Estadística
Autor: Triola, M. F.
Pearson, México, 2006, págs. 320-331, 338-345, 349-354
ISBN: 978-970-26-1287-2

Datos de catalogación bibliográfica

TRIOLA, MARIO F.

Estadística. Décima edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-970-26-1287-2
Área: Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm   Páginas: 904

ISBN 9780321460929

Edición en español

Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Juan José García Guzmán

Edición en inglés

Publisher: Greg Tobin
Executive Editor: Deirdre Lynch
Executive Project Manager: Christine O'Brien
Assistant Editor: Sara Oliver
Managing Editor: Ron Hampton
Senior Production Supervisor: Peggy McMahon
Senior Designer: Barbara T. Atkinson
Photo Researcher: Beth Anderson
Digital Assets Manager: Marianne Groth
Production Coordinator, Supplements: Emily Portwood
Media Producer: Cecilia Fleming
Software Development: Ted Hartman and Janet Wann
Marketing Manager: Phyllis Hubbard
Marketing Assistant: Celena Carr
Senior Author Support/Technology Specialist: Joe Vetere
Senior Prepress Supervisor: Caroline Fell
Rights and Permissions Advisor: Dana Weightman
Senior Manufacturing Buyer: Evelyn Beaton
Text and Cover Design: Leslie Haimes
Production Services, Composition and Illustration: Nesbitt Graphics

Cover Photo: Getty Images/Jean Louis Batt

DÉCIMA EDICIÓN, 2009

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

ISBN 10: 970-26-1287-X
ISBN 13: 978-970-26-1287-2

PEARSON Educación®

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

7-1 Panorama general

En este capítulo comenzaremos a trabajar con el verdadero núcleo de la estadística inferencial al utilizar datos muestrales para hacer inferencias acerca de poblaciones. En específico, usaremos datos muestrales para hacer estimaciones de parámetros de población. Por ejemplo, el problema del capítulo se refiere a terapeutas de contacto que identificaron correctamente el campo de energía humano únicamente en el 44% de 280 ensayos. Con base en el estadístico muestral de 44%, estimaremos el porcentaje de aciertos para toda la población de los terapeutas de contacto.

Las dos aplicaciones principales de la estadística inferencial implican el uso de datos muestrales para **1.** estimar el valor de un parámetro de una población y **2.** probar alguna aseveración (o hipótesis) acerca de una población. En este capítulo presentamos métodos para estimar valores de estos importantes parámetros de población: proporciones, medias y varianzas. También presentamos métodos para determinar los tamaños de muestra necesarios para estimar estos parámetros. En el capítulo 8 estudiaremos los métodos básicos para probar aseveraciones (o hipótesis) que se hacen acerca de un parámetro de una población.

7-2 Estimación de la proporción de una población

Concepto clave En esta sección presentamos métodos importantes donde se utiliza una proporción muestral para estimar el valor de una proporción poblacional con un *intervalo de confianza*. También presentamos métodos para calcular el tamaño muestral necesario para estimar una proporción poblacional. En esta sección se explican conceptos generales que se utilizan en las siguientes secciones y en los capítulos posteriores, por lo que es muy importante su comprensión.

Una estrategia de estudio: El tiempo dedicado a esta sección estará bien invertido, ya que presentamos el concepto de intervalo de confianza, un concepto general que se aplicará en las siguientes secciones del capítulo. Sugerimos que primero lea esta sección con el único objetivo de tratar de comprender qué son los intervalos de confianza, para qué sirven y por qué son indispensables. Segundo, trate de desarrollar la habilidad de construir estimaciones del intervalo de confianza de las proporciones de una población. Tercero, aprenda a interpretar correctamente un intervalo de confianza. Cuarto, lea la sección una vez más y trate de comprender la teoría subyacente. Usted tendrá mucho más éxito si comprende lo que está haciendo, en vez de aplicar a ciegas y de manera mecánica los pasos para obtener una respuesta que podría o no tener sentido.

En esta sección sólo consideraremos casos en los que es posible utilizar la distribución normal para aproximar la distribución muestral de proporciones de muestra. Los siguientes requisitos se aplican a los métodos de esta sección.

Requisitos

1. La muestra es aleatoria simple.
2. Las condiciones para la distribución binomial se satisfacen. Esto es, hay un número fijo de ensayos, los ensayos son independientes, hay dos categorías de resultados y las probabilidades permanecen constantes para cada ensayo. (Véase la sección 5-3).
3. Existen al menos 5 éxitos y al menos 5 fracasos. (Cuando p y q se desconocen, estimamos sus valores utilizando la proporción muestral, de manera que este

requisito es una forma de verificar que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$ se cumplan para que la distribución normal sea una aproximación adecuada para la distribución binomial. Además, existen procedimientos para tratar situaciones en las que la distribución normal no es una aproximación adecuada. Véase el ejercicio 51).

Notación para proporciones

p = proporción de la *población*

$\hat{p} = \dfrac{x}{n}$ = proporción muestral de x *éxitos* en una muestra de tamaño n

$\hat{q} = 1 - \hat{p}$ = proporción muestral de *fracasos* en una muestra de tamaño n

Proporción, probabilidad y porcentaje Esta sección se enfoca en la proporción poblacional p, aunque también podemos trabajar con probabilidades o porcentajes. Cuando trabaje con un porcentaje, expréselo en forma decimal. (Por ejemplo, exprese el 44% como 0.44, de manera que $\hat{p} = 0.44$). Si desea estimar una proporción poblacional con un solo valor, el mejor estimado es $\hat{p}$. Puesto que $\hat{p}$ consiste en un solo valor, se denomina estimado puntual.

Definición

Un **estimado puntual** es un valor individual (o punto) que se usa para aproximar un parámetro de población.

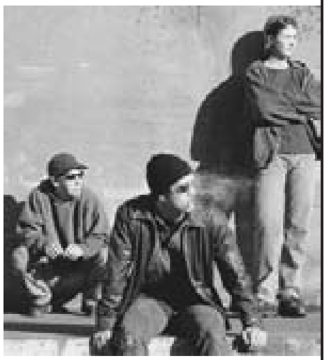
La proporción muestral $\hat{p}$ es el mejor estimado puntual en la proporción poblacional p.

Usamos $\hat{p}$ como el estimado puntual de p, ya que no está sesgado y es el más consistente de los estimadores que podrían usarse. No está sesgado en el sentido de que la distribución de las proporciones muestrales tiende a concentrarse alrededor del valor de p; esto es, las proporciones muestrales $\hat{p}$ no tienden sistemáticamente a subestimar ni a sobreestimar p. (Véase la sección 6-4). La proporción muestral $\hat{p}$ es el estimador más consistente en el sentido de que la desviación estándar de las proporciones muestrales tiende a ser menor que la desviación estándar de cualquier otro estimador sin sesgo.

PROBLEMA 7 DEL CAPÍTULO

EJEMPLO Tasa de éxito de la terapia de contacto En el problema del capítulo señalamos que, en 280 ensayos con terapeutas de contacto, la mano correcta fue elegida en 123 ensayos, de manera que la tasa de éxito es $\hat{p} = 123/280 = 0.44$. Utilice estos resultados de prueba para calcular el mejor estimado puntual de la proporción de todas las selecciones correctas que resultarían si se pusiera a prueba a todos los terapeutas de contacto.

SOLUCIÓN Puesto que la proporción muestral es el mejor estimado puntual de la proporción poblacional, concluimos que el mejor estimado puntual de p es 0.44. (Utilizando el sentido común, podríamos examinar el diseño del experimento y concluir que la verdadera proporción poblacional es 0.5, pero si sólo utilizamos los resultados muestrales encontramos que 0.44 es el mejor estimado de la proporción poblacional p).



Muestra pequeña

El Children's Defense Fund se constituyó con el fin de promover el bienestar de los niños. El grupo publicó *Children Out of School in America*, donde se informó que, en una zona, el 37.5% de los jóvenes de 16 y 17 años ya no asistían a la escuela. Esta estadística recibió mucha cobertura por parte de los medios de comunicación masiva, pero se basaba en una muestra de sólo 16 jóvenes. Otra estadística se basó en una muestra de sólo tres estudiantes. (Véase "Firsthand Report: How Flawed Statistics Can Make an Ugly Picture Look Even Worse", *American School Board Journal*, vol. 162).

¿Por qué necesitamos intervalos de confianza?

En el ejemplo anterior vimos que 0.44 era el *mejor* estimado puntual de la proporción poblacional p, pero no tenemos indicación precisa de qué tan *bueno* es nuestro mejor estimado. Como el estimado puntual tiene el grave defecto de no revelar nada acerca de qué tan bueno es, los especialistas en estadística han diseñado ingeniosamente otro tipo de estimado: el *intervalo de confianza* o *estimado del intervalo*, que consiste en un rango (o un intervalo) de valores en vez de un solo valor.

Definición

Un **intervalo de confianza** (o **estimado del intervalo**) es un rango (o un intervalo) de valores que se usa para estimar el valor real de un parámetro de población. El intervalo de confianza suele abreviarse como IC.

Un intervalo de confianza se asocia con un nivel de confianza, como 0.95 (o 95%). El nivel de confianza nos da la tasa de éxitos del procedimiento que se utiliza para construir el intervalo de confianza. El nivel de confianza suele expresarse como la probabilidad o área $1 - \alpha$ (alfa griega minúscula). El valor de α es el complemento del *nivel de confianza*. Para un nivel de confianza de 0.95 (o 95%), $\alpha = 0.05$. Para un nivel de confianza de 0.99 (o 99%), $\alpha = 0.01$.

Definición

El **nivel de confianza** es la probabilidad $1 - \alpha$ (a menudo expresada como el valor de porcentaje equivalente), que es la proporción de veces que el intervalo de confianza realmente contiene el parámetro de población, suponiendo que el proceso de estimación se repite un gran número de veces. El nivel de confianza también se llama **grado de confianza** o **coeficiente de confianza**.

Las opciones más comunes para el nivel de confianza son 90% (con $\alpha = 0.10$), 95% (con $\alpha = 0.05$) y 99% (con $\alpha = 0.01$). La opción del 95% es la más común puesto que provee un buen equilibrio entre precisión (reflejada en el ancho del intervalo de confianza) y confiabilidad (expresada por el nivel de confianza).

A continuación se presenta un ejemplo de un intervalo de confianza basado en los datos muestrales de 280 ensayos de terapeutas de contacto, donde en el 44% de los ensayos se identifica correctamente la mano elegida:

El intervalo de confianza estimado de 0.95 (o 95%) de la proporción poblacional p es $0.381 < p < 0.497$.

