

**Fakulta elektrotechniky a informatiky**

**Technická univerzita v Košiciach**

# **Mechanický pohyb častice a telesa**

**Dušan Olčák, Zuzana Gibová**

**Košice, 2014**



**Fakulta elektrotechniky a informatiky**

**Technická univerzita v Košiciach**

**Mechanický pohyb častice a telesa**

**Dušan Olčák, Zuzana Gibová**

**Košice, 2014**

Doc.RNDr. Dušan Olčák, CSc., RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

## **Mechanický pohyb častice a telesa**

Táto publikácia vznikla za podpory Kega projektu č. 048 TUKE - 4/2013.

Prvé vydanie 2014

*Copyright* © Dušan Olčák, Zuzana Gibová

Recenzenti: Doc. RNDr. Ján Uhrín, CSc., doc. RNDr. Darina Špaldonová, CSc.

Rukopis neprešiel redakčnou a jazykovou úpravou.

**ISBN 978 – 80 – 553 – 1817 - 2**

# Obsah

## Predstav

<b>1 Mechanický pohyb tuhého telesa</b>	<b>7</b>
1.1 Kinematika hmotného bodu . . . . .	8
1.1.1 Rýchlosť a zrýchlenie pohybu . . . . .	10
1.1.2 Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie . . . . .	14
1.1.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie . . . . .	18
1.2 Dynamika hmotného bodu . . . . .	20
1.2.1 Newtonove zákony mechaniky . . . . .	22
1.2.2 Niektoré typy síl . . . . .	24
1.2.3 Riešenie pohybových rovníc . . . . .	28
1.2.4 Pohybová rovnica pri otáčavom pohybe. Moment sily a moment hybnosti . . . . .	34
1.2.5 Silové pôsobenie pri relatívnom pohybe . . . . .	37
1.2.6 Hodnotenie pôsobenia sily a jej účinku . . . . .	41
1.3 Mechanický pohyb sústavy hmotných bodov a telesa . . . . .	48
1.3.1 Pohybové rovnice sústavy hmotných bodov . . . . .	51
1.3.2 Zákony zachovania a podmienky rovnováhy . . . . .	53
1.4 Otáčavý pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi . . . . .	54
1.4.1 Pohybová rovnica telesa rotujúceho okolo pevnej osi . . . . .	54
1.4.2 Kyvadlový pohyb . . . . .	58
<b>2 Mechanické kmity</b>	<b>63</b>
2.1 Harmonické kmity . . . . .	64
2.2 Tlmené kmity . . . . .	67
2.3 Vynútené kmity a rezonancia . . . . .	70
2.4 Skladanie harmonických kmitov . . . . .	74
<b>3 Dodatky</b>	<b>83</b>
3.0.1 Derivácia . . . . .	83
3.0.2 Integrál . . . . .	86
3.0.3 Prehľad fyzikálnych jednotiek . . . . .	89
3.0.4 Základy vektorového počtu . . . . .	91
3.0.5 Diferenciálne a integrálne operácie s vektormi . . . . .	95

Použitá literatúra . . . . .	99
------------------------------	----

## Predstov

Učebnica Mechanický pohyb častice a telesa je určená pre študentov študijného odboru Fyzikálne inžinierstvo a príbuzných študijných odborov, avšak odporúčame ju aj pre študentov ostatných odborov bakalárskeho štúdia na Technickej univerzite v Košiciach ako doplnkový študijný materiál k prednáškam z fyziky. Pozostáva z dvoch kapitol. Prvá kapitola s názvom Mechanický pohyb tuhého telesa sa najprv zaobrá opisom a príčinami mechanického pohybu častice (hmotného bodu), sústavy častíc (hmotných bodov) a potom je vysvetľovaný pohyb telesa. Druhá kapitola Mechanické kmity vysvetľuje príčiny vzniku rôznych druhov mechanických kmitov, podáva ich charakteristiku a rieši aký bude výsledný pohyb v prípade skladania kmitov. V závere učebnice je dodatok, ktorý obsahuje niektoré matematické pojmy využívané vo fyzike, prehľad fyzikálnych jednotiek, základy vektorového počtu a diferenciálne a integrálne operácie s vektormi.

Autori



# Kapitola 1

## Mechanický pohyb tuhého telesa

Všetky hmotné objekty, od takých veľkých ako sú napr. hviezdy a planéty až po mikroskopické častice, akými sú atómy a molekuly, sa nachádzajú v neustálom pohybe. Relatívne najjednoduchším z rozmanitých druhov pohybov vyskytujúcich sa v prírode je *mechanický pohyb*, ktorý sa prejavuje vzájomnými zmenami polôh telies, resp. častíc. K takému pohybu patrí napr. pohyb človeka idúceho po zemi, pohyb Zeme vzhľadom k Slnku, pohyb mechanizmov zložených z rôznych súčasťí a pod.

Mechanický pohyb môžu vykonávať objekty všetkých skupenstiev. V tuhej látke sú atómy a molekuly v porovnaní s atómami a molekulami v kvapalných a plynných látkach medzi sebou viazané podstatne väčšími silami, preto sa pri mechanickom pohybe tuhého telesa všetky jeho časti pohybujú rovnakým spôsobom. Mechanický pohyb telies je možné popísat' jednoduchšie ako mechanický pohyb kvapalín a plynov. Kvapaliny a plyny kvôli ich niektorým podobným vlastnostiam označujeme spoločným názvom *tekutiny*. Časti tekutiny sa dajú od seba relatívne jednoducho oddeliť, preto pohyb tekutiny, ktorý často nazývame *prúdením*, je mnohotvárnejší.

Treba mať na zreteli, že atómy a molekuly sa v látkach pohybujú aj vtedy, keď teleso je v pokoji, resp. tekutina neprúdi. V týchto látkach sa chaoticky pohybujie obrovský počet častíc s rôzne veľkými rýchlosťami a v rôznych smeroch. Pohyb uvažovaného súboru častíc sa nazýva *tepelný pohyb*.

Telesá sa vplyvom vzájomného pôsobenia môžu deformovať a môžu meniť svoj pohybový stav. Pre skúmanie mechanického pohybu tuhých telies je výhodné zaviesť pojem *dokonale tuhého telesa*. Je to teleso, ktoré za žiadnych okolností nemení svoj tvar. To znamená, že vplyvom pôsobenia iných telies sa nemenia vzdialenosť medzi aký-miakoľvek dvoma časticami uvažovaného telesa. Je zrejmé, že pojem dokonale tuhého telesa je abstrakcia. Existuje však mnoho prípadov, keď vplyvom pôsobiacej sily sa tvar telesa nemení, alebo sa mení tak nepatrne, že zmena môže byť zanedbateľná a pôsobiaca sila spôsobuje len zmenu pohybového stavu. V takých prípadoch je výhodné pohyb študovať pomocou zákonov platných pre pohyb dokonale tuhých telies.

Pri opise pohybu telesa je potrebné špecifikovať pohyb každého bodu telesa. Často sa stretávame s *posuvným* (*translačným*) a *otáčavým* (*rotačným*) pohybom. Pri translačnom pohybe sa všetky body telesa pohybujú rovnakým spôsobom, preto pri jeho

popise stačí špecifikovať pohyb jedného, ľubovoľne zvoleného bodu telesa. Teleso sa nachádza v rotačnom pohybe, ak trajektórie všetkých jeho bodov sú kružnice, ktorých stredy ležia na spoločnej priamke, ktorá sa nazýva *osou rotácie*, teda všetky body telesa sa pohybujú rôznym spôsobom.

Pri mechanickom pohybe vzťahujeme polohu telesa k nejakému inému telesu, ktoré možno považovať za nepohyblivé. Napr. pohyb vlaku vzťahujeme k zemskému povrchu, pričom Zem v tomto prípade považujeme za nepohyblivú. Kvôli pohybu Zeme okolo Slnka je pohyb vlaku vzhľadom na Slnko iný, je zložitejší ako vzhľadom na zemský povrch. Vidíme, že pohyb závisí od telesa, vzhľadom ku ktorému jeho pohyb vzťahujeme. Na základe uvedeného príkladu a aj ďalších príkladov, ktoré poznáme zo skúseností, môžeme konštatovať, že pohyb telies vzhľadom na rôzne vzťažné telesá je rôzny. Hovoríme, že pohyb má *relatívnu povahu*.

Pre skúmanie pohybu telies je účelné zaviesť pojem *hmotného bodu*, resp. *častice*. Budeme ním rozumieť teleso, ktorého rozmery možno pri študovanom pohybe zanedbať vzhľadom na ostatné rozmery. Prirodzene, taký prístup je len abstrakciou, pretože v prírode žiadne hmotné body nejestvujú. Avšak v mechanike je mnoho problémov takého charakteru, pri ktorých táto abstrakcia je veľmi užitočná. Napr., pri skúmaní pohybu Zeme okolo Slnka môžeme Zem považovať za hmotný bod. Na druhej strane, ak chceme vysvetliť príčinu striedania dní a nocí, musíme skúmať otáčavý pohyb Zeme okolo jej osi, pri ktorom rozmer Zeme nemôžeme zanedbať. Teda v niektorých problémoch teleso môže byť považované za hmotný bod bez rozmerov, kým v iných úlohách taká abstrakcia nemôže byť urobená. Je zrejmé, že ak sa teleso nachádza v translačnom pohybe, namiesto pohybu telesa vždy môžeme skúmať pohyb hmotného bodu.

Pri štúdiu mechanického pohybu je potrebné charakterizovať pohyb telesa a vysvetliť dôvody, prečo sa teleso pohybuje práve takým spôsobom ako sa pohybuje. Prvým problémom, opisom pohybu, sa zaoberá časť mechaniky, ktorá sa nazýva *kinematika* a vysvetľovaním príčin pohybu sa zaoberá *dynamika*.

## 1.1 Kinematika hmotného bodu

Polohu hmotného bodu a aj jeho pohyb budeme vzťahovať vzhľadom k nejakému zvolenému bodu telesa, ktorý budeme nazývať *vzťažným bodom O*. Poloha ľubovoľného bodu A vzhľadom na bod O je určená polohovým vektorom  $r$ , ktorého začiatok je v bode O a koncový bod v mieste A (obr. 1.1). Polohu je možné určiť aj pomocou pravouhlých súradníc  $x, y, z$  pravouhlej súradnicovej sústavy, ktorej začiatok je vo vzťažnom bode O, alebo pomocou sférických súradníc  $r, \vartheta, \varphi$ . Z obr. 1.1 je zrejmé, že platia vzťahy

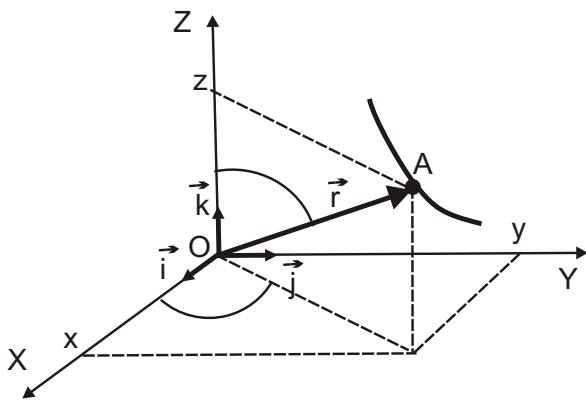
$$\mathbf{r} = xi + yj + zk, \quad (1.1)$$

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (1.2a)$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (1.2b)$$

$$z = r \cos \vartheta, \quad (1.2c)$$

kde  $i, j$  a  $k$  sú jednotkové vektorové vektory v smere osí X, Y a Z. Z uvedených rovníc (1.1) a (1.2) vyplýva, že určenie polohy bodu pomocou polohového vektora  $r$ , alebo pomocou pravouhlých súradníc  $x, y, z$ , prípadne sférických súradníc  $r, \vartheta, \varphi$  je celkom rovnocenné. Pri riešení konkrétneho mechanického problému vyberáme taký spôsob určovania polohy, ktorý poskytuje najjednoduchšie riešenie.



Obr. 1.1: Určenie polohy hmotného bodu pomocou polohového vektora  $r$ , pravouhlých súradníc  $x, y, z$  a sférických súradníc  $r, \vartheta, \varphi$ .

Hmotný bod sa vzhľadom na vziašný bod pohybuje, ak vzhľadom na tento bod mení svoju polohu. Čiara, ktorú hmotný bod opisuje pri svojom pohybe je *trajektória pohybu* vzhľadom k vziašnému bodu. Trajektória pohybu, podobne ako aj dráha, rýchlosť, zrýchlenie a ďalšie parametre pohybu, závisí od voľby vziašného bodu. Napr. teleso pustené vo vlaku, ktorý sa vzhľadom k Zemi pohybuje konštantnou rýchlosťou, sa vzhľadom k vlaku pohybuje po zvislej priamke, avšak trajektóriou pohybu vzhľadom k Zemi je krivka - parabola. Teda trajektória pohybu je vzhľadom k rôznym vziašným bodom rôzna. O trajektórii môžeme hovoriť len v relatívnom zmysle, t. j. má zmysel o nej hovoriť len vtedy, keď ju vziašujeme k nejakému vziašnému bodu. Dĺžka vymedzeného úseku na trajektórii je *dráhou pohybu* hmotného bodu.

Rovnicu, ktorá určuje polohu hmotného bodu v ľubovoľnom okamihu  $t$  nazývame *rovnicou trajektórie pohybu*. Časovú závislosť polohy hmotného bodu môžeme vyjadriť pomocou vektorovej rovnice

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (1.3)$$

alebo pomocou troch skalárnych rovníc

$$x = x(t), \quad (1.4a)$$

$$y = y(t), \quad (1.4b)$$

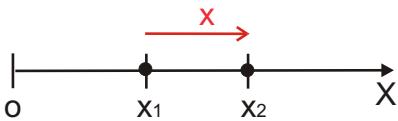
$$z = z(t), \quad (1.4c)$$

ktoré sú s vektorovou rovnicou (1.3) rovnocenné. Je zrejmé, že rovnicu trajektórie je možné určiť aj pomocou časovej závislosti sférických súradníc  $r, \vartheta$  a  $\varphi$ .

### 1.1.1 Rýchlosť a zrýchlenie pohybu

#### Rýchlosť pohybu

Z hľadiska hodnotenia pohybu je potrebné poznať, ako rýchlo hmotný bod mení svoju polohu vzhľadom k vzťažnému bodu O a ako rýchlo hmotný bod prejde určitú dráhu. Uvažujme najprv o jednoduchšom prípade, keď hmotný bod sa pohybuje po priamke. Zvoľme si pravouhlý súradnicový systém tak, aby os X bola totožná s uvažovanou trajektóriou pohybu a vzťažný bod O stotožníme s počiatkom súradnicového systému (obr. 1.2).



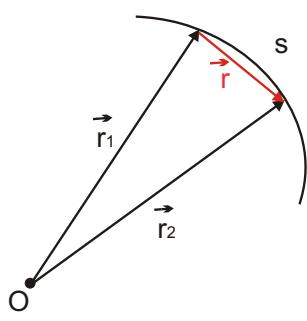
Obr. 1.2: Posunutie hmotného bodu  $\Delta x = x_2 - x_1$  pri jeho pohybe po priamke v kladnom smere osi X. Posunutie je vektor, ktorého smer je určený algebraickým znamienkom  $\Delta x$ .

opačnom smere, posunutie  $\Delta x$  by bolo záporné. Teda v prípade pohybu hmotného bodu po priamke znamienko posunutia určuje smer pohybu.

V priebehu doby (časového intervalu)  $\Delta t$  sa pohyb hmotného bodu môže rôzny spôsobom meniť. Pomocou podielu

$$v_{px} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.5)$$

definujeme *priemernú (strednú) rýchlosť pohybu*, pričom pomocou indexu  $x$  sme označili skutočnosť, že pohyb hmotného bodu sa uskutočňuje pozdĺž osi X. Smer priemernej rýchlosťi  $v_{px}$  je určený smerom posunutia  $\Delta x$ .



Obr. 1.3: Posunutie hmotného bodu  $\Delta r = r_2 - r_1$  pri krivočiarom pohybe.  $\Delta s$  je dráha, ktorú hmotný bod prešiel pri jeho posunutí o  $\Delta r$ .

Predpokladajme, že hmotný bod sa pohybuje v kladnom smere osi X. V okamihu  $t_1$  nech sa hmotný bod nachádza v mieste určenom súradnicou  $x_1$  a neskôr, v čase  $t_2$ , nech jeho súradnica je  $x_2$ . Rozdiel  $\Delta x = x_2 - x_1$  budeme nazývať *posunutím hmotného bodu*, ktoré sa uskutočnilo za dobu  $\Delta t = t_2 - t_1$ . V uvažovanom prípade posunutie je kladné, avšak ak by sa hmotný bod pohyboval z miesta  $x_1$  v

Vo všeobecnosti hmotný bod sa môže pohybovať po ľubovoľnej krivke nachádzajúcej sa v rovine alebo v priestore. V okamihu  $t_1$  nech je poloha hmotného bodu určená polohovým vektorom  $r_1$  a v okamihu  $t_2$  vektorom  $r_2$  (obr. 1.3). Posunutie hmotného bodu za dobu  $\Delta t$  je rozdiel  $\Delta r = r_2 - r_1$  a vektor priemernej rýchlosťi  $v_p$  hmotného bodu definujeme podielom

$$v_p = \frac{\Delta r}{\Delta t}. \quad (1.6)$$

Dráha  $\Delta s$  prejdená pri krivočiarom pohybe sa na rozdiel od priamočiareho pohybu nerovná veľkosti posunutia  $|\Delta r|$ ,

t. j.  $\Delta s \neq |\Delta r|$ . Preto veľkosť priemernej rýchlosťi, ktorú definujeme vztahom

$$v_p = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.7)$$

sa v prípade krivočiareho pohybu nerovná veľkosti vektora rýchlosťi  $v_p$ , ktorý sme definovali vztahom (1.6). Treba si však uvedomiť, že pomocou rov. (1.6) charakterizujeme rýchlosť zmeny polohy a pomocou rov. (1.7) charakterizujeme rýchlosť zmeny dráhy.

Smer a aj veľkosť priemernej rýchlosťi  $v_p$  sa môžu značne lísiť od smeru a veľkosti rýchlosťi v nejakom okamihu  $t$ , ktorý sa nachádza medzi časmi  $t_1$  a  $t_2$ . Podiel  $\frac{\Delta r}{\Delta t}$  v dvoch dostatočne blízkych časových okamihoch  $t_1$  a  $t_2$  približne určuje smer pohybu a aj veľkosť rýchlosťi v zvolenom okamihu  $t$ , a to tým presnejšie, čím je interval  $\Delta t$  menší. Preto rýchlosť  $v$  v okamihu  $t$ , ktorá sa nazýva *okamžitá rýchlosť*, sa vypočíta ako limita

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}, \quad (1.8)$$

ktorou je definovaná prvá derivácia polohového vektora  $r$  podľa času  $t$ , preto

$$v = \frac{dr}{dt}. \quad (1.9)$$

Vektor  $dr$ , ktorý má význam nekonečne malého posunutia, nazveme ho *elementárnym* posunutím, spadá do smeru dotyčnice ku trajektórii pohybu a jeho veľkosť  $|dr|$  sa rovná veľkosti elementárnej dráhy  $ds$ .

Vektor okamžitej rýchlosťi môžeme vyjadriť v tvare

$$v = \frac{ds}{dt} \tau, \quad (1.10)$$

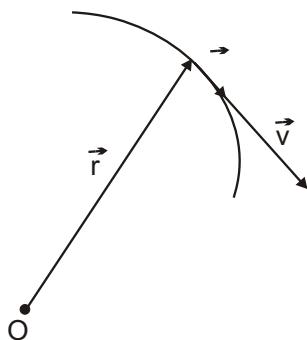
kde

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (1.11)$$

je veľkosť okamžitej rýchlosťi a  $\tau$  je jednotkový vektor určený dotyčnicou v danom bode trajektórie a smerom pohybu (obr. 1.4).

