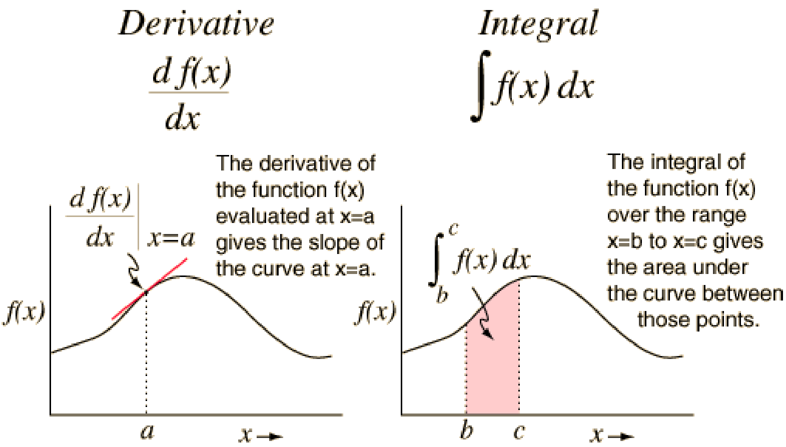
Infinitesimalrechnung



Rosshan Ravinthrarasa

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Formelverzeichnis

Differentialrechnung

Integralrechnung

I Differentialrechnung

Mit der ersten Ableitung $f'(x)$ berechnet man die **Steigung** an einer Stelle des Graphs.
Mit der zweiten Ableitung $f''(x)$ berechnet man die **Krümmung** an einer Stelle des Graphs.

Differenzenquotient / Differenzialquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

1 Die Ableitungsregeln

1. Ableitungsregel (Potenzregel):
$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$$
2. Ableitungsregel (Summen- und Differenzenregel):
$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$
3. Ableitungsregel (Faktorregel):
$$(cf)' = cf'$$
4. Ableitungsregel (Produktregel):
$$(fg)' = f'g + fg'$$
5. Ableitungsregel (Quotientenregel):
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
6. Ableitungsregel (Kettenregel):
$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- Trigonometrische Funktionen
$$(sin(x))' = cos(x)$$
$$(cos(x))' = -sin(x)$$
$$(tan(x))' = 1 + tan^2(x)$$
- Umkehrfunktionen[1]
$$(f^{-1}f(x))' = \frac{1}{f'(x)}$$
- Logarithmusfunktionen
$$(ln(x))' = \frac{1}{x}$$
$$(log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$$
- Exponentialfunktionen
$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x \cdot ln(a)$$

[1] Umkehrfunktionen sind Ursprungsfunktionen, die an der Winkelhalbierenden (schiefe Asymptote) gespiegelt werden.

1.1 Aufgaben

1. Bilde jeweils die erste Ableitung.

   a) $f(x) = 12$ b) $f(x) = -9x$ c) $f(x) = x^{16}$

   d) $f(x) = 3x - 10$ e) $f(x) = x^3 + 11$ f) $f(x) = -3\sqrt[5]{x}$

   g) $f(x) = x^2(1 - 3x^2)$ h) $f(x) = (2x + 1)\sqrt[5]{x^2}$ i) $f(x) = 3x^2\sqrt{x}$

   j) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$ k) $f(x) = (2x^2 + 5x + 3)^2$ l) $f(x) = x^3(4x + \sqrt{x})$

   m) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ n) $f(x) = \frac{1-2x}{3x+4}$ o) $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$

   p) $f(x) = (4 - 3x)^2$ q) $f(x) = (x^3 + 21)^{-4}$ r) $f(x) = \frac{10}{(10-x^{10})^{10}}$

2. Bilde jeweils die erste Ableitung.

   a) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ b) $f(x) = e^{-x} + \frac{x}{e^x}$ c) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{2}$

   d) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ e) $f(x) = 10^{\frac{2x}{x+1}}$ f) $f(x) = \frac{e^x}{x^2-4} + \pi^2$

   g) $f(x) = \log_3(\cos(x))$ h) $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$ i) $f(x) = \sin(\ln(\cos(x)))$

2 Tangente am Graph (Beispiele)

Tangente an einen Kurvenpunkt, geg.: $f(x) = \sqrt{2x+2}$ und $x = 1$

1. Ermittlung der y-Koordinate des Punktes

$$f(1) = \sqrt{2 \cdot 1 + 2} = 2$$

2. Bestimmung der Tangentensteigung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2x+2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+2}} \\ f'(1) &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 + 2}} = \frac{1}{2} = m_t \end{aligned}$$

3. Gleichung der Tangente t

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{1}{2}x + q_t \\ t(1) &= \frac{1}{2} \cdot 1 + q_t = 2 \\ q_t &= \frac{3}{2} \Rightarrow t(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Tangente von einem gegebenen Punkt, geg.: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $P(-1; -2)$

1. Berührungspunkt

$$B(b; f(b)) = B(b; \frac{1}{4}b^2)$$

2. Tangentensteigung auf zwei Arten ansetzen ($f'(x)$ & $\frac{\Delta y}{\Delta x}$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2} \\ m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} = \frac{\frac{1}{4}b^2 - (-2)}{b - (-1)} = \frac{\frac{1}{4}b^2 + 2}{b + 1} \\ \frac{1}{2}b &= \frac{\frac{1}{4}b^2 + 2}{b + 1} \\ b_1 = -4 &\quad b_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} \cdot (-4) = 2 \\ m_1 &= \frac{1}{2} \cdot (2) = 1 \end{aligned}$$