Interpretación de un intervalo de confianza

Debemos ser cuidadosos para interpretar los intervalos de confianza correctamente. Existe una interpretación correcta y muchas diferentes y creativas interpretaciones erróneas del intervalo de confianza $0.381 < p < 0.497$.

Correcta: "Tenemos una confianza del 95% de que el intervalo de 0.381 a 0.497 realmente contiene el valor verdadero de p". Esto significa que si seleccionamos muchas muestras diferentes de tamaño 280 y construimos los intervalos de confianza correspondientes, el 95% de ellos incluirían realmente el valor de la proporción poblacional p. (Note que en esta interpretación correcta, el nivel del 95% se refiere a la tasa de éxitos del *proceso*, utilizada para estimar la proporción, y no a la proporción de la población en sí).

Errónea: "Existe un 95% de probabilidades de que el valor real de p esté entre 0.381 y 0.497".

Para cualquier punto específico en el tiempo, una población tiene un valor fijo y constante de p, un intervalo de confianza construido a partir de una muestra que incluye o no a p. De manera similar, si un bebé acaba de nacer y el médico está por anunciar su género, es incorrecto decir que existe una probabilidad de 0.5 de que sea una niña; el bebé es o no una niña, y no hay una probabilidad implicada. Una proporción poblacional p es como el bebé que acaba de nacer: el valor de p es fijo, de manera que los límites del intervalo de confianza contienen o no a p. Por eso es incorrecto decir que existe un 95% de probabilidades de que p se localice entre valores tales como 0.381 y 0.497.

Un nivel de confianza del 95% nos dice que el *proceso* que estamos usando, a la larga, dará por resultado límites del intervalo de confianza que contienen la proporción real de la población el 95% del tiempo. Suponga que la proporción real de todas las identificaciones correctas de la mano por parte de los terapeutas de contacto es $p = 0.5$. Entonces, el intervalo de confianza obtenido de los datos muestrales no incluiría la proporción poblacional, ya que la proporción poblacional real de 0.5 no se encuentra entre 0.381 y 0.497. Esto se ilustra en la figura 7-1, la cual señala los intervalos de confianza típicos que resultan de 20 muestras diferentes. Con un 95% de confianza, esperamos que 19 de las 20 muestras den por resultado intervalos de confianza que contienen el valor real de p; la figura 7-1 ilustra esto con 19 de los intervalos de confianza que contienen p, mientras un intervalo de confianza no contiene p.

Uso de intervalos de confianza para hacer comparaciones *Advertencia: Los intervalos de confianza pueden usarse de manera informal para comparar conjuntos de datos diferentes, pero el traslape de intervalos de confianza no debe usarse para elaborar conclusiones formales y finales acerca de la igualdad de las proporciones.* (Véase "On Judging the Significance of Differences by Examining the Overlap Between Confidence Intervals" de Schenker y Gentleman, *American Statistician*, vol. 55, núm. 3).

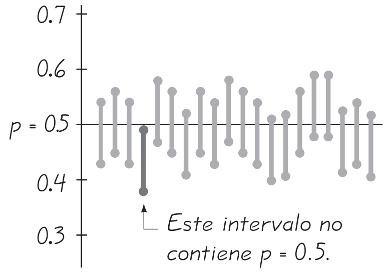


Figura 7-1

Intervalos de confianza de 20 muestras diferentes

Valores críticos

Los métodos de esta sección y muchos de los demás métodos estadísticos que se encuentran en los capítulos siguientes incluyen el uso de una puntuación z estándar, que permite distinguir entre estadísticos muestrales que tienen probabilidades de ocurrir y aquellos que son improbables. Una puntuación z de este tipo se llama *valor crítico* (definido abajo). Los valores críticos se basan en las siguientes observaciones.

1. Sabemos, desde la sección 6-6, que en ciertas condiciones, la distribución muestral de las proporciones muestrales puede aproximarse por una distribución normal, como en la figura 7-2.
2. Las proporciones muestrales tienen una probabilidad relativamente pequeña (denotada por α) de caer en una de las colas sombreadas de gris oscuro de la figura 7-2.
3. Denotando el área de cada cola sombreada como $\alpha/2$, vemos que existe una probabilidad total de α de que una proporción muestral caiga en cualquiera de las dos colas sombreadas de gris oscuro.
4. Por la regla de los complementos (capítulo 4), existe una probabilidad de $1 - \alpha$ de que una proporción muestral caiga dentro de la región interior sombreada de gris claro de la figura 7-2.
5. La puntuación z que separa la región de la cola derecha generalmente se denota por $z_{\alpha/2}$ y se conoce como *valor crítico*, puesto que está en la frontera que separa las proporciones muestrales que tienen probabilidad de ocurrir de aquellas que no tienen probabilidad de ocurrir.

Estas observaciones se formalizan con la notación y definición siguientes.

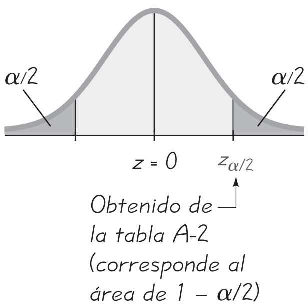


Figura 7-2

Valor crítico $z_{\alpha/2}$ en la distribución normal estándar

Notación para el valor crítico

El valor crítico $z_{\alpha/2}$ es el valor z positivo que está en la frontera vertical que separa una área de $\alpha/2$ en la cola derecha de la distribución normal estándar. (El valor de $-z_{\alpha/2}$ está en la frontera vertical para el área de $\alpha/2$ en la cola izquierda). El subíndice $\alpha/2$ es simplemente un recordatorio de que la puntuación z separa una área de $\alpha/2$ en la cola derecha de la distribución normal estándar.

Definición

Un **valor crítico** es el número en la línea limítrofe que separa estadísticos muestrales que tienen mayor probabilidad de ocurrir de aquellos que no tienen probabilidad de ocurrir. El número $z_{\alpha/2}$ es un valor crítico, una puntuación z con la propiedad de que separa una área de $\alpha/2$ en la cola derecha de la distribución normal estándar (véase la figura 7-2).

EJEMPLO **Cálculo de un valor crítico** Calcule el valor crítico $z_{\alpha/2}$ que corresponde a un nivel de confianza del 95%.

SOLUCIÓN *Advertencia*: Para calcular el valor crítico z de un nivel de confianza del 95% *no* busque 0.95 en el cuerpo de la tabla A-2. Un nivel de confianza del 95% corresponde a $\alpha = 0.05$. Observe la figura 7-3, donde mostramos que el área en cada una de las colas sombreadas de gris oscuro es $\alpha/2 = 0.025$. Calculamos $z_{\alpha/2} = 1.96$ señalando que toda el área a su izquierda debe ser $1 - 0.025$, o 0.975. Podemos remitirnos a la tabla A-2 y

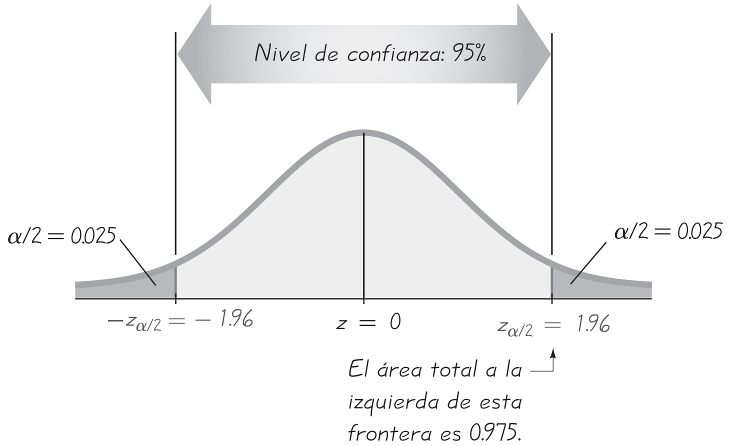


Figura 7-3 **Cálculo de $z_{\alpha}/2$ para un nivel de confianza del 95%**

encontrar que el área de 0.9750 (que se encuentra en el *cuerpo* de la tabla) corresponde exactamente a una puntuación z de 1.96. Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es, por consiguiente, $z_{\alpha/2} = 1.96$. Para calcular la puntuación z crítica para un nivel de confianza del 95%, busque 0.9750 en el cuerpo la tabla A-2, no 0.95.

El ejemplo anterior mostró que un nivel de confianza del 95% da por resultado un valor crítico de $z_{\alpha/2} = 1.96$. Éste es el valor crítico más común y se lista junto con otros dos valores comunes en la siguiente tabla.

Nivel de confianza	α	valor crítico, $z_{\alpha/2}$
90%	0.10	1.645
95%	0.05	1.96
99%	0.01	2.575

Margen de error

Cuando reunimos un conjunto de datos muestrales, como los datos sobre la terapia de contacto de Emily Rosa en el problema del capítulo (donde el 44% de los 280 ensayos correspondieron a identificaciones correctas), podemos calcular la proporción muestral $\hat{p}$ y esta proporción muestral suele ser diferente de la proporción poblacional p. La diferencia entre la proporción muestral y la proporción de la población se considera un error. Ahora definimos el *margen de error E* como sigue.

Definición

Cuando se utilizan los datos de una muestra aleatoria simple para estimar una proporción poblacional p, el **margen de error**, denotado por $\boldsymbol{E}$, es la diferencia máxima probable (con probabilidad $1 - \alpha$) entre la proporción muestral $\hat{p}$ observada y el valor real de la proporción poblacional p. El margen de error E también se llama *error máximo del estimado* y se calcula multiplicando el valor crítico por la desviación estándar de las proporciones muestrales, como se indica en la fórmula 7-1.

Fórmula 7-1 $$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$ margen de error para proporciones

Falsificación de datos

El glosario del censo del 2000 define la *falsificación de datos (curbstoning)* como "la práctica por medio de la cual un censor fabrica un cuestionario para una vivienda, sin visitarla". La falsificación de datos ocurre cuando un censor se sienta en la acera (o en cualquier otro lado) y llena las formas inventando las respuestas. Puesto que estos datos no son reales, afectan la validez del censo. En varios estudios se ha investigado la magnitud de la falsificación; uno de ellos reveló que aproximadamente el 4% de los censores realizan esta práctica al menos en una ocasión.

Los métodos de la sección 7-2 suponen que los datos muestrales se reunieron de una forma apropiada, así que si gran parte de los datos se obtuvieron a través de falsificaciones, entonces los estimados de los intervalos de confianza resultantes podrían tener muchos errores.

