1. Determine los modelos y contramodelos del conjunto de fórmulas

$$\Omega = \{\neg q \to p, \neg p \vee r, \neg q \to \neg r\}$$

¿El conjunto Ω es satisfacible?

¿Es correcta la inferencia $\Omega \models q$?

¿Es correcta la inferencia $\Omega \models r$?

$Mod(\Omega)$

$\overline{Mod(\Omega)}$

---

	p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \to p$	$\neg p \vee r$	$\neg q \to \neg r$
I_1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
I_2	1	0	1	0	1	0	1	1	0
I_3	0	1	1	1	0	0	1	1	1
I_4	0	0	1	1	1	0	0	1	0
I_5	1	1	0	0	0	1	1	0	1
I_6	1	0	0	0	1	1	1	0	1
I_7	0	1	0	1	0	1	1	1	1
I_8	0	0	0	1	1	1	0	1	1

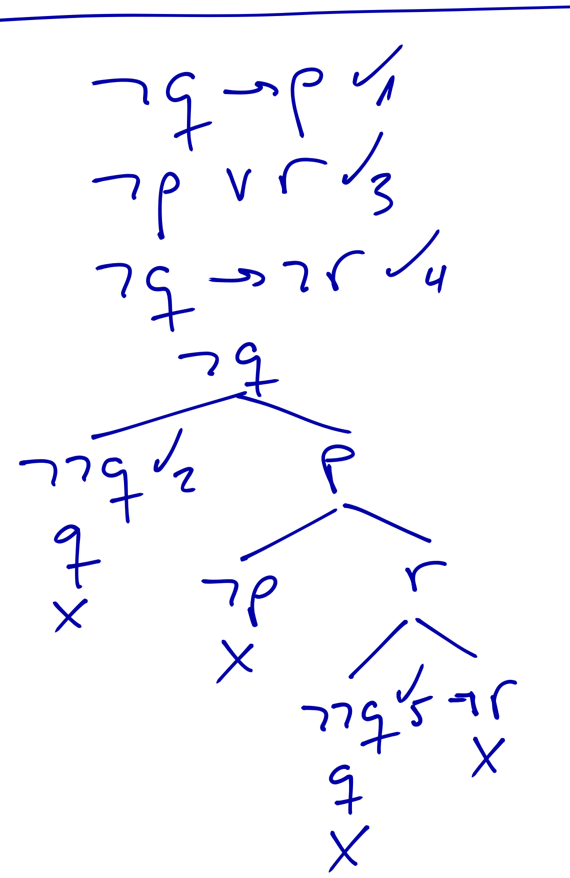
$Mod(\Omega) = \{I_1, I_3, I_7\}$

$Mod(q) = \{I_1, I_3, I_5, I_7\}$

$Mod(r) = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$

$Mod(\Omega) \subseteq Mod(q) \Rightarrow \Omega \models q$

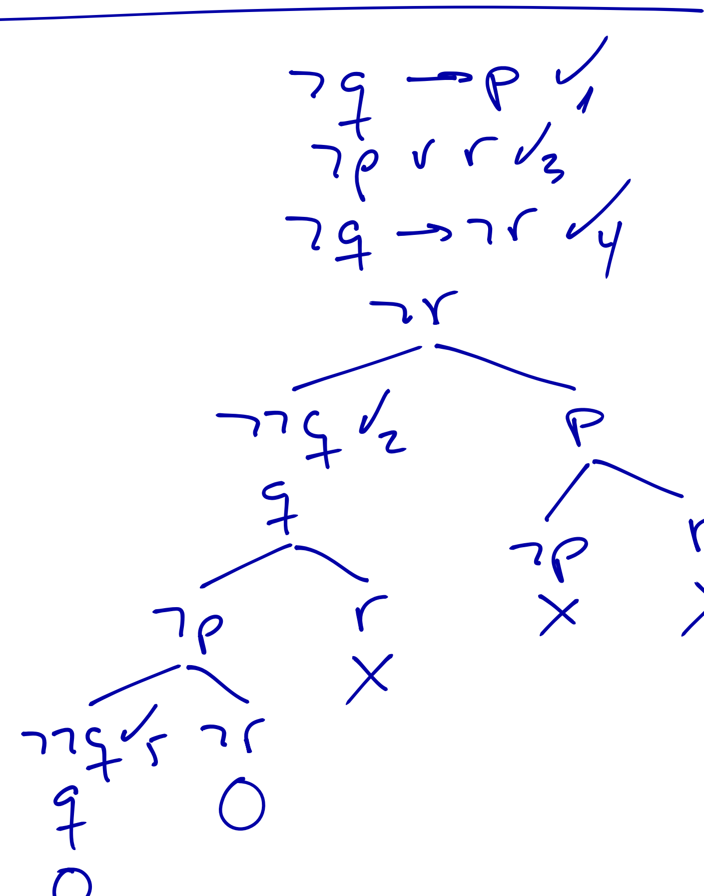
$Mod(\Omega) \not\subseteq Mod(r) \Rightarrow \Omega \not\models r$



La inferencia

$\neg q \to p, \neg p \vee r, \neg q \to \neg r \models q$

es valida



$\neg q \to p, \neg p \vee r, \neg q \to \neg r \not\models r$

Contramodelo:

$I_7(p) = 0$; $I_7(q) = 1$, $I_7(r) = 0$

$I_7 \in Mod(\Omega)$, $I_7 \notin Mod(r)$

2. Estudie la validez del siguiente razonamiento:

> *Si hay petróleo en Poligonia, entonces o los expertos tienen razón o el gobierno está mintiendo. No hay petroleo en Poligonia, o si no los expertos se equivocan. Así pues, el gobierno no está mintiendo.*

---

p = "Hay petróleo en Poligonia"

q = "Los expertos tienen razón"

$\neg q$ = "Los expertos se equivocan

r = "El gobierno está mintiendo"

$$p \to (q \vee r),\ \neg p \vee \neg q \models \neg r$$

$$\equiv$$

$$p \to (q \vee r),\ \neg p \vee (p \to \neg q) \models \neg r$$

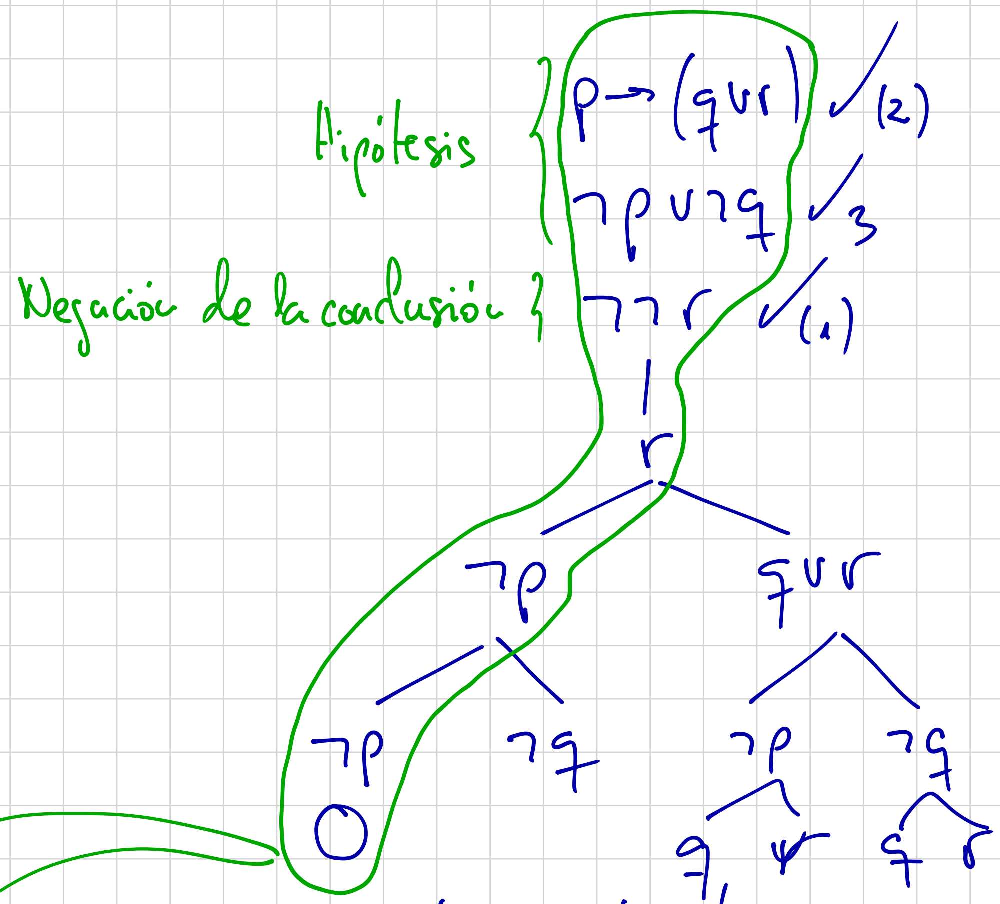
	p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg r$
I_1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
I_2	1	0	1	0	1	1	1	1	0
I_3	0	1	1	1	0	1	1	1	0
I_4	0	0	1	1	1	1	1	1	0
I_5	1	1	0	0	0	1	1	0	1
I_6	1	0	0	0	1	0	0	1	1
I_7	0	1	0	1	0	1	1	1	1
I_8	0	0	0	1	1	0	1	1	1

$$Mod(p \to (q \vee r), \neg p \vee \neg q) = \{I_2 I_3 I_4, I_7, I_8\} \not\subseteq \{I_5, I_6 I_7 I_8\} = Mod(\neg r)$$

Por lo tanto, la inferencia no es válida

(2) Usando Tablas semánticas:

$$p \to (q \vee r),\ \neg p \vee \neg q \models \neg r$$



▷ Rama completa y abierta $\Rightarrow$ Tabla inicial satisfacible

$\Rightarrow$ Inferencia No válida

▷ Contramodelo: $I(r)=1,\ I(p)=0,\ I(q)=1$ $\to$ Coincide con I_3

3. Consideremos las siguientes fórmulas:

$$A = p \to (q \to r), \qquad B = (p \wedge q) \to r$$

a) Determine los conjuntos `Mod`(A) y `Mod`(B).

b) ¿Qué relación hay entre A y B?

