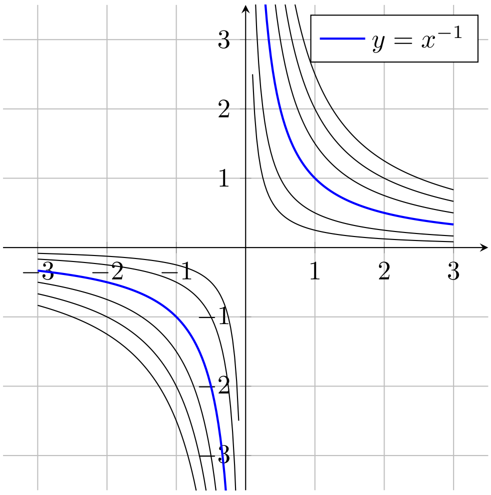
In den vorherigen Unterkapiteln wurden die einzelnen Parameter von Polynomfunktionen untersucht. Nun folgen Potenzfunktionen, die keine Polynomfunktionen sind, da im Exponenten nun negative, rationale und reelle Zahlen stehen.

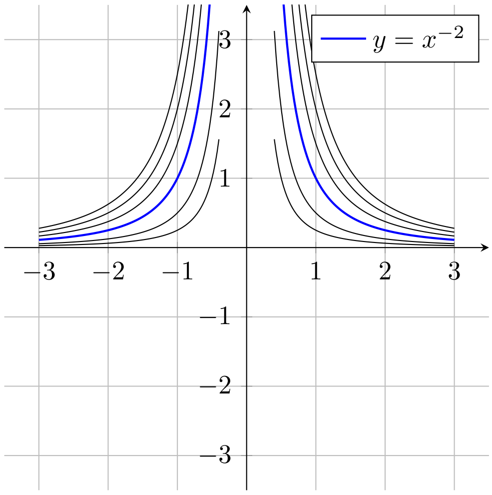


Die Parameter ändern prinzipiell die Form und Verlauf des Graphen. Zusätzlich bestimmen bei diesen Potenzfunktionen weitere Faktoren, wie zum Beispiel den Definitionsbereich mit unter anderem 0, was erstmals gegen Unendlich strebt, was im Gegensatz zu den Polynomfunktionen einzigartig ist.

Im Folgenden werden Potenzfunktionen mit negativem, rationalem und reellem Exponent und zusätzlich Exponentialfunktionen untersucht. Der Einfachheit halber beschränkt sich die Untersuchung jeweils auf den Leitparameter a ein, der den den Verlauf des Graphen ändert, während das konstante Glied weiterhin den Graphen in der y-Richtung verschiebt (Änderung des y-Achsenabschnitts).

4.4.1 Potenzfunktion mit negativem Exponent

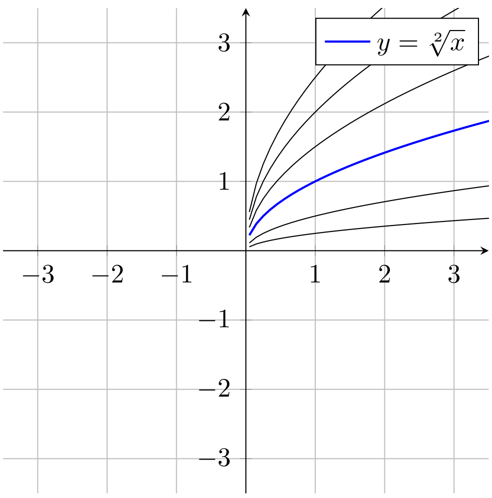


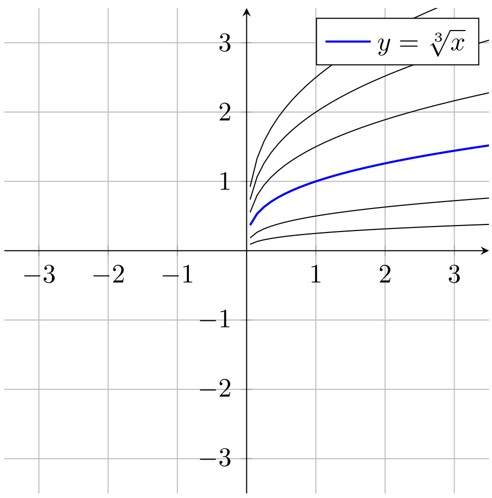


Bei Potenzfunktionen mit negativen Exponenten verläuft die Kurve (bei ungeradem Exponent) durch den ersten und dritten Quadranten, während bei geraden Exponenten der Graph durch den ersten und zweiten Quadranten verläuft.