Dada la forma en que se define el margen de error E, existe una probabilidad de α de que una proporción muestral sea errónea por más de E.

Intervalo de confianza (o estimado de intervalo) para la proporción poblacional *p*

$$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E \qquad \text{donde} \qquad E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

El intervalo de confianza suele expresarse en los siguientes formatos equivalentes:

$$\hat{p} \pm E$$

o

$$(\hat{p} - E, \hat{p} + E)$$

En el capítulo 4, cuando las probabilidades se expresaban en forma decimal, redondeábamos a tres dígitos significativos. Aquí utilizamos esa misma regla de redondeo.

Regla de redondeo para estimados de intervalo de confianza de *p*

Redondee los límites del intervalo de confianza para p a tres dígitos significativos.

Con base en los resultados anteriores, podemos resumir el procedimiento para construir un estimado del intervalo de confianza de una proporción poblacional p como sigue.

Procedimiento para construir un intervalo de confianza para *p*

1. Verifique que los supuestos requeridos se cumplen (la muestra es aleatoria simple, las condiciones para la distribución binomial se satisfacen y existen al menos 5 éxitos y al menos 5 fracasos).
2. Remítase a la tabla A-2 y encuentre el valor crítico $z_{\alpha/2}$ que corresponde al nivel de confianza deseado. (Por ejemplo, si el nivel de confianza es del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1.96$).
3. Evalúe el margen de error $E = z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$.
4. Utilizando el valor del margen de error E calculado y el valor de la proporción muestral $\hat{p}$, calcule los valores de $\hat{p} - E$ y $\hat{p} + E$. Sustituya esos valores en el formato general para el intervalo de confianza:

$$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E$$

o

$$\hat{p} \pm E$$

o

$$(\hat{p} - E, \hat{p} + E)$$

5. Redondee los límites del intervalo de confianza resultantes a tres dígitos significativos.

PROBLEMA 7 DEL CAPÍTULO

EJEMPLO Tasa de éxito de la terapia de contacto En el problema del capítulo señalamos que los terapeutas de contacto participaron en 280 pruebas de su capacidad para percibir el campo de energía humana. En cada ensayo se pidió a un terapeuta que identificara la mano que estaba debajo de la mano de Emily Rosa. De los 280 ensayos, los terapeutas acertaron en 123 ocasiones. Los resultados muestrales son $n = 280$ y $\hat{p} = 123/280 = 0.439286$. (En vez de utilizar 0.44 para la proporción muestral, empleamos decimales adicionales para que los cálculos posteriores no se vean afectados por un error de redondeo).

a. Calcule el margen de error E que corresponde a un nivel de confianza del 95%.
b. Calcule el estimado del intervalo de confianza del 95% de la proporción poblacional p.
c. Con base en los resultados, ¿qué podemos concluir acerca de la eficacia de la terapia de contacto?

SOLUCIÓN

REQUISITO ✔ Primero debemos verificar que se satisfacen los requisitos necesarios. (Antes, en esta sección indicamos los requisitos para utilizar una distribución normal como aproximación de una distribución binomial). Dado el diseño del experimento, es razonable suponer que la muestra es aleatoria simple. Las condiciones para un experimento binomial se satisfacen, ya que existe un número fijo de ensayos (280), los ensayos son independientes (porque el resultado de un ensayo no afecta la probabilidad del resultado de otro ensayo), hay dos categorías de resultados (correcto e incorrecto) y la probabilidad de acertar permanece constante. Asimismo, con 123 identificaciones correctas en 280 ensayos, se obtienen 157 identificaciones incorrectas, de manera que el número de éxitos (123) y el número de fracasos (157) son de al menos 5. Completamos con éxito la verificación de los requisitos. ✔

a. El margen de error se calcula usando la fórmula 7-1 con $z_{\alpha/2} = 1.96$ (como se calculó en el ejemplo anterior), $\hat{p} = 0.439286$, $\hat{q} = 1 - 0.439286 = 0.560714$ y $n = 280$.

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{(0.439286)(0.560714)}{280}} = 0.058133$$

b. Construir el intervalo de confianza es bastante fácil ahora que tenemos los valores de $\hat{p}$ y E. Simplemente sustituimos esos valores para obtener este resultado:

$$\hat{p} - E < p < \hat{p} + E$$
$$0.439286 - 0.058133 < p < 0.439286 + 0.058133$$
$$0.381 < p < 0.497 \quad \text{(redondeado a tres dígitos significativos)}$$

Este mismo resultado podría expresarse en el formato de 0.439 ± 0.058 o (0.381, 0.497). Si queremos el intervalo de confianza del 95% para el *porcentaje* real de la población, podemos expresar el resultado como $38.1\% < p < 49.7\%$. Este intervalo de confianza suele reportarse con una afirmación como ésta: "Se estima que la tasa de éxito es del 44%, con un margen de error de más o menos 6 puntos porcentuales". Tal enunciado es una expresión verbal de ese formato para el intervalo de confianza: $44\% \pm 6\%$. El nivel de confianza debe reportarse también, aunque rara vez se hace en los medios de comunicación. En general, los medios de comunicación usan un nivel de confianza del 95%, pero omiten cualquier referencia a él.

continúa

c. Para interpretar los resultados, observe que el hecho de tratar de adivinar habría producido alrededor de un 50% de identificaciones correctas. Si los terapeutas de contacto realmente tienen la habilidad de percibir el campo de energía humano, su tasa de éxito debería ser mayor al 50% por una cantidad significativa. Sin embargo, los terapeutas de contacto tuvieron una tasa de éxito más baja de lo que se esperaría con el lanzamiento de una moneda. He aquí una aseveración del artículo publicado en el *Journal of the American Medical Association:* "El fracaso (de los terapeutas de contacto) para demostrar la afirmación fundamental de la TC (terapia de contacto) es evidencia irrefutable de que las aseveraciones de la TC (terapia de contacto) no tienen fundamento y de que su uso profesional no está justificado". Con base en los resultados del proyecto de Emily Rosa para la feria de ciencias, parece que la terapia de contacto no es efectiva.

Fundamentos del margen de error Puesto que la distribución de proporciones muestrales es aproximadamente normal (ya que ambas condiciones $np \geq 5$ y $nq \geq 5$ se satisfacen), podemos utilizar los resultados de la sección 6-6 para concluir que μ y σ están dadas por $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$. Estos dos parámetros pertenecen a n ensayos, pero los convertimos a una base por ensayo dividiendo entre n como sigue:

$$\text{Medida de proporciones muestrales: } \mu = \frac{np}{n} = p$$

$$\text{Desviación estándar de proporciones muestrales: } \sigma = \frac{\sqrt{npq}}{n} = \sqrt{\frac{npq}{n^2}} = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

El primer resultado tal vez parezca trivial, puesto que ya estipulamos que la proporción real de la población es p. El segundo resultado no es trivial y resulta útil para describir el margen de error E, pero reemplazamos el producto pq por $\hat{p}\hat{q}$ porque no conocemos todavía el valor de p (ya que es el valor que tratamos de estimar). La fórmula 7-1 para el margen de error refleja el hecho de que $\hat{p}$ tiene una probabilidad de $1 - \alpha$ de estar dentro de $z_{\alpha/2}\sqrt{pq/n}$ de p. El intervalo de confianza para p, como se dio previamente, refleja el hecho de que existe una probabilidad de $1 - \alpha$ de que $\hat{p}$ difiera de p menos que el margen de error $E = z_{\alpha/2}\sqrt{pq/n}$.

Determinación del tamaño muestral

Suponga que queremos reunir datos muestrales con el objetivo de estimar alguna proporción de la población. ¿Cómo sabemos *cuántos* elementos muestrales deben obtenerse? Si tomamos la expresión para el margen de error E (fórmula 7-1), y luego despejamos n, obtenemos la fórmula 7-2, la cual requiere que $\hat{p}$ sea un estimado de la proporción poblacional p; pero si no se conoce un estimado como éste (como suele ser el caso), reemplazamos $\hat{p}$ por 0.5 y reemplazamos $\hat{q}$ por 0.5, con el resultado que se da en la fórmula 7-3.

Tamaño muestral para la estimación de la proporción *p*

Cuando se conoce un estimado $\hat{p}$: **Fórmula 7-2** $$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2\hat{p}\hat{q}}{E^2}$$

Cuando se desconoce el estimado $\hat{p}$: **Fórmula 7-3** $$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 \cdot 0.25}{E^2}$$

Regla de redondeo para determinar el tamaño muestral

Para asegurar que el tamaño muestral requerido sea al menos tan grande como debe ser, si el tamaño muestral calculado no es un número entero, redondee al siguiente número entero *mayor*.

Utilice la fórmula 7-2 cuando se puedan hacer estimaciones razonables de $\hat{p}$ usando muestras previas, un estudio piloto o el conocimiento experto de alguna persona. Cuando esto no sea posible, utilice la fórmula 7-3. Observe que las fórmulas 7-2 y 7-3 no incluyen el tamaño de la población N, de manera que el tamaño de la población es irrelevante. (*Excepción:* Cuando el muestreo es sin reemplazo y procede de una población finita relativamente pequeña. Véase el ejercicio 49).

EJEMPLO Tamaño muestral para una encuesta por correo electrónico Las formas en las que nos comunicamos se han visto afectadas drásticamente por el uso de máquinas contestadoras telefónicas, máquinas de fax, correo de voz y correo electrónico. Suponga que un sociólogo quiere determinar el porcentaje actual de hogares en Estados Unidos que utilizan el correo electrónico. ¿Cuántos hogares deben encuestarse para tener una confianza del 95% de que el porcentaje muestral es erróneo por no más de 4 puntos porcentuales?

a. Utilice el siguiente resultado de un estudio pionero: en 1997, el 16.9% de los hogares estadounidenses usaban correo electrónico (según datos de *The World Almanac and Book of Facts*).

b. Suponga que no tenemos información previa que sugiera un posible valor de $\hat{p}$.