---

a)

	p	q	r	$p \wedge q$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$(p \wedge q) \to r$
I_1	1	1	1	1	1	1	1
I_2	1	0	1	0	1	1	1
I_3	0	1	1	0	1	1	1
I_4	0	0	1	0	1	1	1
I_5	1	1	0	1	0	0	0
I_6	1	0	0	0	1	1	1
I_7	0	1	0	0	0	1	1
I_8	0	0	0	0	1	1	1

$\mathrm{Mod}(A) = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_6, I_7, I_8\}$

$\mathrm{Mod}(B) = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_6, I_7, I_8\}$

b) Dado que $\mathrm{Mod}(A) = \mathrm{Mod}(B)$, podemos concluir que $A \equiv B$

4. Razone con exactitud sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

  a) Si $\Omega \models A$, es posible que exista $\Omega' \supset \Omega$ tal que $\Omega' \not\models A$.

  b) Si $\Omega \not\models A$, es posible que exista $\Omega' \supset \Omega$ tal que $\Omega' \models A$.

---

a/ **No**

Monotonía — Transitividad de $\subseteq$

$$\left.\begin{array}{l} \Omega' \supset \Omega \Rightarrow Mod(\Omega') \subseteq Mod(\Omega) \\ \Omega \models A \Rightarrow Mod(\Omega) \subseteq Mod(A) \end{array}\right\} \Rightarrow Mod(\Omega') \subseteq Mod(A) \Rightarrow \Omega' \models A$$

def de $\models$ — def. de $\models$

b) **Sí**: Podemos hallar Ω' de varias formas

- Para toda fórmula A: $\Omega \cup \{A\} \models A$ y $\Omega \cup \{A\} \supset \Omega$
- Si $B \in \Omega$: $\Omega \cup \{B \to A\} \models A$ y $\Omega \cup \{B \to A\} \supset \Omega$
- Para toda A: $\Omega \cup \{p \wedge \neg p\} \models A$ y $\Omega \cup \{p \wedge \neg p\} \supset \Omega$

. . .

5. Demuestre la validez de las siguientes fórmulas utilizando Tablas semánticas.

- a) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

Tabla inicial $\{ \neg((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ ✓$_1$

$p \to (q \to r)$ ✓$_4$

$\neg((p \to q) \to (p \to r))$ ✓$_2$

$p \to q$ ✓$_5$

$\neg(p \to r)$ ✓$_3$

p

$\neg r$

$\neg p$ | $q \to r$ ✓$_6$

X

$\neg p$ | q

X

$\neg q$ | r

X   X

Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la <u>tabla inicial es insatisfacible</u> y <u>la fórmula es válida</u>.

b) $((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))$

Tabla inicial $\{ \neg((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))$ ✓ 1

$\neg p \to \neg q$ ✓ 3

$\neg(q \to p)$ ✓ 2

q

$\neg p$

$\neg\neg p$ ✓ 4	$\neg q$
p	×
×	

Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la <u>tabla inicial es insatisfacible</u> y <u>la fórmula es válida</u>.

c) $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$

Tabla inicial $\{\ \neg(((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r)$ ✓1

$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)$ ✓2

$\neg r$

$p \vee q$ ✓3

$p \to r$ ✓4

$q \to r$ ✓5

p | q

$\neg p$ X | r X | $\neg p$ | r X

$\neg q$ X | r X

Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la tabla inicial es insatisfacible y la fórmula es válida.

d) $(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p$

Tabla inicial $\{\neg((p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p)$ ✓ 1

$p \rightarrow (q \wedge \neg q)$ ✓ 3

$\neg\neg p$ ✓ 2

p

$\neg p$	$q \wedge \neg q$ ✓
×	q
	$\neg q$
	×

Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la <u>tabla inicial es insatisfacible</u> y <u>la fórmula es válida</u>.

6. Use Tablas Semánticas para estudiar la validez de las siguientes fórmulas

$$A = (\neg r \lor (p \land q)) \to ((r \to p) \land (r \to q))$$

Tabla inicial $\{\neg((\neg r \lor (p \land q)) \to ((r \to p) \land (r \to q)))$ $\checkmark_1$

$\neg r \lor (p \land q)$ $\checkmark_2$

$\neg((r \to p) \land (r \to q))$ $\checkmark_4$

- $\neg r$
  - $\neg(r \to p)$ $\checkmark_5$
    - r
    - $\neg p$
    - $\times$
  - $\neg(r \to q)$ $\checkmark_6$
    - r
    - $\neg q$
    - $\times$
- $p \land q$ $\checkmark_3$
  - p
  - q
  - $\neg(r \to p)$ $\checkmark_7$
    - r
    - $\neg p$
    - $\times$
  - $\neg(r \to q)$ $\checkmark_8$
    - r
    - $\neg q$
    - $\times$

Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la tabla inicial es insatisfacible y la fórmula es válida.

$$B = (p \wedge r) \to ((q \to s) \to ((p \vee q) \to s))$$

Tabla inicial $\{$ $\neg((p \wedge r) \to ((q \to s) \to ((p \vee q) \to s)))$ ✓$_1$

