

Relación de ejercicios 9

1. En el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ se establece una relación binaria

$$\mathcal{R} = \{(a, b), (b, d), (c, b), (d, a)\}$$

Estudia qué propiedades cumple la relación binaria \mathcal{R} .

2. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ se establece una relación binaria

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

Justifica que \mathcal{R} es una relación de equivalencia y halla el conjunto cociente.

3. En \mathbb{Z} , definimos la siguiente relación binaria:

$$x\mathcal{R}y \iff 2x + 4y \text{ es múltiplo de } 6$$

- a) Estudia las propiedades de la relación \mathcal{R} . ¿Es una relación de orden?
 b) ¿Es una relación de equivalencia? en tal caso, determina sus clases de equivalencia.

4. Se considera la relación binaria $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida

$$a\mathcal{R}b \iff a \leq b + 1$$

- a) Estudia las propiedades de la relación \mathcal{R} . ¿Es una relación de orden? ¿Es una relación de equivalencia?
 b) Determina cada uno de los siguientes subconjuntos:

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & \{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 1) \in \mathcal{R}\} & \text{II)} & \{x \in \mathbb{Z} \mid (1, x) \in \mathcal{R}\} \\ \text{III)} & \{x \in \mathbb{Z} \mid (x, 4) \in \mathcal{R}\} & \text{IV)} & \{x \in \mathbb{Z} \mid (4, x) \in \mathcal{R}\} \end{array}$$

5. En el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros se define la relación

$$\mathcal{R}b \iff a^2 - b^2 = a - b$$

Estudia si es una relación de equivalencia y, en caso afirmativo, determina las clases de equivalencia.

6. Utiliza el algoritmo de Warshall para hallar el cierre transitivo de las siguientes relaciones:

- a) $\mathcal{R} = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, d), (d, a), (d, d)\}$ definida en $A = \{a, b, c, d\}$.
 b) $\mathcal{S} = \{(a, b), (b, c), (c, b), (d, b), (d, e), (e, a)\}$ definida en $A = \{a, b, c, d, e\}$.

7. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define la relación $\mathcal{R} = \{(1, 2), (3, 4), (5, 2)\}$.

- a) Usa el algoritmo de Warshall para hallar la mínima relación de equivalencia que contiene a \mathcal{R} .
- b) Determina la partición inducida por dicha relación.

8. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 5)\}$$

- a) Prueba que $S = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2$ es una relación transitiva.
- b) Usa el algoritmo de Warshall para hallar la mínima relación de equivalencia que contiene a S y determina el conjunto cociente.

9. En el conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ se establece la relación binaria \mathcal{R} definida de la siguiente forma

$$x\mathcal{R}y \iff \text{mcd}(x, y) = 1$$

- a) Escribe el conjunto de pares ordenados de \mathcal{R} y halla la matriz asociada.
- b) Calcula $r(\mathcal{R})$, $s(\mathcal{R})$ y $t(\mathcal{R})$.