SOLUCIÓN

a. El estudio previo sugiere que $\hat{p} = 0.169$, entonces $\hat{q} = 0.831$ (calculado de $\hat{q} = 1 - 0.169$). Con un nivel de confianza del 95%, tenemos $a = 0.05$, entonces $z_{\alpha/2} = 1.96$. Además, el margen de error es $E = 0.04$ (el equivalente decimal de "cuatro puntos porcentuales"). Puesto que tenemos un valor estimado de $\hat{p}$, usamos la fórmula 7-2 como sigue:

$$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 \hat{p}\hat{q}}{E^2} = \frac{[1.96]^2(0.169)(0.831)}{0.04^2}$$

$$= 337.194 = 338 \qquad \text{(redondeado)}$$

Debemos encuestar al menos 338 hogares seleccionados al azar.

b. Como en el inciso *a*), nuevamente utilizamos $z_{\alpha/2} = 1.96$ y $E = 0.04$, pero sin conocimiento previo de $\hat{p}$ (o $\hat{q}$), usamos la fórmula 7-3 como sigue.

$$n = \frac{[z_{\alpha/2}]^2 \cdot 0.25}{E^2} = \frac{[1.96]^2 \cdot 0.25}{0.04^2}$$

$$= 600.25 = 601 \qquad \text{(redondeado)}$$

INTERPRETACIÓN Para tener una confianza del 95% de que nuestro porcentaje muestral está dentro de cuatro puntos porcentuales del porcentaje verdadero para todos los hogares, debemos seleccionar al azar y encuestar 601 hogares. Comparando este resultado con el tamaño muestral de 338 calculado en el inciso *a*), podemos ver que si no tenemos conocimiento de un estudio previo, se requiere

continúa

una muestra más grande para obtener los mismos resultados que cuando se puede estimar el valor de $\hat{p}$. Pero ahora recurramos al sentido común: sabemos que el uso del correo electrónico está creciendo tan rápidamente que el estimado de 1997 es muy antiguo para ser de utilidad. En la actualidad, mucho más del 16.9% de los hogares estadounidenses utilizan correo electrónico. Siendo realistas, necesitamos una muestra mayor que 338 hogares. Suponiendo que en realidad no conocemos la tasa actual de uso de correo electrónico, deberíamos seleccionar al azar 601 hogares. Con 601 hogares, tendremos una confianza del 95% de que estamos dentro de cuatro puntos porcentuales del porcentaje verdadero de hogares que usan correo electrónico.

Errores comunes Cuando calcule el tamaño muestral, trate de evitar los siguientes dos errores comunes: **1.** No cometa el error de utilizar $E = 4$ como el margen de error correspondiente a "cuatro puntos porcentuales". **2.** Asegúrese de sustituir la puntuación z crítica por $z_{\alpha/2}$. Por ejemplo, si usted trabaja con una confianza del 95%, asegúrese de reemplazar $z_{\alpha/2}$ por 1.96. No cometa el error de reemplazar $z_{\alpha/2}$ por 0.95 o 0.05.

Tamaño de la población Muchas personas creen de manera errónea que el tamaño de la muestra debe ser algún porcentaje de la población; sin embargo, la fórmula 7-3 indica que el tamaño de la población es irrelevante. (En realidad, el tamaño de la población se utiliza algunas veces, pero sólo en casos en los que hacemos un muestreo sin reemplazo de una población relativamente pequeña. Véase el ejercicio 49). Las encuestas suelen utilizar tamaños muestrales en el rango de 1000 a 2000 y, aunque encuestas como éstas quizá implican un porcentaje muy pequeño de la población total, logran generar resultados bastante buenos.

Cálculo del estimado puntual y de *E* desde un intervalo de confianza Algunas veces queremos comprender mejor un intervalo de confianza que podría haberse obtenido de un artículo de una revista, o que podría haberse generado por medio de programas de cómputo o una calculadora. Si ya conocemos los límites del intervalo de confianza, la proporción muestral $\hat{p}$ y el margen de error E se calculan como sigue:

Estimado puntual de *p:*

$$\hat{p} = \frac{(\text{límite de confianza superior}) + (\text{límite de confianza inferior})}{2}$$

Margen de error:

$$E = \frac{(\text{límite de confianza superior}) - (\text{límite de confianza inferior})}{2}$$

EJEMPLO El artículo "High-Dose Nicotine Patch Therapy" de Dale, Hurt *et al.* (*Journal of the American Medical Association*, vol. 274, núm. 17) incluye esta afirmación: "De los 71 sujetos, el 70% se abstuvo de fumar durante 8 semanas (intervalo de confianza [IC] del 95%, del 58% al 81%)". Utilice esta afirmación para calcular el estimado puntual $\hat{p}$ y el margen de error E.

SOLUCIÓN De la afirmación dada, vemos que el intervalo de confianza del 95% es $0.58 < p < 0.81$. El estimado puntual $\hat{p}$ es el valor medio entre los límites superior e inferior del intervalo de confianza, de manera que obtenemos

$$\hat{p} = \frac{(\text{límite de confianza superior}) + (\text{límite de confianza inferior})}{2}$$

$$= \frac{0.81 + 0.58}{2} = 0.695$$

El margen de error se calcula como sigue:

$$E = \frac{(\text{límite de confianza superior}) - (\text{límite de confianza inferior})}{2}$$

$$= \frac{0.81 - 0.58}{2} = 0.115$$

Intervalos de confianza con el mejor desempeño

Nota importante: Los ejercicios de esta sección se basan en el intervalo de confianza que describimos antes y no en los intervalos de confianza que se describen a continuación.

El intervalo de confianza descrito en esta sección tiene el formato que generalmente se presenta en los cursos de introducción a la estadística, pero no tiene un desempeño tan bueno como otros intervalos de confianza. El *intervalo de confianza Wald ajustado* se desempeña mejor en el sentido de que su probabilidad de contener la verdadera proporción de población p es más cercana al nivel de confianza que se utiliza. El intervalo de confianza Wald ajustado emplea el siguiente procedimiento sencillo: se suma 2 al número de éxitos x, se suma 2 al número de fracasos (de manera que el número de ensayos n aumenta en 4), y luego se calcula el intervalo de confianza de la misma forma descrita en esta sección. Por ejemplo, si utilizamos los métodos de esta sección con $x = 10$ y $n = 20$, obtenemos el siguiente intervalo de confianza del 95%: $0.281 < p < 0.719$. Con $x = 10$ y $n = 20$ aplicamos el intervalo de confianza Wald ajustado permitiendo que $x = 12$ y $n = 24$ para obtener el siguiente intervalo de confianza: $0.300 < p < 0.700$. La probabilidad de que el intervalo de confianza $0.300 < p < 0.700$ incluya a p se acerca más al 95% que la probabilidad de que $0.281 < p < 0.719$ incluya a p.

Otro intervalo de confianza que tiene mejor desempeño que el descrito en esta sección y que el intervalo de confianza Wald ajustado es el *intervalo de confianza de la puntuación de Wilson*. Este intervalo posee el límite inferior del intervalo de confianza que se indica abajo, y el límite superior del intervalo de confianza se expresa al cambiar el signo menos por un signo más. (Es fácil ver por qué este enfoque no se utiliza mucho en los cursos de introducción a la estadística). Utilizando $x = 10$ y $n = 20$, el intervalo de confianza de la puntuación de Wilson es $0.299 < p < 0.701$.

$$\frac{\hat{p} + \dfrac{z_{\alpha/2}^2}{2n} - z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q} + \dfrac{z_{\alpha/2}^2}{4n}}{n}}}{1 + \dfrac{z_{\alpha/2}^2}{n}}$$

Para revisar una explicación sobre estos y otros intervalos de confianza para p, véase “Approximation is Better than ‘Exact’ for Interval Estimation of Binomial Proportions”, de Agresti y Coull, *American Statistician*, vol. 52, núm. 2.

7-3 Estimación de una media de población: σ conocida

Concepto clave En la sección 7-2 presentamos el estimado puntual y el intervalo de confianza como herramientas para el uso de una proporción muestral con el fin de estimar una proporción poblacional; esta sección presenta métodos para utilizar datos muestrales y calcular un estimado puntual y un estimado del intervalo de confianza de una media poblacional. Un requisito fundamental en esta sección es que, además de tener datos muestrales, también conozcamos σ, la desviación estándar de la población. También presentamos un método para calcular el tamaño muestral que se necesitaría para estimar una media poblacional.

Requisitos

1. La muestra es aleatoria simple. (Todas las muestras del mismo tamaño tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas).
2. El valor de la desviación estándar poblacional σ es conocido.
3. Cualquiera o ambas de estas condiciones se satisfacen: la población está normalmente distribuida o $n > 30$.

Conocimiento de σ Los requisitos anteriores incluyen el conocimiento de la desviación estándar poblacional σ, pero la siguiente sección presenta métodos para estimar una media poblacional sin conocer el valor de σ.

Requisito de normalidad Los requisitos incluyen la propiedad de que la población se distribuya normalmente o que $n > 30$. Si $n \leq 30$, la población no necesita tener una distribución exactamente normal, sino aproximadamente normal. Podemos considerar que el requisito de normalidad se satisface si no hay valores extremos y si un histograma de los datos muestrales no se aleja mucho de la forma de campana. (Se dice que los métodos de esta sección son *robustos*, es decir, no se ven muy afectados si los datos se alejan de la normalidad, siempre y cuando no se alejen demasiado).

Requisitos del tamaño muestral Esta sección utiliza la distribución normal como la distribución de medias muestrales. Si la población original no está distribuida normalmente, entonces decimos que las medias de muestras con tamaño $n > 30$ tienen una distribución que puede aproximarse a una distribución normal. La condición de que el tamaño muestral sea $n > 30$ se usa por lo regular como directriz, pero no es posible identificar un tamaño muestral mínimo específico que sea suficiente para todos los casos. El tamaño muestral mínimo realmente depende de cuánto se desvía la distribución de la población de una distribución normal. Tamaños muestrales de 15 a 30 son adecuados si la población parece tener una distribución que no es lejana a la normal, pero algunas otras poblaciones tienen distribuciones que son extremadamente diferentes de la normal y pueden necesitarse tamaños muestrales de 50, 100 o más. Usaremos el criterio simplificado de $n > 30$ como justificación para el tratamiento de la distribución de medias muestrales como una distribución normal.

En la sección 7-2 vimos que la proporción muestral $\hat{p}$ es el mejor estimado puntual de la proporción poblacional p. Por razones similares, la media muestral $\overline{x}$ es el mejor estimado puntual de la media poblacional μ.

La media muestral $\bar{x}$ es el mejor estimado puntual de la media de la población.

Por lo regular la media muestral $\bar{x}$ brinda el mejor estimado, por las siguientes dos razones:

1. Para todas las poblaciones, la media muestral $\bar{x}$ es un **estimador sin sesgo** de la media poblacional μ, lo que significa que la distribución de medias muestrales tiende a concentrarse alrededor del valor de la media poblacional μ. [Es decir, las medias muestrales no tienden sistemáticamente a sobreestimar el valor de μ, ni tienden sistemáticamente a subestimar el valor de μ, sino que tienden a coincidir con este valor (como se ilustra en la sección 6-4).
2. Para muchas poblaciones, la distribución de las medias muestrales $\bar{x}$ tiende a ser más consistente (con *menos variación*) que la distribución de otros estadísticos muestrales.

