Relación de ejercicios 8

1. Demuestra por inducción las siguientes propiedades:

   a) $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5, si $n \geq 1$.

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ si $n \geq 1$.

   c) $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$, si $n \geq 2$ y en donde $S(k, m)$ son los números de Stirling de segunda especie.

2. Los números de Fibonacci $\{f_n\}$ se definen recursivamente como:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \qquad f_1 = 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

   Demuestra por inducción la igualdad $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ para todo entero $n \geq 1$

3. Sean a y b enteros coprimos. Demuestra que entonces, b y $a + b \cdot k$ son coprimos para todo $k \in \mathbb{Z}^*$.

4. Un agente de Cambio y Bolsa tiene invertido dinero en acciones de Azucarera y Repsol. Las acciones de Azucarera se cotizan a 89 euros y las de Repsol a 614 euros cada una. Necesita hacer una transacción para disponer exactamente de 1000 euros en efectivo. ¿Puede hacerlo comprando acciones de Repsol y vendiendo acciones de Azucarera, solamente? En caso afirmativo, ¿cuántas acciones de cada tipo, como mínimo, comprará y venderá?

5. La unidad monetaria de un país es el oreo y solo existen billetes de 18, 20 y 45 oreos. ¿Es posible pagar una compra de 5 oreos? Si la respuesta es positiva, determina una forma de hacerlo.

6. Estudia si los siguientes sistemas tienen solución y, en tal caso, resuélvelos:

$$a) \left\{ \begin{aligned} 3x + 9 &\equiv 8x + 12 \pmod{16} \\ x &\equiv 11^{954} \pmod{20} \end{aligned} \right. ; \qquad b) \left\{ \begin{aligned} 5x &\equiv 4 \pmod{7} \\ 5x &\equiv 9 \pmod{11} \\ 8x &\equiv 12 \pmod{13} \end{aligned} \right\}$$

7. ¿Existe algún múltiplo de 28 cuyas dos últimas cifras sean 16? En caso afirmativo, halla todos los múltiplos que cumplen esa condición.

8. Encuentra los posibles valores del dígito δ en el siguiente número $1\delta750$ para que sea divisible por 21, es decir, divisible por 3 y por 7.

9. Sea n un entero positivo cualquiera. Demuestra que:

   a) El último dígito de n^5 coincide con el último dígito de n.

b) El entero $n^{13} - n$ es divisible por $2, 3, 5, 7$ y 13.

10. Sean A, B y C subconjuntos de un universo $\mathcal{U}$. Determina la validez de las siguientes igualdades, demostrando las que sean verdaderas y dando un contraejemplo para las que sean falsas:

    a) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
    b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$
    c) $A - (B \triangle C) = (A - B) \triangle (A - C)$

11. Sea el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros y las funciones

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \mapsto & a - b \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ a & \mapsto & (a, -a) \end{array}$$

    a) Determina $g \circ f$ y $f \circ g$.
    b) Estudia las propiedades de f, g, $g \circ f$ y $f \circ g$.

12. ¿Cuántos PIN de 9 dígitos contienen al menos una vez cada uno de los dígitos 2, 6 y 8?

13. Un centro de estudios tiene 99 estudiantes que pueden cursar tres asignaturas: A, B y C. Se sabe que 7 de ellos cursan las tres asignaturas, 60 cursan la asignatura A, 49 la asignatura B y 43 la asignatura C. Los que cursan las asignaturas B y C son el triple de los que cursan A y B, mientras que los que cursan A y C, son el doble de los que cursan A y B. ¿Cuántos estudiantes cursan las asignaturas A y B?

14. En un seminario van a intervenir cinco ponentes: María, Luis, Alejandro, Teresa y Carlos. ¿De cuántas formas pueden ordenar las intervenciones si Luis debe intervenir antes que Alejandro? ¿De cuántas formas pueden ordenar las intervenciones si María debe intervenir justo después de Carlos? ¿De cuántas formas pueden ordenar las intervenciones si deben alternar las intervenciones de las mujeres y los hombres?

15. ¿De cuántas formas pueden distribuirse 8 bolas distintas en 6 cajas iguales, si dos de ellas deben tener como mucho cuatro bolas entre las dos y no pueden quedar cajas vacías?

16. Un pastelero prepara 5 tipos de tartas y quiere enviar una tarta a cada uno de sus 15 mejores clientes.

    a) ¿De cuántas maneras puede enviarlas si tiene suficientes tartas de cada tipo?
    b) ¿De cuántas maneras puede enviarlas si tiene suficientes tartas de cada tipo y quiere enviar al menos una de cada tipo?

c) ¿De cuántas maneras puede enviarlas si solo tiene 3 tartas de cada tipo?

d) ¿De cuántas maneras puede enviarlas si consideramos que los clientes son indistiguibles y tiene suficientes tartas de cada tipo?

e) ¿De cuántas maneras puede enviarlas si consideramos que los clientes son indistiguibles y solo tiene cuatro tartas de cada tipo?

17. Determina el coeficiente de z^{30} en la siguiente función generadora

$$G(z) = \big(z + z^2 + \cdots + z^9\big)^4 \big(1 + z + z^2 + \cdots + z^8\big) \big(1 + z + z^2 + \dots\big)^2.$$

18. Se lanza una moneda al aire n veces seguidas. Sea c_n el número de resultados (secuencias) posibles en los que no salen dos caras consecutivas.

a) Determina una ecuación de recurrencia que defina a c_n.

b) Resuelve la recurrencia del apartado anterior.

c) Demuestra por inducción la solución obtenida en el apartado anterior.