Ked' polohový vektor  $r$  vyjadríme pomocou jeho zložiek, dostaneme rozklad vektora rýchlosťi na zložky (Dodatok 3.0.4, str.94)

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} (xi + yj + zk) = v_x i + v_y j + v_z k, \quad (1.12)$$



Obr. 1.4: Smer rýchlosťi  $v$  v ľubovoľnom bode trajektórie je určený dotyčnicou k trajektórii a smerom pohybu hmotného bodu.

pričom pre zložky rýchlosťí  $v_x$ ,  $v_y$  a  $v_z$  platia vzťahy

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.13)$$

Veľkosť (absolútna hodnota) vektora rýchlosťi sa vypočíta podľa vzťahu

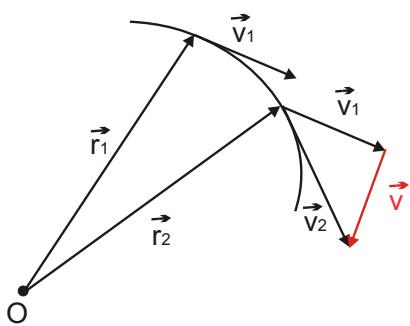
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.14)$$

Jednotkou rýchlosťi je  $1 \text{ ms}^{-1}$ .

### Zrýchlenie pohybu

Počas pohybu hmotného bodu môže rýchlosť meniť bud' svoju veľkosť, bud' svoj smer, alebo veľkosť a aj smer. Časová zmena rýchlosťi je charakterizovaná vektorom zrýchlenia.

Predpokladajme, že hmotný bod pohybujúci sa po zakrivenej trajektórii nadobudol v čase  $t_1$  rýchlosť  $\vec{v}_1$  a v čase  $t_2$  jeho rýchlosť bola  $\vec{v}_2$  (obr. 1.5).



Obr. 1.5: Grafické určenie zmeny rýchlosťí  $\Delta v = v_2 - v_1$  hmotného bodu za dobu  $\Delta t$ .

Teda za dobu  $\Delta t = t_2 - t_1$  hmotný bod zmenil svoju rýchlosť o  $\Delta v = v_2 - v_1$ . Priezemné zrýchlenie pohybu  $a_p$  hmotného bodu je definované podielom

$$a_p = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (1.15)$$

Okamžité zrýchlenie, t. j. zrýchlenie v čase  $t$ , je definované ako vektor

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (1.16)$$

a keďže  $v = \frac{dr}{dt}$ , zrýchlenie

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}. \quad (1.17)$$

Podobne ako v prípade vektora rýchlosťi aj zrýchlenie  $\mathbf{a}$  môžeme rozložiť na zložky:

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (1.18)$$

pričom pre zložky  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  platí

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.19)$$

Veľkosť vektora zrýchlenia môžeme vyjadriť podľa vzťahu

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.20)$$

Jednotkou zrýchlenia je  $1\text{ ms}^{-2}$ .

Zo vzťahu (1.9) môžeme určiť polohu hmotného bodu v ľubovoľnom čase  $t$ . Jednoduchou úpravou a integráciou dostaneme

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt + \mathbf{r}_0. \quad (1.21)$$

Podobným spôsobom môžeme vypočítať rýchlosť hmotného bodu v ľubovoľnom čase  $t$ . Z definície zrýchlenia (1.17) vyplýva pre rýchlosť vzťah

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt + \mathbf{v}_0. \quad (1.22)$$

Vektory  $\mathbf{r}_0$  a  $\mathbf{v}_0$  v rov. (1.21) a (1.22) majú význam počiatočného polohového vektora a počiatočnej rýchlosťi, t. j. sú rovné veličinám  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{v}$  v nejakom okamihu  $t = t_0$ , často  $t_0 = 0$ .

Použitím rovnice (1.11) pre výpočet závislosti dráhy od času dostaneme

$$s = \int v dt + s_0, \quad (1.23)$$

kde  $s_0$  má význam počiatočnej dráhy. Pri vhodnej voľbe počiatočných podmienok môže byť  $s_0 = 0$ .

### Priamočiary pohyb hmotného bodu

V prípade priamočiareho pohybu vektory  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{a}$  ležia na tej istej priamke, preto smer jednotlivých vektorov môžeme vyjadriť pomocou znamienka a namiesto vektorovej rovnice (1.22) môžeme písat skalárnu rovnicu

$$v = \int a dt + v_0. \quad (1.24)$$

Priamočiary pohyb, pri ktorom  $a = 0$  nazývame *rovnomerne priamočiary pohyb*. Z rovníc (1.23) a (1.24) je zrejmé, že dráha a rýchlosť pri tomto pohybe sa vypočítajú podľa vzťahov (Dodatok 3.0.2, str.86)

$$s = vt \quad \text{a} \quad v = v_0 = \text{konšt.} \quad (1.25)$$

Priamočiary pohyb, pri ktorom  $a = \text{konšt} \neq 0$  nazývame *rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb*. Z rovníc (1.23) a (1.24) vyplývajú pre dráhu a rýchlosť rovnomerne zrýchleného pohybu vzťahy

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0 \quad \text{a} \quad v = at + v_0. \quad (1.26)$$

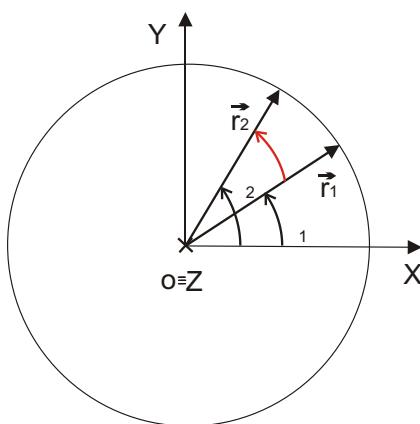
Z rozboru druhej z rovníc (1.26) vyplýva, že ak rýchlosť a zrýchlenie majú rovnaké znamienko, hmotný bod rovnomerne zvyšuje svoju rýchlosť (pohyb je zrýchlený) a v opačnom prípade pohyb hmotného bodu je spomalený.

Špeciálnym prípadom rovnomerne zrýchleného pohybu je voľný pád, pri ktorom telesá vyskytujúce sa v blízkosti zemského povrchu padajú s konštantným tiažovým zrýchlením  $g$ . Pri skúmaní voľného pádu môžeme použiť rovnice (1.26), v ktorých  $v_0 = 0$  a  $a = g$ .

### 1.1.2 Uhlová rýchlosť a uhlové zrýchlenie

Pomocou polohového vektora  $\vec{r}$ , rýchlosťi  $\vec{v}$  a zrýchlenia  $\vec{a}$  vieme kvantitatívne popísat ľubovoľný pohyb hmotného bodu. Pri translačnom pohybe telies všetky body telesa sa pohybujú po rovnakých trajektóriach a v danom okamihu majú rovnaké rýchlosťi a rovnaké zrýchlenia. Iná situácia sa pozoruje pri otáčavom pohybe telies. V danom okamihu sa rôzne body telesa pohybujú po rôznych trajektóriach a v tom istom okamihu nenadobúdajú ani rovnaké rýchlosťi, ani rovnaké zrýchlenia. Úvahy týkajúce sa otáčavého pohybu sa značne zjednodušia zavedením fyzikálnych veličín *uhlové posunutie (otočenie)*, *uhlová rýchlosť* a *uhlové zrýchlenie*.

V prírode a v praktickom živote sa často stretaváme s otáčavým pohybom. Zem sa otáča okolo svojej osi, elektróny vykonávajú otáčavý pohyb okolo jadra atómu, súčasti rôznych mechanizmov, napr. koleso auta, vrtuľa lietadla a pod., vykonávajú otáčavý pohyb. Najjednoduchší otáčavý pohyb sa pozoruje v prípade, keď os rotácie nemení svoju orientáciu vzhľadom k telesu, ku ktorému pohyb vzťahujeme (ku vziažnému telesu). Takú os budeme nazývať *pevnou osou rotácie*. Pri otáčavom pohybe telesa okolo pevnej osi všetky body sa pohybujú v rovinách, ktoré sú vzájomne rovnobežné. Taký pohyb je *rovinný*.



Obr. 1.6: Uhlové posunutie (otočenie) hmotného bodu  $\Delta\varphi$  pri pohybe po kružnici okolo osi  $o$ , ktorá je totožná s osou Z pravouhlej súradnicovej sústavy.

Pomocou veličín charakterizujúcich otáčavý pohyb telies (uhlové posunutie, uhlová rýchlosť, uhlové zrýchlenie) je výhodné opisovať aj obežný pohyb telies, ktorých rozmery možno zanedbať. Napr. pri skúmaní pohybu družice okolo Zeme, pohybu Zeme okolo Slnka, pohybu elektrónu okolo jadra vodíka môžeme rozmery jednotlivých objektov zanedbať a tieto pohyby vyšetrovať ako otáčavý (obežný) pohyb hmotného bodu. Pri otáčavom pohybe sa najčastejšie stretaváme s prípadmi, keď hmotný bod, alebo jednotlivé body telesa, sa pohybujú po kružničiach. Treba mať však na zreteli, že vo všeobecnosti otáčavým pohybom rozumieme pohyb

po trajektórii, ktorej polomer krivosti nie je konštantný, ale závisí od polohy hmotného bodu. Napr. pohyb hmotného bodu po elipse môžeme vyšetrovať ako otáčavý pohyb.

Nech sa hmotný bod pohybuje po kružnici s polomerom  $r$  v rovine XY okolo osi Z pravouhlej súradnicovej sústavy (obr. 1.6) a ďalej predpokladajme, že pohyb je orientovaný proti smeru pohybu hodinových ručičiek. Polohu hmotného bodu je možné určiť pomocou (*polohového*) *uhla*  $\varphi$ . Nech poloha hmotného bodu v čase  $t_1$  je určená polohovým vektorom  $r_1$  a uhol, ktorý zviera tento vektor s osou X nech je  $\varphi_1$ . Predpokladajme, že v čase  $t_2$  sa hmotný bod bude nachádzať v mieste určenom polohovým vektorom  $r_2$ , ktorý s osou X zviera uhol  $\varphi_2$ . Pomocou rozdielu  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  definujeme *otočenie* (*uhlové posunutie*) hmotného bodu. Z obrázka (1.6) je zrejmé, že podľa toho, či pohyb je vo smere alebo proti smeru hodinových ručičiek, otočenie hmotného bodu  $\Delta\varphi$  nadobúda kladné alebo záporné hodnoty. V oblúkovej mieri uhol a otočenie vyjadrujeme v radiánoch (rad). Pohyb v priebehu doby  $\Delta t = t_2 - t_1$  sa môže zložitým spôsobom meniť, môže sa napr. zrýchľovať, spomaľovať, alebo môže byť ustálený. Pre účely hodnotenia otáčavého pohybu je výhodné definovať *priemernú* (*strednú*) *uhlovú rýchlosť*  $\omega_p$  a *okamžitú uhlovú rýchlosť*  $\omega$ . V analógii s postupom v časti 1.1.1 priemernú uhlovú rýchlosť  $\omega_p$  definujeme podielom

$$\omega_p = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (1.27)$$

a okamžitá uhlová rýchlosť  $\omega$  je limitou priemernej uhlovej rýchlosťi pre  $\Delta t \rightarrow 0$ , t. j.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \quad (1.28)$$

ktorá sa rovná prvej derivácii uhla podľa času. Teda okamžitá uhlová rýchlosť (ďalej len *uhlová rýchlosť*) je

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.29)$$

Zo vzťahov (1.27) a (1.29) vyplýva, že priemerná uhlová rýchlosť, resp. okamžitá uhlová rýchlosť majú rovnaké známienko ako otočenie  $\Delta\varphi$ , resp. elementárne otočenie  $d\varphi$ .

Nech v okamihu  $t_1$  hmotný bod má uhlovú rýchlosť  $\omega_1$  a v čase  $t_2$  nech nadobúda uhlovú rýchlosť  $\omega_2$ , pričom zmena uhlovej rýchlosťi  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . *Priemerné uhlové zrýchlenie*  $\epsilon_p$  definujeme pomocou podielu

$$\epsilon_p = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (1.30)$$

Podľa toho, či sa uhlová rýchlosť za dobu  $\Delta t$  zväčší alebo zmenší, priemerné uhlové zrýchlenie nadobúda kladné alebo záporné hodnoty. Už zo známych dôvodov definujeme *okamžité uhlové zrýchlenie* (ďalej len *uhlové zrýchlenie*)  $\epsilon$  ako limitu

$$\epsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (1.31)$$

ktorá je prvou deriváciou uhlovej rýchlosť podľa času:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.32)$$

Podľa rov. (1.29) uhlová rýchlosť  $\omega$  je prvou deriváciou uhla podľa času, preto uhlové zrýchlenie môžeme vyjadriť aj pomocou druhej derivácie uhla podľa času, t. j.

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (1.33)$$

Z vyššie uvedených definícií vyplýva, že jednotka uhlovej rýchlosť je rad  $s^{-1}$  a podobne rad  $s^{-2}$  je jednotkou uhlového zrýchlenia<sup>1</sup>.

Z rovníc (1.29) a (1.33) vyplývajú pre uhol a uhlovú rýchlosť vzťahy

$$\varphi = \int \omega dt + \varphi_0 \quad \text{a} \quad \omega = \int \epsilon dt + \omega_0, \quad (1.34)$$

v ktorých  $\varphi_0$  je počiatočný uhol a  $\omega_0$  je počiatočná uhlová rýchlosť.

### Rovnomerný a rovnomerne zrýchlený otáčavý pohyb po kružnici

Z otáčavých pohybov po kružnici najväčší význam má *rovnomerný otáčavý pohyb*, pri ktorom uhlové zrýchlenie  $\epsilon = 0$ . V takom prípade pre uhlovú rýchlosť  $\omega$  a pre uhol  $\varphi$  je možné pomocou rovníc (1.34) odvodiť vzťahy

$$\omega = \omega_0 = \text{konšt.} \quad \text{a} \quad \varphi = \omega t + \varphi_0. \quad (1.35)$$

Elementárna dĺžka kružnice  $ds = rd\varphi$ , preto súvis medzi rýchlosťou (obežnou rýchlosťou)  $v$  a uhlovou rýchlosťou  $\omega$  je

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\varphi}{dt} = r\omega. \quad (1.36)$$

Doba, za ktorú sa pri rovnomernom otáčavom pohybe vykoná jedna otáčka je *periódou* otáčavého pohybu, pre ktorú zrejme platí

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (1.37)$$

*Frekvencia* otáčania

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.38)$$

vyjadruje počet otáčok za jednotku času (počet otáčok/s).

---

<sup>1</sup>V literatúre sa pre jednotku uhlovej rýchlosť používa aj  $s^{-1}$  a pre jednotku uhlového zrýchlenia  $s^{-2}$ .

Pohyb po kružnici, pri ktorom uhlové zrýchlenie  $\epsilon = \text{konšt.} \neq 0$ , nazývame *rovnomerne zrýchleným otáčavým pohybom*. Po výpočte integrálov v rovnicach (1.34) (Dodatok 3.0.2, str.84-85), pre okamžitú hodnotu uhlovej rýchlosťi  $\omega$  a uhol  $\varphi$ , ktorý polohový vektor hmotného bodu opíše za čas  $t$ , dostaneme vzťahy

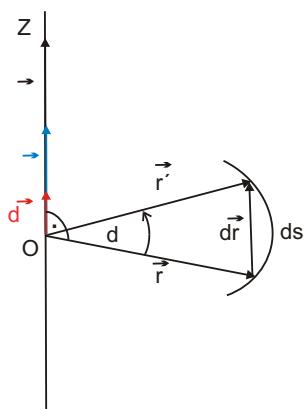
$$\omega = \epsilon t + \omega_0 \quad \text{a} \quad \varphi = \frac{1}{2}\epsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0. \quad (1.39)$$

Spravidla počiatočné podmienky je možné zvoliť tak, aby počiatočný uhol  $\varphi_0 = 0$ .

### Vektorový opis pohybu hmotného bodu po kružnici

V predchádzajúcej časti sme videli, že otočenie  $\Delta\varphi$ , uhlová rýchlosť  $\omega$  a uhlové zrýchlenie  $\epsilon$  nadobúdajú ako kladné, tak aj záporné hodnoty. Znamienko otočenia a uhlovej rýchlosťi závisí od orientácie otáčania sa hmotného bodu a znamienko uhlového zrýchlenia závisí aj od toho, či sa uhlová rýchlosť zväčšuje alebo spomaľuje. Z toho hľadiska situácia pri otáčavom pohybe okolo pevnej osi (rovinnom otáčavom pohybe) je úplne analogická tej, ktorú sme pozorovali pri pohybe hmotného bodu po priamke.

Na obr. 1.7 je znázornený rovnaký pohyb ako na predchádzajúcim obrázku 1.6, avšak rovina XY, v ktorej sa hmotný bod otáča po kružnici, je orientovaná kolmo na nákresnu. Poloha hmotného bodu v čase  $t$  nech je určená polohovým vektorom  $\vec{r}$  a neskôr, po čase  $dt$ , nech sa hmotný bod nachádza v mieste, ktorého poloha je určená polohovým vektorom  $\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$ . Elementárному otočeniu hmotného bodu  $d\varphi$  (elementárному uhlu, ktorý zvierajú vektory  $\vec{r}$  a  $\vec{r}'$ ) priradíme vektor  $d\varphi$ . Jeho veľkosť sa rovná veľkosti uhlia  $d\varphi$ , vektor  $d\varphi$  leží na priamke, ktorá je kolmá na rovinu určenú vektormi  $\vec{r}$  a  $\vec{r}'$  (priamka je kolmá na rovinu XY) a je orientovaný na tú stranu roviny, z ktorej



Obr. 1.7: Znázornenie vektora uhlového posunutia (otočenia)  $d\varphi$ , uhlovej rýchlosťi  $\omega$  a uhlového zrýchlenia  $\epsilon$  pri pohybe hmotného bodu po kružnici na chádzajúcej sa v rovine kolmej na os Z.

otáčanie pozorujeme proti smeru pohybu hodinových ručičiek. V prípade znázornenom na obr. 1.7 vektor  $d\varphi$  je orientovaný v kladnom smere osi Z. Vektor uhlovej rýchlosťi je definovaný vzťahom

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.40)$$

a vektor uhlového zrýchlenia

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (1.41)$$

V nami uvažovanom prípade, keď sa hmotný bod stále otáča v tej istej rovine, všetky vektorov ležia v tej istej priamke. Vektor uhlovej rýchlosťi  $\omega$  má stále rovnaký smer ako je smer otočenia  $d\varphi$ , avšak smer týchto vektorov nemusí byť rovnaký ako smer vektora uhlového zrýchlenia  $\epsilon$ . Uvedené vektorov sú rovako orientované, ak otáčavý pohyb je zrýchlený a sú opačne orientované pri spomalenom otáčavom pohybe.

Definície uvedených vektorov majú všeobecnú platnosť, t. j. platia aj vtedy, keď os rotácie nie je pevná a otáčavý pohyb nie je rovinný, ale je priestorový. V takom prípade vektorov  $\omega$  a  $\epsilon$  neležia na tej istej priamke, podobne ako vektor rýchlosťi  $v$  a zrýchlenia  $a$  pri krivočiarom pohybe.

Pri pohybe po kružnici vektorov  $dr$ ,  $d\varphi$  a  $r$  sú navzájom kolmé a ich súvis vyjadruje rovnica<sup>2</sup>

$$dr = d\varphi \times r, \quad (1.42)$$

z ktorej pre elementárnu dráhu vyplýva vzťah  $ds = |dr| = d\varphi r$ . Dosadením rovnice (1.42) do vzťahu (1.9) a úpravou dostaneme súvis medzi vektorom rýchlosťi  $v$  a vektorom uhlovej rýchlosťi  $\omega$ , t. j.

$$v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r. \quad (1.43)$$

Deriváciou poslednej rovnice podľa času dostaneme vzťah

$$a = (\epsilon \times r) + (\omega \times v), \quad (1.44)$$

z ktorého vyplýva, že vektor zrýchlenia hmotného bodu  $a$  je možné pri otáčavom pohybe vyjadriť pomocou zložiek  $(\epsilon \times r)$  a  $(\omega \times v)$ . Z hľadiska hodnotenia krivočiarého pohybu majú obidve zložky veľký význam, preto sa im budeme podrobnejšie venovať v ďalšej samostatnej časti.