EJEMPLO **Pulso cardiaco de mujeres** El pulso cardiaco de las personas es sumamente importante. Sin él, ¿dónde estaríamos? El conjunto de datos 1 del apéndice B incluye pulsos cardiacos (en latidos por minuto) de mujeres seleccionadas al azar; los estadísticos son los siguientes: $n = 40$, $\bar{x} = 76.3$ y $s = 12.5$. Utilice esta muestra para calcular el mejor estimado puntual de la media poblacional μ de los pulsos cardiacos de todas las mujeres.

SOLUCIÓN Para los datos muestrales, $\bar{x} = 76.3$. Como la media muestral $\bar{x}$ es el mejor estimado puntual de la media poblacional μ, concluimos que el mejor estimado puntual de los pulsos cardiacos de todas las mujeres es 76.3.

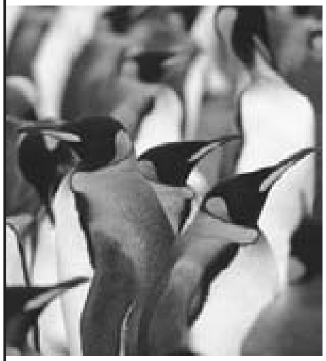
Intervalos de confianza

Aunque un estimado puntual es el *mejor* valor individual para estimar un parámetro poblacional, no nos da ninguna indicación precisa de qué tan *bueno* es este mejor estimado. Sin embargo, un intervalo de confianza nos ofrece información que nos permite comprender mejor la exactitud del estimado. El intervalo de confianza se asocia con un nivel de confianza, como 0.95 (o 95%). El nivel de confianza nos da la tasa de éxitos del procedimiento que se utiliza para construir el intervalo de confianza. Como se describió en la sección 7-2, α es el complemento del nivel de confianza. Para un nivel de confianza de 0.95 (o 95%), $\alpha = 0.05$. Para un nivel de confianza de 0.99 (o 99%), $\alpha = 0.01$.

Margen de error Cuando reunimos un conjunto de datos muestrales, como los datos de los 40 pulsos de mujeres que se incluyen en el conjunto de datos 1 del apéndice B, podemos calcular la media muestral $\bar{x}$ y esa media muestral por lo regular es diferente de la media poblacional μ. La diferencia entre la media muestral y la media poblacional es un error. En la sección 6-5 vimos que $\sigma/\sqrt{n}$ es la desviación estándar de las medias muestrales. Utilizando $\sigma/\sqrt{n}$ y la notación $z_{\alpha/2}$ que se presentó en la sección 7-2, ahora podemos usar el *margen de error E* que se expresa como sigue:

Fórmula 7-4 $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ margen de error para la media (con base en σ conocida)

La fórmula 7-4 refleja el hecho de que la distribución del muestreo de la media muestral $\bar{x}$ es *exactamente* una distribución normal con media μ y desviación



Estimación del tamaño de las poblaciones silvestres

La Ley Nacional de Administración de los Bosques de Estados Unidos protege a las especies en peligro de extinción, entre las que destaca el búho moteado del norte; la ley impidió que la industria silvícola talara vastas regiones de árboles en el noroeste del Pacífico. Se pidió a biólogos y a especialistas en estadística que analizaran el problema, y ellos concluyeron que estaban disminuyendo las tasas de supervivencia y los tamaños de las poblaciones de los búhos hembra, quienes desempeñan un papel importante en la supervivencia de la especie. Los biólogos y especialistas en estadística también estudiaron el salmón en los ríos Snake y Columbia del estado de Washington, así como los pingüinos en Nueva Zelanda. En el artículo "Sampling Wildlife Populations" (*Chance*, vol. 9, núm. 2), los autores Brian Manly y Lyman McDonald comentan que, en estudios de esta clase, "los biólogos ganan habilidades de modelamiento, que son una característica distintiva de la buena estadística. Por su parte, los especialistas en estadística aprenden a compenetrarse en la realidad de los problemas, ya que los biólogos los introducen en asuntos cruciales".

Los números de serie de tanques capturados revelan el tamaño de la población

Durante la Segunda Guerra Mundial, especialistas en espionaje del bando de los aliados querían determinar el número de tanques que Alemania estaba produciendo. Las técnicas de espionaje tradicionales produjeron resultados poco confiables, pero los especialistas en estadística obtuvieron estimaciones exactas al analizar los números de serie de los tanques capturados. Por ejemplo, los registros muestran que Alemania realmente produjo 271 tanques en junio de 1941. La estimación basada en los números de serie fue de 244, en tanto que los métodos de espionaje tradicionales dieron como resultado una estimación extrema de 1550. (Véase "An Empirical Approach to Economic Intelligence in World War II", de Ruggles y Brodie, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 42).

estándar $\sigma/\sqrt{n}$, siempre y cuando la población tenga una distribución normal con media μ y desviación estándar σ. Si la población no está distribuida normalmente, las muestras grandes producen medias muestrales con una distribución que *se aproxima* a la normal. (La fórmula 7-4 requiere del conocimiento de la desviación estándar poblacional σ, pero la sección 7-4 presentará un método para calcular el margen de error E cuando se desconoce σ).

Utilizando el margen de error E, ahora podemos identificar el intervalo de confianza para la media poblacional μ (si se satisfacen los requisitos de esta sección). Los tres formatos que suelen usarse para expresar el intervalo de confianza se presentan en el siguiente cuadro.

Estimación del intervalo de confianza de la media poblacional μ (con σ conocida)

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E \qquad \text{donde} \qquad E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

o

$$\bar{x} \pm E$$

o

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

Definición

Los dos valores $\bar{x} - E$ y $\bar{x} + E$ se llaman **límites del intervalo de confianza**.

Procedimiento para construir un intervalo de confianza para μ (con σ conocida)

1. Verifique que los supuestos requeridos se satisfagan. (Tenemos una muestra aleatoria simple, σ es conocida, y la población parece estar distribuida normalmente o $n > 30$).
2. Remítase a la tabla A-2 y calcule el valor crítico $z_{a/2}$ correspondiente al nivel de confianza deseado. (Por ejemplo, si el nivel de confianza es del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1.96$).
3. Evalúe el margen de error $E = z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$.
4. Utilizando el valor calculado del margen de error E y el valor de la media muestral $\bar{x}$, calcule los valores de $\bar{x} - E$ and $\bar{x} + E$. Sustituya esos valores en el formato general para el intervalo de confianza:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

o

$$\bar{x} \pm E$$

o

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

5. Redondee los valores resultantes usando la siguiente regla de redondeo.

Regla de redondeo para intervalos de confianza utilizados para estimar μ

1. Cuando utilice el *conjunto de datos original* para construir un intervalo de confianza, redondee los límites del intervalo de confianza a un decimal más del que se usa para el conjunto de datos original.
2. Cuando el conjunto de datos original se desconoce y sólo se utiliza el *resumen de estadísticos* (n, $\bar{x}$, s), redondee los límites del intervalo de confianza al mismo número de espacios decimales utilizados para la media muestral.

Interpretación de un intervalo de confianza Al igual que en la sección 7-2, debemos ser cuidadosos para interpretar correctamente los intervalos de confianza. Después de obtener un estimado del intervalo de confianza de la media poblacional μ, como un intervalo de confianza del 95% de $72.4 < \mu < 80.2$, existe una interpretación correcta y muchas interpretaciones erróneas.

Correcta: "Tenemos una confianza del 95% de que el intervalo de 72.4 a 80.2 realmente contiene el valor verdadero de μ". Esto significa que si seleccionamos muchas muestras diferentes del mismo tamaño y construimos los intervalos de confianza correspondientes, a la larga, el 95% de éstos contendrían realmente el valor de μ. (Como en la sección 7-2, esta interpretación correcta se refiere a la tasa de éxitos del *proceso* que se usa para estimar la media poblacional).

Errónea: Puesto que μ es una constante fija, sería incorrecto decir que "existe un 95% de probabilidades de que μ se localice entre 72.4 y 80.2". También sería incorrecto decir que "el 95% de todos los valores de los datos están entre 72.4 y 80.2" y que "el 95% de las medias muestrales caen entre 72.4 y 80.2".

EJEMPLO **Pulsos cardiacos de mujeres** Para la muestra de pulsos cardiacos de mujeres en el conjunto de datos 1 del apéndice B, tenemos $n = 40$ y $\bar{x} = 76.3$, y la muestra es aleatoria simple. Suponga que sabemos que σ es 12.5. Utilice un nivel de confianza del 95% y calcule lo siguiente:

a. El margen de error E.
b. El intervalo de confianza para μ.

SOLUCIÓN

REQUISITO ✔ Primero debemos verificar que se cumplan los requisitos. La muestra es aleatoria simple. Se supone que conocemos el valor de σ (12.5). Con $n > 30$, se satisface el requisito de que "la población se distribuye normalmente o $n > 30$". Por lo tanto, los requisitos se cumplen y podemos continuar con los métodos de esta sección. ✔

a. El nivel de confianza del 0.95 implica que $\alpha = 0.05$, entonces $z_{\alpha/2} = 1.96$ (como se mostró en un ejemplo de la sección 7-2). El margen de error E se calcula usando la fórmula 7-4 como sigue. Los lugares decimales adicionales se usan para minimizar los errores de redondeo en el intervalo de confianza calculado en el inciso *b*).

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{12.5}{\sqrt{40}} = 3.8737901$$

continúa

b. Con $\bar{x} = 76.3$ y $E = 3.8737901$, construimos el intervalo de confianza como sigue:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$
$$76.3 - 3.8737901 < \mu < 76.3 + 3.8737901$$
$$72.4 < \mu < 80.2 \quad \text{(redondeado a un decimal como en } \bar{x}\text{)}$$

INTERPRETACIÓN Este resultado también podría expresarse como 76.3 ± 3.9 o como (72.4, 80.2). Con base en la muestra con $n = 40$, $\bar{x} = 76.3$, y suponiendo que σ es 12.5, el intervalo de confianza para la media de la población μ es $72.4 < \mu < 80.2$ y este intervalo tiene un nivel de confianza de 0.95. Esto significa que si seleccionamos muchas muestras diferentes de 40 mujeres y construimos los intervalos de confianza como lo hicimos aquí, el 95% de ellos incluirían realmente el valor de la media poblacional μ.