3. Gleichung der Tangente t und s

$$\begin{aligned} t(x) &= -2x + q_t \\ -2 &= -2(-1) + q_t \\ -4 &= q_t \\ t(x) &= \underline{\underline{-2x - 4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(x) &= x + q_s \\ -2 &= -1 + q_s \\ -1 &= q_s \\ s(x) &= \underline{\underline{x - 1}} \end{aligned}$$

Tangente mit gegebener Steigung, geg.: $f(x) = x^3$ und $m = \frac{4}{3}$

1. $f'(x) = m$ gleichsetzten

$$f'(x) = 3x^2 = \frac{4}{3} = m$$
$$x^2 = \frac{4}{9}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

2. Berührungspunkte berechnen

$$B_1\left(-\frac{2}{3}; -\frac{8}{27}\right)$$
$$B_2\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{27}\right)$$

3. Gleichung der Tangenten

$$t(x) = \frac{4}{3}x + q_t$$
$$t\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + q_t = -\frac{8}{27}$$
$$\frac{16}{27} = q_t$$

$$t(x) = \underline{\underline{\frac{4}{3}x - \frac{16}{27}}}$$

$$s(x) = \frac{4}{3}x + q_s$$
$$s\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} + q_s = \frac{8}{27}$$
$$-\frac{16}{27} = q_s$$

$$s(x) = \underline{\underline{\frac{4}{3}x - \frac{16}{27}}}$$

Schnittwinkel, geg.: $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{7}{3}$ und $g(x) = x^2$

1. Ermittlung der Schnittpunkte

$$-\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{7}{3} = x^2$$
$$0 = 7x^2 - 7x - 14$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 2$$
$$S_1(-1; 1) \qquad S_2(2; 4)$$

2. Ermittlung der Steigung in den Schnittpunkten

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{6}$$
$$m_{f_1} = f'(-1) = \frac{3}{2}$$
$$m_{f_2} = f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = 2x$$
$$m_{g_1} = g'(-1) = -2$$
$$m_{g_2} = g'(2) = 4$$

3. Ermittlung der Schnittwinkel mithilfe $\phi = \arctan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$

$$\phi_1 = \arctan\left|\frac{\frac{3}{2} - (-2)}{1 + \frac{3}{2} \cdot (-2)}\right| \approx \underline{\underline{60.26°}}$$
$$\phi_2 = \arctan\left|\frac{\frac{1}{2} - 4}{1 + \frac{1}{2} \cdot 4}\right| \approx \underline{\underline{49.40°}}$$

2.1 Aufgaben

1. Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 4$. Bestimme die Gleichung der Parabeltangente t im angegebenen Punkt P.

   a) $P(3;\ y_P)$ b) $P(-2;\ y_P)$

2. Bestimme die Tangente und die Normale an den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3$ im Punkt $P(3;\ -6)$.

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - 14x + 9$. In welchen Punkten des Graphen G_f ist die Tangente parallel zur Geraden $g : y = 10x - 8$?

4. Berechne den Parameterwert k so, dass die Tangente an den Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = 2x^3 + kx - 3$ an der Stelle $x = 2$ die Steigung 4 hat.

5. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - 3x + 12x^2 - 8x^3$. Bestimme die Gleichung derjenigen Tangente t an den Graphen von f, welche parallel zur Tangente an der Stelle $x = 1$ ist.

6. Bestimme die Gleichungen der horizontalen Tangenten an den Graphen der Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$.

7. Die Sehne s der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 2^x + 3$ verbindet die beiden Kurvenpunkte $P(1;\ y_P)$ und $Q(3;\ y_Q)$. Bestimme die Gleichung der Parabeltangente t, die parallel zu dieser Sehne s verläuft.

8. In welchem Kurvenpunkt K wird der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = \frac{1}{8}x^3$ von seiner Tangente t an der Stelle $x = -2$ geschnitten?

3 Kurvendiskussion

Definitionsmenge	Bei gebrochen-rationalen und Wurzelfunktionen: $\mathbb{D} = \mathbb{R} = \,]-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty[\, = [x_1; x_2]$ Nenner $\neq 0$ | Radikant ≥ 0
Symmetrie	Gerade Funktion / y-Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$ Ungerade Funktion / Ursprungssymmetrie: $f(-x) = -f(x)$
Nullstellen	$f(x) = 0$ (ggf. mit Horner-Schema)
Polstellen	Bei gebrochen-rationalen Funktionen (im Nenner): $f(x) = 0 \mathrel{\widehat{=}}$ vertikale Asymptoten Graph an der Polstelle… …verreisst: mvzw …verreisst nicht: ovzw Vorzeichenwechsel $\widehat{=}$ von links / rechts die Polstelle annähern und beide Vorzeichen vergleichen
Asymptoten	Bei gebrochen-rationalen Funktionen: Gradunterschiede $\widehat{=}$ Art der Asymptote Gerade / Parabel / … Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolynom Asymptote $\widehat{=}$ x-Achse / horizontale Asymptote Grad Zählerpolynom = Grad Nennerpolynom Koeffizienten der Variable des höchsten Grades Ansonsten: Polynomdivision
Asymptoten	Bei Wurzelfunktionen: Quadratische Variabel mit Quadratwurzel $\widehat{=}$ schräge Asymptote Grenzwert unbestimmt $\widehat{=}$ Regel von L'Hôpital $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ Ansonsten: Erraten
Grenzwertanalyse	Bei Exponentialfunktionen: x gegen $\pm\infty$ streben lassen und Asymptote $a(x)$ bzw. Graph zeichnen $\pm\infty$