$p \wedge r$ ✓$_2$

$\neg((q \to s) \to ((p \vee q) \to s))$ ✓$_3$

p

r

$q \to s$ ✓$_5$

$\neg((p \vee q) \to s)$ ✓$_4$

$p \vee q$ ✓$_6$

$\neg s$

- $\neg q$
  - p
    - $\bigcirc$
  - q
    - $\times$
- s
  - $\times$

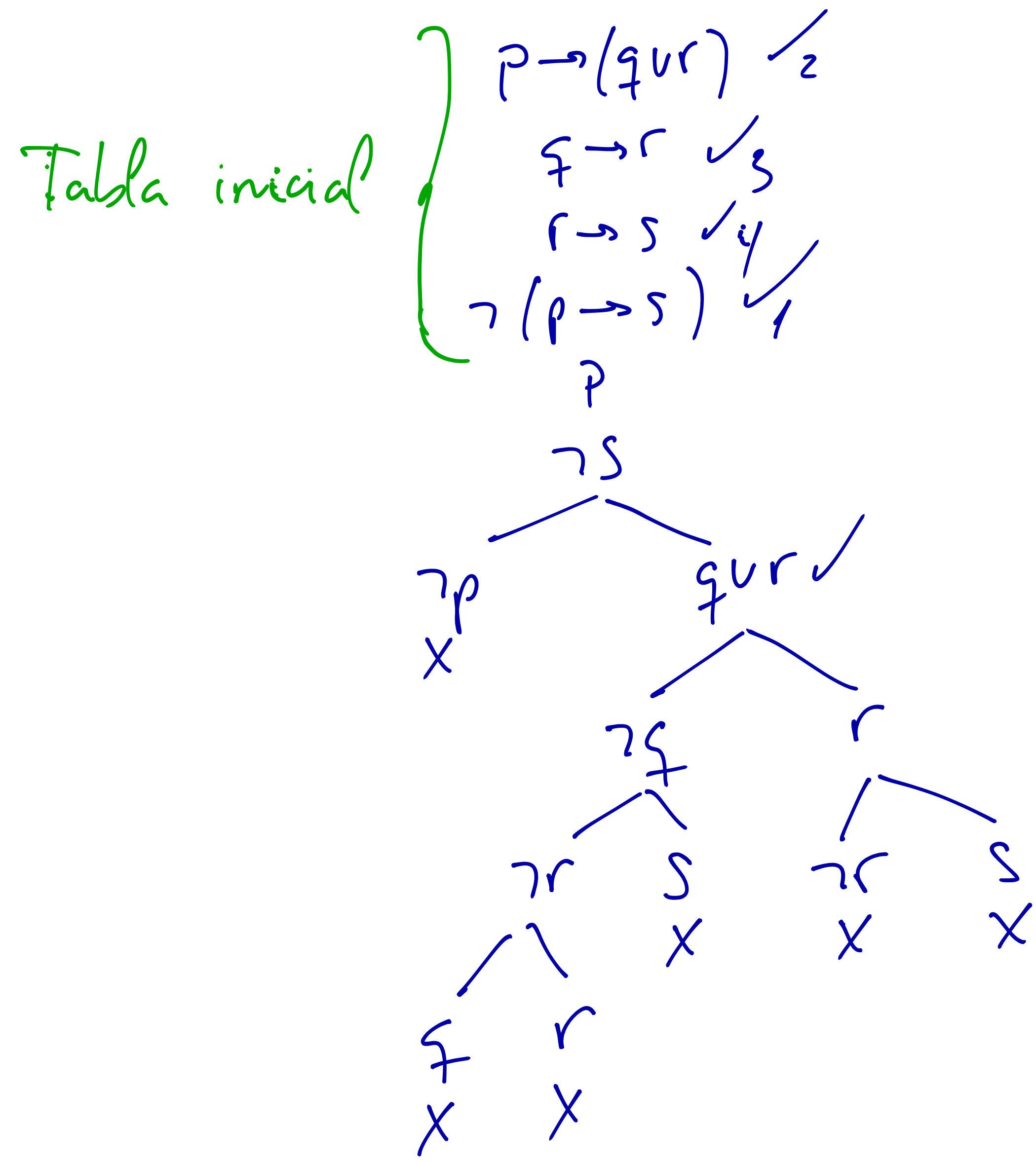
→ Rama abierta y completa $\Longrightarrow$ Tabla inicial satisfacible