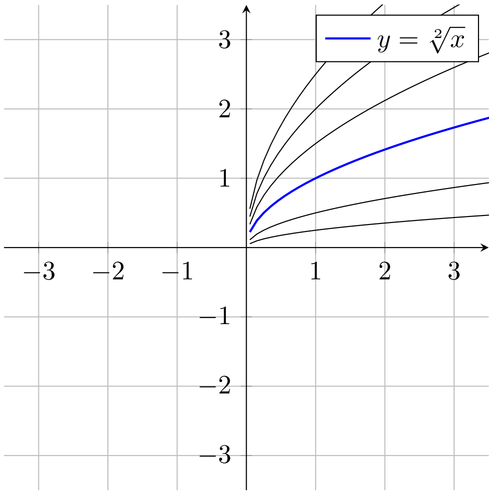
Bei $a < 0$ wird der Graph an der x-Achse gespiegelt (vgl. Polynomfunktion).

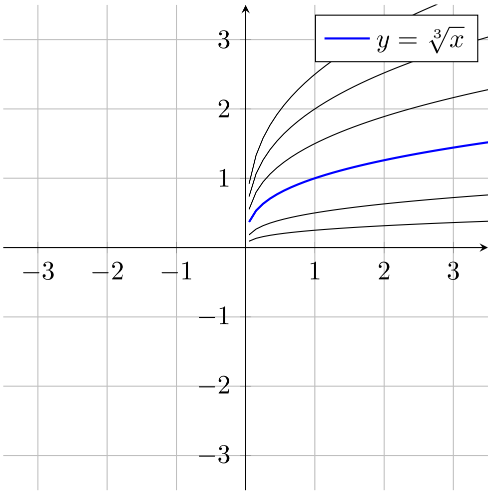
4.4.2 Potenzfunktion mit rationalem Exponent



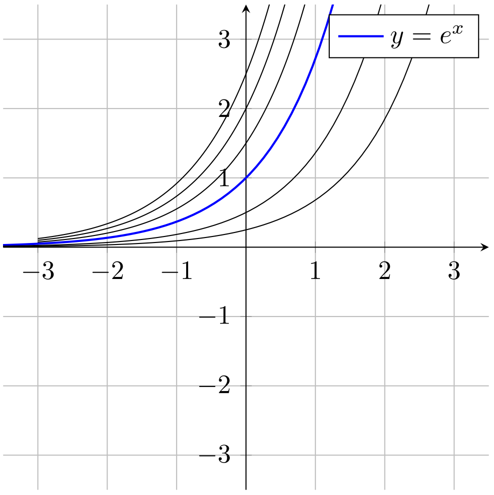


4.4.3 Potenzfunktion mit reellem Exponent





4.4.4 Exponentialfunktionen



5 Schlussfolgerung

Die Untersuchung basiert auf der Fragestellung: „Wie beeinflussen Parameter in Funktionsgleichungen den dazugehörigen Graphen?“. Dafür untersuche ich Funktionen auf das Zusammenwirken von Termen, Koeffizienten und Exponenten.

Die Untersuchung ist gegliedert nach den Exponenten, woraus sich die Funktionstypen linear, quadratisch, kubisch und nicht-polynomial erschliessen, was wiederum die Anzahl Terme beeinflusst und die Parameter wurden in den einzelnen Kapiteln separat untersucht.

Im Folgenden werden die Resultate für die einzelnen Parameter gegliedert nach den Funktionstypen der linearen, quadratischen und kubischen Funktionen dargestellt.

Parameter a

Grad n	**Funktionstyp**	**Bedeutung von** a
1	linear	Steigung
2	quadratisch	Krümmung
3	kubisch	Krümmungsänderung

Tabelle 9: Schlussfolgerung: Parameter a

Der Parameter a ist bei jedem Funktionstyp vorhanden und ist dort auch der Leitkoeffizient, ergo der dominante Koeffizient, der neben dem Exponenten den grössten Einfluss auf den Graphen hat, da es die Steigung beziehungsweise den generellen Verlauf des Graphen beeinflusst, was sogar in nicht-polynomialen Fällen sichtbar ist.