### 1.1.3 Tangenciálne a normálové zrýchlenie

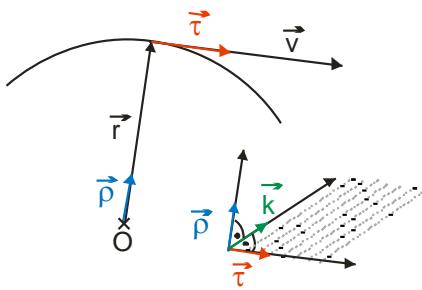
Pomocou pravidla vektorového násobenia dvoch vektorov (Dodatok 3.0.4, str. 91) môžeme zistiť, že vektor  $(\epsilon \times r)$  leží v smere dotyčnice a vektor  $(\omega \times v)$  leží v smere normály v danom bode trajektórie a smeruje do stredu kružnice. Tieto zložky zrýchlenia označíme  $a_t$  a  $a_n$  a budeme ich nazývať *tangenciálnym* a *normálovým* zrýchlením, pre ktoré platí

$$a_t = \epsilon \times r \quad \text{a} \quad a_n = \omega \times v. \quad (1.45)$$

Pri otáčavom pohybe okolo pevnej osi  $o \equiv Z$  môžeme orientáciu vektorov  $\epsilon$  a  $\omega$  vyjadriť pomocou jednotkového vektora  $k$  a orientáciu vektorov  $r$  a  $v$  pomocou jednotkových vektorov  $\varrho$  a  $\tau$ , pričom jednotkový vektor  $\varrho$  leží v normále a smeruje zo stredu kružnice ku hmotnému bodu (obr. 1.8). Orientáciu osi  $Z$  si zvolíme tak, aby zo strany kladnej polosi sme pozorovali pohyb proti smeru pohybu hodinových ručičiek.

---

<sup>2</sup>Dôkaz platnosti vzťahu prenechávame na čitateľa.



Obr. 1.8: Znázormenie smeru jednotkových vektorov  $k$ ,  $q$  a  $\tau$ . Os otáčania  $o \equiv Z$ , ktorá prechádza bodom  $O$ , je kolmá na nákresu a os  $Z$  a aj vektor  $k$  sú orientované na tú stranu, z ktorej otáčavý pohyb pozorujeme proti smeru hodinových ručičiek. V znázornenom prípade os  $Z$  smeruje za nákresu.

Vo vzťahoch pre tangenciálne a normálové zrýchlenia môžeme použitím uvedených jednotkových vektorov urobiť úpravy

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\epsilon} r (\mathbf{k} \times \mathbf{q}) . \quad (1.46)$$

Ked'že  $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{d\omega}{dt}$  a  $\mathbf{k} \times \mathbf{q} = \boldsymbol{\tau}$ , pre tangenciálne zrýchlenie môžeme ďalej písat'

$$\mathbf{a}_t = \frac{d\omega}{dt} r \boldsymbol{\tau} . \quad (1.47)$$

Súčin uhlovej rýchlosťi  $\omega$  a veľkosti polohového vektora (polomeru kružnice)  $r$  určuje veľkosť rýchlosťi hmotného bodu  $v$ , preto tangenciálne zrýchlenie

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} . \quad (1.48)$$

Podobným spôsobom môžeme upraviť aj vzťah pre normálové zrýchlenie

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \omega \mathbf{v} (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\tau}) = \omega^2 r (-\mathbf{q}) . \quad (1.49)$$

Využitím vzťahu  $v = \omega r$  môžeme normálové zrýchlenie vyjadriť v tvare

$$\mathbf{a}_n = -\frac{v^2}{r} \mathbf{q} . \quad (1.50)$$

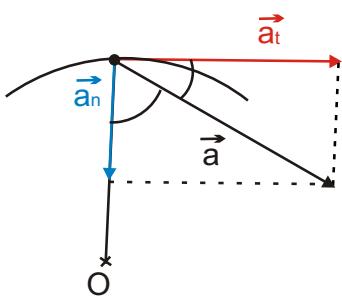
Veľkosť tangenciálneho a normálového zrýchlenia je zrejme určená vzťahmi

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} , \quad \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{r} . \quad (1.51)$$

Obr. 1.9: Rozklad zrýchlenia  $\mathbf{a}$  na tangenciálnu  $\mathbf{a}_t$  a normálovú  $\mathbf{a}_n$  zložku pri pohybe hmotného bodu po kružnici.

Celkové zrýchlenie pohybu je určené vektorovým súčtom

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau} - \frac{v^2}{r} \mathbf{q} . \quad (1.52)$$



Pre absolútne hodnotu celkového zrýchlenia platí (obr. 1.9)

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \quad (1.53)$$

a pre uhly, ktoré zviera vektor zrýchlenia s dotyčnicou, resp. s normálou v danom mieste trajektórie platia vzťahy

$$\tan \alpha = \frac{a_n}{a_t}, \quad \tan \beta = \frac{a_t}{a_n}. \quad (1.54)$$

Zo vzťahov (1.53) a (1.54) vyplýva, že tangenciálnou a normálovou zložkou zrýchlenia je určená veľkosť a aj smer zrýchlenia pri krivočiarom pohybe.

V prípade krivočiareho pohybu sa vo všeobecnosti môže meniť veľkosť rýchlosťi  $v$  a aj smer rýchlosťi, ktorý určujeme pomocou jednotkového vektora  $\tau$ . Teda veľkosť rýchlosťi  $v$  a aj jednotkový vektor  $\tau$  sú funkciemi času  $t$ , preto pre vektor zrýchlenia  $a$  môžeme písť

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v\tau) = \frac{dv}{dt}\tau + v\frac{d\tau}{dt}. \quad (1.55)$$

Ked'že prvý vektor  $\frac{dv}{dt}\tau$  na pravej strane rov. (1.55) je tangenciálne zrýchlenie  $a_t$ , druhý vektor  $v\frac{d\tau}{dt}$  musí byť normálovým zrýchlením  $a_n$ , pretože  $\frac{d\tau}{dt} \perp \tau$ . Zo vzťahov pre tangenciálne a normálové zrýchlenie v rov. (1.55) je vidieť, že tangenciálne zrýchlenie charakterizuje časovú zmenu veľkosti rýchlosťi a normálové zrýchlenie charakterizuje časovú zmenu smeru rýchlosťi. Teda rozkladom zrýchlenia na tangenciálnu a normálovú zložku vieme zvlášť posúsiť ako sa mení veľkosť rýchlosťi v závislosti od času a zvlášť posúdiť ako sa mení smer rýchlosťi v závislosti od času. Uvedené možnosti sú hlavným významom rozkladu vektora zrýchlenia na tangenciálnu a normálovú zložku.

Na záver bez dôkazu uvedieme, že vzťahy (1.48) a (1.50) neplatia len v prípade pohybu hmotného bodu po kružnici, ale majú všeobecnú platnosť. Podľa nich sa vypočíta tangenciálne a normálové zrýchlenie pri ľubovoľnom krivočiarom pohybe, pričom v takom prípade  $r$  je polomerom krivosti príslušného miesta na krivke (polomer oskulačnej kružnice) a vektor  $\varrho$  smeruje do stredu krivosti  $S$  prislúchajúcemu uvažovanému bodu trajektórie pohybu.

## 1.2 Dynamika hmotného bodu

Zo skúsenosti vieme, že všetky telesá v prírode nejakým spôsobom navzájom na seba pôsobia. Hovoríme, že sú vo vzájomnej interakcii. Napr. atmosferický vzduch pôsobí tlakom na zemský povrch a na všetky objekty na Zemi, v dôsledku vzájomného pôsobenia medzi molekulami vody a molekulami telesa voda zmáča povrch telesa, existuje vzájomné pôsobenie medzi Zemou a Slnkom a pod.

Mechanika pojednáva o interakciách pri priamych kontaktoch telies a o gravitačných interakciách medzi telesami. Dôsledkom interakcie medzi telesami môže nastat'

zmena rýchlosťi telesa alebo jeho deformácia, alebo súčasne zrýchlenie a deformácia. Pre charakterizovanie vzájomného pôsobenia je zavedený pojem sily ako miery vzájomného pôsobenia telies alebo častíc, z ktorých telesá pozostávajú. *Sila je fyzikálna veličina charakterizujúca vzájomné pôsobenie aspoň dvoch telies a určujúca zmenu pohybového stavu daného telesa alebo jeho deformáciu, alebo oboje.* Pripomeňme si, že v prípade dokonale tuhého telesa vonkajšia sila nemôže spôsobiť jeho deformáciu, ale môže spôsobiť jedine zmenu jeho pohybového stavu.

### Hmotnosť a hybnosť telies

Vlastnosť telesa, ktorá súvisí s jeho schopnosťou zachovávať si svoj pohybový stav sa nazýva *zotrvačnosť*. Je to objektívna vlastnosť všetkých telies, ktorá sa prejavuje tým, že (1) pri rovnakom silovom pôsobení na rôzne telesá nedochádza k rovnakej zmene ich rýchlosťi, alebo (2) k rovnakej zmene rýchlosťi rôznych telies je potrebné rôzne veľké silové pôsobenie. Zo skúsenosti vieme, že ak rovnako veľké telesá zhotovené z rôznych materiálov, napr. z hliníka a olova, chceme uviesť z pokoja do pohybu po hladkej podložke takým spôsobom, aby po rovnakom čase mali rovnaké rýchlosťi, alebo naopak, ak majú rovnaké rýchlosťi a chceme ich rovnakým spôsobom zastaviť, potrebujeme na nich pôsobiť rôzne veľkými silami. Z uvedených príkladov vyplýva, že uvažované telesá nemajú rovnaké zotrvačné vlastnosti. Kvantitatívnu mierou zotrvačnosti telies je fyzikálna veličina, ktorá sa nazýva *hmotnosť*. Ako uvidíme neskôr, pojem hmotnosti sa nevztahuje len na látku (telesá, častice a pod.) ale aj na pole (napr. gravitačné, elektrické, magnetické). Hmotnosť je mierou zotrvačných vlastností hmoty v jej ľubovoľnej forme. Jednotkou hmotnosti je  $1\text{ kg}$ .

Všetky telesá navzájom na seba pôsobia gravitačnou silou, napr. Zem na Slnko, Zem na Mesiac, ale aj Zem na telesá nachádzajúce sa na zemskom povrchu. Zo skúsenosti vieme, že telesá nachádzajúce sa na zemskom povrchu nepôsobia rovnako veľkou silou na podložku, na ktorej sú položené. Je to preto, lebo telesá s rozdielnou hmotnosťou majú rozdielne gravitačné vlastnosti, t. j. majú rôznu schopnosť pôsobiť prítážlivou silou na iné telesá alebo majú rôznu schopnosť byť pritáhovanými inými telesami. Hovoríme, že hmotnosť je taktiež mierou *gravitačných vlastností* telies.

Zo skúsenosti vieme, že telesá bez ohľadu na to, či sú v pokoji alebo sa pohybujú, napr. po zemskom povrchu, majú rovnakú hmotnosť. Toto konštatovanie však je platné len v klasickej (newtonovej) fyzike, t. j. v prípadoch, keď pohybujúce sa telesá majú omnoho menšiu rýchlosť ako je rýchlosť svetla vo vákuu, ktorá je  $c \approx 3.10^8\text{ ms}^{-1}$ .

Teraz na chvíľu odbočíme od problémov klasickej fyziky a pripomeňme si, že elementárne častice dosahujú v kozme alebo v urýchľovačoch rýchlosťi, ktoré sú porovnatelné s rýchlosťou svetla vo vákuu. V takýchto prípadoch zákony klasickej fyziky nie sú platné a pre príslušné výpočty je potrebné použiť závery Einsteinovej teórie relativity. Podľa tejto teórie hmotnosť častíc nie je konštantná, ale závisí od ich pohy-

bového stavu a je určená vzťahom

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.56)$$

v ktorom  $m_0$  je hmotnosť častice nachádzajúcej sa v pokoji, je to *pokojová hmotnosť* a  $m$  je hmotnosť častice pri rýchlosťi  $v$ .

Pohybový stav telies charakterizujeme pomocou hybnosti  $p$ , ktorá je definovaná súčinom hmotnosti telesa  $m$  a jeho rýchlosťi  $v$ , t. j.

$$p = mv. \quad (1.57)$$

Jednotkou hybnosti je  $1 \text{ kgms}^{-1}$ .

### 1.2.1 Newtonove zákony mechaniky

Uviedli sme, že dynamika sa zaobrá súvislostami medzi zmenou pohybového stavu telesa a príčinami, t. j. silami, ktoré uvedenú zmenu spôsobili. Na základe mnohých pokusov I. Newton sformuloval 3 zákony, ktoré tvoria základ teórie, dnes nazývanej newtonowskou (klasickou) mechanikou. Táto teória nemá všeobecnú platnosť, pretože pomocou nej nie je možné vysvetľovať prípady, keď rýchlosť interagujúcich objektov nie je zanedbateľná voči rýchlosťi svetla a ani v prípadoch, keď interagujúcimi objektami sú mikročastice (napr. stavebné častice atómu). Treba však povedať, že klasická mechanika má nesmierny význam, pretože pomocou nej je možné skúmať pohyb objektov, ktoré sú relatívne malé, ale aj také, ktoré dosahujú astronómické rozmerky.

#### Zákon zotrvačnosti

Prvý Newtonov zákon (*zákon zotrvačnosti*) hovorí, že *teleso zotrvava v pokoji alebo rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je nútene pôsobením iných telies svoj pohybový stav zmeniť*.

O tvare trajektórie ako aj o rýchlosťi pohybu, o ktorých zákon pojednáva, nemôžeme hovoriť bez určenia referenčnej sústavy, vzhľadom ku ktorej pohyb chceme vzťahovať. Tie sústavy, v ktorých platí zákon zotrvačnosti sa nazývajú *inerciálne vzťažné sústavy*.

Predstava inerciálnej vzťažnej sústavy je len abstrakciou. Všetky referenčné sústavy sú vzťahované na určité telesá a všetky telesá nejakým spôsobom interagujú. Nie je možné nájsť teleso (voľné teleso), na ktoré nepôsobí žiadna sila a z tohto dôvodu nie je možné ani prísne vymedziť inerciálnu vzťažnú sústavu. Môžeme nájsť referenčné sústavy, ktoré pri riešení určitého okruhu problémov môžu byť považované za inerciálne. To, či daná referenčná sústava môže byť považovaná za inerciálnu alebo nie, môžeme určiť len pomocou experimentu. Z experimentu napr. vyplýva, že vzťažná sústava spojená so Zemou v niektorých prípadoch môže byť považovaná za

inerciálnu. To známená, že existuje oblasť javov, na ktoré rotácie Zeme nemá vplyv. Rotácia Zeme neovplyvňuje činnosť strojov, pohyb dopravných prostriedkov, neovplyvňuje chemické reakcie, elektromagnetické procesy, biologické procesy a pod. Teda vztážná sústava spojená so Zemou môže byť pri popisovaní uvedených procesov považovaná za inerciálnu. Na druhej strane každému je jasné, že napr. biologické procesy astronauta sediaceho v raketě pri jej štarte sa neuskutočňujú rovnakým spôsobom ako človeka sediaceho doma pri televízore. Vztážná sústava spojená s raketou, ktorá sa voči Zemi pohybuje so zrýchlením je *neinerciálnou vztážnou sústavou*.

Zo zákona zotrvačnosti vyplýva, že každá vztážná sústava, ktorá je voči nejakej inerciálnej vztážnej sústave v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe je taktiež inerciálna. Ak teleso v niektornej inerciálnej sústave je v pokoji, potom voči inej inerciálnej sústave je budť v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe. Stav pokoja telies sa neodlišuje od rovnomerného priamočiareho pohybu. V prvom Newtonovom zákone pokoj a rovnomerný priamočiary pohyb sú považované za rovnocenné pohybové stavy telesa. V každom z týchto stavov teleso zotrvava tak dlho, pokiaľ pôsobenie iných telies ich nezmení.

### Zákon sily

Druhý Newtonov zákon (zákon sily) hovorí, že *časová zmena hybnosti telesa je rovná sile pôsobiacej na teleso*. Možno ho vyjadriť v tvare

$$\mathbf{F} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv), \quad (1.58)$$

v ktorom  $F$  je výslednica všetkých síl pôsobiacich na teleso a  $p$ ,  $m$  a  $v$  sú hybnosť, hmotnosť a rýchlosť telesa. Vo všeobecnosti hmotnosť  $m$  môže byť premennou veličinou závislou od rýchlosťi  $v$  (rov. 1.56). V klasickej fyzike pri mechanickom pohybe telies prichádzajú do úvahy iba zanedbateľné rýchlosťi v porovnaní s rýchlosťou svetla. V takýchto prípadoch hmotnosť možno považovať za konštantnú a rovnicu (1.58) vyjadriť v tvare

$$\mathbf{F} = m \frac{dv}{dt} = m\mathbf{a}. \quad (1.59)$$

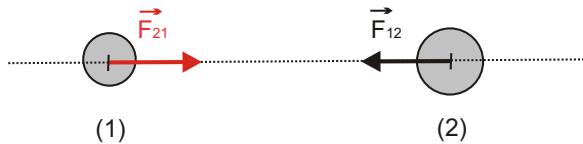
Podľa tejto rovnice sila pôsobiaca na teleso je rovná súčinu hmotnosti a zrýchlenia telesa. Jednotkou sily je newton (N). Je to sila, ktorá telesu s hmotnosťou 1 kg udeľuje zrýchlenie  $1 \text{ ms}^{-2}$ .

Z rovnice (1.59) vyplýva, že  $1 \text{ N} = 1 \text{ kgms}^{-2}$ .

### Zákon akcie a reakcie

Zo skúsenosti vieme, že vzájomné pôsobenie telies je obojstranné. Uviedli sme, že teleso položené na podložke pôsobí na ňu silou, ktorá je rovná tiaži telesa. Na druhej strane aj podložka pôsobí na teleso rovnako veľkou tlakovou silou v opačnom smere. Ked' sa oprie človek rukami o stôl, pôsobí aj stôl tlakovou silou na ruky. Mesiac

obiehajúci okolo Zeme je Zemou pritáhovaný, na druhej strane aj Mesiac pritáhuje k sebe Zem rovnako veľkou silou. Všeobecne môžeme povedať, že ked' teleso 1 pôsobí na teleso 2 silou  $F_{12}$  potom teleso 2 pôsobí na teleso 1 silou  $F_{21}$  (obr. (1.10)).



Obr. 1.10: Silové pôsobenie medzi dvoma telesami.  $F_{21}$  je sila, ktorou hmotný bod (2) pôsobí na hmotný bod (1).

Jedna z týchto síl sa nazýva *akcia* a druhá je *reakcia*. Zákon akcie a reakcie hovorí, že každá akcia vyvoláva opačnú a rovnako veľkú reakciu, alebo sily, ktorými na seba pôsobia dve telesá sú rovnako veľké, ale opačne orientované. Tretí Newtonov zákon možno vyjadriť pomocou rovnice

$$F_{12} = -F_{21}. \quad (1.60)$$

Treba si uvedomiť, že každá zo síl pôsobí na iné teleso, preto tieto sily nemožno skladáť a taktiež sa vzájomne nerušia. Na druhej strane, tiažová sila  $F_g$ , o ktorej budeme hovoriť v ďalšej časti, pôsobiaca na teleso nachádzajúce sa na podložke a tlaková sila, ktorou pôsobí podložka na toto teleso sa navzájom kompenzujú. Tieto dve sily pôsobia na to isté teleso a netvoria akciu a reakciu.

## 1.2.2 Niektoré typy síl

V tejto časti je podaná charakteristika síl, ktoré sú užitočné pri riešení viacerých úloh alebo pri vysvetľovaní problémov v ďalších kapitolách.

### Tiažová sila

Sila, ktorou Zem (alebo iný astronomický objekt) pôsobí na telesá nachádzajúce sa v blízkosti povrchu a udeľuje mu zrýchlenie voľného pádu  $g$ , sa nazýva *tiažová sila*  $F_g$ . Táto sila pri voľnom páde udeľuje všetkým telesám na tom istom mieste zemského povrchu rovnaké zrýchlenie, preto podľa rovnice (1.59) súvis medzi tiažovou silou  $F_g$  a zrýchlením  $g$  je vyjadrený vzťahom

$$F_g = mg. \quad (1.61)$$

Tiažové zrýchlenie  $g$  a tým aj tiažová sila sa menia v závislosti od zemepisnej šírky a nadmorskej výšky telesa. Na ilustráciu uvádzame hodnotu tiažového zrýchlenia<sup>3</sup> v Košiciach,  $g = 9,809 \text{ ms}^{-2}$  ( $\varphi = 48^\circ 43''$  a  $h = 220 \text{ m}$  sú severná zemepisná šírka a nadmorská výška pre Košice).

Teleso nachádzajúce sa na zemskom povrchu pôsobí na podložku silou, napr. na osobné váhy pri vážení, ktorú nazývame *tiaž*  $G$ . Veľkosť a smer tejto sily sú také isté ako v prípade tiažovej sily a rozdiel je iba v pôsobisku sily. Tiažová sila  $F_g$  pôsobí na teleso a tiaž  $G$  pôsobí na podložku, na ktorej sa teleso nachádza.