Tabelle 1: Kurvendiskussion: Kochbuch Teil I

Extremalstellen	$f'(x) = 0 \begin{cases} \text{Tiefpunkt:} & f''(x) > 0 \\ \text{Hochpunkt:} & f''(x) < 0 \end{cases}$
Wendepunkt	$f''(x) = 0$
Terassenpunkt	$f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$
Intervall	Bei trigonometrischen Funktionen: TR-Intervall (bei sin & tan): $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ Optimales Intervall: $[0; 2\pi]$ Sinus: $\phi_{\text{TR}} = \phi_1 > 0$, d.h.: ϕ_1; $\phi_2 = \pi - \phi_1$ $\phi_{\text{TR}} < 0$, d.h.: $\phi_1 = 2\pi + \phi_{\text{TR}}$; $\phi_2 = \pi - \phi_{\text{TR}}$ Cosinus: $\phi_1 = \phi_{\text{TR}}$ $\phi_2 = 2\pi - \phi_1$ Tangens: $\phi_{\text{TR}} = \phi_1 > 0$, d.h.: ϕ_1; $\phi_2 = \pi + \phi_1$ $\phi_{\text{TR}} < 0$, d.h.: $\phi_1 = \pi + \phi_{\text{TR}}$; $\phi_2 = \pi + \phi_1$ Intervall beachten bei der Berechnung von Punkten / Stellen!
Form / Graph	1) in passendes Koordinatensystem Berechnetes richtig eintragen 2) Gezeichnetes richtig (nach eigenen Angaben) interpretieren 3) zur Not auf Form der Grundfunktionen basieren

Tabelle 2: Kurvendiskussion: Kochbuch Teil II

3.1 Aufgaben

1. Diskutiere die Funktion.

   a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$

   b) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

   c) $f(x) = 2 - \frac{5}{2}x^2 + 4x^4$

   d) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 6x$

   e) $f(x) = \frac{1}{6}(x+1)^2(x-2)$

   f) $f(x) = (x-1)(x+2)^2$

   g) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

   h) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

2. Diskutiere die Funktion.

   a) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

   b) $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$

   c) $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{x}$

   d) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

   e) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$

   f) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

   g) $f(x) = xe^{-x}$

   h) $f(x) = e^x(x-1)^2$

   i) $f(x) = x\ln(x)$

   j) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

3.2 Hilfsmittel für die Kurvendiskussion

Differentialzusammenhänge

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
Nullstelle	$= 0$	-	-
Einfache Nullstelle	$= 0$	$\neq 0$	-
Doppelte Nullstelle	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$
Dreifache Nullstelle	$= 0$	$= 0$	$= 0$
Extremalstelle	-	$= 0$	$\neq 0$
Wendestelle	-	-	$= 0$
Terassenpunkt	-	$= 0$	$= 0$

Tabelle 3: Übersicht der Differentialzusammenhänge

Krümmungsverhalten

$f''(x) < 0$	Rechtskrümmung
$f''(x) = 0$	Wendestelle
$f''(x) > 0$	Linkskrümmung

Monotonie

$f(x_2) \geq f(x_1)$	monoton
$f(x_2) > f(x_1)$	streng monoton

4 Rekonstruktion von Funktionen

Basics	
Geht durch Punkt $(x; y)$	$f(x) = y$
Geht durch den Ursprung	$f(0) = 0$
Berührt die x-Achse	$f(x) = 0 \mid f'(x) = 0$
Schneidet die x-Achse	$f(x) = 0$
Schneidet die y-Achse	$f(0) = y$
Punkte / Stellen	
Extremalstelle an der Stelle x	$f'(x) = 0$
Geht durch Extremalstelle $(x; y)$	$f(x) = y \mid f'(x) = 0$
Wendepunkt an der Stelle x	$f''(x) = 0$
Geht durch Wendepunkt $(x; y)$	$f(x) = y \mid f''(x) = 0$
Terassenpunkt an der Stelle x	$f'(x) = 0 \mid f''(x) = 0$
Geht durch Terassenpunkt $(x; y)$	$f(x) = y \mid f'(x) = 0 \mid f''(x) = 0$
Tangente / Normale / Gerade	
Tangente an der Stelle x mit Gleichung $t(x)$	$f(x) = t(x) \mid f'(x) = t'(x)$
Tangente an der Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = m$
Waagrechte Tangente an der Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = 0$
Wendetangente an der Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = m \mid f''(x) = 0$
Normale an Stelle x mit Steigung m	$f'(x) = -\frac{1}{m_n}$
Tangente an der Stelle x, die an Gerade $g(x)$ parallel ist	$f'(x) = g'(x)$
Symmetrie	
Graph hat Ursprungssymmetrie	Term mit Variablen gerader Ordnung streichen
Graph hat y-Achsensymmetrie	Term mit Variablen ungerader Ordnung streichen

Tabelle 4: Kurvendiskussion: Wörterbuch für Funktionsdetektion

4.1 Beispiel

Eine zum Ursprung symmetrische Polynomfunktion 5.Grades geht durch $P(1; 3)$ und berührt die x-Achse bei $x = -2$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

1. Notieren: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \qquad \text{Ursprungssymmetrie}$$
$$f(x) = ax^5 + cx^3 + ex$$
$$f'(x) = 5ax^4 + 3cx^2 + e$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 6cx$$

2. Anzahl Variablen (a, b, c, $d\dots$) $\widehat{=}$ Anzahl Bedingungen (I, II, III, IV...)

$$\begin{aligned} \text{I } f(1) &= 3 & 3 &= a + c + e \\ \text{II } f(-2) &= 0 & 0 &= -32a - 8c - 2e \ = 16a + 4c + e \\ \text{III } f'(-2) &= 0 & 0 &= 80a + 12c + e \end{aligned}$$

