1. De las siguientes cadenas de símbolos, diga cuáles son fórmulas bien formadas de la Lógica Clásica Proposicional, cuáles no y diga por qué:

   a) $p \wedge q \rightarrow \neg r$ NO

   b) $((p \wedge \neg r) \rightarrow q)$ SI

   c) $\neg\cancel{(}\neg(p \vee q)\cancel{)}$ NO

   d) $(q \vee r) \rightarrow \sqcup$ NO

   e) $(\neg p \wedge r) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg r)$ SI

   f) $r \leftarrow (\neg p \vee q)$ NO

NO: faltan paréntesis que fijen el orden entre $\wedge$ y $\rightarrow$

SI

NO: sobran paréntesis. $\neg\neg(p \vee q)$

NO: falta el consecuente de la implicación

SI

NO: El conectivo '$\leftarrow$' no está en el lenguaje

2. Determine los modelos y contramodelos de la fórmula

$$A = (p \vee \neg q) \to (p \wedge q) :$$

¿Es satisfacible la fórmula A? ¿Es válida la fórmula A?

---

	p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$
I_1	1	1	0	1	1	1
I_2	1	0	1	1	0	0
I_3	0	1	0	0	0	1
I_4	0	0	1	1	0	0

Modelos: $Mod(A) = \{I_1, I_3\} \neq \emptyset \Longrightarrow$ A es satisfacible

Contramodelos: $\overline{Mod(A)} = \{I_2, I_4\} \neq \emptyset \Rightarrow$ A NO es válida

3. Determine los modelos y contramodelos de la fórmula

$$B = (p \to \neg q) \to (\neg p \vee \neg q):$$

¿Es satisfacible la fórmula B? ¿Es válida la fórmula B?

---

	p	q	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg p$	$\neg p \vee \neg q$	$(p \to \neg q) \to (\neg p \vee \neg q)$
I_1	1	1	0	0	0	0	1
I_2	1	0	1	1	0	1	1
I_3	0	1	0	1	1	1	1
I_4	0	0	1	1	1	1	1

Modelos: $Mod(B) = \{I_1 I_2 I_3 I_4\} \neq \emptyset \Rightarrow B$ es satisfacible

Contramodelos: $\overline{Mod}(B) = \emptyset \longrightarrow B$ es válida

4. Determine si son insatisfacibles, satisfacibles o válidas las siguientes fórmulas:

a) $(p \to q) \to p$

b) $(p \lor q) \to \neg(q \lor p)$

c) $(p \land q) \to (q \land p)$

---

	p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$	$p \lor q$	$\neg(q \lor p)$	$(p \lor q) \to \neg(q \lor p)$	$p \land q$	$q \land p$	$(p \land q) \to (q \land p)$
I_1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
I_2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
I_3	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
I_4	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1

a) Satisfacible
No válida

b) Satisfacible
No válida

c) Satisfacible
Válida

5. Determine si son satisfacibles o insatisfacibles los siguientes conjuntos de fórmulas:

a) $\{p, q, p \vee q\}$

b) $\{p, \neg q, p \wedge q\}$

c) $\{p \vee q, \neg(\neg p \rightarrow q)\}$

d) $\{p \rightarrow q, (p \wedge q) \rightarrow \neg p\}$

---

	p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg(\neg p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \rightarrow \neg p$	(a)	(b)	(c)	(d)
I_1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	M	–	–	
I_2	1	0	1	1	0	0	1	0	1	–	–	–	
I_3	0	1	1	0	0	1	1	0	1	–	–	–	M
I_4	0	0	0	1	0	1	0	1	1	–	–	–	M

$Mod(\{p, q, p \vee q\}) = \{I_1\} \Rightarrow$ (a) es satisfacible

$Mod(\{p, \neg q, p \wedge q\}) = \emptyset \Rightarrow$ (b) es insatisfacible

$Mod(\{p \vee q, \neg(\neg p \rightarrow q)\}) = \emptyset \Rightarrow$ (c) es insatisfacible

$Mod(\{p \rightarrow q, (p \wedge q) \rightarrow \neg p\}) = \{I_3, I_4\} \Rightarrow$ (d) es satisfacible

6. Construya, si es posible: (a) una fórmula *bien formada* que NO sea *válida*; (b) una fórmula *bien formada* que SÍ sea *válida*; (c) una fórmula *válida* que NO sea *bien formada*.

(a) $p \wedge \neg p$, $p \to q$, ...

(b) $p \vee \neg p$, $p \to p$, $((p \to q) \wedge p) \to q$, ...

(c) No es posible. El concepto de validez se aplica solamente a fórmulas bien formadas.

7. Construya, si es posible: (a) una fórmula *satisfacible* que NO sea *válida*; (b) una fórmula *satisfacible* que SÍ sea *válida*; (c) una fórmula *válida* que NO sea *satisfacible*.