<sup>3</sup>Hodnota tiažového zrýchlenia sa vypočíta podľa Hayfordovho empirického vzťahu  $g = 9,78049(1 + 0,005288 \sin^2 \varphi - 0,000006 \sin^2 2\varphi) - 0,000002h$ , v ktorom  $\varphi$  je severná alebo južná zemepisná šírka a  $h$  je nadmorská výška.

### Sily pri krivočiarom pohybe

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že zrýchlenie hmotného bodu možno pri krivočiarom pohybe rozložiť na tangenciálnu a normálovú zložku, pre ktoré platia vzťahy

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_n = -\frac{v^2}{r} \boldsymbol{\varrho}, \quad (1.62)$$

v ktorých  $v$  je veľkosť okamžitej rýchlosťi a  $r$  je polomer krivosti trajektórie v mieste, v ktorom pohyb hmotného bodu vyšetrujeme. Pomocou rovnice (1.59) môžeme vyjadriť aj tangenciálnu  $\mathbf{F}_t$  a normálovú  $\mathbf{F}_n$  zložku sily pôsobiacu na hmotný bod.

Zrejme platí

$$\mathbf{F}_t = m \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{F}_n = -m \frac{v^2}{r} \boldsymbol{\varrho}, \quad (1.63)$$

pričom výslednica týchto sín (obr. 1.11)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_n. \quad (1.64)$$

Tangenciálna zložka sily, ktorej veľkosť  $F_t = m \frac{dv}{dt}$  spôsobuje zmenu veľkosti rýchlosťi a normálová sila, ktorej hodnota  $F_n = m \frac{v^2}{r}$  zapríčinuje zmenu smeru pohybu. Normálová sila sa kvôli svojej orientácii nazýva *dostredívou silou*. Touto silou na hmotný bod (teleso) pôsobí väzba, ktorá núti hmotný bod sa pohybovať po zakrivenej trajektórii. Väzbou môže byť napr. lano, na ktorom je upevnené kružiace teleso, povrch vozovky, ktorý trecou silou pôsobí na pneumatiky a spôsobuje pohyb auta po zakrivenej trajektórii, gravitačné pole Zeme pôsobiace na Mesiac pohybujúci sa okolo Zeme a pod. V uvedených prípadoch dostredívá sila je reprezentovaná táhovou silou lana, trecou silou vozovky a gravitačnou silou Zeme. Z týchto príkladov je zrejmé, že dostredívá sila nereprezentuje nový druh sily.

Obr. 1.11: Rozklad sily na tangenciálnu a normálovú zložku pri krivočiarom pohybe.

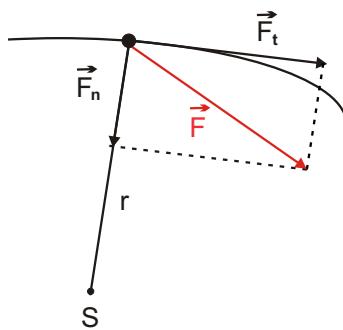
silou na hmotný bod (teleso) pôsobí väzba, ktorá núti hmotný bod sa pohybovať po zakrivenej trajektórii. Väzbou môže byť napr. lano, na ktorom je upevnené kružiace teleso, povrch vozovky, ktorý trecou silou pôsobí na pneumatiky a spôsobuje pohyb auta po zakrivenej trajektórii, gravitačné pole Zeme pôsobiace na Mesiac pohybujúci sa okolo Zeme a pod. V uvedených prípadoch dostredívá sila je reprezentovaná táhovou silou lana, trecou silou vozovky a gravitačnou silou Zeme. Z týchto príkladov je zrejmé, že dostredívá sila nereprezentuje nový druh sily.

Podľa zákona akcie a reakcie (rov. (1.60)) hmotný bod pôsobí rovnako veľkou silou ale opačného smeru na teleso, ktoré krivočiary pohyb spôsobuje. Nazývame ju *odstredívou silou*.

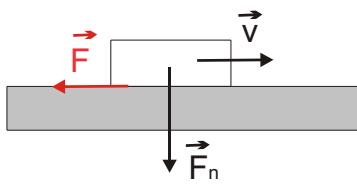
V prípade rovnomerného otáčavého pohybu po kružnici tangenciálna sila je rovná nule a na hmotný bod pôsobí len konštantná dostredívá sila smerujúca do stredu kružnice. Bez tejto sily pohyb po kružnici by nemohol existovať. Ak v určitom okamihu by dostredívá sila prestala na hmotný bod pôsobiť, hmotný bod by začal vykonávať rovnomerný priamočiary pohyb.

### Odporová sila pri vonkajšom trení

Zvláštne postavenie medzi silami majú sily trenia. Ich zvláštnosť spočíva v tom, že vo forme odporu pôsobia vždy len proti pohybu telies, zatiaľ čo iné sily môžu pohyb ako podporovať tak aj brzdiť.



S prejavom *vonkajšieho trenia* sa stretávame v dvoch prípadoch. Odporovú silu (odpor) pozorujeme, keď sú dve telesá k sebe pritlačované istou silou, telesá sú vzhládom k sebe v klúde a vonkajšie sily sa ich snažia uviest' do relatívneho pohybu. Príslušné trenie sa nazýva *statické* a vždy pôsobí proti vzniku relatívneho pohybu. Odpor vzniká aj pri pohybe tuhého telesa po inom telesu, ku ktorému je pritlačované istou silou. V tomto prípade hovoríme o *dynamickom trení* alebo aj *kinetickom trení* (trení za pohybu), ktoré sa prejavuje od okamihu, keď nastal relatívny pohyb telies, je namierené vždy proti rýchlosťi pohybu a má tendenciu túto rýchlosť zmenšiť.



Obr. 1.12: Trenie v šmyku. Tretia sila  $F$  je orientovaná proti smeru, v ktorom pohyb chceme vyvolať (statické trenie), alebo proti smeru pohybu (dynamické trenie).

Podľa charakteru dotyku telies pri relatívnom pohybe hovoríme o *trení v šmyku* (tiež *klznom* alebo *vlečnom*) alebo o *trení valivom*. Pri šmykovom trení sila trenia  $F$  vždy pôsobí v dotyčnicovej rovine spoľočnej styčnej plochy (obr. 1.12). Veľkosť sily trenia  $F$  nezávisí na veľkosti styčnej plochy a je úmerná veľkosti normálnej sily  $F_n$ , ktorou je jedno teleso pritláčané k druhému.

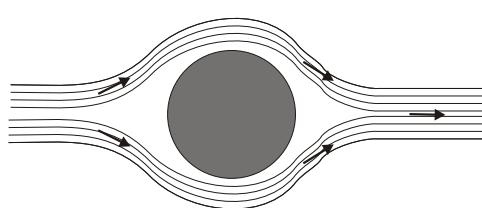
Pre hodnoty trenia v šmyku možno s pomerenne dobrým priblížením písat' empiricky získané vzťahy

$$F = \mu F_n, \quad \text{resp.} \quad F' = \mu' F_n, \quad (1.65)$$

v ktorých statické trenie  $F$  odpovedá okamihu, ktorý je tesne pred uvedením telesa do pohybu, čiže je to maximálna hodnota trecej sily a  $\mu$  a  $\mu'$  sú konštanty úmernosti nazývané *koeficienty šmykového trenia* ( $\mu$  - statického,  $\mu'$  - kinetického), pre ktoré platí  $\mu > \mu'$ . Koeficienty trenia  $\mu$  a  $\mu'$  závisia od materiálov stýkajúcich sa telies a od akosti styčných plôch (hladkosti, resp. drsnosti).

Pri valivom pohybe jedného telesa po inom telesu sa uplatňuje valivé trenie, pre ktoré možno formálne písat' tie isté vzťahy (1.65) ako pre trenie v šmyku. Koeficient valivého trenia je vždy omnoho menší ako koeficient trenia v šmyku, najmä ak podložka a valiac sa teleso sú z tvrdého a pružného materiálu.

### Odporná sila pri vnútornom trení



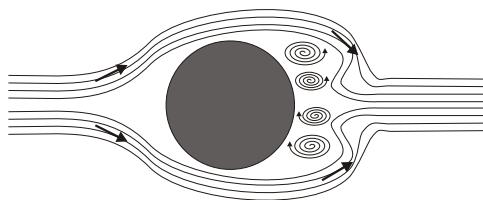
Obr. 1.13: Laminárne prúdenie tekutiny okolo telesa.

Na teleso pohybujúce sa v reálnej tekutine pôsobí sila, ktorá je orientovaná proti smeru pohybu telesa. Je to odporová sila a experimenty ukazujú že závisí od tvaru a rozmerov pohybujúceho sa telesa, od jeho rýchlosťi a závisí aj od vlastnosti tekutiny. Všeobecný vzťah pre výpočet odporovej sily neexistuje. V prípade telesa tvaru guľôčky, ktorá sa pohybuje dostatočne malou rýchlosťou, t. j. takou, aby obtekanie telesa bolo laminárne

(obr. 1.13), pri ktorom sa v tekutine netvoria víry, tekutina kladie odpor  $F$ , ktorý je úmerný jeho rýchlosťi  $v$  a je orientovaný proti smeru pohybu. Môžeme ho vyjadriť vzťahom (*Stokesov vzorec*)

$$F = -Kv, \quad (1.66)$$

v ktorom konštantu úmernosti  $K = 6\pi\eta r$ , kde  $\eta$  je koeficient dynamickej viskozity (koeficient vnútorného trenia) a  $r$  je polomer guľôčky.



Obr. 1.14: Turbulentné prúdenie tekutiny okolo telesa sa pozoruje v prípadoch, keď prúdenie prekročí kritickú rýchlosť.

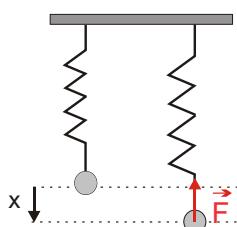
Pri vyšších rýchlosťach, pri ktorých sa za pohybujúcim telesom tvoria víry (1.14), závislosť odporu od rýchlosťi nie je lineárna a odporová sila sa vypočíta podľa *Newtonovho vzorca*

$$F = CS \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (1.67)$$

v ktorom  $S$  je plocha prierezu telesa v smere kolmom na smer pohybu a  $\rho$  je hustota tekutiny. Bezrozmerná konštantu  $C$  závisí od tvaru telesa a napr. ak telesom je guľa  $C = 0,37$ , pre teleso tvaru kvapky  $C = 0,08$ .

Odporová sila sa pozoruje v dôsledku existencie *vnútorného trenia* v tekutine, ktoré sa prejavuje aj tým, že susedné vrstvy v prúdiacej tekutine sa nepohybujú rovnakými rýchlosťami. Každá vrstva prúdiacej tekutiny je pohybom susednej vrstvy zrýchľovaná alebo spomaľovaná. Sily vnútorného trenia sa nazývajú aj *viskóznymi silami*.

## Sily pružnosti



Obr. 1.15: Sila pružnosti  $F$ , ktorá pôsobí na teleso zavesené na pružine je úmerná výchlke  $x$  a je orientovaná proti smeru výchylky.

Sily pružnosti vznikajú pri elastickej deformácii telies, ako je to napr. pri stlačení alebo natiahnutí pružiny. Po odstránení príčin deformácie sa deformované teleso snaží práve pod vplyvom sôl pružnosti vrátiť späť do pôvodného stavu, v ktorom bolo pred deformáciou.

Ak vonkajšia sila vychýli pružinu z rovnovážnej polohy o dĺžku  $x$ , potom podľa *Hookovho zákona* sila pružnosti  $F$ , ktorá je v rovnováhe s vonkajšou sôrou, je úmerná výchlke  $x$  (obr. 1.15). t. j.

$$F = -kx, \quad (1.68)$$

kde  $k$  je kladná konštantá úmernosti (*tuhosť pružiny*), ktorej hodnota závisí od elastickej vlastnosti pružiny. Elastickej vlastnosti závisia od materiálu, z ktorého je pružina zhotovená a od geometrických rozmerov pružiny. Pomocou záporného známienka v rov. (1.68) je zohľadnená skutočnosť, že sila pružnosti je stále orientovaná proti smeru výchylky (obr. 1.15).

### 1.2.3 Riešenie pohybových rovníc

Druhý Newtonov zákon (rov. (1.59)) je základnou rovnicou dynamiky. Jej hlavný význam spočíva v tom, že pomocou nej je možné vyšetriť priebeh pohybu hmotného bodu, t. j. vieme vypočítať závislosť rýchlosť od času, vypočítať trajektóriu a dráhu pohybu. Vo všeobecnosti sila môže byť funkciou času  $t$ , rýchlosťi  $v$  a polohy hmotného bodu, ktorú môžeme určiť pomocou polohového vektoru  $r$ . Pohybovú rovinu môžeme vyjadriť vo vektorovom tvare

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (1.69)$$

alebo, ak pohyb vzťahujeme k počiatku pravouhlnej súradnicovej sústavy, potom vektorovú rovinu (1.69) môžeme nahradit skalárnymi rovnicami

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt}, \quad (1.70a)$$

$$F_y = m \frac{dv_y}{dt}, \quad (1.70b)$$

$$F_z = m \frac{dv_z}{dt}. \quad (1.70c)$$

Rýchlosť a dráha hmotného bodu nezávisia len od pôsobiacej sily, ale aj od počiatocných podmienok, t. j. od rýchlosťi a dráhy v okamihu, keď na hmotný bod začala pôsobiť sila. Z uvedených dôvodov uvažovanú úlohu môžeme riešiť vtedy, keď okrem sily sú známe aj počiatocné podmienky. Rovnice (1.70) sú vo všeobecnosti diferenciálne rovnice, ktoré sa riešia špeciálnymi matematickými postupmi. V jednoduchších prípadoch, ak zložky sily  $F_x$ ,  $F_y$  a  $F_z$  sú len funkiami času  $t$ , z rovníc (1.70) vyplývajú pre zložky rýchlosťi vzťahy

$$v_x = \frac{1}{m} \int F_x dt + v_{0x}, \quad (1.71a)$$

$$v_y = \frac{1}{m} \int F_y dt + v_{0y}, \quad (1.71b)$$

$$v_z = \frac{1}{m} \int F_z dt + v_{0z} \quad (1.71c)$$

a pomocou nich známym postupom možno určiť súradnice trajektórie pohybu

$$x = \int v_x dt + x_0, \quad (1.72a)$$

$$y = \int v_y dt + y_0, \quad (1.72b)$$

$$z = \int v_z dt + z_0. \quad (1.72c)$$

Integračné konštanty  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$ ,  $v_{0z}$  a  $x_0$ ,  $y_0$  a  $z_0$  v rovniciach (1.71) a (1.72) sú určené počiatočnými podmienkami, ktorými vo všeobecnosti rozumieme zložky jeho rýchlosťi a súradnice hmotného bodu v ľubovoľne zvolenom okamihu  $t_0$ .

Teda, ak napr. poznáme sily vzájomného pôsobenia medzi Slnkom a planétami, ako aj súradnice a rýchlosťi planét v určitom okamihu (t. j. počiatočné podmienky), môžeme určiť pohybový stav telies, ktorý bol pred mnohými rokmi a predpovedať polohu planét na mnoho rokov dopredu. Touto metódou je možné predpovedať zatmenie Mesiaca a Slnka alebo určiť čas, v ktorom Mars sa nachádza najbližšie k Zemi.

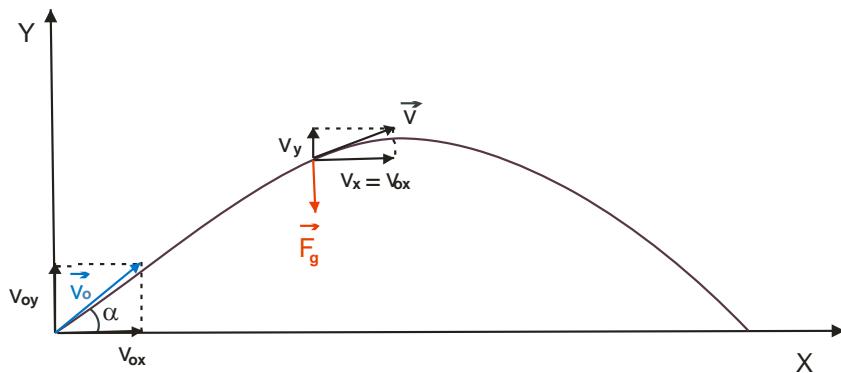
Ak poznáme rýchlosť rakety napr. v okamihu, keď dohorí palivo, jej súradnice v nejakom okamihu a sily pôsobiace na raketu, vieme vypočítať trajektóriu po ktorej sa raketa pohybuje, určiť jej polohu v hociktorom okamihu a čas a miesto pristatia.

Pohybové rovnice majú široké uplatnenie v rôznych oblastiach fyziky a technickej praxe.<sup>4</sup> Ich použitie sa pokúsime ilustrovať na niekoľkých užitočných príkladoch.

### Pohyb telesa v poli zemskej tiaže

Priestor, pre ktorý v každom jeho mieste je definovaná sila pôsobiaca na objekt nachádzajúci sa v uvažovanom priestore, sa nazýva *silové pole*. To znamená, že silovým poľom je priestor, v ktorom je definovaná funkcia  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ . Ak sila pôsobiaca na hmotný bod má v každom mieste poľa rovnakú veľkosť a rovnaký smer, také silové pole sa nazýva *homogénne*.

Tiažová sila pôsobiaca na teleso závisí od jeho polohy v okolí Zeme. No v mnohých významných prípadoch sa pohyb realizuje v priestore dostatočne malom na to, aby v každom mieste uvažovaného priestoru mohla byť tiažová sila považovaná za konštantnú. Uvažované pole je teda homogénne a budeme ho nazývať *pole zemskej tiaže*.



Obr. 1.16: Pohyb telesa vrhnutého počiatočnou rýchlosťou  $v_0$  v poli zemskej tiaže. Z riešenia pohybových rovnic pri šikmom vrhu vyplýva, že trajektóriou pohybu telesa vplyvom sily  $F_g$  je parabola.

<sup>4</sup>Z uvedených príkladov vyplýva, že Newtonova mechanika je úspešná pri riešení rôznych dynamických problémov, no napriek tomu nie je to metóda univerzálna. Pohybové rovnice nie je možné použiť v oblasti mikrosveta pri riešení subatomárnych problémov.

Nech v určitom mieste uvažovaného poľa zemskej tiaže je hmotnému bodu udelená rýchlosť  $v_0$ , ktorá s vodorovným smerom zviera uhol  $\alpha$ . Teleso sa bude pohybovať v jednej (zvislej) rovine, preto pre skúmanie pohybu stačí uvažovať dvojrozmerný súradnicový systém, ktorého počiatok umiestníme do miesta, v ktorom telesu je udelená rýchlosť  $v_0$  (obr. 1.16).

Ak zanedbáme odpor vzduchu, na hmotný bod v ľubovoľnom mieste trajektórie pôsobí len tiažová sila

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g = mg, \quad (1.73)$$

ktorej zložky v uvažovanej sústave majú veľkosti

$$F_x = 0, \quad (1.74a)$$

$$F_y = -mg. \quad (1.74b)$$

Znamienko mínus v rovnici (1.74b) vyjadruje tú skutočnosť, že smer tiažovej sily je opačný ako je orientácia osi Y. Použitím rovníc (1.71) dostaneme pre zložky rýchlosťi v ľubovoľnom okamihu  $t$  vztahy

$$v_x = v_{0x}, \quad (1.75a)$$

$$v_y = -gt + v_{0y}. \quad (1.75b)$$

Pomocou rovníc (1.72) pre súradnice trajektórie pohybu dostaneme

$$x = \int v_x dt + x_0 = v_{0x}t + x_0, \quad (1.76a)$$

$$y = \int v_y dt + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0. \quad (1.76b)$$

Z počiatočných podmienok, v našom prípade z polohy a rýchlosťi hmotného bodu v čase  $t = 0$ , vyplýva, že integračné konštanty sú:  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  a  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ . Po zohľadnení počiatočných podmienok môžeme vyjadriť rýchlosť a polohu hmotného bodu pomocou rovníc

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (1.77)$$

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.78)$$

V závislosti od uhla  $\alpha$  rozlišujeme tri špeciálne prípady pohybu. Ak  $\alpha = 0^\circ$  dostávame rovnice pre *vrh vodorovný*, ak  $\alpha = 90^\circ$  je to *vrh zvislý* a ak  $\alpha$  nadobúda hodnoty medzi  $0^\circ$  a  $90^\circ$  hovoríme o *šikmom vrhu*. Z rovníc (1.78) vyplýva, že trajektóriou pohybu pri šikmom vrhu je parabola.