3. Gleichungssystem mit Variablen und mit x-Werten eingesetzten Bedingungen

$$\text{I } a = 3 - c - e = 3 - \left(-\frac{8}{3}\right) - \frac{16}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{II } 0 &= 16(3 - c - e) + 4c + e \\ \text{III } 0 &= 80(3 - c - e) + 12c + e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II } -48 &= -12c - 15e = -12c - 15 \cdot \frac{16}{3} \Rightarrow c = -\frac{8}{3} \\ \text{III } -240 &= -68c - 79e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II } 4080 &= 1020c + 1275e \\ \text{III } -3600 &= -1020c - 1185e \end{aligned}$$

$$\text{II } + \text{ III } 90e = 480 \ \Rightarrow e = \frac{16}{3}$$

4.2 Aufgaben

1. Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt $P(2;\ 1)$ einen Terrassenpunkt und schneidet die x-Achse im Punkt $A(4;\ 0)$. Bestimme die Funktionsgleichung.
2. Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades berührt die x-Achse bei $x = 0$. Im Punkt $T(3;\ 9)$ ist ein Terrassenpunkt. Bestimme die Funktionsgleichung.
3. Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat einen Wendepunkt bei $W(1;\ 2)$ und berührt die x-Achse bei $x = 2$. Bestimme die Funktionsgleichung.
4. Bestimme eine Polynomfunktion 3. Grades mit einer Nullstelle bei $x = -2$. Der Punkt $P(0;\ y_P)$ ist ein Wendepunkt und die Wendetangente t hat die Gleichung $x - 3y + 6 = 0$.
5. Wie lautet die Gleichung der Polynomfunktion 5. Grades, deren zum Ursprung punktsymmetrischer Graph in $P(1;\ 8)$ einen Terrassenpunkt hat?
6. Eine zum Ursprung punktsymmetrische Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt $M(3;\ -6)$ ein Minimum. Bestimme die Funktionsgleichung.
7. Der Graph einer zum Nullpunkt symmetrischen Polynomfunktion 5. Grades hat ein Extremum im Punkt $P(3;\ 6)$ und bei $x = 1$ die Steigung $m = \frac{40}{27}$. Bestimme die Funktionsgleichung.
8. Eine zur y-Achse symmetrische Polynomfunktion 4. Grades verläuft durch den Ursprung und hat einen Wendepunkt bei $W(1;\ 2.5)$. Bestimme die Funktionsgleichung.
9. Der Graph einer zum Ursprung symmetrischen Polynomfunktion 5. Grades hat in $M(3;\ 6)$ ein Maximum und schneidet die x-Achse bei $x = \sqrt{15}$. Bestimme die Funktionsgleichung.
10. Eine zur y-Achse symmetrische Polynomfunktion 4. Grades berührt bei $x = 4$ die x-Achse und schneidet die y-Achse bei 10.24. Bestimme die Funktionsgleichung.

5 Optimierungsaufgaben (Beispiel)

Die Firma Hag hat den Auftrag, ein Areal einzuzäunen. Es sollen insgesamt *400m* Zaun so aufgestellt werden, dass die *rechteckige*, eingezäunte Fläche *maximal* wird. Zwischen den Punkten A und B sind bereits $a = 120m$ der *400 Meter* gebaut.
Zeige, dass die Funktionen $A(x) = 9600 - 40x - x^2$ der umzäunten Fläche in Abhängigkeit von x entspricht.

1. Ansatz erstellen (Werte u. Grössen, die fürs Lösen der Aufgabe relevant sind)
2. Skizze anfertigen (am besten zweidimensional)
3. Hauptbedingungen (als Funktion) formulieren

$$\text{HB: } A(a;b;x) = (a+x)b$$

4. Nebenbedingung formulieren

$$\begin{aligned}\text{NB: } U(a;b;x) = 2(a+x) + 2b &= 400\\ 2b &= 400 - 2(a+x)\\ b &= 200 - a - x = 80 - x\end{aligned}$$

5. Zielfunktionen zusammenstellen

$$\begin{aligned}\text{ZF: } Z(a;x) &= (a+x)(80-x)\\ &= 80a + 80x - xa - x^2\\ Z(x) &= 9600 + 80x - 120x - x^2\\ &= 9600 - 40x - x^2\end{aligned}$$

6. Extremwert/e ermitteln

$$\begin{aligned}Z'(x) &= -40 - 2x\\ &= -40 - 2x = 0\\ x &= -20 \ \lightning\end{aligned}$$

7. Randwerte überprüfen (bei Intervallen) $\Rightarrow [0;\ 80]$, weil $l + b = l + b$, d.h. $200m = 200m \Rightarrow 200m - 120m = 80m$

$$\begin{aligned}Z(0) &= 9600m^2\\ Z(80) &= 0 \ \lightning\end{aligned}$$

8. Sinnhaftigkeit logisch kontrollieren + Aufgabe entsprechender Antwort geben

5.1 Aufgaben

1. Ein Rechteck hat den Umfang $u = 60cm$. Über beiden Schmalseiten und einer Längsseite werden Quadrate nach aussen errichtet. Bei welchen Abmessungen des Rechtecks ist die Summe der drei Quadratflächen extremal? Handelt es sich beim Extremum um ein Minimum oder ein Maximum?
2. Aus einem $120cm$ langen Draht soll das Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, bei dem eine Kante dreimal so lang wie eine andere und der Rauminhalt möglichst gross ist. Wie muss man die Länge der Kanten wählen? Wie gross ist das maximale Volumen?