$\Longrightarrow$ Fórmula no válida

Contramodelo: $I(p)=1, I(q)=0, I(s)=0, I(r)=1$

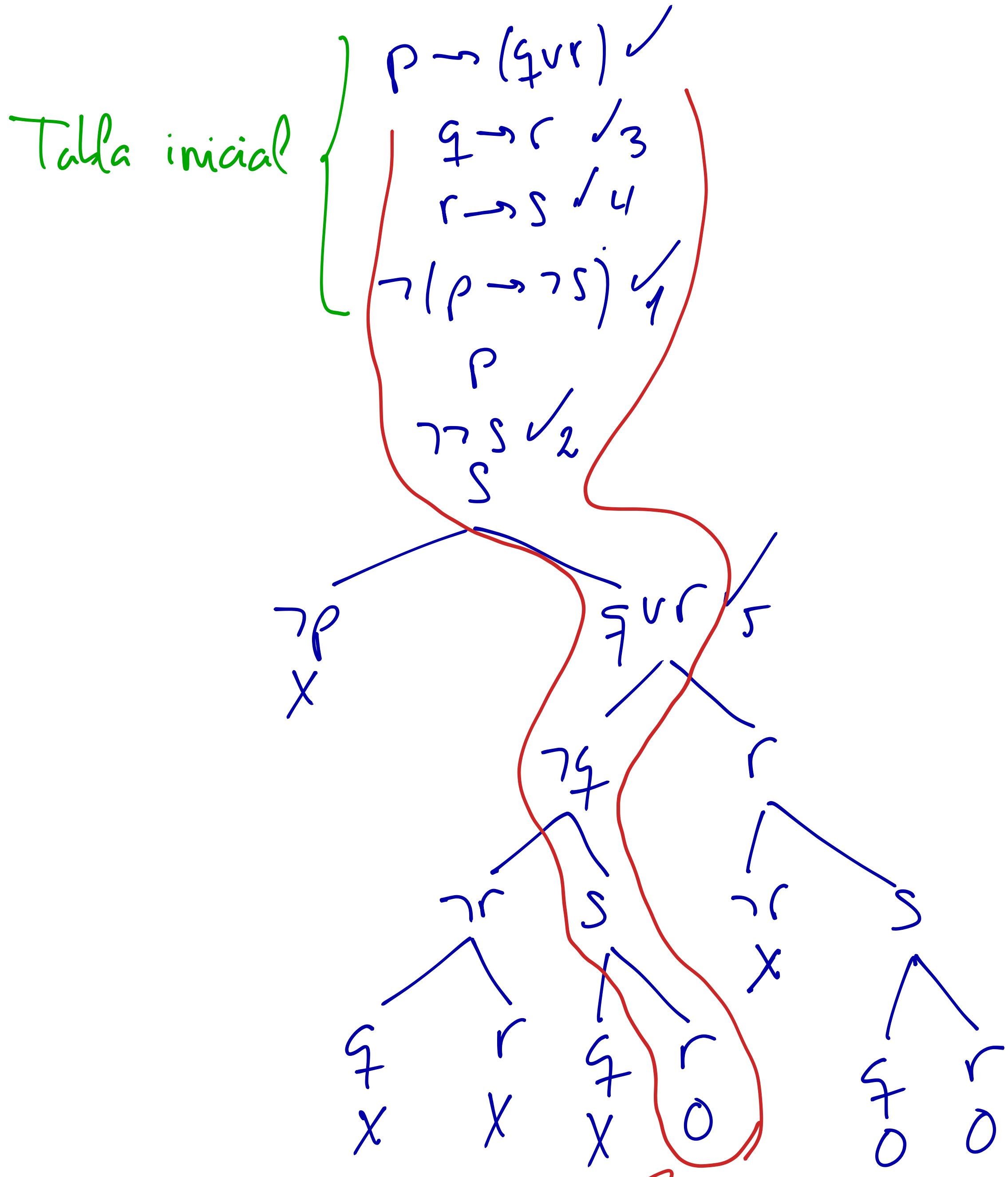
7. Estudie la validez de las siguientes inferencias utilizando Tablas semánticas.

a) $p \to (q \vee r), q \to r, r \to s \models p \to s$



Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la tabla inicial es insatisfacible y la inferencia es válida.