Fundamentos del intervalo de confianza La idea básica que subyace en la construcción de intervalos de confianza se relaciona con el teorema del límite central, que indica que si reunimos muestras aleatorias simples de una población distribuida normalmente, las medias muestrales se distribuyen de manera normal, con media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$. Si reunimos muestras aleatorias simples de tamaño $n > 30$ de cualquier población, la distribución de medias muestrales es aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$. El formato del intervalo de confianza es realmente una variación de la ecuación que ya se usó con el teorema del límite central. En la expresión $z = (\bar{x} - \mu_{\bar{x}})/\sigma_{\bar{x}}$, sustituya $\sigma_{\bar{x}}$ por $\sigma/\sqrt{n}$, sustituya $\mu_{\bar{x}}$ por μ, y entonces despeje μ para obtener

$$\mu = \bar{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Se usan los valores positivo y negativo para los resultados de z en los límites del intervalo de confianza que estamos empleando.

Consideremos el caso específico de un nivel de confianza del 95%, de manera que $\alpha = 0.05$ y $z_{\alpha/2} = 1.96$. Para este caso, hay una probabilidad de 0.05 de que una media muestral esté a más de 1.96 desviaciones estándar (o $z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$, lo que denotamos como E) de la media poblacional μ. Por otra parte, existe una probabilidad del 0.95 de que una media muestral esté dentro de 1.96 desviaciones estándar (o $z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$) a partir de μ (véase la figura 7-4). Si la media muestral $\bar{x}$ está dentro de $z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ de la media poblacional μ, entonces μ debe estar entre $\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ y $\bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$; esto se expresa en el formato general de nuestro intervalo de confianza (con $z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$, denotado como E): $\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$.

Determinación del tamaño muestral requerido para estimar μ

Ahora examinaremos esta importante pregunta: cuando planeamos reunir una muestra aleatoria simple de datos que se usarán para estimar una media poblacional μ, *¿cuántos* valores muestrales deben obtenerse? Por ejemplo, suponga que queremos estimar el peso medio de pasajeros de líneas aéreas (un valor importante por razones de seguridad). ¿Cuántos pasajeros deben seleccionarse al azar y pesarse? La determinación del tamaño de una muestra aleatoria simple es un aspecto muy importante,

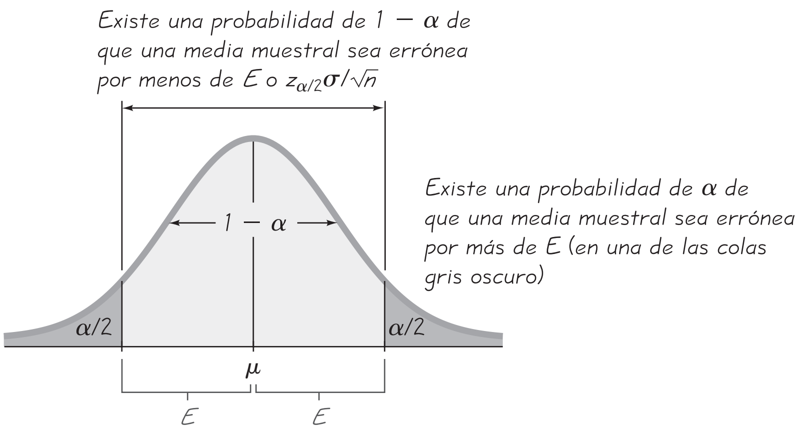


Figura 7-4

Distribución de medias muestrales con σ conocida

puesto que muestras que son innecesariamente grandes desperdician tiempo y dinero, en tanto que muestras muy pequeñas conducen a resultados deficientes.

Si empezamos con la expresión para el margen de error E (fórmula 7-4) y despejamos el tamaño muestral n, obtenemos lo siguiente.

Tamaño muestral para estimar la media μ

Fórmula 7-5

$$n = \left[\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right]^2$$

donde $z_{\alpha/2}$ = puntuación z crítica basada en el nivel de confianza deseado
E = margen de error deseado
σ = desviación estándar poblacional

La fórmula 7-5 es relevante puesto que indica que el tamaño muestral no depende del tamaño de la población (N); el tamaño muestral depende del nivel de confianza deseado, del margen de error deseado y del valor de la desviación estándar σ. (Véase el ejercicio 40 para casos en los que se selecciona una muestra relativamente grande sin reemplazo a partir de una población finita).

El tamaño muestral debe ser un número entero, ya que representa el número de valores muestrales que deben encontrarse. Sin embargo, la fórmula 7-5 suele dar un resultado que no es un número entero, de manera que utilizamos la siguiente regla de redondeo. (Esta regla se basa en el principio de que cuando es necesario redondear, el tamaño de muestra requerido debe redondearse *hacia arriba* para que sea al menos adecuadamente grande en oposición a un tamaño ligeramente más pequeño).

Regla de redondeo para el tamaño muestral n

Cuando se calcula el tamaño muestral n, si el uso de la fórmula 7-5 no produce un número entero, siempre *incremente* el valor de n al siguiente número entero *mayor*.

Cómo manejar σ desconocida al calcular el tamaño muestral Cuando se aplica la fórmula 7-5, existe un dilema práctico: la fórmula requiere que sustituyamos algún valor de la desviación estándar poblacional σ, pero en realidad ésta suele desconocerse. Cuando se determina un tamaño muestral requerido (sin construir un intervalo de confianza), existen algunos procedimientos que pueden funcionar para este problema:

1. Use la regla práctica del intervalo (véase la sección 3-3) para estimar la desviación estándar como sigue: $\sigma \approx$ rango/4. (Con una muestra de 87 valores o más, seleccionada al azar de una población normalmente distribuida, el rango/4 nos da un valor que es mayor que o igual a σ al menos el 95% de las veces. Véase "Using the Sample Range as a Basis for Calculating Sample Size in Power Calculations", de Richard Browne, *American Statistician*, vol. 55, núm. 4).
2. Realice un estudio piloto empezando por el proceso de muestreo. Comience el proceso de muestreo y, utilizando los primeros valores, calcule la desviación estándar muestral s y úsela en lugar de σ. Entonces, el valor estimado de σ puede mejorar conforme se obtienen más datos muestrales, y de este modo es posible refinar el tamaño muestral.
3. Estime el valor de σ utilizando los resultados de algún otro estudio hecho con anterioridad.

Asimismo, algunas veces podemos ser creativos en nuestro uso de otros resultados conocidos. Por ejemplo, por lo regular las pruebas de CI están diseñadas para que la media sea 100 y la desviación estándar sea 15. Los profesores de estadística tienen puntuaciones de CI con una media mayor que 100 y una desviación estándar menor que 15 (puesto que son un grupo más homogéneo que las personas seleccionadas al azar de la población general). No conocemos el valor específico de σ para los profesores de estadística, pero podemos calcular con seguridad usando $\sigma = 15$. Utilizar un valor de σ que sea mayor que el valor real producirá un tamaño muestral mayor del necesario, pero utilizar un valor de σ que sea muy pequeño daría por resultado un tamaño muestral inadecuado. *Cuando se calcula el tamaño muestral n, cualquier error siempre debe ser conservador, en el sentido de que haga a n muy grande y no muy pequeña.*

EJEMPLO **Puntuaciones de CI de profesores de estadística** Suponga que queremos estimar la puntuación media del CI de la población de profesores de estadística. ¿Cuántos profesores de estadística deben seleccionarse al azar para efectuar pruebas de CI, si queremos tener una confianza del 95% de que la media muestral estará dentro de 2 puntos de CI de la media poblacional?

SOLUCIÓN Los valores que requiere la fórmula 7-5 se calculan como sigue:

$z_{\alpha/2} = 1.96$ (Esto se calcula convirtiendo el nivel de confianza del 95% a $\alpha = 0.05$, y luego calculando la puntuación crítica z como se describe en la sección 7-2).

$E = 2$ (Puesto que queremos que la media muestral esté dentro de dos puntos de CI de μ, el margen de error deseado es 2).

$\sigma = 15$ (Véase el análisis en el párrafo que está antes de este ejemplo).

Con $z_{\alpha/2} = 1.96$, $E = 2$ y $\sigma = 15$, utilizamos la fórmula 7-5 como sigue:

$$n = \left[\frac{z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right]^2 = \left[\frac{1.96 \cdot 15}{2}\right]^2 = 216.09 = 217 \quad \text{(redondeado } \textit{hacia arriba}\text{)}$$

INTERPRETACIÓN Entre los miles de profesores de estadística, necesitamos obtener una muestra aleatoria simple de al menos 217 de ellos y luego necesitamos obtener sus puntuaciones de CI. Con una muestra aleatoria simple de sólo 217 profesores de estadística, tendremos un nivel de confianza del 95% de que la media muestral $\bar{x}$ está dentro de dos puntos de CI de la media poblacional μ real.

Si estamos dispuestos a obtener resultados menos exactos utilizando un margen de error más grande, como por ejemplo 4, el tamaño muestral disminuye a 54.0225, el cual se redondea *hacia arriba* a 55. La duplicación del margen de error hace que el tamaño muestral requerido disminuya a un cuarto de su valor original. Por el contrario, dividir a la mitad el margen de error cuadruplica el tamaño muestral. En consecuencia, si usted desea resultados más exactos, el tamaño muestral debe incrementarse sustancialmente. Ya que los muestreos grandes por lo regular requieren de más tiempo y dinero, con frecuencia existe la necesidad de realizar un balance entre el tamaño de la muestra y el margen de error E.

Uso de la tecnología

Intervalos de confianza Vea al final de la sección 7-4 los procedimientos del intervalo de confianza que se aplican a los métodos de esta sección, así como también los de la sección 7-4. STATDISK, Minitab, Excel y la calculadora TI-83/84 Plus se pueden usar para calcular intervalos de confianza cuando queremos estimar la media de una población y se satisfacen todos los supuestos de esta sección (incluido el valor conocido de σ).

Determinación del tamaño muestral Los cálculos para el tamaño muestral no se incluyen en la calculadora TI-83/84 Plus, Minitab o Excel. El procedimiento de STATDISK para determinar el tamaño muestral requerido para estimar una media poblacional μ se describe a continuación.

STATDISK Seleccione **Analysis** de la parte superior de la barra del menú principal, luego seleccione **Sample Size Determination**, seguido por **Estimate Mean**. Ahora debe ingresar el nivel de confianza (como 0.95) y el error E. También ingrese la desviación estándar poblacional σ, si se conoce. Además existe una opción que le permite ingresar el tamaño poblacional N, suponiendo que usted está haciendo el muestreo sin reemplazo de una población finita. (Véase el ejercicio 40).