Lösung

Kapitel 1

1. a) $f'(x) = 0$ b) $f'(x) = -9$ c) $f'(x) = 16x^{15}$
   d) $f'(x) = 3$ e) $f'(x) = 3x^2$ f) $f'(x) = -\frac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$
   g) $f'(x) = 2x - 12x^3$ h) $f'(x) = \frac{14x+2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ i) $f'(x) = \frac{15\sqrt{x}\ \cdot x}{2}$
   j) $f'(x) = \frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$ k) $16x^3 + 60x^2 + 74x + 30$ l) $f'(x) = 16x^3 + \frac{7x^2\sqrt{x}}{2}$
   m) $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ n) $f'(x) = -\frac{11}{(3x+4)^2}$ o) $f'(x) = -\frac{6x}{(1+x^2)^2}$
   p) $f'(x) = -24 + 18x$ q) $f'(x) = -\frac{12x^2}{(x^3+21)^5}$ r) $f'(x) = \frac{1000x^9}{(10-x^{10})^{11}}$
2. a) $f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ b) $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$ c) $f'(x) = -\frac{1}{x}$
   d) $f'(x) = -\frac{1}{x^2-x}$ e) $f'(x) = \frac{2\ln(10)\ \cdot 10^{\frac{2x}{x+1}}}{(x+1)^2}$ f) $f'(x) = \frac{x^2e^x-4e^x-2xe^x}{(x^2-4)^2}$
   g) $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{\ln(3)\cos(x)}$ h) $f'(x) = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}$ i) $-\frac{\cos(\ln(\cos(x)))\cdot\sin(x)}{\cos(x)}$

Kapitel 2

1. a) $t(x) = 6x - 5$ b) $t(x) = -4x$
2. $t(x) = 12x - 42$; $n(x) = -\frac{1}{12}x - \frac{23}{4}$
3. $P_1(2;\ -3)$ und $P_2(-2;\ 21)$
4. $k = -20$
5. $t(x) = -3x + 1$
6. $t_1(x) = -6$ und $t_2(x) = 21$
7. $t(x) = 2x - 1$
8. $K(4;\ 8)$

Kapitel 3

1. a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$
   NS: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$
   $T\left(1;\ -\frac{2}{3}\right)$, $H\left(-1;\ \frac{2}{3}\right)$
   $W(0;\ 0)$
   Ursprungssymmetrie

   b) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-1;\ \infty[$
   NS: $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 0$
   $T(-1;\ -1)$
   $W\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{16}{27}\right)$, $T(0;\ 0)$
   -

   c) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [\frac{103}{64};\ \infty[$
   NS: keine
   $H(0;\ 2)$, $T_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{4};\ \frac{103}{64}\right)$
   $W\left(\pm\frac{\sqrt{15}}{12};\ \frac{1027}{576}\right)$
   y-Achsensymmetrie

   d) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$
   NS: $x_1 = 0$
   $H_1\left(\sqrt{2};\ \frac{56}{12}\sqrt{2}\right)$, $H_2\left(-\sqrt{6};\ -\frac{8}{5}\sqrt{6}\right)$
   $T_1\left(-\sqrt{2};\ -\frac{56}{12}\sqrt{2}\right)$, $T_2\left(\sqrt{6};\ \frac{8}{5}\sqrt{6}\right)$
   $W_1(0;\ 0)$, $W_2\left(2;\ \frac{68}{15}\right)$, $W_3\left(-2;\ -\frac{68}{15}\right)$
   Ursprungssymmetrie

   e) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$
   NS: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$
   $H(-1;\ 0)$, $T\left(1;\ -\frac{2}{3}\right)$
   $W\left(0;\ -\frac{1}{3}\right)$

   f) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$
   NS: $x_1 = 1$; $x_2 = -2$
   $H(-2;\ 0)$, $T(0;\ -4)$
   $W(-1;\ -2)$

   g) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}$
   NS: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$
   $H\left(\frac{1}{3};\ \frac{4}{27}\right)$, $T(1;\ 0)$
   $W\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{27}\right)$

   h) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}_0^+$
   NS: $x_1 = 0$
   $T(0;\ 0)$
   $W_1\left(1;\ \frac{7}{8}\right)$, $W_2(2;\ 2)$

2.

a) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-1;\ 1]$
NS: $x_1 = 0$
$H\,(1;\ 1)$, $T\,(-1;\ -1)$
$W_1\,(0;\ 0)$, $W_{2,3}\left(\pm\sqrt{3};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$a(x) = 0$
Ursprungssymmetrie

b) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f =]0;\ 4[$
NS: keine
$H\,(0;\ 4)$
$W_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3};\ 3\right)$
$a(x) = 0$
y-Achsensymmetrie

c) $D_f = \mathbb{R}_0^+$, $W_f = \mathbb{R}_0^+$
NS: $x_1 \ = 0$

d) $D_f = \mathbb{R}_0^+$, $W_f = \mathbb{R}_0^+$
NS: $x_1 \ = 0$
$W\left(\frac{1}{4};\ \frac{9}{16}\right)$

e) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-2.24;\ 2.24]$
NS: $x_k \ = 2.03 + k\pi$
$H_k\,(0.46 + 2k\pi;\ 2.24)$,
$T_k\,(3.61 + 2k\pi;\ -2.24)$
$W_k\,(2.03 + k\pi;\ 0)$

f) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$
NS: $x_k \ = k \cdot \frac{\pi}{2}$
$H_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{1}{2}\right)$, $T_k\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi;\ -\frac{1}{2}\right)$
$W_k\left(k\ \cdot \frac{\pi}{2};\ 0\right)$
Ursprungssymmetrie

g) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f =]-\infty;\ \frac{1}{e}]$
NS: $x_1 \ = 0$
$H\left(1;\ \frac{1}{e}\right)$
$W\left(2;\ \frac{2}{e^2}\right)$
$a(x) = 0$

h) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}_0^+$
NS: $x_1 \ = 1$
$H\left(-1;\ \frac{4}{e}\right)$, $T\,(1;\ 0)$
$W_1\left(-\sqrt{2} - 1;\ 1.04\right)$, $W_2\left(\sqrt{2} - 1;\ 0.52\right)$
$a(x) = 0$

i) $D_f = \mathbb{R}^+$, $W_f = \left[-\frac{1}{e};\ \infty\right]$
NS: $x_1 \ = 1$
$T\left(\frac{1}{e};\ -\frac{1}{e}\right)$

j) $D_f = \mathbb{R}^+$, $W_f =]-\infty;\ \frac{1}{e}]$
NS: $x_1 \ = 1$
$H\left(e;\ \frac{1}{e}\right)$
$W\left(\sqrt{e^3};\ \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$
$a(x) = 0$
PS: $x = 0$

Kapitel 4

1. $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$
2. $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 6x^2$
3. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
4. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2$
5. $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$
6. $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x$
7. $f(x) = -\frac{1}{27}x^5 + \frac{5}{9}x^3$
8. $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2$
9. $f(x) = -\frac{1}{27}x^5 + \frac{5}{9}x^3$
10. $0.04x^4 - 1.28x^2 + 10.24$

Kapitel 5

1. Länge $l = 20cm$, Breite $b = 10cm \Rightarrow$ Minimum
2. $5cm$, $10cm$, $15cm$; $V_{\max} = 750cm^3$

II Integralrechnung

Mit dem Integral $\int_a^b f(x)dx$ berechnet man die **Fläche** zwischen dem Graph und der x-Achse.

Das Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) \Leftrightarrow f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx$$

6 Stammfunktionen und Integrationsregeln

$f'(x)$	$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
0	$c,\ c \in \mathbb{R}$	cx
c	cx	$\frac{c}{2}x^2$
$r \cdot x^{r-1}$	$x^r,\ r \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$
$-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
e^x	e^x	e^x
$c \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$
$\ln(a) \cdot a^x$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$
$\frac{1}{\ln\lvert a\rvert \cdot x}$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\lvert x\rvert - 1) = x(\log_a\lvert x\rvert - \log_a(e))$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Tabelle 5: Liste der wichtigsten Stammfunktionen

6.1 Aufgaben

1. Bilde jeweils die Stammfunktion.

   a) $\int 4x \, \mathrm{d}x$

   b) $\int x^3 \, \mathrm{d}x$

   c) $\int x \, \mathrm{d}x$

   d) $\int -\frac{3}{4}x^8 \, \mathrm{d}x$

   e) $\int 1001 \, \mathrm{d}x$

   f) $\int 0 \, \mathrm{d}x$

   g) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

   h) $\int 7\sqrt[4]{x^3} \, \mathrm{d}x$

   i) $\int \sin(x) + \cos(x) \, \mathrm{d}x$

   j) $\int 3\sin(x) - 2\cos(x) \, \mathrm{d}x$

   k) $\int 2e^x \, \mathrm{d}x$

   l) $\int 2^x \, \mathrm{d}x$

   m) $\int \ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \, \mathrm{d}x$

   n) $\int \frac{3}{2}\log_4(x) \, \mathrm{d}x$

7 Typen von Integralen

7.1 Unbestimmte Integrale

Ist F eine Stammfunktion von f, so heisst die Menge aller Stammfunktionen das **unbestimmte** Integral von f:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$\int$ heisst *Integralzeichen*, $f(x)$ ist der *Integrand*, dx das *Differential* und C heisst *Integrationskonstante*.

Weitere Regeln:

$$\begin{aligned}
\text{Partielle Integration:} \quad & \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
\text{Faktorregel:} \quad & \int c \cdot f(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\mathrm{d}x \\
\text{Summenregel:} \quad & \int (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

7.2 Bestimmte Integrale und der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Weitere Regeln:

$$\begin{aligned}
\text{Integrationsgrenzen:} \quad & \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ a \leq x \leq b \\
\text{Vertauschen der Integrationsgrenzen:} \quad & \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\
\text{Aufteilen der Integrationsgrenzen:} \quad & \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \\
\text{Sonderfall:} \quad & \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

Fläche zwischen Kurve und x-Achse

$$A = \left| \int_a^{x_S} f(x)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_S}^b f(x)\mathrm{d}x \right|$$

$x_S \mathrel{\widehat{=}}$ die einzige Nullstelle von f in $]a;b[$

Fläche zwischen zwei Kurven

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x \right|$$

$x_{1,2,3} \mathrel{\widehat{=}}$ Schnittstellen der beiden Graphen

7.3 Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty}\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

Wenn der Grenzwert der Fläche einen endlichen Wert hat (bspw. 2), ist die Fläche *konvergent* und wenn der Grenzwert $\pm\infty$ ist, ist die Fläche *divergent*.