b) $p \to (q \vee r), q \to r, r \to s \models p \to \neg s$



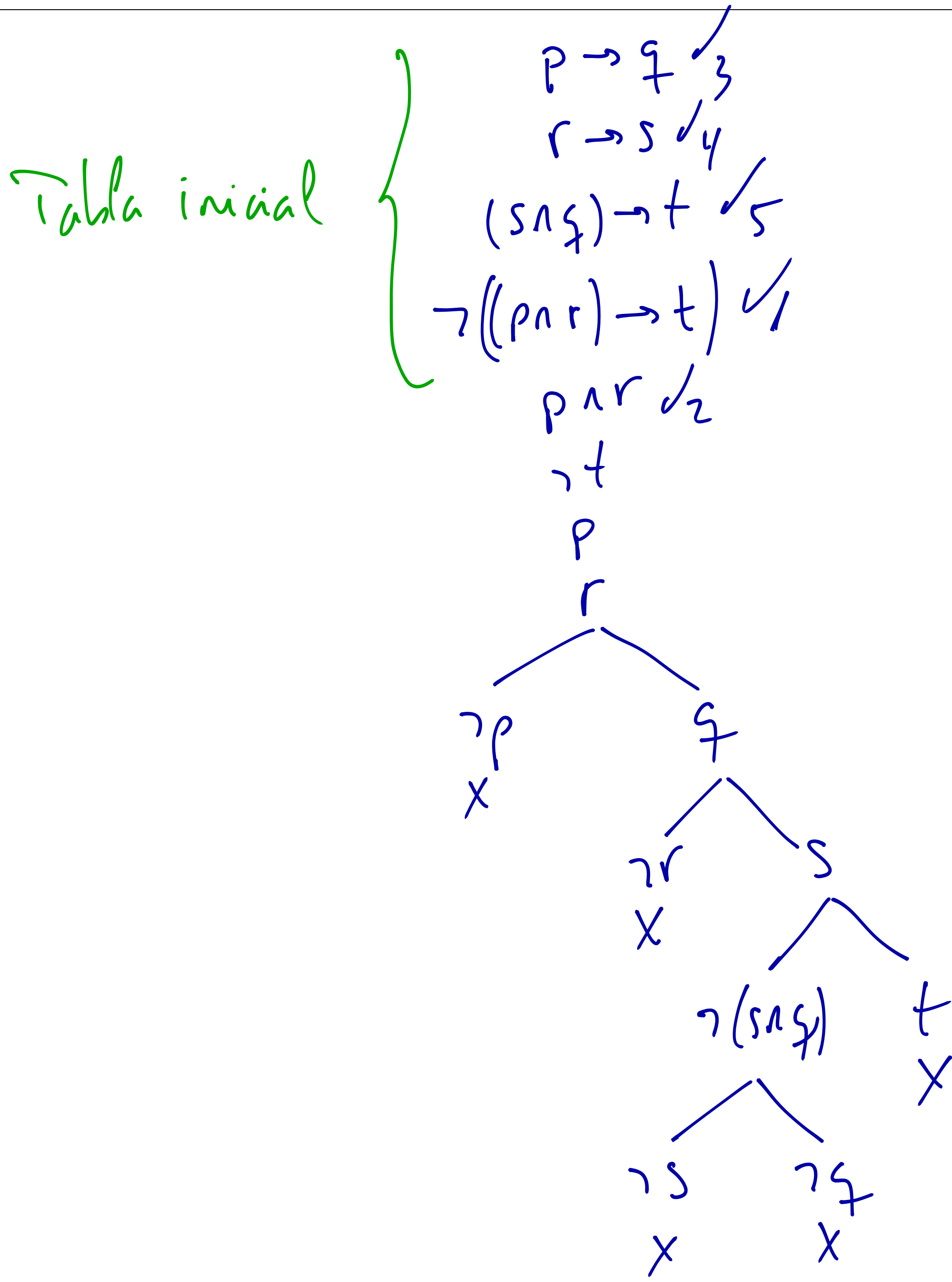
Rama abierta y completa

$\Rightarrow$ Tabla inicial satisfacible

$\Rightarrow$ Inferencia NO válida

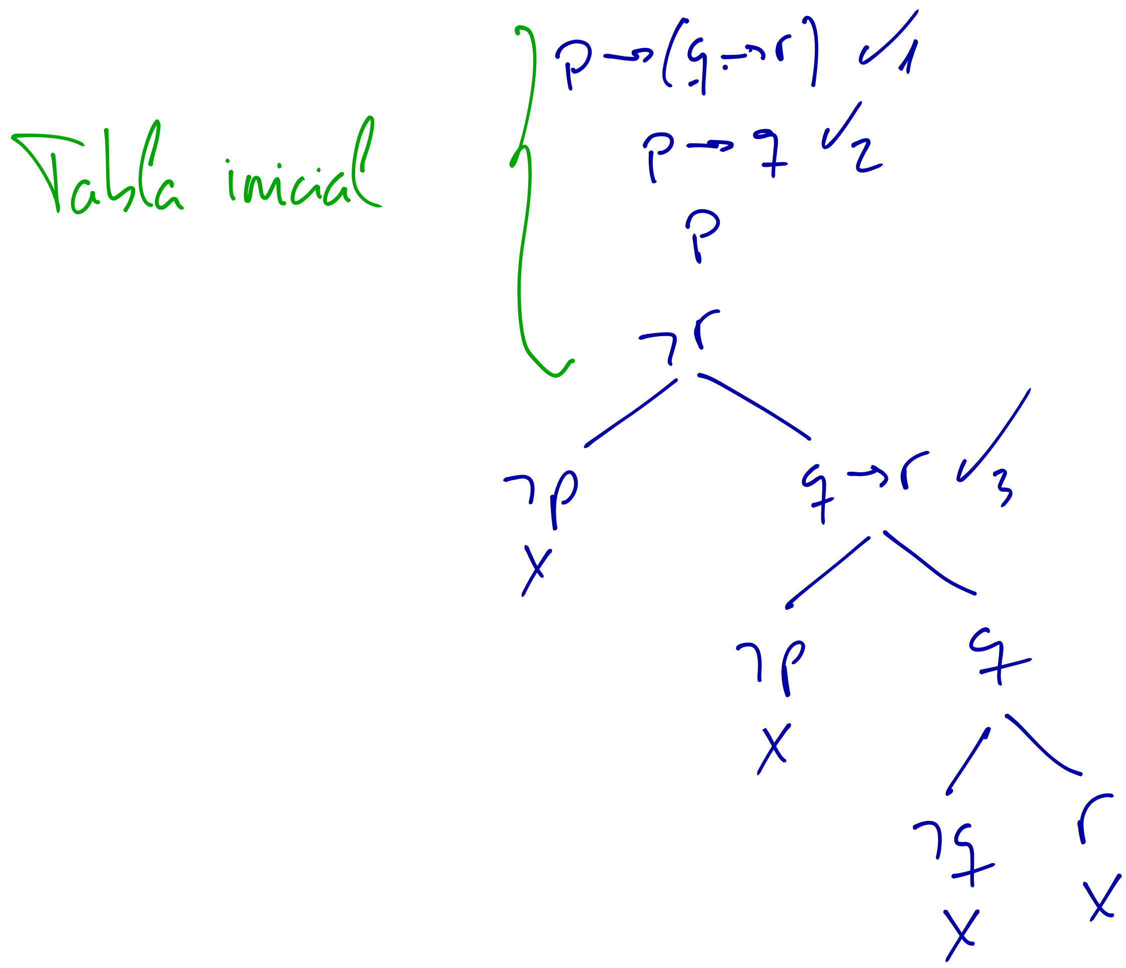
Contramodelo: $I(r)=1$, $I(s)=1$, $I(q)=0$, $I(p)=1$

c) $p \to q, r \to s, (s \wedge q) \to t \models (p \wedge r) \to t$



Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la tabla inicial es insatisfacible y la inferencia es válida.