### **Padanie telesa v tekutine**

V predošlých úvahách sme pri skúmaní pohybu v poli zemskej tiaže zanedbali odpor vzduchu. Pri pohybe telesa v tekutine (v plyne alebo v kvapaline) odpor prostredia

proti pohybu a ani vztlakovú silu často nie je možné zanedbať. Napríklad je rozdiel, či vo vzduchu padá oceľová guľôčka alebo stolnotenisová loptička, je rozdiel či oceľová guľôčka padá vo vzduchu alebo v oleji a pod. Je teda zrejmé, že v niektorých prípadoch treba okrem tiažovej sily zohľadniť ďalšie dve sily. Odporová sila  $F_o$  je namierená proti smeru pohybu a ak pohybujúcim sa telesom je guľôčka, potom podľa Stokesovho vzorca (1.66) veľkosť tejto sily je úmerná rýchlosťi guľôčky a jej smer je opačný ako smer pohybu guľôčky. Veľkosť vztlakovej sily  $F_v$  sa určí podľa dobre známeho Archimedovho zákona. Vztlaková sila  $F_v$  je opačne orientovaná ako tiažová sila  $F_g$ . Všetky tri sily ležia v tej istej priamke (obr. 1.17) a ich veľkosť a smer môžeme vyjadriť rovnicami:

$$F_g = +mg, \quad (1.79a)$$

$$F_o = -Kv, \quad (1.79b)$$

$$F_v = -m'g, \quad (1.79c)$$

v ktorých za kladný smer je považovaný smer tiažovej sily  $F_g$ ,  $m$  je hmotnosť guľôčky,  $m'$  je hmotnosť tekutiny s objemom rovným objemu guľôčky a  $K$  je konšanta (pozri rovnicu (1.66)).

Vidíme, že výslednica všetkých sín

$$F = mg - m'g - Kv \quad (1.80)$$

je funkciou rýchlosťi guľôčky, t. j.  $F = F(v)$ . Vypočítajme, aká je závislosť rýchlosťi guľôčky od času, ktorá je voľne pustená do tekutiny a pohybuje sa vplyvom vyššie spomenutých sín. Pohyb sa uskutočňuje po priamke, preto pri riešení úlohy je potrebné použiť len jednu z troch pohybových rovnic (1.70). Porovnaním výslednice sín (1.80) a pohybovej rovnice vo všeobecnom tvare  $F = mdv/dt$  dostaneme pohybovú rovnicu pre padanie guľôčky v tekutine. Po jednoduchých úpravách dostaneme

Obr. 1.17: Na teleso padajúce v tekutine pôsobí vztlaková sila  $F_v$ , odporová sila  $F_o$  a tiažová sila  $F_g$ , ktorá má opačný smer ako sily  $F_v$  a  $F_o$ .

vzťah

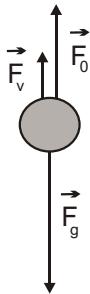
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta mg}{m} - \frac{K}{m}v, \quad (1.81)$$

v ktorom pomocou symbolu  $\Delta m$  sme označili rozdiel hmotnosti  $m - m'$ . Rovnica (1.81) je diferenciálnou rovnicou 1. rádu a môžeme ju riešiť tak, že premenné  $v$  a  $t$  od seba oddelíme (metóda separácie premenných). Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{m}(v_k - v), \quad (1.82)$$

pričom pomocou konštanty  $v_k$ , ktorá má význam rýchlosťi, sme označili zlomok  $\frac{\Delta mg}{K}$ . Po ďalšej úprave dostaneme rovnicu

$$\frac{dv}{(v_k - v)} = \frac{K}{m}dt, \quad (1.83)$$



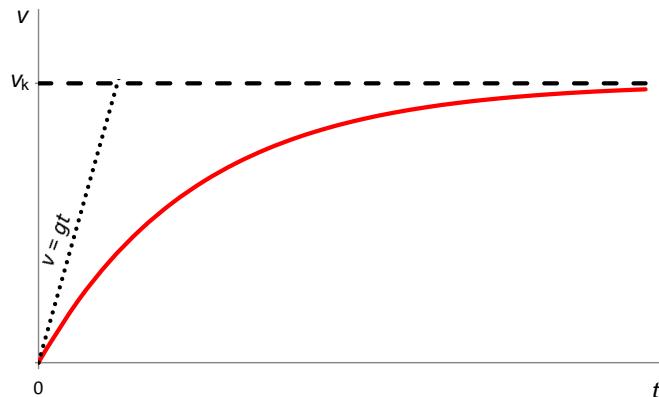
ktorú vieme integrovať. Integráciou rovnice so separovanými premennými dostaneme

$$-\ln(v_k - v) = \frac{K}{m}t + C. \quad (1.84)$$

Integračnú konštantu  $C$  určíme z podmienky, že v čase  $t = 0$  guľôčka bola v pokoji a teda rýchlosť v tomto okamihu  $v = 0$ . Po dosadení týchto hodnôt do rovnice (1.84) pre integračnú konštantu dostaneme  $C = -\ln v_k$ . Ďalšou úpravou dostaneme hľadanú závislosť rýchlosťi  $v$  od času  $t$ , pre ktorú platí

$$v = v_k \left(1 - e^{-\frac{K}{m}t}\right) = v_k \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (1.85)$$

Vidíme, že odvodená závislosť rýchlosťi od času má zložitejší priebeh (obr.1.18) než pri voľnom páde ( $v = gt$ ), keď na teleso pôsobí len tiažová sila. Rýchlosť exponenciálne narastá a teoreticky po nekonečne veľkej dobe nadobúda limitnú hodnotu  $v_k = \frac{\Delta mg}{K}$ . Z rovnice (1.80) vyplýva, že guľôčka nadobúda túto rýchlosť v okamihu, keď výslednica všetkých sín  $F = 0$ .



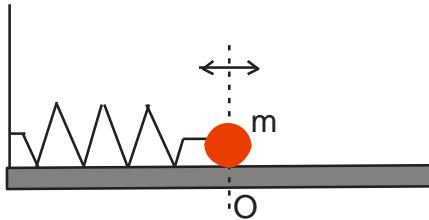
Obr. 1.18: Červenou farbou je graficky znázornená závislosť rýchlosťi guľôčky padajúcej v tekutine od času. Rýchlosť guľôčky exponenciálne rastie k limitnej hodnote  $v_k$ . Bodkovanou čiarou je znázornená závislosť rýchlosťi od času pri zanedbaní vztlakovej a odporovej sily, t. j. pri voľnom páde.

Nárast rýchlosťi guľôčky charakterizuje časová konštantă  $\tau = \frac{m}{K}$ . Ľahko sa môžeme presvedčiť, že po čase  $t = 5\tau$  hodnota rýchlosťi je  $\approx 0,99v_k$ . Teda už po relatívne krátkom čase  $t = 5\tau$  rýchlosť guľôčky je prakticky konštantná a je rovná hodnote limitnej rýchlosťi  $v_k$ . Guľôčka od uvedeného okamihu sa v tekutine pohybuje rovnomerným priamočiarym pohybom. Tento poznatok je možné využiť pri skúmaní vlastností tekutín a napr. z nameranej rýchlosťi  $v_k$  je možné vypočítať koeficient dynamickej viskozity  $\eta$ .

Závislosť veľkosti dráhy  $s$ , ktorú urazí guľôčka za dobu  $t$ , sa vypočíta použitím dobre známeho postupu pomocou rovníc (1.11) a (1.85). Tento výpočet prenechávame na čitateľa.

### Pohyb telesa vplyvom pružnej sily

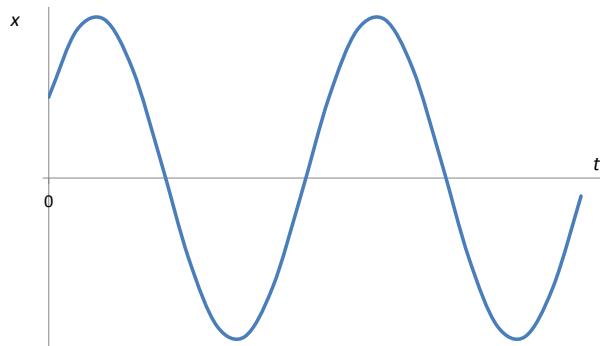
Usporiadajme experiment tak, že na vodorovnú podložku položíme pružinu, jeden jej koniec uchytíme o stenu a na druhý upevníme teleso o hmotnosti  $m$  (obr.1.19).



Obr. 1.19: Kmitavý pohyb guľôčky vplyvom sily pružnosti.

realizovat' jedine vplyvom sily pružnosti  $F = -kx$  (rov. (1.68)), ktorá ako vidíme, je vyjadrená ako funkcia polohy hmotného bodu, t. j. ako funkcia výchylky  $x$ . Vypočítajme, aká je závislosť výchylky  $x$  hmotného bodu od času  $t$ . Pre nás účel je vhodné vyjadríť pohybovú rovnicu (1.70a) v tvare  $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ , do ktorej po dosadení sily pružnosti dostaneme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (1.86)$$



Obr. 1.20: Guľôčka pohybujúca sa vplyvom sily pružnosti vykonáva harmonický kmitavý pohyb, pri ktorom závislosť rýchlosť od času popisuje rovica  $x = x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ . Hodnoty amplitúdy  $x_0$  a počiatočnej fázy  $\alpha$  sú určené počiatočnými podmienkami.

Použitím substitúcie

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (1.87)$$

a jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.88)$$

Počiatok súradnicového systému si zvoľme v bode, v ktorom sa nachádza teleso, keď pružina nie je deformovaná. Po deformácii (stlačení alebo natiahnutí) pružiny, ktorá je charakterizovaná tuhostou  $k$ , teleso začne vykonávať kmitavý pohyb po priamke, ktorú stotožníme s osou X zvolenej súradnicovej sústavy. Budeme predpokladať, že odpor vzduchu a aj tretia sila sú zanedbateľne malé a pri vyšetrovaní pohybu ich nebudeme uvažovať. Teda pohyb sa bude

Odvodená pohybová rovnica (1.88) je z matematického hľadiska diferenciálnou rovnicou druhého rádu s konštantnými koeficientami a bez pravej strany. Pokúsime sa nájsť všeobecné riešenie tejto diferenciálnej rovnice. Charakteristickou rovnicou k rovnici (1.88) je kvadratická rovnica

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \quad (1.89)$$

ktoj korene sú:  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , preto, ako vieme z prednášok z matematickej analýzy, diferenciálnej rovnici vyhovujú funkcie

$$e^{+i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t, \quad (1.90a)$$

$$e^{-i\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t. \quad (1.90b)$$

Všeobecným reálnym riešením uvažovanej diferenciálnej rovnice je lineárna kombinácia

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (1.91)$$

ktorá po substitúciach konštánt  $C_1$  a  $C_2$  ( $C_1 = x_0 \sin \alpha$ ,  $C_2 = x_0 \cos \alpha$ ) nadobúdne tvar

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.92)$$

Riešením diferenciálnej rovnice je závislosť výchylky  $x$  od času  $t$ , ktorá je znázornená na obr.1.20.

Z riešenia pohybovej rovnice vyplýva, že teleso vplyvom pružnej sily vykonáva periodický, harmonický pohyb s *amplitúdou*  $x_0$  a *uhlovou frekvenciou*  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $\alpha$  sa nazýva počiatočná fáza alebo fázová konštanta. Výpočet závislosti rýchlosťi a zrýchlenia od času opäť prenechávame na čitateľa.<sup>5</sup>

## 1.2.4 Pohybová rovnica pri otáčavom pohybe. Moment sily a moment hybnosti

Nech hmotný bod sa voči vzťažnému bodu O nachádza v pokoji a nech jeho poloha je určená pomocou polohového vektora  $r$ . Predpokladajme, že na hmotný bod pôsobí sila  $F_{\parallel}$ , ktorá je stále rovnobežná s polohovým vektorom  $r$  (obr.1.21). Vplyvom tejto sily sa hmotný bod bude pohybovať po priamke určenej polohovým vektorom  $r$ , hmotný bod nebude meniť svoj smer, t. j. vplyvom uvedenej sily sa nebude otáčať vzhľadom k vztážnému bodu O. Je zrejmé, že hmotný bod sa bude otáčať vzhľadom k bodu O, len ak pôsobiaca sila má zložku  $F_{\perp}$ , ktorá je kolmá na polohový vektor  $r$ . Teda za určitých okolností sila pôsobiaca na hmotný bod môže spôsobiť jeho otáčavý (obežný) pohyb.

Pre skúmanie otáčavého pohybu je výhodné definovať *moment sily* a *moment hybnosti*. Moment sily  $M$  vzhľadom k vztážnému bodu O je definovaný vztahom

$$M = r \times F, \quad (1.93)$$

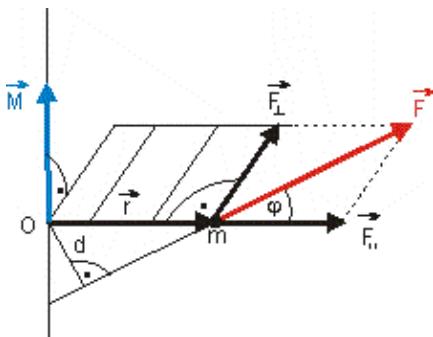
---

<sup>5</sup>Otázkami kmitavého pohybu sa budeme podrobne zaoberať v ďalších kapitolách.

v ktorom  $r$  je polohový vektor pôsobiska sily  $F$  (obr.1.21). Pre veľkosť momentu sily platí (Dodatok 3.0.4, str.93, vzťah 3.27)

$$M = rF \sin \varphi = Fd, \quad (1.94)$$

kde  $\varphi$  je uhol, ktorý zviera polohový vektor  $r$  so silou  $F$ ;  $d = r \sin \varphi$  je rameno sily.



Obr. 1.21: Vektor momentu sily  $M$  leží v priamke, ktorá je kolmá na rovinu určenú vektorom sily  $F$  a polohovým vektorom  $r$ .

Silu  $F$  môžeme rozložiť na dve zložky, z ktorých jedna  $F_{\perp}$  je kolmá na polohový vektor  $r$  a druhá  $F_{\parallel}$  je s ním rovnobežná. V takom prípade

$$M = r \times F = r \times (F_{\perp} + F_{\parallel}) = r \times F_{\perp}. \quad (1.95)$$

Z uvedeného vyplýva, že k momentu sily prispieva len tá zložka sily, ktorá má otáčavý účinok vzhľadom k vzťažnému bodu O. Moment tej zložky sily, ktorá ne-spôsobuje otáčanie je  $r \times F_{\parallel} = 0$ .

Ak v mieste, ktoré vzhľadom k vzťažnému bodu O je určené polohovým vektorom  $r$ , sa nachádza hmotný bod o hmotnosti  $m$  a hybnosti  $p$ , potom *moment hybnosti L* hmotného bodu vzhľadom k bodu O je definovaný vzťahom

$$L = r \times p. \quad (1.96)$$

Zistíme, aký je súvis medzi momentom sily pôsobiacim na hmotný bod a momentom hybnosti hmotného bodu. Ak silu vo vzťahu (1.93) vyjadríme pomocou zákona sily  $F = \frac{dp}{dt}$  dostaneme (Dodatok 3.0.5, str.96, vzťah 3.42)

$$M = r \times \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} (r \times p) = \frac{dL}{dt}. \quad (1.97)$$

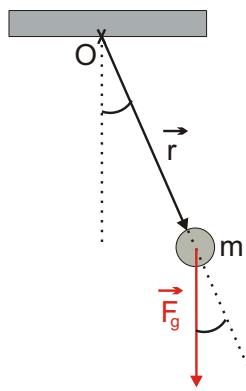
Vo výpočte sme zohľadnili skutočnosť, že  $\frac{dr}{dt} \times p = v \times mv = 0$ . Odvodený vzťah

$$M = \frac{dL}{dt} \quad (1.98)$$

je *pohybovou rovnicou pre otáčavý pohyb hmotného bodu*, ktorá hovorí, že časová zmena momentu hybnosti vzhľadom k ľubovoľnému vzťažnému bodu je rovná momentu pôsobiacej sily vzhľadom k tomu istému bodu. Vidíme, že pohybová rovnica pre otáčavý pohyb (1.98) je formálne zhodná so základnou pohybovou rovnicou  $F = \frac{dp}{dt}$ . Na ilustráciu použitia rovnice (1.98) vyšetríme pohyb guľôčky zavesenej na niti, ak guľôčka sa pohybuje vplyvom zemskej tiaže.

### Kyvadlový pohyb hmotného bodu

Skúmajme pohyb malej guľôčky o hmotnosti  $m$  zavesenej na niti dĺžky  $l$ , ktorá má zanedbateľnú hmotnosť voči hmotnosti guľôčky. Ak guľôčku vychýlime z rovnovážnej polohy a potom ju pustíme, guľôčka začne vykonávať otáčavý pohyb okolo vodorovnej osi, ktorá prechádza bodom upevnenie nite O (obr. 1.22).



Obr. 1.22: Guľôčka zavesená na niti vykonáva kyvadlový pohyb vplyvom tiažovej sily  $F_g = mg$  okolo vodorovnej osi, ktorá prechádza bodom upevnenia O. Uhol  $\varphi$  vyjadruje výchylku kyvadla z rovnovážnej polohy.

skúmaní pohybu guľôčky môžeme namiesto pohybovej rovnice vo vektorovom tvare (1.98) použiť skalárnu rovnicu

$$M = \frac{dL}{dt}. \quad (1.101)$$

Veľkosť momentu sily je určená vzťahom  $M = lmg \sin \varphi$ , v ktorom  $\varphi$  je uhol medzi vektorom  $r$  a tiažovým zrýchlením  $g$ . Z obr. 1.22 je vidieť, že pomocou uhla  $\varphi$  je vyjadrená aj výchylka guľôčky z rovnovážnej polohy. Ak sa obmedzíme na malé výchylky ( $\varphi < 5^\circ$ ), pri ktorých  $\sin \varphi \approx \varphi$ , moment sily pôsobiacej na guľôčku bude priamo úmerný výchylke guľôčky z rovnovážnej polohy, t. j.

$$M = -lmg\varphi. \quad (1.102)$$

Z rozboru pohybu guľôčky vyplýva fakt, že moment sily je stále opačne orientovaný ako je smer výchylky  $\varphi$ , čo sme v rov.(1.102) zohľadnili pomocou znamienka mínus.

Vektor rýchlosťi guľôčky  $v$  a aj jej hybnosti  $mv$  sú v každom okamihu kolmé na polohový vektor  $r$  a súvis medzi veľkosťou rýchlosťi  $v$  a uhlovou rýchlosťou  $\omega$  je daný vzťahom  $v = \omega l$ . Z uvedených dôvodov pre veľkosť momentu hybnosti môžeme písat'  $L = lm v = l^2 m \omega$ . Ked'že uhlová rýchlosť  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , veľkosť momentu hybnosti môžeme vyjadriť v tvare

$$L = l^2 m \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.103)$$

Nech poloha guľôčky je vzhľadom k bodu O určená pomocou polohového vektoru  $r$ , ktorého veľkosť je daná dĺžkou nite  $l$ . Na guľôčku pôsobí tiažová sila  $F_g = mg$ , ktorej moment vzhľadom k bodu O je

$$M = r \times mg \quad (1.99)$$

a moment hybnosti guľôčky vzhľadom k tomu istému bodu

$$L = r \times mv, \quad (1.100)$$

kde  $v$  je rýchlosť guľôčky v ľubovoľnom čase  $t$ . Z uvedených vzťahov vyplýva, že moment sily a moment hybnosti stále ležia v tej istej priamke (v osi otáčania), preto pri

Po dosadení odvodených rovníc (1.102) a (1.103) do rovnice (1.101) dostaneme pohybovú rovnicu pre otáčavý pohyb guľôčky

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (1.104)$$

v ktorej  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ . Porovnaním odvodenej rovnice s pohybovou rovnicou (1.88) pre pohyb telesa vplyvom pružnej sily vidíme, že tieto rovnice majú rovnaký tvar, preto riešením diferenciálnej rovnice (1.104) je závislosť výchylky  $\varphi$  od času  $t$ , ktorú môžeme vyjadriť pomocou vzťahu

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \quad (1.105)$$

Uvedená rovnica popisuje harmonický otáčavý pohyb guľôčky s amplitúdou  $\varphi_0$  a uhlovou frekvenciou

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.106)$$

Otáčavý pohyb hmotného bodu alebo aj telesa okolo pevnej osi, vplyvom sily, ktorej moment stále leží v osi otáčania, avšak mení svoju veľkosť a orientáciu sa nazýva *kyvadlový pohyb*.

