Relación de ejercicios 7

1. Un examen que consta de 12 preguntas se califica con 200 puntos. ¿De cuántas maneras se pueden asignar los 200 puntos si cada pregunta debe valer al menos 10 puntos pero no más de 25 y las puntuaciones deben ser múltiplos de 5?

2. Una empresa quiere repartir 100 lápices de memoria entre sus cuatro oficinas de manera que cada una reciba al menos 5, pero no más de 40. Sabiendo que se entregan en paquetes de cinco, ¿de cuántas maneras se puede hacer el reparto?

3. Una empresa de telecomunicaciones desea instalar en Málaga 210 antenas de telefonía móvil y 600 antenas parabólicas de televisión. La ciudad de Málaga se divide en 40 sectores. Para que no queden zonas sin cobertura es necesario que en cada sector haya un mínimo de 10 antenas de televisión y 4 de telefonía. Por otra parte, las ordenanzas municipales impiden colocar más de 7 antenas de telefonía en cada sector. Determina el número de formas distintas de colocar las antenas cumpliendo las restricciones anteriores, sabiendo que las antenas de televisión son indistinguibles entre sí y las de telefonía son también indistinguibles entre sí, pero obviamente se distinguen unas antenas de un tipo de las de otro.

4. Utiliza funciones generadoras para calcular el número de maneras de seleccionar $3n$ pelotas de una colección de $2n$ azules, $2n$ rojas y $2n$ blancas.

5. Halla una fórmula explícita para las sucesiones de los siguientes apartados:

   a) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ y $u_n = -2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ para todo $n \geq 2$.

   b) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y $u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 0$ para todo $n \geq 2$.

   c) $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ y $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = 0$ para todo $n \geq 2$.

6. De una sucesión sabemos que $5u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}$ para cualquier $n \geq 2$. ¿Sabrías decir si dicha recurrencia es lineal, si es homogénea, cuál es su orden, cuál es su ecuación característica y cuántos términos iniciales hace falta conocer para definir una sucesión? Justifica tus respuestas.

7. Se sabe que las raíces de la ecuación característica de una recurrencia lineal y homogénea son: -2 triple, -1 doble y 3 simple. ¿De qué orden es la recurrencia? ¿Qué forma tiene la solución general? Justifica las respuestas.

8. Halla una recurrencia lineal homogénea cuyo término general sea

   a) $u_n = 3^{n+2} + n3^{n-2}$

   b) $u_n = 2^{n+1} + n2^{n-1}$

9. Halla una fórmula explícita para las sucesiones de los siguientes apartados:

   a) $u_0 = 0$, $u_n - 2u_{n-1} = 1$ para todo $n \geq 1$,

   b) $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ y $u_n + 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = n^2$ para todo $n \geq 2$.

   c) $u_0 = 2$ y $u_n - u_{n-1} = 3n^2$ para todo $n \geq 1$.

   d) $u_0 = 1$ y $u_n - 2u_{n-1} = 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.

   e) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ y $u_n + 3u_{n-1} + 2u_{n-2} = 3^{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   f) $u_0 = 2$ y $u_n - 3u_{n-1} = 5 \cdot 7^n$ para todo $n \geq 1$.

   g) $u_0 = 3$, $u_1 = -2$ y $u_n - 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = (n-2)2^{n-2}$ para todo $n \geq 0$.

   h) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ y $u_n + 6u_{n-1} + 9u_{n-2} = (n-1)3^n$ para todo $n \geq 2$

10. Consideramos la ecuación de recurrencia $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + n$, con condiciones iniciales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

    a) Resuelve la ecuación.

    b) Usa el principio inducción para demostrar que la solución obtenida es correcta.

11. Plantea y resuelve una ecuación de recurrencia para hallar el término general de la sucesión

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$$

12. Usa una recurrencia lineal para encontrar una fórmula explícita para

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

13. Se considera la sucesión $\{q_n\}$ del número de cadenas de longitud n que se pueden formar con símbolos del alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ con la propiedad de que no tienen dos ceros consecutivos. Plantea y resuelve una recurrencia lineal para q_n.

14. Se quiere cubrir un tablero rectangular de tamaño $2 \times n$ usando piezas de tamaño 1×2 y 2×2. Utiliza una sucesión definida recursivamente para para determinar de cuantas maneras se puede cubrir el tablero.

15. Se estacionan motocicletas y turismos en una fila de n espacios. Usa una relación de recurrencia para determinar el número de formas de estacionar dichos vehículos, sabiendo que todos los espacios deben quedar ocupados y que cada motocicleta ocupa un espacio y cada turismo dos. (Se supone que todas las motocicletas son iguales y todos los turismos también).

16. Un muchacho dispone de n monedas para comprar chucherías. Le gustan las palomitas, que cuestan 1 moneda cada bolsa y dos tipos de pasteles que cuestan 2 monedas cada uno. ¿De cuantas maneras se puede gastar las n monedas? (Indicación: distinguir entre n par e impar)

17. Un muchacho se dispone a comprar chucherías en una máquina expendedora. Le gustan las palomitas, que cuestan 1 moneda cada bolsa y dos tipos de pasteles que cuestan 2 monedas cada uno. ¿De cuantas maneras puede sacar las chuches que elija gastando n monedas?