

Tema 5: Variables aleatorias y distribuciones notables

1. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 2a(x+1) & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ a(2-x) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

- (a) Determine el valor de a . (S: $a=1/3$)

(b) Determine y represente la función de distribución.

$$S: F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^2}{3} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \frac{-x^2+2x+1}{3} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

- (c) Calcule la media, la mediana y la moda. (S: $E(X)=1/3$, $Me=2-\sqrt{3}$, $mo=0$)

- (d) Calcule la varianza. (S: $\sigma^2 = 7/18$)

- (e) Estudie la simetría y la curtosis (S: $\gamma_3 = 0.30544$, $\gamma_4 = -3/5$).

- (f) ¿Cómo se interpreta la curtosis?

- (g) Calcular $P(X < 1)$, $P(X > -0.5)$ y $P(|X| < 0.3)$ (S: $5/6$; $11/12$; $71/200$) .

2. Al analizar el efecto de un repelente para insectos, se encontró que los frutos no tratados eran atacados en un 10 %, mientras que solo lo eran en un 1% si habían recibido el tratamiento. Los frutos se envasan en cajas de 200 unidades.

- (a) Encuentre la probabilidad de que en una caja que contenga frutos tratados, se encuentren más de 5 atacados. (S: 0.01656)

- (b) Halle la probabilidad de que en una caja cuyos frutos no fueron tratados, se encuentren más de 5 atacados. (S: 0.9997966)

- (c) A un almacén llega un 30% de cajas con frutos tratados. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja con 4 frutos atacados, no haya sido tratada? (S: 0.002041019)

- (d) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja con más de 5 frutos atacados, haya recibido el tratamiento?(S: 0.007050077)

- (e) Halle la probabilidad de que de 5 frutos extraídos al azar de una caja, encontremos exactamente 2 atacados.(S:0.0513)

- (f) Encuentre la probabilidad de obtener 2 frutos atacados al extraer 5 frutos de una caja con exactamente 22 atacados.(S:0.084193)

3. El 10% de los GPS vendidos por una empresa son usados a bordo de un barco. Se sabe que la humedad es un factor que influye en la probabilidad de que se produzca una avería, por lo que la probabilidad de que un equipo falle determinado día si se encuentra a bordo de un barco es 0.001, mientras que es de sólo 0.0002 si está en tierra. Se analiza el comportamiento de 1 GPS elegido al azar. Hallar:

- (a) Probabilidad de que haya tenido alguna avería el año anterior (365 días). (S: 0.09716)

- (b) Probabilidad de que esté situado en un barco sabiendo que tuvo alguna avería en el año pasado. (S: 0.314872)

4. Se sabe que la potencia consumida (W) durante 1 hora de funcionamiento por un modelo de componente electrónico en funcionamiento sigue una distribución normal de media y varianza desconocidas. Sin embargo, se sabe que el 5% de las veces no llega a consumir 1.21 W y que otro 5% de las veces, su consumo es superior a 1.63 W.

- (a) Estimar la distribución que sigue W . (S: $W \sim N(1.42, 0.1276)$)

- (b) Hallar $P(W > 1.8)$. (S: 0.001450413)

- (c) Hallar el cuartil 3. (S: 1.506065)

5. Se sabe que el tiempo que tarda un electrodoméstico hasta que se produce su primera avería sigue una distribución exponencial. Un servicio técnico observa que el 7% de los electrodomésticos hacen uso del periodo de garantía de 18 meses.
- Hallar la media y el parámetro λ de la exponencial. (S: $\lambda = 0.0040317$, Media=248.03401 meses)
 - Si se piensa en ampliar la garantía a 2 años. ¿Qué porcentaje se espera que hagan uso de ella en esos 2 años? (S: 0.0922)
6. Si X_1 sigue una $N(2,4)$, X_2 sigue una $N(-2,2)$ y X_3 sigue una $N(1,3)$, siendo independientes entre sí. Hallar: $P(1 + 2X_1 + 3X_2 - X_3 < 0)$ (S: 0.4240414)
7. Si sumamos los cuadrados de 10 variables aleatorias independientes que siguen todas ellas $N(0,1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que resulte más de 20? (S: 0.02925269)
8. La probabilidad de que una tuerca quede mal ajustada por un robot industrial es de 10^{-2} . Una rueda queda ajustada por 5 tuercas, y se considera peligroso que 2 o más tuercas estén mal ajustadas. Hallar:
- Probabilidad de que resulte peligroso el ajuste de una rueda.(S: 0.0009801496)
 - Si un coche lleva 5 ruedas, probabilidad de que alguna resulte peligrosa. (S: 0.00489115)
 - Si de la factoría salen 10000 vehículos al año, probabilidad de que resulte alguno con alguna rueda peligrosa.(S: 0.9924872)
 - Supongamos que un coche tiene alguna rueda defectuosa. Calcula la probabilidad de que la rueda defectuosa sea únicamente la de repuesto. (S: 0.1996079995)
9. Sabemos que tenemos la probabilidad de adquirir componentes del tipo A (en caso contrario, del tipo B) sigue una distribución de Bernoulli de parámetro $p = 0.6$. Por otro lado, el tiempo hasta la rotura de un componente del tipo A sigue una distribución exponencial de media 8 años. Así mismo, el tiempo hasta la rotura de un componente del tipo B sigue otra distribución exponencial de media 9 años. Hallar:
- Probabilidad de que un componente del tipo A dure más de 15 años. (S: 0.153355)
 - Sabiendo que un componente ha durado más de 15 años, calcula la probabilidad de que el componente sea de tipo A. (S: 0.549124)
10. Sea X una variable aleatoria mixta cuya distribución de probabilidad está definida por:

$$P(X = 0) = 0.1, \quad P(X = 1) = 0.2,$$

$$f(x) = \begin{cases} 0.05 \cdot x + 0.2 & \text{si } x \in [2, 4] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Se pide:

- Determine las probabilidades: $P(X < 0)$, $P(X \geq 0.5)$ y $P(3 \leq X \leq 7)$. (S: 0, 0.9, 9/5)
 - Calcule y represente la función de distribución.
- $$S : F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.025x^2 + 0.2x - 0.2 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$
- Calcular la media y la varianza. (S: $E(X) = 7/3$, $\sigma^2 = 67/45$).
 - Calcular la mediana y el rango intercuartílico.(S: $Me = -4 + 2\sqrt{11}$, $RI = -5 + 3\sqrt{6}$).
11. En un test, la distribución de las puntuaciones de los 200 candidatos a una sección de aprendizaje A sigue una distribución normal de media 32.3 y desviación 8.5. Se decide que el 15% de los candidatos serán orientados a otra sección B por tener un nivel demasiado alto, y el 25% a otra sección C por tener el nivel demasiado bajo.
- ¿Entre qué límites habrá que tener la nota para ser admitido en la sección A (S: (26.566,41.1096))
 - De los candidatos admitidos a esta sección A, ¿cuántos superan la puntuación 35? (S: 45.07)