Jumat, 22 Juli 2022   Pertemuan 15

NAMA   : Alifia Safitri Sukmawanti

NIM   : 10121121

KELAS   : IF-3

MATA KULIAH : Matematika Sains Data 2

            Ruang Eigen.

↳ Latihan 1.

Tentukan Persamaan Karakteristik dan nilai-nilai eigen dari matriks-matriks berikut:

(a.) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

↳ $\det (\lambda I - A) = 0$

$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \right) = 0$

↔ $\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \right) = 0$

↔ $\det \left(\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -8 & \lambda+1 \end{bmatrix} \right) = 0$ ↔ $(\lambda-3)(\lambda+1) - (0)(-8) = 0$

Persamaan Karakteristik : $(\lambda-3)(\lambda+1) = 0$

↳ $(\lambda-3)(\lambda+1) = 0$ ↔ $\lambda = -1$ atau $\lambda = 3$

maka nilai eigen untuk matriks $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ adalah

-1 dan 3.

(b.) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

↳ $\det (\lambda I - A) = 0$

$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0$

↔ $\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = 0$

↔ $\det \left(\begin{bmatrix} \lambda+2 & 7 \\ -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} \right) = 0$ ↔ $(\lambda+2)(\lambda-2) - (7)(-1) = 0$

↔ $\lambda^2 + 3 = 0$

Persamaan Karakteristik : $\lambda^2 + 3 = 0$

↳ $\lambda^2 + 3 = 0$ ↔ $\lambda = -\sqrt{3}i$ atau $\lambda = \sqrt{3}i$

maka nilai eigen untuk matriks $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah

tidak mempunyai nilai eigen karena nilai-nilai eigen dari matriks adalah bilangan imajiner, sedangkan menurut definisi λ adalah skalar atau bilangan real.

©

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↘ $\det (\lambda I - A) = 0$

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

↔ $\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$

↔ $\det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right) = 0$

↔ $(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2 + 0 + 0 - (-1)(\lambda - 1)(2) - 0 - 0 = 0$

↔ $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

Persamaan Karakteristik: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

↘ $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

↔ $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3.$

maka nilai eigen untuk matriks $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

adalah 1, 2 dan 3.

Latihan 2.

Tentukan masing-masing basis untuk latihan 1.

(a.) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

↳ basis ruang eigen untuk yang bersesuaian $\lambda = -1$

$$\left(-1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \right) \bar{x} = \bar{0} \leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mencari basis : $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ — OBE — $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow X = 0 , Y = S$

misalkan $y = S$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

maka basisnya : $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

↳ basis ruang eigen untuk yang bersesuaian $\lambda = 3$.

$$\left(3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \right) \bar{x} = \bar{0} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mencari basis : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ — OBE — $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow X + (-\frac{1}{2} Y) = 0$

$\leftrightarrow X = \frac{1}{2} Y$

misalkan $y = a$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

maka basisnya : $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

↳ basis ruang eigen untuk yang bersesuaian $\lambda = -\sqrt{3}i$

$$\left(-\sqrt{3}i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \bar{x} = \bar{0}$$

$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0,2 & 7 \\ -1 & -3,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

mencari basis : $\begin{bmatrix} 0,2 & 7 \\ -1 & -3,7 \end{bmatrix}$ — OBE — $\begin{bmatrix} 1 & 35 \\ 0 & 313/10 \end{bmatrix}$

$\leftrightarrow$ $x + 35y = 0$ $\leftrightarrow$ $x = -35y$

$313/10 y = 0$

misalkan $y = a$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -35 \\ 1 \end{bmatrix}$

maka basisnya $\left\{ \begin{bmatrix} -35 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

↳ basis ruang eigen untuk yang bersuaian $\lambda = \sqrt{3}i$

$$\left(\sqrt{3}i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \bar{x} = \bar{0}$$

$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 3,7 & 7 \\ -1 & -0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

mencari basis : $\begin{bmatrix} 3,7 & 7 \\ -1 & -0,2 \end{bmatrix}$ — OBE — $\begin{bmatrix} 1 & 70/37 \\ 0 & 313/185 \end{bmatrix}$

$\leftrightarrow$ $x + 70/37 y = 0$ $\leftrightarrow$ $x = -70/37 y$

$313/185 y = 0$

misalkan $y = a$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70/37a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -70/37 \\ 1 \end{bmatrix}$

maka basisnya : $\left\{ \begin{bmatrix} -70/37 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

C. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

↳ basis ruang eigen untuk yang bersesuaian $\lambda = 1$

$$\left(1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \bar{x} = \bar{0}$$

$\leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

mencari basis : $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ - OBE - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\leftrightarrow$ $x_1 + 1/3 x_3 = 0$
$-2/3 x_3 = 0$
$-2/3 x_3 = 0$

$\leftrightarrow x_1 = 0$
$x_2 = t \in R$
$x_3 = 0$

misalkan $x_2 = t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

maka basisnya : $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

↳ basis ruang eigen untuk yang bersesuaian $\lambda = 2$

$$\left(2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \bar{x} = \bar{0}$$

$\leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

mencari basis : $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - OBE - $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 + (-x_3) = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array}$$

$$\leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2}t \ , \ x_2 = t, x_3 = t, \in R$$

misalkan $x_1, x_2, x_3 = t$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

maka basisnya : $\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

↳ basis ruang eigen untuk yang bersesuaian $\lambda = 3$.

$$\left(3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \bar{x} = \bar{0}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mencari basis: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} - OBE - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + (-x_3) = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = -x_3 = -t \\ x_2 = x_3 = t \\ x_3 = t \in R \end{array}$$

misalkan $x_1, x_2, x_3 = t$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

maka basisnya: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.