Guľôčka zavesená na niti, ktorá vykonáva kyvadlový pohyb sa nazýva *jednoduchým* alebo niekedy aj *matematickým kyvadlom*. Z rovnice (1.106) a vzťahu medzi periódou a uhlovou frekvenciou  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  vyplýva, že perióda jednoduchého kyvadla sa vypočíta podľa vzťahu

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.107)$$

Meraním periódy je možné pomocou rovnice (1.107) určiť hodnotu tiažového zrýchlenia  $g$  na danom mieste zemského povrchu.

## 1.2.5 Silové pôsobenie pri relatívnom pohybe

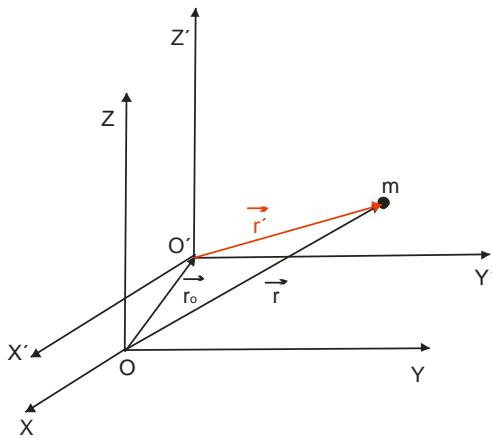
V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali pôsobením sily na hmotný bod a skúmaním jeho pohybu v sústave, ktorú sme považovali za inerciálnu. Teraz sa budeme zaoberať silovým pôsobením z hľadiska sústav, ktoré sa voči uvažovanej inerciálnej sústave pohybujú.

Uvažujme o dvoch sústavách  $S$  a  $S'$ , z ktorých sústava  $S'$  sa vzhľadom k  $S$  pohybuje tak, že osi týchto sústav sú stále rovnobežné (sústavy sa vzhľadom k sebe neotáčajú) a ich počiatky  $O$  a  $O'$  boli v čase  $t = 0$  totožné. Poloha sústavy  $S'$  voči  $S$  nech je určená vektorom  $r_0$  (obr. 1.23).

Predpokladajme, že sústava  $S'$  sa voči sústave  $S$  môže pohybovať ľubovoľnou rýchlosťou  $v_0 = \frac{dr_0}{dt}$ , t. j. sústava  $S'$  môže byť inerciálnou alebo neinerciálnou.

Nech poloha hmotného bodu je v sústave  $S$  určená vektorom  $r$  a v sústave  $S'$  nech jeho polohu určuje vektor  $r'$ . Z obr. 1.23 je zrejmé, že

$$r = r_0 + r'. \quad (1.108)$$



Obr. 1.23: Určenie polohy hmotného bodu vzhľadom k sústavám S a  $S'$ , ktoré sú v relatívnom pohybe. Sústava  $S'$  sa vzhľadom k S pohybuje tak, že osi obidvoch sústav sú stále rovnobežné a ich počiatky boli na začiatku pohybu totožné.

Deriváciou rovnice (1.108) dostaneme vzťah pre rýchlosť  $v$  hmotného bodu v sústave S

$$v = v_0 + v', \quad (1.109)$$

v ktorom  $v' = \frac{dr'}{dt}$  je rýchlosť hmotného bodu v sústave  $S'$ . Z odvodenej rovnice (1.109) vyplýva, že všetky telesá, ktoré sú v sústave  $S'$  v pokoji ( $v' = 0$ ), sa v sústave S pohybujú rýchlosťou  $v_0$  a telesá, ktoré sa v sústave  $S'$  pohybujú rýchlosťou  $v'$  majú rýchlosť  $v = v_0 + v'$  v sústave S. Odvodena rovnica (1.109) je platná pre inerciálne sústavy ( $v_0 = \text{konšt.}$ ) ako aj pre neinerciálne sústavy, pri ktorých  $v_0$  sa mení v závislosti od času, a nazýva sa *vetou o skladaní rýchlosťí*.

### Silové pôsobenie v inerciálnych sústavách

Teraz predpokladajme, že rýchlosť  $v_0$  je konštantná. V takom prípade zrýchlenie hmotného bodu v sústave S je rovnaké ako v sústave  $S'$  a naopak, t. j.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' . \quad (1.110)$$

Z poslednej rovnice vyplýva, že vo všetkých referenčných sústavách, ktoré sa voči sebe nachádzajú v *rovnomernom priamočiarom pohybe*, zrýchlenie pohybujúceho sa telesa je rovnaké. Z uvedeného rozboru vyplýva a aj experimenty potvrdzujú, že sily pôsobiace na telesá<sup>6</sup> sú nezávislé od voľby inerciálnej vztážnej sústavy a pohybový zákon (1.59) má rovnaký tvar vo všetkých inerciálnych sústavach. Iná situácia sa však pozoruje, ak sústavy nie sú inerciálne.

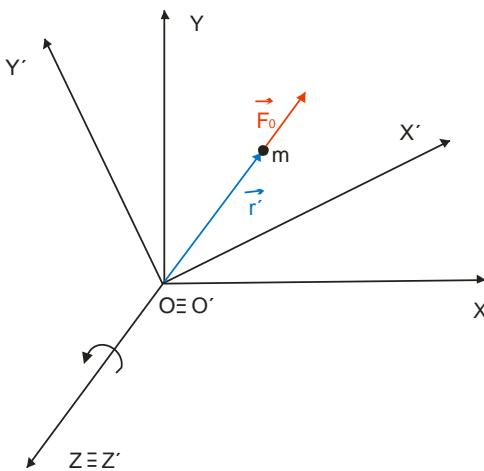
### Silové pôsobenie v neinerciálnych sústavách

Často sa stretávame s prípadmi, že napr. pri rozbiehaní alebo brzdení električky sa cestujúci správajú tak, ako keby ich niekto sácal dopredu, resp. dozadu; pri jazde autom sa teleso položené na sedadle auta pohnie pri prudkom vjazde do zákruty. Tieto efekty nevyplývajú zo vzájomného pôsobenia medzi telesami, v uvedených príkladoch nikto neposôbil silou na cestujúcich v električke ani na teleso v aute, ale existujú v dôsledku toho, že ich vnímame z hľadiska neinerciálnych sústav. Sústava spojená s rozbiehajúcou sa alebo s brzdiacou električkou ako aj sústava spojená s autom, ktoré vykonáva

<sup>6</sup>Pripomíname, že sú to sily, ktoré existujú v dôsledku interakcie telesa s iným telesom, sú to teda interakčné sily.

krivočiary pohyb je neinerciálnou vzťažnou sústavou. Problémy uvedeného typu sa môžu riešiť ako z hľadiska inerciálnych (v uvedených príkladoch inerciálnej sústavou môže byť sústava spojená so Zemou), ako aj z hľadiska neinerciálnych sústav, avšak niektoré problémy dynamiky sa jednoduchšie riešia z hľadiska neinerciálnych sústav. V ďalšom sa budeme venovať dvom typom neinerciálnych sústav, sú to sústavy s ktorými sa stretávame najčastejšie.

Najprv predpokladajme, že sústava  $S'$  znázornená na obr.(1.23) je takou neinerciálnou sústavou, ktorá vzhľadom k inerciálnej sústave  $S$  sa pohybuje priamočiaro so stálym zrýchlením  $\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}$ .



Obr. 1.24: Znázornenie neinerciálnej sústavy  $S'$  rotujúcej vzhľadom k inerciálnej sústave  $S$ . Sústava  $S'$  sa vzhľadom k  $S$  otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou  $\omega$  okolo osi  $Z \equiv Z'$  proti smeru hodinových ručičiek.

bod a silu

$$\mathbf{F}_z = -m\mathbf{a}_0 \quad (1.113)$$

budeme nazývať *zotrvačnou silou*.

Rovnica (1.112) hovorí, že pri riešení dynamického problému z hľadiska uvažovanej neinerciálnej sústavy je potrebné ku skutočnej sile  $\mathbf{F}$  pôsobiacej na hmotný bod pripočítať aj zotrvačnú silu  $\mathbf{F}_z$ . Je to fiktívna sila, jej existencia nemá povahu vzájomného pôsobenia a súvisí len s neinerciálnostou vzťažnej sústavy  $S'$ . Zotrvačná sila  $\mathbf{F}_z$  má opačný smer ako je smer zrýchlenia sústavy  $S'$ . Príkladom neinerciálnej sústavy pohybujúcej sa s konštantným zrýchlením  $\mathbf{a}_0$  môže byť sústava spojená s rozbiehajúcim alebo brzdiacim vozidlom. Predstavme si teleso tvaru gule, ktoré je položené na podlahe električky. Pri rozbiehaní vozidla z pokojového stavu by cestujúci pozorovali zrýchlený pohyb gule smerom k zadnej časti električky. Uvažovaného telesa sa nikto nedotkol, preto skutočná, t. j. interakčná sila  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , je rovná nule. Pozorovaný efekt

Nech hmotný bod sa v inerciálnej sústave  $S$  pohybuje so zrýchlením  $\mathbf{a}$ . Derivovaním rovnice (1.109), ktorá platí pre inerciálne aj pre neinerciálne sústavy, podľa času a jednoduchou úpravou dostaneme vztah

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0, \quad (1.111)$$

v ktorom  $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  je zrýchlenie hmotného bodu v sústave  $S$  a  $\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt}$  je jeho zrýchlenie v sústave  $S'$ . Vynásobením predchádzajúcej rovnice hmotnosťou  $m$  hmotného bodu dostaneme vztah

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_z, \quad (1.112)$$

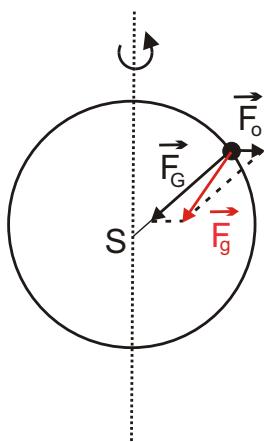
v ktorom  $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$  je sila z hľadiska uvažovanej neinerciálnej sústavy  $S'$ ,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  je interakčná sila pôsobiaca na hmotný

v neinerciálnej sústave je však vysvetliteľný pomocou zotrvačnej sily. Rovnakým spôsobom je možné vysvetliť zmenu tlaku na chodidlá osoby, ktorá je vo výťahu, pri jeho rozbiehaní alebo zastavovaní.

Pri riešení úloh je často výhodné vyjadriť silu v neinerciálnej sústave, ktorá vzhľadom k uvažovanej inerciálnej sústave vykonáva otáčavý pohyb. Nech sústava  $S'$  sa vzhľadom k sústave  $S$  otáča konštantnou uhlovou rýchlosťou  $\omega$  tak, že počiatky týchto sústav sú totožné a osou otáčania je os  $Z' \equiv Z$  (obr. 1.24). Bez odvodenia tu uvedieme, že v uvedenom prípade sila  $F'$  pôsobiaca na teleso, ktoré vzhľadom k sústave  $S'$  je v pokoji sa vypočíta podľa vztahu

$$F' = ma + m\omega^2 r', \quad (1.114)$$

v ktorom  $ma = F$  je opäť skutočnou silou pôsobiacou na hmotný bod. Sila  $F_o = m\omega^2 r'$  je zdanlivá sila, ktorá sa v rovnici (1.114) objavila v dôsledku matematickej transformácie zákona sily z inerciálnej do uvažovanej neinerciálnej sústavy. Ak sústavu  $S'$  si zvolíme tak, že hmotný bod sa nachádza v rovine  $X'Y'$  potom vektor  $r'$  určuje polohu hmotného bodu vzhľadom k počiatku  $O \equiv O'$ . Sila  $F_o$  sa nazýva *zotrvačná odstredivá sila*.



Obr. 1.25: Neinerciálna sústava  $S'$  rotujúca spolu so Zemou okolo osi  $Z'$  totožnej so zemskou osou. Z hľadiska neinerciálnej sústavy  $S'$  pôsobí na teleso, ktoré je na Zemskom povrchu v pokoji, okrem gravitačnej sily  $F_G$  aj zotrvačná odstredivá sila  $F_o$

lená od smeru gravitačnej sily. Výslednica gravitačnej a zotrvačnej sily sa nazýva tiazová sila  $F_g$  a smerom tejto sily je určený smer zvislý.

Prikladom neinerciálnych sústav tohto druhu môže byť sústava pevne spojená so Zemou. Na teleso o hmotnosti  $m$ , ktoré sa na zemskom povrchu nachádza v pokoji pôsobí gravitačná sila

$$F_G = G \frac{mM}{R^2}, \quad (1.115)$$

v ktorej  $G$  je gravitačná konštanta<sup>7</sup>,  $M$  je hmotnosť Zeme a  $R$  je polomer Zeme. Z hľadiska sústavy spojenej so Zemou pôsobí okrem gravitačnej sily, ktorá smeruje do stredu Zeme, aj zotrvačná odstredivá sila  $F_o$ , ktorá je omnoho menšia ako gravitačná sila a je orientovaná v smere od osi rotácie Zeme (obr. 1.25).

Výslednica týchto dvoch sín má veľkosť, ktorá je nepatrne odlišná od veľkosti gravitačnej sily a je mierne odchýlená od smeru gravitačnej sily.

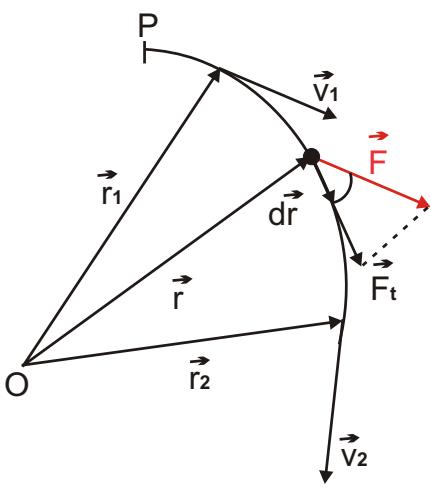
<sup>7</sup> $G = 6,670 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

### 1.2.6 Hodnotenie pôsobenia sily a jej účinku

Už je nám známe, že teleso vplyvom pôsobiacej sily mení svoj pohybový stav. Sila spôsobuje zmenu rýchlosťi telesa pri translačnom pohybe a je aj príčinou jeho otáčavého pohybu. Silové pôsobenie budeme hodnotiť z hľadiska dráhy, na ktorej sila pôsobí a z hľadiska doby, počas ktorej sila pôsobí. Pre hodnotenie dráhového a časového účinku sily zavedieme fyzikálne veličiny, ktoré sa nazývajú *práca* a *impulz sily*.

#### Mechanická práca

Pôsobenie sily po určitej dráhe hodnotíme pomocou fyzikálnej veličiny, ktorá sa nazýva *mechanická práca* (ďalej len *práca*) a hovoríme, že sila pôsobiaca na teleso koná prácu. Pomocou práce teda hodnotíme *mechanický proces*, ktorý sa uskutočňuje pri interakcii telesa s okolitými objektami a súčasne je sprevádzaný pohybom pôsobiska sily.



Obr. 1.26: Pohyb hmotného bodu vplyvom sily  $F$ . Práca je určená dráhovým integrálom priemetu sily do smeru pohybu pôsobiska sily.

resp.  $r_2$ ,  $\alpha$  je uhol, ktorý zviera vektor sily  $F$  so smerom posunutia  $dr$ . Pomocou symbolu  $F_t$  sme označili veľkosť priemetu sily do smeru pohybu pôsobiska sily v danom mieste trajektórie (obr. 1.26). Zo vzťahu (1.117) vyplýva, že *práca je určená dráhovým integrálom priemetu sily do smeru pohybu pôsobiska sily*.

Je zrejmé, že ked' smer sily je totožný so smerom pohybu pôsobiska sily, výraz pre prácu nadobudne tvar

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F ds . \quad (1.118)$$

Ak na uvažovanej dráhe sila nemení svoju veľkosť a ani orientáciu vzhľahom k smeru pohybu, potom zo vzťahu (1.117) vyplýva, že

$$W = Fs \cos \alpha . \quad (1.119)$$

Práca, ktorú vykoná sila  $F$  pôsobiaca na hmotný bod po dráhe medzi bodmi určenými polohovými vektormi  $r_1$  a  $r_2$  (obr.1.26), je definovaná pomocou dráhového integrálu sily

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F dr . \quad (1.116)$$

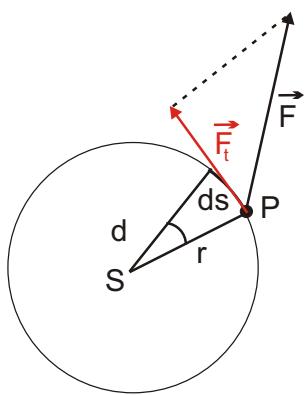
Z definície (1.116) je vidieť, že práca je skalárna veličina, ktorú môžeme vyjadriť aj v tvare (Dodatok 3.0.4, str.92, vzťah 3.24)

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \alpha ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds , \quad (1.117)$$

kde  $s_1$ , resp.  $s_2$  sú dráhy, ktoré hmotný bod prešiel od zvoleného bodu P po miesto určené polohovým vektorom  $r_1$ ,

Jednotkou práce je 1 joule ( $J$ ) a platí  $1J = 1Nm$ .

### Práca pri otáčavom pohybe hmotného bodu po kružnici



Obr. 1.27: Sila konajúca prácu pri otáčavom pohybe hmotného bodu okolo pevnej osi.

Predpokladajme, že hmotný bod sa otáča po kružnici polomeru  $r$  vplyvom sily  $F$ . Kvôli jednoduchosti nech vektor sily leží v rovine, v ktorej sa otáča pôsobisko sily, t. j. v rovine určenej uvažovanou kružnicou (obr.1.27). Vypočítame prácu, ktorú vykoná pôsobiaca sila pri pootočení hmotného bodu o uhol  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Hmotný bod sa za dobu  $dt$  potočí o elementárny uhol  $d\varphi$ , prejde elementárnu dráhu  $ds$  a jeho posunutie je  $dr$ . Podľa rov. (1.116) môžeme pre elementárnu prácu písť vzťahy

$$dW = F \cdot dr = F_t ds = F_t r d\varphi, \quad (1.120)$$

v ktorých  $F_t$  je veľkosť priemetu sily  $F$  do dotyčnice ku kružnici. Polomer kružnice  $r$  je súčasne ramenom sily  $F_t$  vzhľadom ku stredu kružnice. Súčin  $F_t r$  predstavuje veľkosť momentu sily  $M$ , preto elementárna práca

$$dW = M d\varphi, \quad (1.121)$$

z ktorej po integrácii dostaneme prácu pri pootočení telesa o uhol  $\Delta\varphi$

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi. \quad (1.122)$$

Z predchádzajúceho rozboru vyplýva, že práca sa vypočíta podľa vzťahu (1.122) aj v prípade otáčavého pohybu telesa okolo pevnej osi, ak sila  $F$  pôsobí v nejakom bode P na teleso, ktorý sa nachádza vo vzdialosti  $r$  od osi.

### Výkon

Z fyzikálneho a aj technického hľadiska je dôležitý čas, za ktorý sa práca vykonala. Pre hodnotenie rýchlosť konania práce zavedieme fyzikálnu veličinu

$$P = \frac{dW}{dt}, \quad (1.123)$$

ktorú budeme nazývať *okamžitý výkon* (ďalej len *výkon*). Teda výkon je rovný prvej derivácii práce podľa času. Podľa vzťahu (1.116) elementárna práca  $dW = F \cdot dr$ , preto výkon

$$P = \frac{F \cdot dr}{dt} = F \cdot v, \quad (1.124)$$

pričom  $v = \frac{dr}{dt}$  je rýchlosť pôsobiska sily. V špeciálnom prípade, keď za rovnaké časové intervaly sa vykoná stále rovnako veľká práca, to znamená, že výkon je konštantný, môžeme výkon vyjadriť pomocou vzťahu

$$P = \frac{W}{t}. \quad (1.125)$$

Ak výkon nie je konštantný a  $W$  predstavuje prácu vykonanú za dobu  $t$ , potom podľa vzťahu (1.125) sa vypočíta *priemerný výkon*.

V prípade, keď sa pôsobisko sily pohybuje po kružnici, môžeme na základe vzťahov (1.121) a (1.123) písat'

$$P = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega. \quad (1.126)$$

Teda v nami uvažovanom prípade výkon je vyjadrený súčinom momentu sily a uhlovej rýchlosťi pôsobiska sily.

Jednotkou výkonu je 1 watt ( $W$ ), pre ktorý platí  $1W = 1Js^{-1}$ . Zo vzťahu (1.125) vyplýva že jednotka práce  $1J = 1Ws$ . V praxi sa často výkon vyjadruje v kilowattoch ( $kW$ ) a čas v hodinách (h). Po zavedení týchto jednotiek je možné prácu vyjadriť v kilowatthodinách ( $kWh$ ).