7.4 Aufgaben

1. Bilde jeweils das unbestimmte Integral.

   a) $\int 1 \ \mathrm{d}x$ b) $\int 6x^3 \ \mathrm{d}x$

   c) $\int (3x^2 - 1) \ \mathrm{d}x$ d) $\int (3x+4)(x^2-1) \ \mathrm{d}x$

   e) $\int \frac{1}{x^2} \ \mathrm{d}x$ f) $\int \frac{2}{x^3} \ \mathrm{d}x$

   g) $\int \left(\frac{6}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right) \ \mathrm{d}x$ h) $\int \frac{x^3-x+5}{x} \ \mathrm{d}x$

   i) $\int \sqrt{x}(x+5) \ \mathrm{d}x$ j) $\int \sqrt{x} \ \mathrm{d}x$

   k) $\int \cos(x) \ \mathrm{d}x$ l) $\int (1+\tan^2(x)) \ \mathrm{d}x$

   m) $\int (e^x + \sin(x)) \ \mathrm{d}x$ n) $\int 5^x \ \mathrm{d}x$

   o) $\int \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} \ \mathrm{d}x$ p) $\int \pi \cdot \ln(x) \ \mathrm{d}x$

   q) $\int (x+\cos(x)) \ \mathrm{d}x$ r) $\int x^{1-2} \ \mathrm{d}x$

2. Bilde jeweils das bestimmte Integral mit dem Hauptsatz.

   a) $\int_0^2 4x^3 \ \mathrm{d}x$ b) $\int_{-1}^2 (x^2+3) \ \mathrm{d}x$

   c) $\int_2^4 \frac{1}{x^2} \ \mathrm{d}x$ d) $\int_1^2 \left(2x - \frac{2}{x}\right) \ \mathrm{d}x$

   e) $\int_1^4 3\sqrt{x} \ \mathrm{d}x$ f) $\int_1^4 \sqrt{\frac{3}{x^3}} \ \mathrm{d}x$

   g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \ \mathrm{d}x$ h) $\int_0^\pi (4\sin(x) - 3\cos(x)) \ \mathrm{d}x$

   i) $\int_{-1}^1 e^{x+1} \ \mathrm{d}x$ j) $\int_0^1 \pi \cdot e^x \ \mathrm{d}x$

   k) $\int_{-1}^5 |x| \ \mathrm{d}x$ l) $\int_0^2 |x^2-1| \ \mathrm{d}x$

3. Berechne die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse.

   a) $f(x) = -2x^2 + 18$ b) $f(x) = x(x^2-1)$

   c) $f(x) = (x-1)^2 - 1$ d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

   e) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ f) $f(x) = x + x^{-1} - 4$

4. Berechne die Fläche zwischen zwei Kurven.

   a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = 8 - x^2$

   b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $g(x) = 16 - \frac{1}{2}x^2$

   c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ und $g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$

   d) $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ und $g(x) = \sqrt{2x}$

5. Berechne das uneigentliche Integral, sofern es existiert.

   a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$

   b) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

   c) $\int_1^\infty \frac{2x+4}{x^3}\,\mathrm{d}x$

   d) $\int_2^\infty \frac{x^3-5}{x^6}\,\mathrm{d}x$

   e) $\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

   f) $\int_2^\infty \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$

   g) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$

   h) $\int_3^\infty \frac{5+x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

   i) $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$

   j) $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

   k) $\int_{-\infty}^{1} e^{2x+1}\,\mathrm{d}x$

   l) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

8 Volumen von Rotationskörpern

Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x$$

Rotation um die y-Achse

$$V = \pi \int_c^d f^{-1}(x)\ \mathrm{d}x$$

Ringförmige Rotationskörper (um die x-Achse)

$$V = \pi \int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\ \mathrm{d}x$$

Bedingung: $f(x) > g(x)$

Bei Rotation um die y-Achse wird die jeweilige Umkehrfunktion quadriert.

8.1 Aufgaben

1. Der Graph, der mit der x-Achse eine endliche Fläche begrenzt, wird um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

   a) $f(x) = -x^2 + 4$

   b) $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$

   c) $f(x) = x^2(x + 2)$

   d) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

   e) $f(x) = x\sqrt{4 - x}$

   f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

9 Substitutionsmethode

Einfache Substitution

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$$

Mehrfache Substitution

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u = F(g(x))$$

$$g(x) = u \text{ d.h.: } g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

Partielle Integration

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

9.1 Aufgaben

1. Bilde das unbestimmte Integral mit der einfachen Substitutionmethode.

   a) $f(x) = (2x+3)^5$
   b) $f(x) = 7(3x-1)^6$
   c) $f(x) = (12-x)^3$
   d) $f(x) = \left(3 - \frac{1}{2}x\right)^3$
   e) $f(x) = 12(3x-9)^3$
   f) $f(x) = (3 - x\sqrt{2})^2$
   g) $f(x) = (4x+3)^{-2}$
   h) $f(x) = 2(1-x)^{-3}$
   i) $f(x) = \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^{-4}$
   j) $f(x) = \frac{4}{(2x-1)^3}$
   k) $f(x) = \frac{2}{\left(2-\frac{1}{3}x\right)^5}$
   l) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

2. Bilde das unbestimmte Integral mit der einfachen Substitutionmethode.

   a) $f(x) = (3x-5)^6$
   b) $f(x) = \frac{5}{3x-4}$
   c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
   d) $f(x) = \sqrt[4]{ax+b}$
   e) $f(x) = x(x^2+1)^3$
   f) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$
   g) $f(x) = \frac{4x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$
   h) $f(x) = \frac{3x^3}{1+x^4}$
   i) $f(x) = 2xe^{x^2}$
   j) $f(x) = axe^{-bx^2}$
   k) $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$
   l) $f(x) = \frac{a}{x-b}e^{\ln(x-b)}$

3. Bilde das unbestimmte Integral mit der partiellen Integration.

   a) $f(x) = xe^x$
   b) $f(x) = (x-1)e^x$
   c) $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x}$
   d) $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x}$
   e) $f(x) = xe^{2x}$
   f) $f(x) = (2x+2)e^{2x}$