d) $p \to (q \to r), p \to q, p \models r$

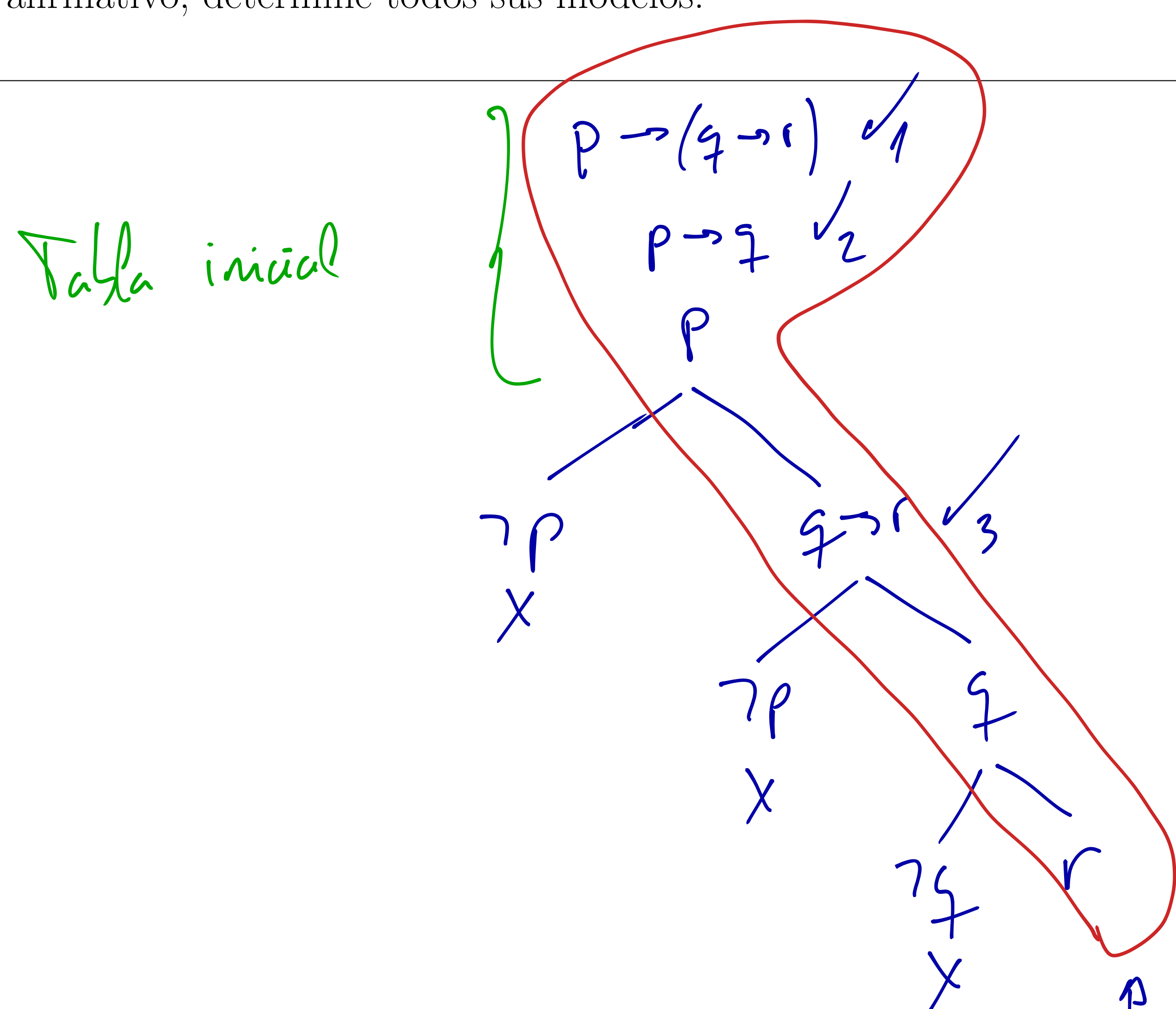


Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la tabla inicial es insatisfacible y la inferencia es válida.

8. Use Tablas Semánticas para estudiar la satisfacibilidad del conjunto

$$\Omega = \{p \to (q \to r), p \to q, p\}$$

En caso afirmativo, determine todos sus modelos.



