Jaime Rodrigo Roldan Carcelles 77228554M

Tema - 4 / CALCULO DE PROBABILIDADES

- Todo ámbito científico un experimento no tiene más que un objetivo, y es obtener información por parte de la Naturaleza que se esté interesado en estudiar. Dentro de los experimentos científicos, existen:

• **EXPERIMENTOS DETERMINISTAS**: Son aquellos que podemos conocer perfectamente los resultados, siempre que los repitamos en las mismas condiciones. El desarrollo es pedícible.
Se centra en un contexto de incertidumbre. No sabemos lo que puede pasar. Sí podemos conocer los posibles resultados.

• **EXPERIMENTOS ALEATORIOS**: Son aquellos que no vamos a conocer el resultado del experimento. Lo que sí vamos a conocer son los posibles resultados de un experimento.

DEFINICIONES

- **ESPACIO MUESTRAL**: Conjunto de todos los resultados posibles. Se denota con la letra Ω o E. Puede tener:

$|\Omega| < \infty$ (Cardinal finito)

$|\Omega| = \infty$ → Cardinal infinito numerable / Ej: nº lanzam. moneda.
→ " " continuo / Ej: Tiempo bombilla fundirse.

- **SUCESO ALEATORIO**: Subconjunto que se denota, A, del espacio muestral. ($A < \Omega$)

$A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$P(\Omega) = \{X, X \subset \Omega\}$

$|P(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$ Ej: lanzar una moneda dos veces.
¿Ω?
- Lanz 1 mone $\Omega = \{C \text{ o } F\}$
- " 2 veces $\Omega = \{CC, CF, FC, FF\}$

$P(\Omega) = \{\emptyset, \{CC\}, \{CF\}, \{F,C\}, \{F,F\} \ldots$

- **SUCESO ELEMENTAL**: Esta formado por un único resultado del experimento. Están formados por un único resultado posible.

Ej: A = 'salir 2 al lanzar un dado.'
B = 'ser niño'.

Jaime Rodrigo Roldán Corcelles 77228554M

- **SUCESO COMPUESTO**: Unión de varios sucesos elementales.
  Ej: A = 'salir copa al extraer una carta'.

- **SUCESO SEGURO**: El que sabemos que ocurrirá seguro al realizar el experimento. Se corresponde con el espacio muestral.
  A = 'salir menos de un 8' al lanzar un dado.

- **SUCESO IMPOSIBLE**: No puede ocurrir nunca.
  A = 'salir un número > que 7' al lanzar un dado / $A = \emptyset$

OPERACIONES CON SUCESOS

- **Unión de sucesos**: $\boxed{A \cup B}$. Suceso que ocurre cuando sucede A o B. (alguno de los dos).

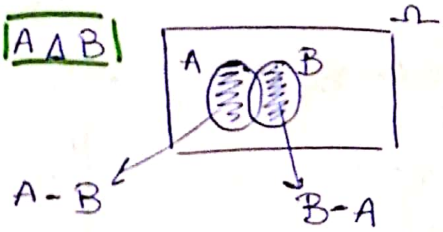
- **INTERSECCIÓN DE SUCESOS** $\boxed{A \cap B}$ / Suceso que ocurre cuando sucede A y sucede B (suceden ambos a la vez).

- **SUCESO CONTRARIO** (Complementario) $\boxed{\bar{A},\ A^c}$
  - Suceso que ocurre cuando no sucede A.

- **Inclusión**: Cuando ocurre un suceso si esta incluido en el otro, tambien incluye al otro. Se denota $\rightarrow \boxed{A \subset B}$
  obtenemos que $\emptyset \subset A \subset \Omega \quad \forall A \in P(\Omega)$

- **Diferencia de sucesos**: $\boxed{A - B}$
  $A - B = A \cap B^c$

- **Diferencia simétrica de sucesos**: $\boxed{A \Delta B}$
  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$



- **Sucesos Incompatibles**:
  A y B son incompatibles si hay $A \cap B = \emptyset$