### Kinetická energia hmotného bodu

Zo zákona sily (1.58) vyplýva, že vplyvom sily pôsobiacej na hmotný bod sa mení jeho pohybový stav, ktorý sme charakterizovali pomocou hybnosti  $p = mv$ . Nech  $v_1$  je rýchlosť hmotného bodu v mieste, ktoré je určené polohovým vektorom  $r_1$  a  $v_2$  je jeho rýchlosť v bode určenom polohovým vektorom  $r_2$  (obr.1.26). Vzťah pre prácu (rov. (1.117)), ktorú vykoná sila  $F$  na dráhe medzi uvedenými bodmi môžeme upraviť pomocou veľkosti tangenciálnej sily  $F_t$  (rov. (1.63)) nasledujúcim spôsobom

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv}{dt} ds = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \quad (1.127)$$

Pomocou vzťahu

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.128)$$

definujeme *kinetickú energiu* hmotného bodu, ktorého hmotnosť je  $m$  a jeho rýchlosť je  $v$ . Zavedením kinetickej energie rovnicu (1.127) môžeme vyjadriť v tvare

$$W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k, \quad (1.129)$$

ktorá hovorí, že *práca sily pôsobiacej na hmotný bod na určitej dráhe je rovná zmene kinetickej energie hmotného bodu na tejto dráhe*. Teda na dosiahnutie zmeny kinetickej energie hmotného bodu je potrebné vykonáť prácu, ktorá v prípade zvýšenia kinetickej energie je kladná a v prípade jej zníženia je záporná. Rovnicu (1.129) budeme nazývať *vetou o kinetickej energii*.

### Potenciálna energia hmotného bodu

Často sa stretávame s prípadmi, keď prácu je potrebné konat pri zmene polohy hmotného bodu nachádzajúceho sa v nejakom silovom poli a to aj vtedy, keď nenastáva zmena jeho pohybového stavu. Môžeme to ilustrovať na viacerých jednoduchých príkladoch. Silou treba pôsobiť po určitej dráhe a tým vykonat prácu, keď na zemskom povrchu chceme zdvíhnúť teleso do určitej výšky, alebo keď chceme zmeniť polohu telesa zaveseného na pružine a pod. Prácu treba vykonat aj vtedy, keď chceme od tyčového magnetu odtiahnuť kovový predmet, alebo, keď na vodič nabitý záporným nábojom chceme umiestniť ďalší záporný náboj. V uvedených prípadoch vonkajšia sila<sup>8</sup> prekonáva tiažovú silu, silu pružnosti, magnetickú silu alebo elektrickú silu. Vonkajšia sila, ktorú teraz označíme  $F'$ , koná prácu, ktorú môžeme vyjadriť pomocou rovnice

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F' \cdot dr. \quad (1.130)$$

Uvažujme o prípade, keď pri dvíhaní telesa je potrebné prekonávať okrem zemskej prítážlivej sily aj odpor vzduchu. Za takýchto okolností práca, ktorú vykoná vonkajšia sila pri premiestňovaní telesa po tej istej dráhe je väčšia než práca, ktorá by bola vykonaná bez prekonávania odporovej sily. Ďalší podstatný rozdiel spočíva v tom, že práca pri premiestňovaní telesa medzi dvoma bodmi závisí aj od dráhy, po ktorej teleso je prenášané a čím je väčšia dráha pohybu, tým väčšia je aj práca vykonaná vonkajšou silou. Nastala by iná situácia, ak by sme odpor prostredia nebrali do úvahy. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že v takom prípade práca vykonaná vonkajšími silami nezávisí od veľkosti dráhy, ale len od počiatočnej a konečnej polohy.

Vo všeobecnosti silové polia, v ktorých práca nezávisí na tvare trajektórie hmotného bodu, ale len na polohe počiatočného a konečného bodu dráhy, sa nazývajú *konzervatívne (potenciálkové) silové polia*. Pri premiestňovaní hmotného bodu v konzervatívnom silovom poli koná vonkajšia sila  $F'$  prácu pri prekonávaní sily  $F$ , ktorou na hmotný bod pôsobí konzervatívne silové pole. Ak pri zmene polohy nenastáva zmena pohybového stavu, vonkajšia sila  $F'$  je v neustálej rovnováhe so silou  $F$ , ktorou na hmotný bod pôsobí pole, teda  $F' = -F$ <sup>9</sup>.

Pomocou práce vykonanej pri premiestnení hmotného bodu v konzervatívnom silovom poli definujeme zmenu *potenciálnej (polohovej) energie* hmotného bodu v uvažovanom silovom poli. Nech  $E_{p1}$  je potenciálna energia hmotného bodu v mieste 1 a  $E_{p2}$  je jeho energia v mieste 2. Zmenu *potenciálnej energie*  $\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$  definujeme pomocou práce, ktorú vykonajú vonkajšie sily pri premiestnení hmotného bodu z polohy 1 do polohy 2. So zreteľom na vzťah pre prácu (1.130) a zohľadnením vzťahu  $F' = -F$  medzi vonkajšou silou  $F'$  a silou, ktorou na hmotný bod pôsobí pole  $F$ , môžeme zmenu

<sup>8</sup>Vo všeobecnosti na teleso nachádzajúce sa v silovom poli môžu okrem silového poľa pôsobiť aj iné objekty. Sily, ktorými uvážované objekty pôsobia budeme nazývať vonkajšími silami.

<sup>9</sup>Zo vzťahu (1.130) je zrejmé, že práca sôl konzervatívneho poľa po uzavretej trajektórii je nulová.

potenciálnej energie definovať aj vztáhom

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.131)$$

Vektory  $\mathbf{r}_1$  a  $\mathbf{r}_2$  v rov. (1.131) určujú polohu bodov 1 a 2 a  $\mathbf{F}$  je sila, ktorou na hmotný bod pôsobí konzervatívne silové pole.

### Závislosť sily od potenciálnej energie hmotného bodu

Pomocou vztáhu pre elementárnu zmenu potenciálnej energie

$$dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.132)$$

vyplývajúceho z rovnice (1.131) môžeme odvodiť závislosť sily od potenciálnej energie v danom mieste silového poľa. Potenciálna energia hmotného bodu  $E_p$  závisí od jeho polohy v konzervatívnom silovom poli, ktorá môže byť určená pomocou súradníc  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Pre diferenciál  $dE_p$  funkcie  $E_p(x, y, z)$  platí:

$$\begin{aligned} dE_p &= \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \\ &= \left( \frac{\partial E_p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) E_p \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Výraz na pravej strane poslednej rovnice, ktorý označíme pomocou symbolu  $\nabla$  (nabla), t. j.

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right), \quad (1.134)$$

predstavuje diferenciálny operátor a výsledkom jeho pôsobenia na skalárnu veličinu je vektor. Operáciu operátora  $\nabla$ , ktorý sa nazýva aj Hamiltonov operátor, na skalárnu veličinu nazývame *gradient* (Dodatok 3.0.5, str. 96, vzťah 3.45). Pomocou tohto označenia môžeme rovnici (1.133) vyjadriť v tvare

$$dE_p = \nabla E_p \cdot d\mathbf{r} = grad E_p \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.135)$$

Vektor  $d\mathbf{r} = (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$  vyjadruje elementárne posunutie hmotného bodu. Porovnaním vztáhov (1.132) a (1.135) dostávame rovnicu

$$\mathbf{F} = -grad E_p, \quad (1.136)$$

ktorá hovorí, že sila, ktorou konzervatívne silové pole pôsobí v danom mieste na hmotný bod, je rovná záporne vzatému gradientu jeho potenciálnej energie v uvažovanom mieste.

### Zákon zachovania mechanickej energie

Uvažujme o *dynamicky izolovanom systéme*, o ktorom predpokladáme, že na hmotný bod okrem sily konzervatívneho poľa nepôsobí žiadna iná sila. Vplyvom silového poľa sa môže zmeniť poloha hmotného bodu a aj jeho pohybový stav, tak ako je to napr. pri voľnom páde telesa v poli zemskej tiaže.

Práca, ktorú *pole* vykoná pri premiestnení hmotného bodu z polohy 1 do polohy 2, je rovná rozdielu kinetickej energie v týchto bodech (rovinka 1.129), preto môžeme písat'

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = E_{k2} - E_{k1}. \quad (1.137)$$

Podľa rov. (1.131) zmena potenciálnej energie pri diskutovanom premiestnení hmotného bodu taktiež súvisí s prácou vykonanou silovým poľom. Porovnaním vzťahov (1.131) a (1.137) dostaneme rovnicu

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}, \quad (1.138)$$

ktorá hovorí, že súčet kinetickej a potenciálnej energie v bode 1 konzervatívneho silového poľa je rovnaký ako tento súčet v bode 2. Keďže body 1 a 2 môžu byť ľubovoľné, súčet kinetickej a potenciálnej energie hmotného bodu, ktorý budeme nazývať *mechanickou energiou E* hmotného bodu, je v každom mieste konzervatívneho silového poľa rovnaký. Na základe uvedeného môžeme rovnicu (1.138) zapísat' vo všeobecnejšom tvare

$$E = E_k + E_p = \text{konšt.} \quad (1.139)$$

Táto rovnica je matematickým vyjadrením *zákona zachovania mechanickej energie*, podľa ktorého *súčet kinetickej a potenciálnej energie (mechanická energia) hmotného bodu je rovnaký v každom mieste konzervatívneho silového poľa*.

V prírode a v technickej praxi sa stretávame s nekonzervatívnymi silami, ktoré sa nazývajú *disipatívne* sily. Práca vykonaná nekonzervatívnymi silami závisí od tvaru trajektórie (od veľkosti dráhy medzi uvažovanými bodmi), po ktorej sa pôsobisko sily pohybuje. Je zrejmé, že práca nekonzervatívnych sôl po uzavretej trajektórii je na rozdiel od práce konzervatívnych sôl rôzna od nuly. Príkladom disipatívnej sily je sila trenia alebo odpor vzduchu pri pohybe telesa v poli zemskej tiaže.

Zákon zachovania mechanickej energie je špeciálnym prípadom *zákona zachovania energie*, ktorý sa vzťahuje na všetky druhy energie. V prípade disipatívnych sôl akými sú napr. trecie sily, časť mechanickej energie sa mení na tepelnú energiu, avšak celková energia sa zachováva.

### Impulz sily

Časový účinok sily pôsobiacej na hmotný bod za dobu  $\Delta t = t_2 - t_1$  budeme hodnotiť pomocou časového integrálu sily

$$\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt. \quad (1.140)$$

Takto definovaná vektorová veličina  $\mathbf{I}$  sa nazýva *impulz sily*. Substitúciou sily pomocou pohybového zákona

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{p_1}^{p_2} d\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1, \quad (1.141)$$

kde  $\mathbf{p}_1$  a  $\mathbf{p}_2$  sú hybnosti hmotného bodu v okamihoch  $t_1$  a  $t_2$ . Teda

$$\mathbf{I} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta \mathbf{p}. \quad (1.142)$$

Z odvodenej rovnice vyplýva, že *impulz sily pôsobiacej na hmotný bod počas časového intervalu  $\Delta t$  sa rovná zmene hybnosti hmotného bodu za túto dobu*.

Impulz sily je vhodný pre hodnotenie nárazových síl, t. j. síl, ktoré pôsobia krátkej dobu a sú veľmi veľké. Napríklad ako pri zrážke tenisovej loptičky s tenisovou raketou alebo pri golfe. Počas ich pôsobenia sa len málo mení poloha telesa, avšak dochádza k veľkej zmene jeho pohybového stavu.

V mnohých prípadoch nárazová sila má premenlivú veľkosť, ale jej smer sa nemení. Namiesto takej sily často stačí uvažovať strednú hodnotu nárazovej sily  $\bar{F}$ , ktorá spôsobuje rovnaký impulz ako premenlivá sila. V uvedených prípadoch môžeme písat' skalárnu rovnicu

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \bar{F}(t_2 - t_1) = \Delta p, \quad (1.143)$$

z ktorej napr. vyplýva, že rovnakú zmene hybnosti telesa  $\Delta p$  môžeme dosiahnuť pôsobením veľkej sily  $\bar{F}$  počas krátkej doby  $\Delta t = t_2 - t_1$ , alebo naopak, pôsobením malej sily počas dlhšej doby.

### Rotačný impulz

Podobne ako v prípade impulzu sily, ktorý sme definovali pre charakterizovanie časového účinku sily, pomocou *impulzu momentu sily (rotačného impulzu)*  $\mathbf{H}$ , ktorý je definovaný vzťahom

$$\mathbf{H} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M} dt, \quad (1.144)$$

charakterizujeme časový účinok momentu sily. Pomocou rovnice (1.144) a pohybovej rovnice pre otáčavý pohyb hmotného bodu (1.98) dostaneme súvis medzi rotačným impulzom a momentom hybnosti hmotného bodu:

$$\mathbf{H} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \Delta \mathbf{L}. \quad (1.145)$$

Z rovnice vyplýva, že *rotačný impulz pôsobiaci na hmotný bod v časovom intervale  $\Delta t = t_2 - t_1$  je rovný zmene momentu hybnosti  $\Delta \mathbf{L}$  hmotného bodu za túto dobu*.

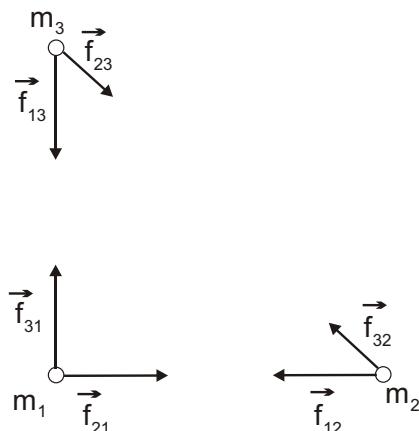
### 1.3 Mechanický pohyb sústavy hmotných bodov a telesa

Doteraz používaný prístup, v ktorom skutočný objekt bol nahradený hmotným bodom, neumožňuje riešiť všetky úlohy dynamiky. Pre prípady, keď rozmer objektov nemôžu byť zanedbané je užitočné zaviesť model *sústavy hmotných bodov*. Pomocou takého modelu je možné napr. skúmať pohyb sústavy telies, v ktorej každé teleso je nahradené hmotným bodom. Predstava sústavy hmotných bodov je vhodná aj pre tuhé telesá a látky v kvapalnom a plynnom stave, v ktorých stavebné častice (atómy, molekuly), môžu byť považované za hmotné body.

Uvažujme o sústave  $n$  hmotných bodov, ktorých hmotnosti sú  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots m_n$ . Každý hmotný bod je vo vzájomnom silovom pôsobení s ostatnými hmotnými bodmi. Sily, ktorými hmotné body navzájom na seba pôsobia sa nazývajú *vnútorné sily*. Okrem toho, na každý hmotný bod sústavy môžu pôsobiť objekty, ktoré nepatria do uvažovanej sústavy hmotných bodov. Sily, ktorými pôsobia objekty nepatriace do uvažovanej sústavy sú *vonkajšími silami*.

#### Výslednica vnútorných síl

Pri výpočte výslednice všetkých vnútorných síl sústavy využijeme zákon akcie a reakcie. Kvôli jednoduchosti najprv uvažujme o sústave pozostavajúcej z troch hmotných bodov, ktorých hmotnosti sú  $m_1, m_2$  a  $m_3$  (obr. 1.28).



Obr. 1.28: Vnútorné sily medzi hmotnými bodmi sústavy troch hmotných bodov.

preto pre  $n$  hmotných bodov platí

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ji} = 0, \quad (1.147)$$

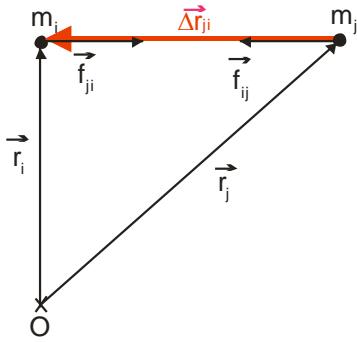
Ak hmotný bod  $m_1$  pôsobí na hmotný bod  $m_2$  silou  $\vec{f}_{12}$ , potom hmotný bod  $m_2$  pôsobí na  $m_1$  silou  $\vec{f}_{21}$ , pre ktorú platí  $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$ . Analogicky môžeme vyjadriť vzťahy medzi silami, ktorými na seba pôsobia ďalšie dve dvojice hmotných bodov, t. j.  $\vec{f}_{31} = -\vec{f}_{13}$  a  $\vec{f}_{32} = -\vec{f}_{23}$ . Je zrejmé, že výslednica vnútorných síl medzi troma hmotnými bodmi

$$(\vec{f}_{21} + \vec{f}_{12}) + (\vec{f}_{31} + \vec{f}_{13}) + (\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}) = 0. \quad (1.146)$$

V každej sústave hmotných bodov je možné vnútorné sily, ktorými jednotlivé hmotné body na seba pôsobia, združiť do dvojíc  $f_{ij}$  a  $f_{ji}$ . Tieto sily majú rovnakú veľkosť a sú opačne orientované,

kde  $f_{ji}$  je sila, ktorou pôsobí hmotný bod  $m_j$  na hmotný bod  $m_i$ . Odvodená rovnica hovorí, že výslednica všetkých vnútorných sôl je rovná nule.

### Výslednica momentov vnútorných sôl



Obr. 1.29: Určenie polohy pôsobísk sôl, ktorými na seba pôsobia hmotné body  $m_i$  a  $m_j$ .

V ďalšom vypočítame výsledný moment všetkých vnútorných sôl. Rovnako ako v predchádzajúcim odstavci predpokladáme, že medzi dvoma ľubovoľnými hmotnými bodmi sústavy  $m_i$  a  $m_j$  pôsobia sily  $f_{ji}$  a  $f_{ij}$ , ktoré sú rovnako veľké, majú opačný smer a ležia v tej istej priamke (obr. (1.29)). Poloha týchto hmotných bodov je vzhľadom k zvolenému vztážnému bodu O určená pomocou polohových vektorov  $r_i$  a  $r_j$  a výsledný moment týchto dvoch sôl vzhľadom k bodu O je rovný vektorovému súčtu momentov jednotlivých sôl. Teda

$$\mathbf{M}_{ji} + \mathbf{M}_{ij} = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ji}) + (\mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ij}) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ji}. \quad (1.148)$$

Vektor  $\Delta\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  leží na tej istej priamke ako aj vektor  $\mathbf{f}_{ji}$  (obr. 1.29), preto

$$\mathbf{M}_{ji} + \mathbf{M}_{ij} = \Delta\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{f}_{ji} = 0. \quad (1.149)$$

Zovšeobecnením týchto úvah pre všetky dvojice sôl sústavy  $n$  hmotných bodov dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ji} = 0. \quad (1.150)$$

Teda výsledný moment všetkých vnútorných sôl sústavy vzhľadom k ľubovoľnému vztážnému bodu sústavy je rovný nule.

### Ťažisko sústavy hmotných bodov

V mnohých prípadoch namiesto pohybu celej sústavy hmotných bodov postačuje skúmať pohyb tăžiska sústavy hmotných bodov. Existuje viacero spôsobov definície tăžiska a odvodenia vzťahov pre určenie jeho polohy. Predpokladáme, že pojem tăžiska je pre čitateľa dobre známy, preto sa obmedzíme na vyjadrenie vzťahov pre určenie jeho polohy bez príslušného odvodenia.

Ak poloha hmotných bodov o hmotnostiach  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  je vzhľadom ku vztážnému bodu O určená pomocou polohových vektorov  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_n$ , potom

polohu tiažiska je možné určiť pomocou polohového vektora  $\mathbf{r}_T$ , pre ktorý platí:

$$\mathbf{r}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (1.151)$$

kde  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  predstavuje hmotnosť celej sústavy hmotných bodov.