Parameter b

Grad n	**Funktionstyp**	**Bedeutung von** b
1	linear	y-Achsenabschnitt
2	quadratisch	Scheitelpunktverschiebung
3	kubisch	Extremalstellen (einseitig)

Tabelle 10: Schlussfolgerung: Parameter b

Parameter c

Grad n	Funktionstyp	Bedeutung von c
1	linear	-
2	quadratisch	y-Achsenabschnitt
3	kubisch	Extremalstellen (beidseitig)

Tabelle 11: Schlussfolgerung: Parameter c

Parameter d

Grad n	Funktionstyp	Bedeutung von d
1	linear	-
2	quadratisch	-
3	kubisch	y-Achsenabschnitt

Tabelle 12: Schlussfolgerung: Parameter d

Die anderen Parameter (exkl. a) beeinflussen den Graphen in der Nähe des Ursprungs. Zum Beispiel die Parameter b und c bei kubischen Funktionen, die sozusagen „nur noch" die Scheitel- und Extremalpunkte beeinflussen.

5.1 Reflexion

Diese Arbeit legt den Fokus auf die Parameter in den linearen, quadratischen und kubischen Funktionen. Auch wenn in dieser Arbeit einige nicht-polynomiale Fälle genannt werden, wird es nicht gleich tief untersucht wie die polynomialen Fälle (linear, quadratisch, kubisch) untersucht wurden. Nebst den polynomialen und nicht-polynomialen Fällen gibt es noch spezielle Funktionen, wie zum Beispiel Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen etc., die ebenfalls spannend wären zu untersuchen.

Generell beurteile ich diese Arbeit als gut, da ich einerseits subjektiv-gesehen interessante Fragen beantworten kann, aber andererseits finde ich, dass ich nicht immer mathematisch korrekt rechne, weil dies schlussendlich eine Arbeit ist, die dem Bereich der Mathematik zugehört. Zum Beispiel beim Parameter a definiere ich die anderen Parameter so, dass a für mich einfacher berechenbar ist, was sich in erster Linie nicht sehr mathematisch anfühlt. Aber am Schluss kann ich die Formeln nachvollziehen und sie funktioniert auch in dem von mir definierten Bereich.

Diese Arbeit ist innerhalb von einer Woche und einem Tag entstanden (exkl. Korrektur). Ich habe in dieser Woche in jeder freien Minute hier weitergearbeitet. Sogar im Zug, wo die Reise nur 20 Minuten dauerte, packte ich meinen MacBook aus und schrieb weiter. In dieser Arbeit steckt sehr viel Liebe und Leidenschaft, da ich, wie schon im Vorwort geschrieben, Mathematik liebe und mich für die Analysis interessiere. Und ich wusste von Anfang an, dass ich diese Fragestellung beantworten kann, da ich auch wusste, dass es logisch sein wird, wie auch alles andere in der Mathematik. Ich habe eine Fragestellung untersucht, die ich mich auch im Unterricht gefragt habe und nun habe ich die Antwort. Für diese Untersuchung brauchte ich auch nur meinen Kopf und GeoGebra und alles ist logisch. Und das hat mir sehr an dieser Arbeit gefallen.

Trotz der ganzen Liebe und Leidenschaft habe ich auch gegen Ende gemerkt, dass gewisse Dinge ein bisschen repetitiv wurden. Zuerst fasste ich die Grundlagen zusammen, dann folgte die Theorie zu den einzelnen Komponenten, was alles ziemlich modular aufgebaut ist. Aber das eigentlich interessanteste Kapitel, Kapitel 4, wurde langsam ein bisschen langweilig, da ich immer das Gleiche machte. Parameter a, Parameter b, Parameter c etc. Dann noch ein Koordinatensystem mit einer Schlussfolgerung. Auch wenn das der Sinn ist der Arbeit und auch relevant für die Schlussfolgerung ist, fühlte sich die Arbeit repetitiv an. Dann gibt es noch die nicht-polynomialen Fälle, bei denen man merkt, dass ich nicht viel Zeit darin investierte, da dort nur Koordinatensysteme sind und die Graphen bei verschiedenen Parametern a. Schade, aber es war andererseits auch nicht für die Katz, da ich die nicht-polynomialen Fälle kurz in der Schlussfolgerung erwähnen konnte.

Am Ende bewies ich mir selbst, dass die verschiedenen Komponenten in Funktionsgleichungen und die dementsprechenden Änderungen des Graphen einen logischen Zusammenhang haben. Und so beende ich die Arbeit mit einem befriedigenden `q.e.d.`

6 Verzeichnisse

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis