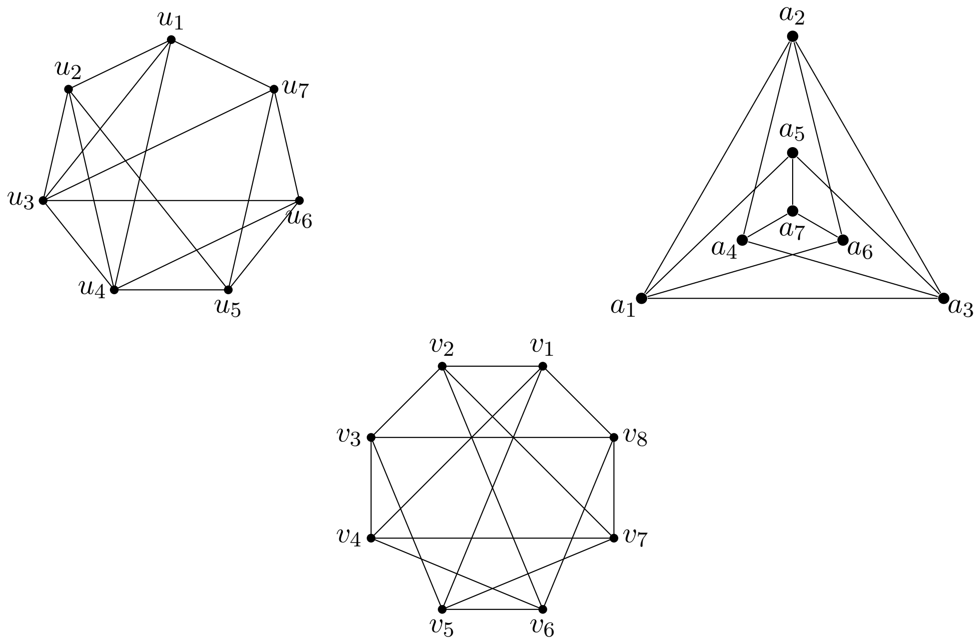
Relación de ejercicios 11

1. Dibuja, si es posible, un grafo plano con 8 aristas, 7 vértices y 4 regiones. Si no es posible, justifícalo.

2. Estudia si los siguientes grafos son planos:



3. Se desea diseñar una placa con 6 componentes electrónicos, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 y c_6, de manera que no se corten las pistas y que todos estén conectados entre sí, salvo c_1 con c_3 y c_4 con c_6. Razona si es posible.

4. En un laboratorio hay una serie de compuestos químicos, $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ que hay que almacenar en cajas para su traslado. No pueden ser almacenados en una misma caja dos compuestos que reaccionen entre sí (como ácidos y bases). Los productos que reaccionan vienen dados por la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	1	1	2	2	3	2
3	5	4	3	4	5	5	5
4	6	7	5	6	8	8	6
	8			7			7
				8			

¿Cómo podemos elegir los elementos que hemos de introducir en cada caja? ¿Cuántas cajas serán necesarias para poder trasladar los productos?

5. El jefe de estudios de una escuela tiene que programar las fechas de los exámenes finales de 7 asignaturas: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$. Se sabe que los siguientes pares de asignaturas tienen alumnos en común:

$$\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_7\}, \{a_2, a_3\}, \{a_2, a_4\}, \{a_2, a_5\}, \{a_2, a_7\},$$
$$\{a_3, a_4\}, \{a_3, a_6\}, \{a_3, a_7\}, \{a_4, a_5\}, \{a_4, a_6\}, \{a_5, a_6\}, \{a_5, a_7\}, \{a_6, a_7\}$$

¿Cuántos días son necesarios para realizar todos los exámenes de modo que ningún estudiante tenga dos exámenes el mismo día?

6. Dibuja, si es posible, el grafo que corresponde a cada una de las propiedades descritas a continuación. Si no es posible explicar por qué:

   a) Un grafo cuyo número de vértices sea igual al número de aristas más uno y no sea un árbol.

   b) Un árbol con 5 vértices con grados: 1, 1, 2, 2, 4.

   c) Un árbol con 4 vértices internos y 6 hojas.

   d) Un árbol binario completo con 9 hojas y altura 3.

7. Un árbol cuaternario completo tiene 27 vértices internos. ¿Cuántas aristas tiene? ¿Cuántas hojas?

8. ¿Cuántos vértices internos tiene un árbol ternario completo con 817 hojas?

9. ¿Cuál es el número máximo de vértices internos que puede tener un árbol cuaternario completo de altura 8?

10. En una compañía donde trabajan 125 ejecutivos se instala un nuevo sistema de comunicación telefónica. Lo inaugura la presidenta, quien llama a sus cuatro vicepresidentes. A continuación, cada vicepresidente llama a otros cuatro ejecutivos; éstos, a su vez, a otros cuatro y así sucesivamente.

    a) ¿Cuántas llamadas son necesarias para comunicar con los 125 ejecutivos?

    b) ¿Cuántos ejecutivos hacen llamadas?

11. Consideramos la expresión: $((p_1 \vee p_2) \to q) \leftrightarrow ((p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q))$

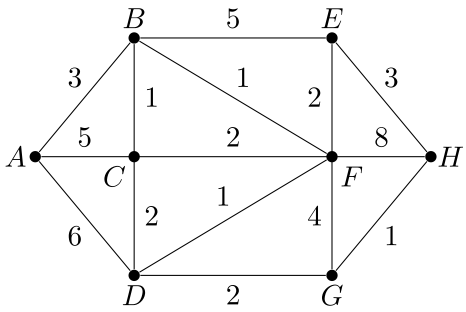
    a) Represéntala mediante un árbol con raíz ordenado.

    b) Determina los recorrido en orden previo y en orden posterior del árbol anterior.

12. Traza un árbol binario para la expresión postfija que sigue y escribe su representación prefija:

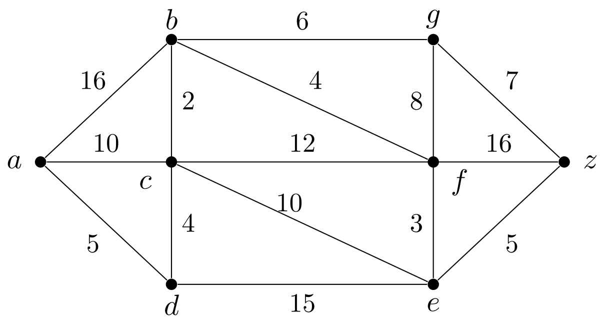
$$AB + CD * EF / - - A*$$

13. Usa el algoritmo de Prim para hallar un árbol generador minimal del grafo de la siguiente figura:



14. El grafo del ejercicio anterior muestra la conexión entre 8 centros de comunicación. Los vértices representan a los centros y las aristas a los canales de comunicación. Los tiempos de transmisión están representados por los pesos de las aristas. Supongamos que a las 7:00 el centro de comunicaciones A transmite una noticia a través de todos sus canales. Los otros centros transmitirán esa noticia tan pronto como la reciban. Usa el algoritmo de Dijkstra para determinar el menor tiempo en que cada uno de los centros B, C, D, E, F, G y H recibe la noticia.

15. En el grafo de la figura se representa una red ferroviaria donde la distancia entre cada par de ciudades se expresa en km:



   a) Halla el camino más corto para viajar de a hasta z.

   b) Se quiere renovar la red ferroviaria de manera que el coste en km sea mínimo y que cada par de ciudades tenga conexión por tramos renovados. ¿Qué tramos deben renovarse?

16. En una empresa la red local de ordenadores está representada por un grafo ponderado $G = (\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}, E)$ en el que cada vértice representa un ordenador y cada arista un segmento de cable 10Base-T. El coste (peso) de cada arista es su longitud en metros. El grafo G viene determinado por la matriz M_G en la que cada elemento $m_{i,j}$ es la longitud en metros del cable que une al ordenador c_i con el c_j en el caso de que exista ese cable o bien es 0 si no hay cable entre los ordenadores c_i y c_j.

$$M_G = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Usa un algoritmo apropiado para encontrar la ruta más corta entre los ordenadores c_1 y c_6.

b) Se quiere renovar parte de la red con cables 100Base-T de forma que todos los ordenadores estén conectados con los nuevos cables pero utilizando el mínimo número de metros de cable posible. Utiliza un algoritmo apropiado para determinar qué cables deberían renovarse.