7-3 DESTREZAS Y CONCEPTOS BÁSICOS

Conocimientos estadísticos y pensamiento crítico

1. **Intervalo de confianza.** Con base en datos muestrales se obtiene el siguiente intervalo de confianza del 95%: $2.5 < \mu < 6.0$. Escriba un enunciado que interprete el intervalo de confianza de manera correcta.

2. **Estimador sin sesgo.** Una de las características de la media muestral que la convierte en un buen estimador de una media poblacional μ es que es un estimador sin sesgo. ¿Qué significa que un estadístico sea un estimador sin sesgo de un parámetro poblacional?

37. Tamaño muestral utilizando la regla práctica del intervalo. Usted acaba de ser contratado por la división de marketing de General Motors para estimar la media de la cantidad de dinero que se gasta actualmente en la compra de automóviles nuevos en Estados Unidos. Primero use la regla práctica del intervalo para hacer un estimado burdo de la desviación estándar de las cantidades gastadas. Es razonable suponer que el rango típico de cantidades va desde \$12,000 hasta alrededor de \$70,000. Luego use esa desviación estándar estimada para determinar el tamaño muestral que corresponde a un nivel de confianza del 95% y a un margen de error de \$100. ¿Es práctico el tamaño muestral? Si no es así, ¿qué se debe cambiar para obtener un tamaño muestral práctico?

38. Tamaño muestral utilizando datos muestrales. Usted quiere estimar la media del pulso de adultos varones. Remítase al conjunto de datos 1 en el apéndice B y calcule el pulso máximo y mínimo para varones, luego utilice estos valores con la regla práctica del intervalo para estimar σ. ¿Cuántos adultos varones debe usted seleccionar al azar y examinar si quiere tener un nivel de confianza del 95% de que la media muestral del pulso está dentro de 2 latidos (por minuto) de la media poblacional μ real? Si en vez de usar la regla práctica del intervalo se emplea la desviación estándar de los pulsos de varones del conjunto de datos 1 como un estimado de σ, ¿es muy diferente el tamaño muestral requerido? ¿Qué tamaño muestral parece estar más cerca del tamaño muestral correcto?

7-3 MÁS ALLÁ DE LO BÁSICO

39. Intervalo de confianza con factor de corrección por población finita. El error estándar de la media es $\sigma/\sqrt{n}$, siempre y cuando el tamaño de la población sea infinito. Si el tamaño de la población es finito y se denota como N, entonces el factor de corrección $\sqrt{(N - n)/(N - 1)}$ debe usarse siempre y cuando $n > 0.05N$. Este factor de corrección multiplica el margen de error E dado en la fórmula 7-4, de manera que el margen de error es como se indica abajo. Calcule el intervalo de confianza del 95% para la media de 250 puntuaciones de CI, si una muestra de 35 de esas puntuaciones produce una media de 110. Suponga que $\sigma = 15$.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

40. Tamaño muestral con factor de corrección por población finita. En la fórmula 7-4 para el margen de error E, suponemos que la población es infinita, que estamos realizando un muestreo con reemplazo, o que la población es muy grande. Si tenemos una población relativamente pequeña y hacemos el muestreo sin reemplazo, debemos modificar E para incluir un *factor de corrección por población finita*, para que el margen de error sea como el que se indica en el ejercicio 39, donde N es el tamaño de la población. En esta expresión del margen de error se despeja n para obtener

$$n = \frac{N\sigma^2(z_{\alpha/2})^2}{(N - 1)E^2 + \sigma^2(z_{\alpha/2})^2}$$

Repita el ejercicio 33, suponiendo que los estudiantes de estadística se seleccionan al azar y sin reemplazo, de una población de $N = 200$ estudiantes de estadística.

7-4 Estimación de la media poblacional: σ desconocida

Concepto clave En esta sección se presentan métodos para construir un estimado del intervalo de confianza de una media poblacional cuando *no se conoce* la desviación estándar. (En la sección 7-3 se presentaron métodos para estimar μ cuando se conoce σ). Cuando se desconoce σ, se utiliza la *distribución t de Student* (en vez de la distribución normal), suponiendo que ciertos requisitos (los cuales se señalan abajo) se satisfacen. Como generalmente se desconoce σ en circunstancias reales, los métodos de esta sección son muy realistas y prácticos, y se utilizan con frecuencia.

Requisitos

1. La muestra es aleatoria simple.
2. La muestra proviene de una población distribuida normalmente o $n > 30$.

Como en la sección 7-3, el requisito de una población distribuida normalmente no es estricto. Por lo regular, podemos considerar que la población está distribuida normalmente después de usar los datos muestrales para confirmar que no existen valores extremos y que el histograma tiene una forma que no es muy lejana a la de una distribución normal. Además, al igual que en la sección 7-3, el requisito de que el tamaño muestral sea $n > 30$ suele usarse como directriz, pero el tamaño muestral mínimo realmente depende de cuánto se aleja la distribución de la población de la distribución normal. [Si se sabe que una población se distribuye normalmente, la distribución de medias muestrales $\bar{x}$ es *exactamente* una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$; si la población no está distribuida normalmente, muestras grandes ($n > 30$) producen medias muestrales con una distribución que es *aproximadamente* normal, con media μ y desviación estándar $\sigma/\sqrt{n}$].

Al igual que en la sección 7-3, la media muestral $\bar{x}$ es el mejor estimado puntual (o estimado de un solo valor) de la media poblacional μ.

La media muestral $\bar{x}$ es el mejor estimado puntual de la media poblacional μ.

He aquí el aspecto clave de esta sección: si σ no se conoce, pero los requisitos anteriores se satisfacen, utilizamos la *distribución t de Student* (en vez de la distribución normal), que desarrolló William Gosset (1876-1937). Gosset fue un empleado de la cervecería Guinness Brewery que necesitaba una distribución que pudiera utilizarse con muestras pequeñas. La cervecería irlandesa donde trabajaba no permitía la publicación de resultados de investigaciones, entonces Gosset publicó bajo el seudónimo de *Student*. (En aras de la investigación y para servir a sus lectores, el autor visitó la cervecería Guinness Brewery y probó una muestra del producto. ¡Qué comprometido!)

Puesto que no conocemos el valor de σ, lo estimamos con el valor de la desviación estándar muestral s, pero esto introduce otra fuente de falta de confiabilidad, en especial con las muestras pequeñas. Para mantener un intervalo de confianza en algún nivel deseado, como el 95%, compensamos esta falta de confiabilidad adicional haciendo más ancho el intervalo de confianza: utilizamos valores críticos $t_{\alpha/2}$ (de una distribución t de Student), los cuales son más grandes que los valores críticos de $z_{\alpha/2}$ de la distribución normal.

Distribución *t* de Student

Si una población tiene una distribución normal, entonces la distribución de

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

es una **distribución *t* de Student** para todas las muestras de tamaño n. La distribución t de Student, conocida a menudo como **distribución *t***, se utiliza para calcular valores críticos denotados por $t_{\alpha/2}$.

Pronto analizaremos algunas de las propiedades importantes de la distribución t, pero antes presentamos los componentes necesarios para la construcción de intervalos de confianza. Comencemos con el valor crítico denotado por $t_{\alpha/2}$. Un valor de $t_{\alpha/2}$ se puede encontrar en la tabla A-3 localizando el número apropiado de *grados de libertad* en la columna izquierda y avanzando por el renglón correspondiente hasta encontrar el número que aparece directamente abajo del área adecuada en la parte superior.

Definición

El número de **grados de libertad** para un conjunto de datos muestrales recolectados es el número de valores muestrales que pueden variar después de haber impuesto ciertas restricciones a todos los valores de los datos.

Por ejemplo, si 10 estudiantes tienen puntuaciones de examen con una media de 80, podemos asignar con libertad valores a las primeras 9 puntuaciones, pero la décima puntuación se calcula. La suma de las 10 puntuaciones debe ser 800, entonces la décima puntuación debe ser igual a 800 menos la suma de las primeras 9 puntuaciones. Puesto que esas primeras 9 puntuaciones pueden seleccionarse con libertad para adoptar cualquier valor, decimos que existen 9 grados de libertad disponibles. Para las aplicaciones de esta sección, el número de grados de libertad es simplemente el tamaño muestral menos 1.

$$\textbf{grados de libertad} = \boldsymbol{n - 1}$$

EJEMPLO **Cálculo de un valor crítico** Una muestra de tamaño $n = 23$ es una muestra aleatoria simple seleccionada de una población distribuida normalmente. Calcule el valor crítico $t_{\alpha/2}$ correspondiente a un nivel de confianza del 95%.

SOLUCIÓN Puesto que $n = 23$, el número de grados de libertad está dado por $n - 1 = 22$. Utilizando la tabla A-3, localizamos el renglón 22 con respecto a la columna de la extrema izquierda. Al igual que en la sección 7-2, un nivel de confianza del 95% corresponde a $\alpha = 0.05$, de manera que encontramos los valores listados en la columna para una *área de 0.05 en dos colas*. El valor correspondiente al renglón para 22 grados de libertad y la columna para una área de 0.05 en dos colas es 2.074; entonces $t_{\alpha/2} = 2.074$.

Ahora que sabemos cómo encontrar valores críticos denotados por $t_{\alpha/2}$, podemos describir el margen de error E de este intervalo de confianza.

Margen de error E para la estimación de μ (con σ desconocida)

Fórmula 7-6 $$E = t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

donde $t_{\alpha/2}$ tiene $n - 1$ grados de libertad. La tabla A-3 lista valores de $t_{\alpha/2}$.

Intervalo de confianza para la estimación de μ (con σ desconocida)

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

donde

$$E = t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Extractos de una circular del Departamento del Transporte

Los siguientes extractos de una circular del departamento de transporte de Estados Unidos atañen algunos de los requisitos de exactitud para el equipo de navegación empleado en aviones. Observe el uso del intervalo de confianza. "El total de las contribuciones de error del equipo a bordo, combinado con los errores técnicos de vuelo correspondientes incluidos en la lista, no debe exceder lo siguiente, con un nivel de confianza del 95% (2-sigma), durante un periodo igual al ciclo de actualización". "El sistema de vías y rutas aéreas de Estados Unidos tiene anchuras de protección de ruta que se utilizan en un sistema VOR con una exactitud de ±4.5 grados con base en una probabilidad del 95%".