(a) $p \vee q$, $p \to q$, ...

(b) $p \to p$, $p \vee \neg p$, $((p \to q) \wedge p) \to q$, ...

(c) No es posible: Validez implica satisfacibilidad

8. Razone con exactitud sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) Si una fórmula no es válida, su negación sí lo es.

Falso: p no es válida

$\neg p$ tampoco es válida

b) Si una fórmula no es satisfacible, su negación sí lo es.

Verdadero: $I(A)=0$ para todo I $\Longrightarrow$ $I(\neg A)=1$ para todo I

$\Longrightarrow$ $\neg A$ es válida y satisfacible

c) Si una fórmula no es consecuencia de un conjunto de fórmulas, su negación sí lo es.

Falso: $p \not\models q$

$p \not\models \neg q$

d) Si una fórmula no es consecuencia de un conjunto de fórmulas, su negación tampoco.

Falso: $\neg p \not\models p$

pero: $\neg p \models \neg p$

e) Si un conjunto de fórmulas es satisfacible, cada elemento del conjunto también es satisfacible.

Verdadero: Ω satisfacible $\overset{\text{(def)}}{\Longleftrightarrow}$ Existe I tal que $I(A)=1$ para todo $A \in \Omega$

$\Longrightarrow$ A es satisfacible para todo $A \in \Omega$

f) Si cada elemento de un conjunto de fórmulas es satisfacible, el conjunto también es satisfacible.

Falso: p es satisfacible

$\neg p$ es satisfacible

pero $\{p, \neg p\}$ es insatisfacible

9. Formalice los siguientes razonamientos:

a) *Si no hay control de nacimientos, entonces la población crece ilimitadamente. Pero si la población crece ilimitadamente, aumentará el índice de pobreza. Por consiguiente, si no hay control de nacimientos, aumentará el indice de pobreza.*

p = "Hay control de nacimientos"
q = "La población crece ilimitadamente"
r = "Aumentará el índice de pobreza"

$$\underbrace{\neg p \to q,\ q \to r}_{\text{Hipótesis}} \models \underbrace{\neg p \to r}_{\text{Conclusión}}$$

$$= \Omega \models A =$$

b) *Si Valdés ha instalado calefacción central, entonces ha vendido su coche o ha pedido dinero prestado al banco. Por tanto, si Valdés no ha vendido su coche, entonces no ha instalado calefacción central.*

p = "Valdés ha instalado calefacción central"

q = "(Valdés) ha vendido su coche"

r = "(Valdés) ha pedido dinero prestado al banco"

$$p \to (q \vee r) \models \neg q \to \neg p$$

Formas alternativas:

(a)

$$\frac{\begin{array}{c}\neg p \to q \\ q \to r\end{array}}{\neg p \to r}$$

$$(\neg p \to q) \wedge (q \to r) \models \neg p \to r$$

$$\models \big((\neg p \to q) \wedge (q \to r)\big) \to \neg p \to r$$

b)

$$\frac{p \to (q \vee r)}{\neg q \to \neg p}$$

$$\models \big(p \to (q \vee r)\big) \to (\neg q \to \neg p)$$

11. Demuestra la siguiente propiedad: Si $\Omega \supseteq \Omega'$, entonces $\texttt{Mod}(\Omega) \subseteq \texttt{Mod}(\Omega')$

Propiedades básicas de Mod:

TEOREMA 4.3.8 *Sean A y B fórmulas, entonces:*

- $\texttt{Mod}(\neg A) = \overline{\texttt{Mod}(A)} \quad (= \mathcal{I} - \texttt{Mod}(A))$
- $\texttt{Mod}(A \wedge B) = \texttt{Mod}(A) \cap \texttt{Mod}(B)$
- $\texttt{Mod}(A \vee B) = \texttt{Mod}(A) \cup \texttt{Mod}(B)$
- $\texttt{Mod}(A \to B) = \overline{\texttt{Mod}(A)} \cup \texttt{Mod}(B)$
- $\texttt{Mod}(A \leftrightarrow B) = \overline{\texttt{Mod}(A) \bigtriangleup \texttt{Mod}(B)}$
- $\texttt{Mod}(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \texttt{Mod}(\Omega_1) \cap \texttt{Mod}(\Omega_2)$

$$\Omega \supseteq \Omega' \Rightarrow \Omega = \Omega' \cup (\Omega - \Omega')$$

(def −, Absorción)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Mod}(\Omega) = \mathrm{Mod}(\Omega') \cap \mathrm{Mod}(\Omega - \Omega') \\ \mathrm{Mod}(\Omega') \cap \mathrm{Mod}(\Omega - \Omega') \subseteq \mathrm{Mod}(\Omega') \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Mod}(\Omega) \subseteq \mathrm{Mod}(\Omega')$$

(def ∩)