Es la única rama abierta y la tabla está terminada
⟹ Conjunto satisfacible

Los modelos del conjunto coinciden con los modelos de la tabla inicial y con los modelos de las ramas abiertas. Solo hay una rama abierta y esta rama solo tiene un modelo:

$$I(p) = I(q) = I(r) = 1$$

9. Las fórmulas del tipo $A \leftrightarrow B$ y $\neg(A \leftrightarrow B)$ pueden considerarse como fórmulas de tipo β,

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \qquad \neg(A \leftrightarrow B) \equiv (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

De forma que obtenemos las siguientes reglas de expansión:

$$\begin{array}{ccc} & A \leftrightarrow B & \\ A & & \neg A \\ B & & \neg B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \neg(A \leftrightarrow B) & \\ A & & \neg A \\ \neg B & & B \end{array}$$

Estudie la validez de las siguientes fórmulas

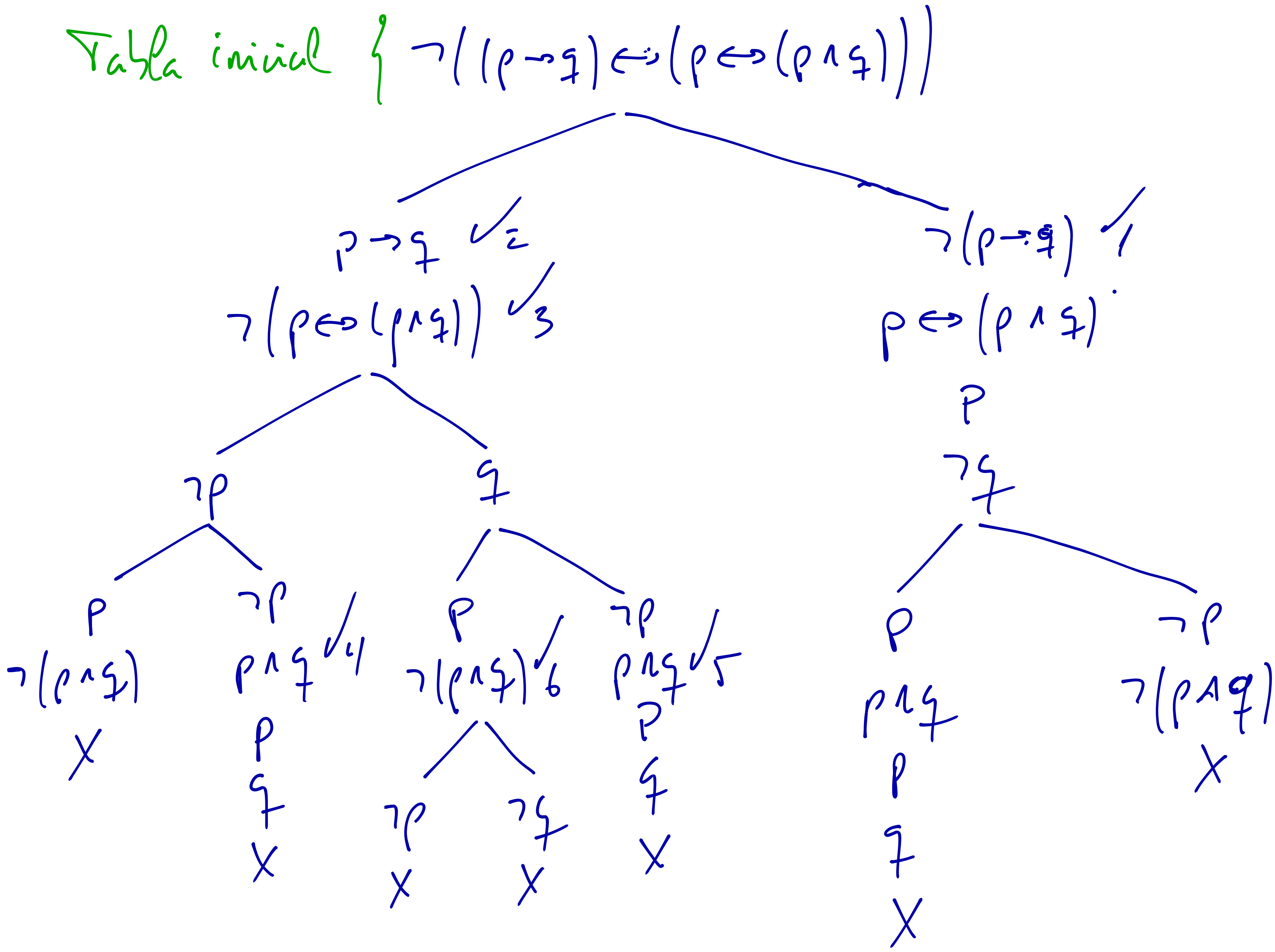
a) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Tabla inicial $\{ \neg(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)) \ \checkmark 1$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & \neg(p \wedge q) \ \checkmark 7 & & & \neg\neg(p \wedge q) \ \checkmark 5 & \\ & \neg(\neg p \vee \neg q) \ \checkmark 2 & & & \neg p \vee \neg q \ \checkmark 8 & \\ & \neg\neg p \ \checkmark 3 & & & p \wedge q \ \checkmark 6 & \\ & \neg\neg q \ \checkmark 4 & & & p & \\ & p & & & q & \\ & q & & & & \\ \neg p & & \neg q & \neg p & & \neg q \\ \times & & \times & \times & & \times \end{array}$$

Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la tabla inicial es insatisfacible y la fórmula es válida.

b) $(p \to q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (p \wedge q))$



Hemos obtenido una tabla cerrada, por lo tanto, la tabla inicial es insatisfacible y la fórmula es válida.