El siguiente procedimiento utiliza el margen de error anterior en la construcción de estimados del intervalo de confianza de μ.

Procedimiento para construir un intervalo de confianza para μ (con σ desconocida)

1. Verifique que los requisitos se satisfacen. (Tenemos una muestra aleatoria simple y la población parece estar distribuida normalmente o $n > 30$).
2. Utilizando $n - 1$ grados de libertad, remítase a la tabla A-3 y encuentre el valor crítico $t_{\alpha/2}$ que corresponde al nivel de confianza deseado. (Para el nivel de confianza, remítase al "área en dos colas").
3. Evalúe el margen de error $E = t_{\alpha/2} \cdot s/\sqrt{n}$.
4. Utilizando el valor del margen de error E calculado y el valor de la media muestral $\bar{x}$, calcule los valores de $\bar{x} - E$ y $\bar{x} + E$. Sustituya estos valores en el formato general para el intervalo de confianza:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$

o

$$\bar{x} \pm E$$

o

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

5. Redondee los límites del intervalo de confianza resultantes. Si utiliza el conjunto original de datos, redondee a un decimal más del que se usa para el conjunto original de datos. Si utiliza un resumen de estadísticos (n, $\bar{x}$, s), redondee los límites del intervalo de confianza al mismo número de lugares decimales utilizados para la media muestral.

Gráfica de tallo y hojas de las edades

```
3|4 7 7 8
4|1 2 3 4 4 5 5 5 6 8 9
5|3 3 4 4 5 6 7
6|0
```

EJEMPLO Construcción de un intervalo de confianza En el diagrama de tallo y hojas que aparece al margen, se incluyen las edades de solicitantes que no lograron un ascenso (según datos de "Debating the Use of Statistical Evidence in Allegations of Age Discrimination", de Barry y Boland, *American Statistician*, vol. 58, núm. 2). Existe el tema más importante de si ciertos solicitantes fueron víctimas de discriminación por edad, pero por ahora nos enfocaremos en el simple aspecto de utilizar esos valores como una muestra con el propósito de estimar la media de una población más grande. Suponga que la muestra es aleatoria simple y utilice los datos muestrales con un nivel de confianza del 95% para calcular lo siguiente:

a. El margen de error E

b. El intervalo de confianza para μ

SOLUCIÓN

REQUISITO ✔ Primero debemos verificar que los dos requisitos para esta sección se satisfacen. Estamos suponiendo que la muestra es aleatoria simple. Ahora revisamos el requisito de que "la población se distribuya normalmente o $n > 30$". Puesto que $n = 23$, debemos verificar que la distribución sea aproximadamente normal. La forma de la gráfica de tallo y hojas sugiere una distribución normal. Además, una gráfica cuantilar normal confirma que los datos muestrales provienen de una población con una distribución aproximadamente normal. Por consiguiente, los requisitos se satisfacen y procedemos con los métodos de esta sección. ✔

a. El nivel de confianza de 0.95 implica que $\alpha = 0.05$, de manera que $t_{\alpha/2} = 2.074$ (utilice la tabla A-3 con gl $= n - 1 = 22$, como se mostró en el ejemplo anterior). Después de encontrar que los estadísticos muestrales son $n = 23$, $\bar{x} = 47.0$ y $s = 7.2$, el margen de error E se calcula utilizando la fórmula 7-6 como sigue. Se utilizan decimales adicionales para minimizar los errores de redondeo en el intervalo de confianza calculado en el inciso *b*).

$$E = t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} = 2.074 \cdot \frac{7.2}{\sqrt{23}} = 3.11370404$$

b. Con $\bar{x} = 47.0$ y $E = 3.11370404$, construimos el intervalo de confianza de la siguiente manera:

$$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$$
$$47.0 - 3.11370404 < \mu < 47.0 + 3.11370404$$
$$43.9 < \mu < 50.1$$ (redondeado a un decimal más que los datos originales)

INTERPRETACIÓN Este resultado también podría expresarse en la forma de 47.0 ± 3.1 o (43.9, 50.1). Con base en los resultados muestrales dados, tenemos una confianza del 95% de que los límites de 43.9 años y 50.1 años realmente contienen el valor de la media poblacional μ.

Ahora listamos las propiedades importantes de la distribución t que utilizamos en esta sección.

Propiedades importantes de la distribución *t* de Student

1. La distribución t de Student es diferente para distintos tamaños de muestra. (Véase la figura 7-5 para los casos $n = 3$ y $n = 12$).
2. La distribución t de Student tiene la misma forma de campana simétrica que la distribución normal estándar, pero refleja una mayor variabilidad (con distribuciones más amplias) de lo que se espera con muestras pequeñas.

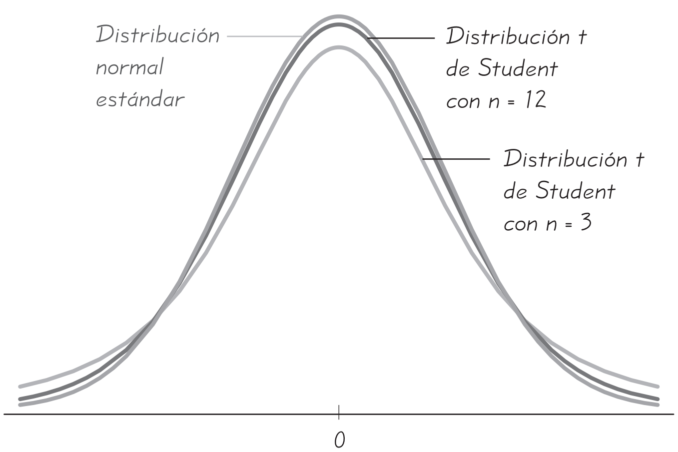


Figura 7-5

Distribuciones *t* de Student para $n = 3$ y $n = 12$

La distribución t de Student tiene la misma forma y simetría general de la distribución normal estándar, pero refleja una mayor variabilidad de lo que se espera con muestras pequeñas.

3. La distribución t de Student tiene una media de $t = 0$ (así como la distribución normal estándar tiene una media de $z = 0$).

4. La desviación estándar de la distribución t de Student varía con el tamaño muestral, pero es mayor que 1 (a diferencia de la distribución normal estándar, que tiene $\sigma = 1$).

5. Conforme el tamaño muestral n se hace más grande, la distribución t de Student se acerca más a la distribución normal estándar.

Elección de la distribución apropiada

En ocasiones es difícil decidir entre utilizar la distribución normal estándar z o la distribución t de Student. El diagrama de flujo de la figura 7-6 y la tabla 7-1 resumen los aspectos clave a considerarse cuando se construyen intervalos de confianza para estimar μ, la media poblacional. En la figura 7-6 o en la tabla 7-1, note que si tenemos una muestra pequeña ($n \leq 30$) obtenida de una distribución que difiere drásticamente de una distribución normal, no podemos usar los métodos descritos en este capítulo. Una alternativa es utilizar métodos no paramétricos (véase el capítulo 13); otra alternativa es usar el método de *bootstrap* por computadora. En ambos enfoques no se hacen supuestos acerca de la población original. El método *bootstrap* se describe en el proyecto tecnológico al final del capítulo.

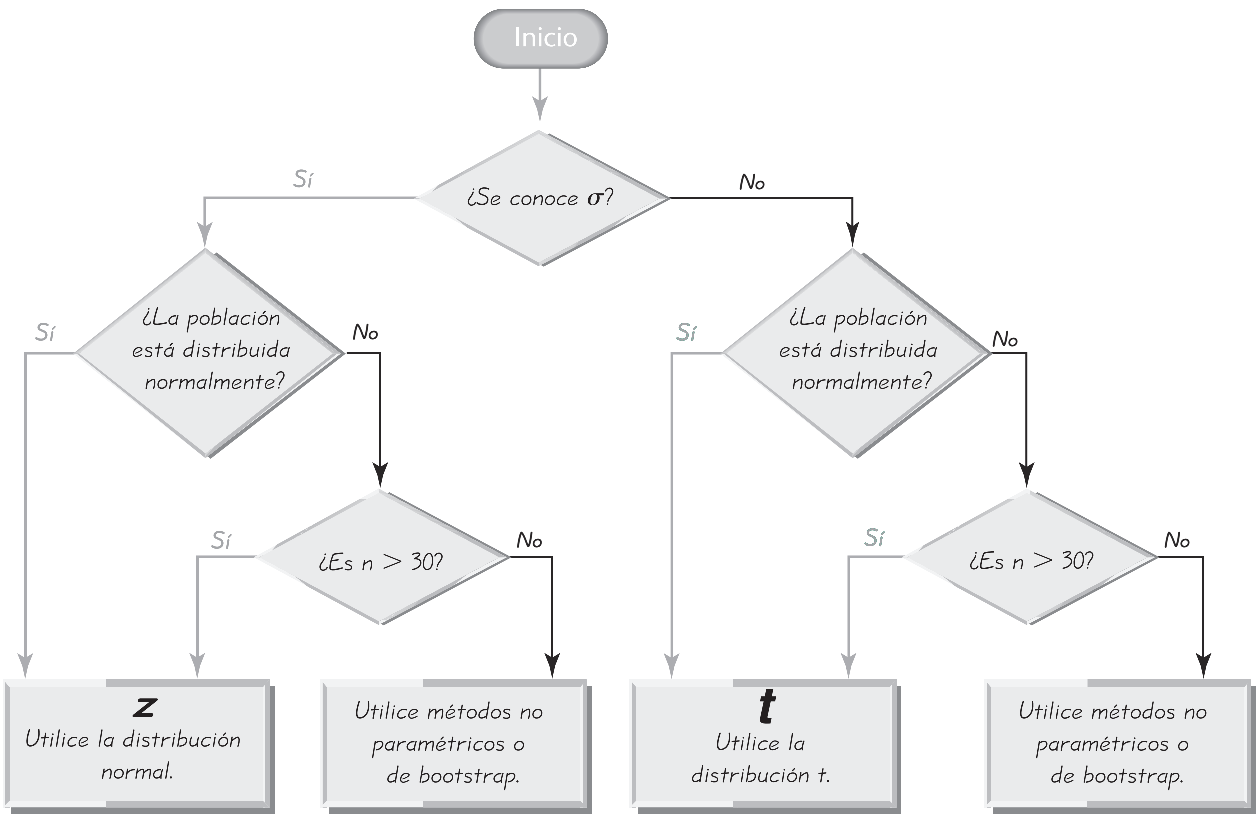


Figura 7-6 **Elección entre z y t**