Lösung

Kapitel 6

1. a) $F(x) = 2x^2 + c$ b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$
   c) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$ d) $F(x) = -\frac{1}{12}x^9 + c$
   e) $F(x) = 1001x + c$ f) $F(x) = c$
   g) $F(x) = \sqrt{x} + c$ h) $F(x) = 4x\sqrt[4]{x^3}$
   i) $F(x) = -\cos(x) + \sin(x) + c$ j) $F(x) = -3\cos(x) - 2\sin(x) + c$
   k) $F(x) = 2e^x + c$ l) $F(x) = \frac{2^x}{\ln(2)} + c$
   m) $F(x) = \frac{3x \cdot \ln(x)}{2} - \frac{3}{2}x + x$ n) $F(x) = \frac{3\log_4(x) \cdot x}{2} - \frac{3x}{4\ln(2)} + c$

Kapitel 7

1. a) $F(x) = x + c$ b) $F(x) = \frac{3}{2}x^4 + c$
   c) $F(x) = x^3 - x + c$ d) $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 4x + c$
   e) $F(x) = -\frac{1}{x} + c$ f) $F(x) = -\frac{1}{x^2} + c$
   g) $F(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} + c$ h) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 5\ln|x| + c$
   i) $F(x) = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{10x\sqrt{x}}{3} + c$ j) $F(x) = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c$
   k) $F(x) = \sin(x) + c$ l) $F(x) = \tan(x) + c$
   m) $F(x) = e^x - \cos(x) + c$ n) $F(x) = \frac{5^x}{\ln(5)}$
   o) $F(x) = 2\sqrt{x} + c$ p) $F(x) = x\pi \cdot \ln(x) - x\pi + c$
   q) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sin(x) + c$ r) $F(x) = \ln|x| + c$

2. a) 16 b) 12
   c) $\frac{1}{4}$ d) $3 - 2\ln(2)$
   e) 14 f) $\sqrt{3}$
   g) 1 h) 8
   i) $e^2 - 1$ j) $e\pi - \pi$
   k) 13 l) 2

3. a) $A = 72$ b) $A = \frac{1}{2}$
   c) $A = \frac{4}{3}$ d) $A = \frac{128}{15}$
   e) $A = \frac{784}{15}$ f) $A = 4\sqrt{3} - \ln(7 + 4\sqrt{3})$

4. a) $A = \frac{64}{3}$ b) $A = \frac{256}{3}$
   c) $A = 9$ d) $A = \frac{5}{3}$

5. a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$
   c) 4 d) $\frac{3}{32}$
   e) 2 f) ∞ div
   g) $-\frac{1}{2}$ h) $\frac{11}{18}$

i) 1 j) ∞ div

k) $\frac{1}{2}e^3$ l) 2

Kapitel 8

1. a) $V = 107.23$ b) $V = 203.58$

   c) $V = 3.83$ d) $V = 2.55$

   e) $V = 67.02$ f) $V = 4.19$

Kapitel 9

1. a) $F(x) = \frac{1}{12}(2x+3)^6 + c$ b) $F(x) = \frac{1}{3}(3x-1)^7 + c$

   c) $F(x) = -\frac{1}{4}(12-x)^4 + c$ d) $F(x) = -\frac{1}{2}(3-\frac{1}{2}x)^4 + c$

   e) $F(x) = (3x-9)^4 + c$ f) $F(x) = -\frac{\sqrt{2}}{6}(3-x\sqrt{2})^3 + c$

   g) $F(x) = -\frac{1}{4}(4x+3)^{-1} + c$ h) $F(x) = (1-x)^{-2} + c$

   i) $F(x) = \frac{2}{3}\left(4-\frac{1}{2}x\right)^{-3} + c$ j) $F(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2} + c$

   k) $F(x) = \frac{3}{2(2-\frac{1}{3}x)^4} + c$ l) $F(x) = \sqrt{2x+1} + c$

2. a) $F(x) = \frac{1}{21}(3x-5)^7$ b) $F(x) = \frac{5}{3}\ln|3x-4|$

   c) $F(x) = 2(x+2)^{\frac{1}{2}}$ d) $F(x) = \frac{4}{5a}(ax+b)^{\frac{5}{7}}$

   e) $F(x) = \frac{1}{8}(x^2+1)^4$ f) $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

   g) $F(x) = -3(1-x^2)^{\frac{2}{3}}$ h) $F(x) = \frac{3}{4}\ln(1-x^4)$

   i) $F(x) = e^{x^2}$ j) $F(x) = -\frac{a}{2b}e^{-bx^2}$

   k) $F(x) = \ln|\ln(x)|$ l) $F(x) = ax$

3. a) $F(x) = e^x(x-1)$ b) $F(x) = 2e^x(x-1)$

   c) $F(x) = e^x(x-2)$ d) $F(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\right)$

   e) $F(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)$ f) $F(x) = e^{2x}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

III Analogien

Die Analogie zwischen Differenzieren und Integrieren besteht darin, dass sie mathematisch das Umgekehrte zueinander sind: Differenzieren bestimmt die Steigung einer Funktion, Integrieren berechnet die Fläche unter ihr.

10 Differentialrechnung vs. Integralrechnung

	Differentialrechnung	**Integralrechnung**
Zweck	Steigung lokale Änderungsrate	Fläche Summation der Ändeurng
Potenzregel	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$\int x^r \mathrm{d}x = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
Summen- / Differenzenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$\int (f \pm g)\mathrm{d}x = \int f \ \mathrm{d}x \pm \int g \ \mathrm{d}x$
Faktorregel	$(cf)' = c \cdot f'$	$\int cf \ \mathrm{d}x = c \int f \ \mathrm{d}x$
Produkt	$(fg)' = f'g + fg'$ *Produktregel*	$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$ *Partielle Integration*
Verkettung	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ *Kettenregel*	$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u = F(g(x))$ *Mehrfache Substitution*

Tabelle 6: Analogien zwischen der Differential- und Integralrechnung