Relación de ejercicios 5

1. Establece si son verdaderas o falsas las siguientes relaciones:

i) $a \in \{a\}$	ii) $\{a\} \in \{a\}$	iii) $\{a, b\} \in \{a, \{a, b\}\}$
iv) $a \subseteq \{a\}$	v) $\{a\} \subseteq \{a\}$	vi) $\{a, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}\}$

2. Sean los conjuntos $A_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A_2 = \{0, 1, 2\}$, $A_3 = \{-1, 0, 1\}$ y sea el conjunto de índices $I = \{1, 2, 3\}$.

   - Determina los siguientes conjuntos: *a*) $\bigcup_{i \in I} A_i$ *b*) $\bigcap_{i \in I} A_i$
   - Tomando $\mathbb{Z}$ como conjunto universal, determina:

   $$c)\ \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \qquad d)\ \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

3. En el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales se consideran los subconjuntos siguientes:
   P: conjunto de números naturales primos; D: conjunto de múltiplos de dos; T: conjunto de múltiplos de tres; I: conjunto de números impares y S: conjunto de múltiplos de seis.

   - Determina o escribe de forma alternativa:
     a) $P \cap I$, *b*) $P \cap D$, *c*) $D \cap T$, *d*) $D \cap S$, *e*) $I \cap S$.
   - Determina o escribe de forma alternativa el complementario de:
     f) P, *g*) I, *h*) D.
   - Determina o escribe de forma alternativa:
     i) $P \cup I$, *j*) $P - I$, *k*) $\overline{D \cap I}$.

4. Sin utilizar propiedades básicas, solo definiciones, demuestra que para cualquier par de conjuntos A y B, los siguientes enunciados son equivalentes:

   i) $A \subseteq B$, ii) $A \cap B = A$, iii) $A \cup B = B$

5. Demuestra la validez de las siguientes igualdades para cualquier terna de conjuntos A, B y C.

   a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
   b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
   c) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (\overline{A} \cap C)$

6. Da un contraejemplo que demuestre que la siguiente igualdad no es válida para cualesquiera conjuntos A, B y C:

$$A - (B - C) = (A - B) - C$$

7. La operación $\triangle$, *diferencia simétrica* de los conjuntos A y B se define:

$$A \triangle B \overset{def}{=} (A - B) \cup (B - A)$$

   a) Demuestra la igualdad $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

   b) Da un contraejemplo para demostrar que no se verifican la igualdad $A \triangle (B \cup C) = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$

8. Sea el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ y $f \subseteq X \times X$ la relación binaria dada por la matriz

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 1 \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

   Completa la matriz $\mathcal{M}_f$ sabiendo que f es una función inyectiva.

9. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{6, 7, 8, 9\}$, se define la relación $\mathcal{R} \subseteq A \times B$

$$\mathcal{R} = \{(1, 8), (2, 6), (5, y), (5, 7), (x, z), (t, 8)\}$$

   En cada uno de los apartados, encuentra todos los posibles valores de las variables $x, t \in A$, $y, z \in B$ de tal forma que:

   a) $\mathcal{R}$ no sea una función.

   b) $\mathcal{R}$ sea una función inyectiva.

   c) $\mathcal{R}$ sea una función, pero no sea sobreyectiva.

10. Sea la función $f : \mathbb{Z}_{51} \to \mathbb{Z}_{51}$ definida $f([x]_{51}) = [3x]_{51}$.

   a) Halla la imagen de $[20]_{51}$.

   b) Encuentra, si existe, la preimagen de $[21]_{51}$ y la de $[22]_{51}$.

   c) Analiza si f es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

11. Consideramos la función $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. Halla la imagen de f. Demuestra que $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathrm{Im}(f)$ es biyectiva y determina su inversa.

12. Demuestra que si escogemos cinco números cualesquiera entre el 1 y el 8, dos de ellos suman 9.

13. Demuestra que si se eligen diez puntos cualesquiera en el interior de un triángulo equilátero de lado 1, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $\frac{1}{3}$.

14. Demuestra que si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g también es sobreyectiva.