PROPIEDADES DE LOS SUCESOS

- $\bar{\emptyset} = E$, $\bar{E} = \emptyset$ $\qquad \bar{\emptyset} = \Omega$, $\bar{\Omega} = \emptyset$
- **Idempotente** $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- **Conmutativa**: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- **Asociativa**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Existencia del ínfimo ($\emptyset$)**: $\forall A$, $A \cup \emptyset = A$; $A \wedge \emptyset = \emptyset$

Jaime Rodrigo Roldán Carcelles 77228554M B

- **EXISTENCIA DEL SUPREMO** [(Ω)(E)]

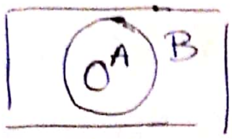
$A \cap E = A \quad , \quad A \cup E = E$

- **EXISTENCIA DEL COMPLEMENTARIO**:

$A \cup \bar{A} = E$

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

- Si $A \subset B \rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$



- **DISTRIBUTIVA**

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(\cancel{A \cup})\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- **ABSORCIÓN**: $(A \cap B) \cup A = A$

$(A \cup B) \cap A = A$

- **INVOLUCIÓN**: $\bar{\bar{A}} = A$

- **COTAS**: Si $A \subset B \rightarrow A \cap B = A$

$A \cup B = A$

$A \cap B \subset A \subset A \cup B$

$A \cap B \subset B \subset A \cup B \quad \forall A, B$

- **LEYES DE MORGAN**: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

DEFINICIÓN (espacio probabilizable)

- Sea Ω un espacio muestral y sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra o álgebra de sucesos entonces $(\Omega, \mathcal{A})$ se denomina espacio probabilizable.

- **DEFIN. CLÁSICA DE PROBABILIDAD**:

- La interpretación clásica de la probabilidad se basa en considerar que los resultados del experimento son igualmente probables (equiprobables), es decir si un experimento tiene N resultados posibles, la probabilidad de cada resultado es $\frac{1}{N}$. Si queremos estudiar el suceso A correspondiente a una característica y K de los N elementos tienen esta característica, entonces $P(A) = \frac{K}{N}$

REGLA DE LAPLACE: $\boxed{P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}}$

Esta regla es válida en el caso de que los sucesos elementales sean equiparables. Los inconvenientes de la definión clásica de probabilidad nos lleva a definir de una nueva forma la probabilidad.

Jaime Rodrigo Roldán Carcelles 77228554J B3

• **DEFINI. FRECUENTISTA DE LA PROBABILIDAD:**

- Si realizamos una prueba o experiment o aleatorio cuyo espacio muestral es Ω y repetimos la prueba N veces, un suceso A se habrá verificado (d) un número determinado de veces, n_A.

$(0 \leq n_A \leq N)$. Consideramos la frecuencia del suceso A,

$f(A) = \frac{n_A}{N}$. Si realizamos, aumentamos N, entonces $\frac{n_A}{N}$ tienden a un valor constante que es el que llamaremos probabilidad del suceso A,

$$p(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_A}{N}$$

INCONVENIENTES

- No es posible realizar un experimento infinitas veces, además el sistema observado puede variar a lo largo del tiempo. y con el las frecuencias relativas.
- No podría calcularse la probabilidad en experimentos que no pueden repetirse, por ejemplo la probabilidad de que una empresa se arruine al lanzar un nuevo producto al mercado.

• **DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE PROBABILIDAD**

- Una función de probabilidad definida sobre un espacio probabilizable $(\Omega, \mathcal{A})$ es una aplicación

$P: \mathcal{A} \xrightarrow{\subset P(\Omega)} [0,1]$ que verifica los axiomas:

A.1: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

A.2: $P(\Omega) = 1$

A.3: Para todo $\{A_i : A_i \in \mathcal{A}\}_{i \in J}$, se verifica.

$$P\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \sum_{i \in J} P(A_i) \text{ si } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para todo } i \neq j,\ i,j \in I$$

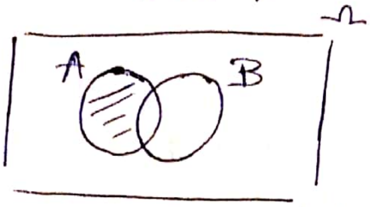
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset$$

- La terna $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ recibe el nombre de espacio de probabilidad.

Jaume Rodrigo Roldán Corcelles. 77228554M

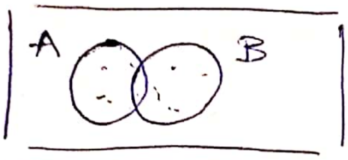
- **PROPIEDADES DEL ESPACIO DE PROBABILIDAD**

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ $\quad 1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$
  $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
  $P(A) = P(A-B) + P(A \cap B)$



$A = (A-B) \dot{\cup} (A \cap B)$
Unión disjunta

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.



- Si $A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$

- **PROBABILIDAD CONDICIONADA**

- El objetivo de la probabilidad condicionada es analizar como afectará a la probabilidad de un suceso dado $A \in \mathcal{A}$ el hecho de que un suceso $B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$ haya ocurrido.

Si sabemos que un suceso B ha ocurrido es porque el resultado del experimento es un elemento de B, con lo que la probabilidad de A se verá modificada si los elementos de B verifican también el suceso A, es decir la probabilidad de que ocurra A dado que ha ocurrido B será tanto mayor cuánto más elementos en común tengan los dos sucesos y esto solo puede medirse mediante la probabilidad a la intersección de ambos sucesos.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

↳ probabilidad de que sucede A sabiendo que ha sucedido B.

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

Jaime Rodrigo Roldán Corcelles 77228554M

• INDEPENDENCIA DE SUCESOS

- Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y un suceso $B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$, si suprimimos que B ha ocurrido. Podemos estudiar de nuevo las posibilidades de los sucesos $A \in \mathcal{A}$ mediante $P(A/B) = P_B(A)$.

Puede ocurrir que:

1: $P(A/B) \neq P(A) \rightarrow$ la presencia del suceso B altera la probabilidad inicial de A $\rightarrow$ Diremos que los sucesos A y B son dependientes.

2: $P(A/B) = P(A)$. El hecho de que haya ocurrido B no influye en la probabilidad que A tenía originalmente. En este caso se dice que A y B son independientes.

si A y B independientes

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Si A y B son independientes.

Si A y B son independientes entonces $P(A/B) = P(A)$ luego

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

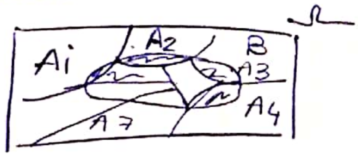
• Si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Veamos que son independientes, es decir veamos que $P(A/B) = P(A)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}.$$

Por tanto $P(A/B) = P(A)$ y A y B son indep.

• TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

$$P(B) = \sum_{i=1}^{7} P(B \cap A_i) =$$



$$= \sum_{i=i}^{7} P(A_i) P(B/A_i)$$

$P(A_i) P(B/A_1) + P(A_i) P(B/A_i)$

Escaneado con CamScanner

Jaime Rodrigo Roldán Corcelles 77228554M

- **SISTEMA COMPLETO DE SUCESOS**

- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ espacio de probabilidad y sea $\{A_i\}_{i \in J} \subset \mathcal{A}$ $(A_i \in \mathcal{A})$ conjunto de sucesos. Decimos que $\{A_i\}_{i \in J}$ es un sistema completo si verifica:

(1) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

(2) $\bigcup_{i \in J} A_i = \Omega$

- **TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL**

- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ espacio de probabilidad y sea $\{A_i\}_{i \in J}$ sistema completo de sucesos. Conocemos $P(A_i)$ con $P(A_i) > 0 \ \forall i \in J$ y $P(B/A_i)$ para cada $i \in J$. Entonces:

$$P(B) = \sum_{i \in J} P(A_i) P(B/A_i)$$

$P(B/A_i)$ verisimilitudes

$P(A_i)$ probabilidad a prior

- **TEOREMA DE BAYES**

- Sea $(E, \mathcal{A}, p)$ espacio de probabilidad y sea $\{A_i\}_{i \in J}$ un sistema completo de sucesos tal que $P(A_i) > 0 \ \forall i \in J$. Sea $B \in \mathcal{A}$ un suceso cualquiera con $P(B) > 0$, entonces

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{\sum_{i \in J} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$