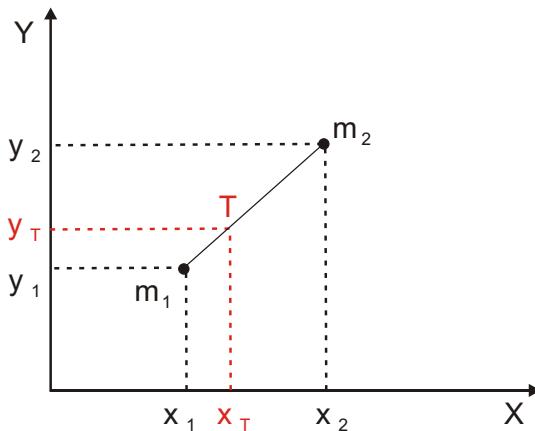
Ak vztažný bod O je počiatkom pravouhlnej súradnicovej sústavy a vektoru  $\mathbf{r}_T$  a  $\mathbf{r}_i$  rozložíme na zložky  $x_T, y_T, z_T$  a  $x_i, y_i, z_i$ , potom súradnice tiažiska sústavy hmotných bodov môžu byť vyjadrené pomocou vzťahov

$$x_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad (1.152a)$$

$$y_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad (1.152b)$$

$$z_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad (1.152c)$$

Na obr. (1.30) je znázornená poloha tiažiska sústavy dvoch hmotných bodov, ktorých pomer hmotností  $\frac{m_1}{m_2} = 2$ .



Obr. 1.30: Poloha tiažiska sústavy dvoch hmotných bodov, ktorých pomer hmotností  $\frac{m_1}{m_2} = 2$ .

Uvažovat' o nekonečne malom hmotnom elemente o hmotnosti  $dm$ , ktorý sa nachádza v nekonečne malom objeme  $dV$ . Hustota látky je definovaná vzťahom

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad (1.153)$$

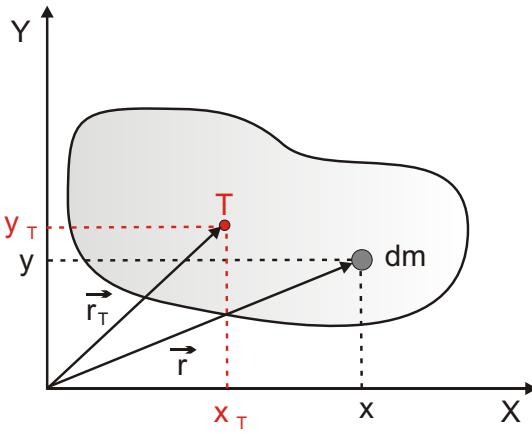
z ktorého pre hmotnosť hmotného elementu vyplýva vzťah  $dm = \rho dV$ . Hmotnosť látky sa vypočíta podľa vzťahu

$$M = \int \rho dV, \quad (1.154)$$

Vzťahy (1.151) až (1.152), ktoré sú platné pre ľubovoľnú sústavu hmotných bodov, platia aj pre látkové objekty v tuhom, kvapalnom a plynnom stave, v ktorých stavebné častice (atómy, molekuly, ióny) sú blízko pri sebe. Kvôli obrovskému počtu častíc v látke a ich veľkej hustote je výhodnejšie pri popise mechanického pohybu nahradíť diskrétnu sústavu hmotných bodov, napr. sústavu molekúl, objektom so spojite distribuovanou látkou. Taký prístup často bude využívať pri skúmaní pohybu telies.

V uvedených prípadoch budeme namiesto hmotného bodu s hmotnosťou  $m$

avšak v prípade homogénnych látok, t. j. v prípadoch, keď hustota látky je v každej jej časti rovnaká, hmotnosť látky môžeme vypočítať podľa vzťahu  $M = \rho V$ .



Obr. 1.31: Určenie polohy tiažiska telesa, kde  $x_t$ ,  $y_t$  sú súradnice tiažiska telesa a  $x, y$  sú súradnice hmotného elementu  $dm$ .

Polohu tiažiska vzhľadom k vzťažnému bodu O vyjadruje polohový vektor

$$\mathbf{r}_T = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm. \quad (1.155)$$

Ak vzťažný bod spájame s počiatkom pravouhlnej súradnicovej sústavy, potom pre súradnice tiažiska platia vzťahy

$$x_T = \frac{1}{M} \int x dm, \quad (1.156a)$$

$$y_T = \frac{1}{M} \int y dm, \quad (1.156b)$$

$$z_T = \frac{1}{M} \int z dm, \quad (1.156c)$$

v ktorých  $x, y, z$  sú súradnice hmotného elementu  $dm$ ,  $M$  je hmotnosť látkového objektu, ktorá môže byť vypočítaná podľa vzťahu (1.154). Na obr. (1.31) je znázornená poloha hmotného elementu  $dm$  a tiažiska  $T$  telesa tvaru nepravidelnej dosky.

### 1.3.1 Pohybové rovnice sústavy hmotných bodov

#### Prvá impulzová veta

Na každý hmotný bod sústavy hmotných bodov môžu vo všeobecnosti pôsobiť vonkajšie a vnútorné sily. Výslednicu všetkých vonkajších sôl pôsobiacich na  $i$ -tý hmotný bod označíme  $\mathbf{F}_i$  a výslednica všetkých vnútorných sôl, ktorými na uvažovaný  $i$ -tý hmotný bod pôsobia všetky ostatné hmotné body sústavy je  $\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ji}$ . Keďže zatiaľ hovoríme o jednom  $i$ -tom hmotnom bode sústavy, môžeme na neho aplikovať zákon sily (1.58), podľa ktorého výslednica vonkajších a vnútorných sôl pôsobiacich na hmotný bod je rovná časovej zmene hybnosti hmotného bodu. Teda môžeme písat' rovnicu

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}, \quad (1.157)$$

v ktorej  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$  je hybnosť  $i$ -tého hmotného bodu. Sumáciou rovníc (1.157) pre  $i = 1$  až  $n$  dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ji} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i. \quad (1.158)$$

$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}$  v rovnici (1.158) je výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov, t. j. na všetky body sústavy. Dvojité sumy predstavujú výslednicu všetkých vnútorných síl a táto podľa rovnice (1.147) je rovná nule.  $\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{p}$  predstavuje hybnosť sústavy hmotných bodov. Po uvedených substitúciach dostaneme rovnicu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (1.159)$$

ktorá hovorí, že *výslednica všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov je rovná časovej zmene hybnosti sústavy hmotných bodov.* Rovnica (1.159) sa nazýva *1. impulzová veta*.

Pre 1. impulzovú vetu je môžné nájsť aj iné matematické vyjadrenie. Hybnosť sústavy hmotných bodov je možné pomocou vzťahu (1.151) vyjadriť nasledovným spôsobom:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (M \mathbf{r}_T). \quad (1.160)$$

Dosadením vzťahu  $\mathbf{p} = \frac{d}{dt} (M \mathbf{r}_T)$  do 1. impulzovej vety (1.159) dostaneme rovnicu

$$\mathbf{F} = M \mathbf{a}_T, \quad (1.161)$$

v ktorej  $M$  je hmotnosť sústavy hmotných bodov a  $\mathbf{a}_T = \frac{d^2 \mathbf{r}_T}{dt^2}$  je zrýchlenie tāžiska sústavy hmotných bodov. Rovnica (1.161), ktorá je z fyzikálneho hľadiska ekvivalentná 1. vete impulzovej, je *vetou o pohybe tāžiska*. Podľa nej *tāžisko sústavy hmotných bodov sa pohybuje tak, ako by sa pohyboval hmotný bod, ktorého hmotnosť je rovná hmotnosti sústavy, keby naň pôsobila sila rovnajúca sa výslednicou všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov.*

### Druhá impulzová veta

Ak na hmotný bod sústavy, ktorého hmotnosť je  $m_i$  a hybnosť  $\mathbf{p}_i$ , pôsobí vonkajšia sila  $\mathbf{F}_i$  a vnútorná sila  $\mathbf{f}_i$ , potom moment týchto súvisejúcich súčasných súčinov s vzhľadom k vzdialosti medzi sústavou a bodom O je

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ji}), \quad (1.162)$$

kde vektor  $\mathbf{r}_i$  určuje polohu  $i$ -tého hmotného bodu sústavy vzhľadom k vzdialosti medzi sústavou a bodom O. Uvažovaný  $i$ -tý hmotný bod vzhľadom na vzdialosť medzi sústavou a bodom O má moment hybnosti  $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ , ktorého súvis s momentom sily je daný pohybovou rovnicou (1.98). Teda môžeme písat'

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ji}) = \frac{d\mathbf{L}_i}{dt}. \quad (1.163)$$

Sumáciou rovníc (1.163) pre  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  dostaneme

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ji}) = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i. \quad (1.164)$$

V predchádzajúcej rovnici vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov  $\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$  predstavuje výslednicu momentov všetkých vonkajších síl  $\mathbf{M}$  a vektorový súčet momentov hybností jednotlivých hmotných bodov  $\sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i$  predstavuje celkový moment hybnosti sústavy  $\mathbf{L}$ . Z predchádzajúcich úvah už vieme, že dvojitá suma  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ji})$  predstavuje vektorový súčet momentov všetkých vnútorných síl, ktorý je rovný nule (rov. (1.150)). Po uvedených označeniach dostaneme rovnicu

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (1.165)$$

ktorá sa nazýva *2. impulzová veta*. Z nej vyplýva, že *vektorový súčet momentov všetkých vonkajších síl pôsobiacich na sústavu hmotných bodov je rovný časovej zmene momentu hybnosti sústavy hmotných bodov*.

### 1.3.2 Zákony zachovania a podmienky rovnováhy

Sústavu hmotných bodov, na ktorú nepôsobia nijaké vonkajšie sily budeme nazývať *dynamicky izolovanou sústavou*. V prípade izolovanej sústavy výslednica vonkajších síl  $\mathbf{F} = 0$  a aj výsledný moment vonkajších síl  $\mathbf{M} = 0$ . Z prvej (1.159) a druhej (1.165) impulzovej vety pre izolovanú sústavu hmotných bodov vyplývajú vzťahy

$$\mathbf{p} = \text{konšt.} \quad \text{a} \quad \mathbf{L} = \text{konšt.} \quad (1.166)$$

Rovnice (1.166) sú matematickými vyjadreniami *zákona zachovania hybnosti* a *zákona zachovania momentu hybnosti*. Z uvedených rovníc vyplýva, že *hybnosť izolovanej sústavy a jej moment hybnosti sa vzhľadom k ľubovoľnému vzdialému bodu O zachovávajú, t. j. nemenia svoje veľkosti ani smery*.

Uviedli sme, že prvá veta impulzová je ekvivalentná s vetou o pohybe tāžiska. V prípade dynamicky izolovanej sústavy hmotných bodov rovnica (1.161) nadobúdne tvar

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_T = 0, \quad (1.167)$$

z ktorej vyplýva, že zrýchlenie tāžiska sústavy hmotných bodov  $\mathbf{a}_T = \frac{dv_T}{dt} = 0$  a rýchlosť tāžiska sústavy

$$v_T = \text{konšt.} \quad (1.168)$$

Z odvodenej rovnice vyplýva, že tāžisko izolovanej sústavy sa pohybuje konštantnou rýchlosťou a to bez ohľadu na to, ako sa pohybujú jednotlivé hmotné body sústavy.

V špeciálnom prípade rovnice (1.166) platia aj pre sústavu hmotných bodov, ktorá nie je dynamicky izolovaná. Taký prípad nastáva, keď vonkajšie sily pôsobiace na jednotlivé hmotné body sústavy sú rôzne od nuly, avšak výslednica všetkých vonkajších

síl  $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F} = 0$  a aj výslednica momentov vonkajších síl  $\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{M} = 0$ . Hovoríme, že sily pôsobiace na sústavu hmotných bodov a aj ich momenty sú v rovnováhe. V diskutovanom prípade rovnice (1.166) sú *podmienkami rovnováhy sústavy hmotných bodov*.

## 1.4 Otáčavý pohyb tuhého telesa okolo pevnej osi

Pomocou pohybových rovníc (1.159) a (1.165) môžeme vyšetrovať pohyb ľubovoľnej sústavy hmotných bodov, teda aj pohyb telesa, ktoré môžeme považovať za objekt zo spojite distribuovanou látkou. Skúmanie pohybu telesa je jednoduchšie v prípadoch, keď sa každý bod telesa pohybuje po priamke alebo vykonáva otáčavý pohyb okolo pevnej osi. V jednom aj v druhom uvažovanom prípade všetky vektorové popisujúce pohyb ležia v tej istej priamke, preto namiesto príslušných vektorových rovníc stačí pri skúmaní pohybu pracovať so skalárnymi rovnicami. V prvom nami uvažovanom prípade pohyb telesa môžeme skúmať pomocou rovnice  $F = ma$ . V ďalšom sa pokúsime odvodiť analogickú rovnicu pre otáčavý pohyb telesa okolo pevnej osi.

### 1.4.1 Pohybová rovnica telesa rotujúceho okolo pevnej osi

Pomocou druhej vety impulzovej (1.165), ktorá má tvar

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (1.169)$$

môžeme vyšetrovať ľubovoľný otáčavý pohyb. Moment sily spôsobujúci otáčavý pohyb telesa môžeme vo všeobecnosti vyjadriť pomocou zložiek v pravouhlej súradnicovej sústave podľa vzťahu

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}. \quad (1.170)$$

Zmenu pohybového stavu telesa, ktoré rotuje okolo pevnej osi  $o \equiv Z$  pravouhlej súradnicovej sústavy spôsobuje iba zložka momentu sily spadajúca do smeru osi rotácie a ostatné zložky momentu sily nemajú vplyv na otáčavý pohyb okolo pevnej osi. Z uvedených dôvodov naše úvahy nebudú strácať na všeobecnosti, keď budeme predpokladat, že moment sily má len jednu nenulovú zložku, ktorej veľkosť je  $M_z$ , teda  $\mathbf{M} = M_z \mathbf{k}$ .

#### Moment hybnosti telesa rotujúceho okolo pevnej osi

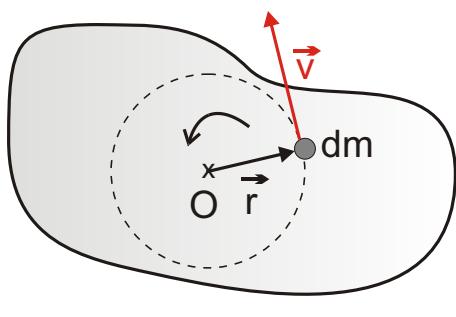
Pri odvodzovaní pohybovej rovnice je potrebné vyjadriť aj zložku momentu hybnosti spadajúcu do osi rotácie  $o \equiv Z$ .

Pri otáčavom pohybe telesa sa rôzne jeho časti pohybujú rôznymi rýchlosťami, preto je potrebné najprv vyjadriť moment hybnosti hmotného elementu telesa  $d\mathbf{L}$ . Podľa definície (1.96) moment hybnosti elementu o hmotnosti  $dm$ , ktorého poloha

vzhl'adom k zvolenému vztažnému bodu O je určená pomocou polohového vektora  $r$  a rýchlosť elementu vzhl'adom k tomuto bodu je  $v$ , je určený vzťahom  $dL = r \times v dm$ , z ktorého pre moment hybnosti rotujúceho telesa vyplýva

$$L = \int r \times v dm. \quad (1.171)$$

Kvôli jednoduchosti nech rotujúcim telesom je teleso tvaru nepravidelnej dosky zanedbateľnej hrúbky (obr. (1.32)) a nech os rotácie telesa  $o$  je kolmá na dosku.



Obr. 1.32: Otáčavý pohyb telesa tvaru nepravidelnej dosky zanedbateľnej hrúbky okolo pevnej osi, ktorá prechádza bodom O a je kolmá na dosku. Vektor  $r$  určuje polohu hmotného elementu o hmotnosti  $dm$ , ktorý sa pohybuje po kružnici rýchlosťou  $v$ . Vektor momentu hybnosti  $L$  je orientovaný pozdĺž osi rotácie.

Moment hybnosti  $L$  budeme vzťahovať k vztažnému bodu O, ktorý leží na osi rotácie v bode, v ktorom os pretína dosku. Vektoru  $r$  a  $v$  ležia v rovine kolmej na os rotácie, preto vektor  $r \times v$  a aj vektor momentu hybnosti telesa  $L$  leží v osi rotácie. Uvedené vektoru sú na seba kolmé, preto pre veľkosť momentu hybnosti môžeme písat' (Dodatok 3.0.4, str. 91)

$$L = \int r v dm = \int \omega r^2 dm = \omega \int r^2 dm. \quad (1.172)$$

Pomocou integrálu

$$I = \int r^2 dm \quad (1.173)$$

definujeme *moment zotrvačnosti* telesa  $I$  vzhl'adom k osi, okolo ktorej teleso rotuje. Je možné dokázať, že vzťah (1.173) platí všeobecne, t.j. aj v prípade telesa ľubovoľného tvaru, pričom  $r$  v uvedenom vzťahu predstavuje vzdialosť hmotného elementu od osi. Teda moment hybnosti telesa rotujúceho okolo pevnej osi sa vypočíta podľa vzťahu

$$L = I\omega. \quad (1.174)$$

Z výpočtov vyplýva, že *veľkosť momentu hybnosti telesa rotujúceho okolo pevnej osi je určená súčinom momentu zotrvačnosti telesa  $I$  vzhl'adom k osi rotácie a uhlovej rýchlosťi  $\omega$  rotácie. Vektor momentu hybnosti  $L$  leží v osi rotácie a jeho orientácia je určená smerom rotácie.*

### Pohybová rovnica telesa rotujúceho okolo pevnej osi

V prípade telesa rotujúceho okolo pevnej osi vektoru momentu sily  $M$  a momentu hybnosti  $L$  ležia v tej istej priamke, preto namiesto druhej impulzovej vety vo vektorovom tvare môžeme otáčavý pohyb popísat' skalárnu rovnicou

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}, \quad (1.175)$$

v ktorej moment hybnosti  $L$  sme nahradili vztáhom (1.174). Moment zotrvačnosti  $I$  nie je závislý od času, preto pre moment sily dostaneme vztáh

$$M = I\dot{\varepsilon}, \quad (1.176)$$

v ktorom  $\dot{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}$  je uhlové zrýchlenie telesa rotujúceho okolo pevnej osi. Odvodnená rovnica, ktorá je platná nielen pre teleso tvaru dosky zanedbateľnej hrúbky, ale platí pre teleso ľubovoľného tvaru, je *pohybovou rovnicou telesa rotujúceho okolo pevnej osi*. Pohybová rovnica hovorí, že *moment všetkých vonkajších sôl otáčajúcich telesa okolo pevnej osi je rovný súčinu momentu zotrvačnosti vzhľadom k tejto osi a uhlového zrýchlenia telesa*.

Použitie pohybovej rovnice odvodenej pre otáčavý pohyb telesa rotujúceho okolo pevnej osi si ukážeme v časti 1.4.2 pri skúmaní kyvadlového pohybu telies.

### Kinetická energia telesa rotujúceho okolo pevnej osi

Každý hmotný element telesa rotujúceho okolo pevnej osi sa otáča rovnakou uhlovou rýchlosťou  $\omega$ , avšak jeho rýchlosť  $v$  závisí od polomeru kružnice  $r$  (obr. 1.32), po ktorej sa daný element pohybuje. Keďže  $v = \omega r$ , pre kinetickú energiu hmotného elementu môžeme písat'

$$dE_k = \frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}dm\omega^2r^2. \quad (1.177)$$

Po integrácii dostaneme vztáh

$$E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm, \quad (1.178)$$

v ktorom  $I = \int r^2 dm$  je moment zotrvačnosti vzhľadom k osi rotácie. Teda kinetická energia telesa rotujúceho okolo pevnej osi sa vypočíta podľa vztáhu

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (1.179)$$

Pohybovú rovinu telesa rotujúceho okolo pevnej osi (1.176) môžeme napísat' v tvare

$$M = I \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.180)$$

Vynásobením tejto rovnice elementárnym uhlom  $d\varphi = \omega dt$  dostaneme vztáh

$$Md\varphi = I\omega d\omega. \quad (1.181)$$

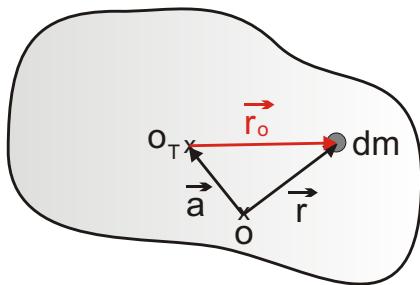
Podľa (1.121) ľavá strana predchádzajúcej rovnice vyjadruje elementárnu prácu  $dW$  vykonanú pri pootočení telesa o uhol  $d\varphi$ . Práca vykonaná pri pootočení telesa o uhol  $\varphi_2 - \varphi_1$  je

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2, \quad (1.182)$$

kde uhlové rýchlosťi  $\omega_1$  a  $\omega_2$  odpovedajú počiatočnému uhlu  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  po pootočení. Z odvodenej rovnice vyplýva, že práca sily vykonaná pri otočení telesa o uhol  $\varphi_2 - \varphi_1$  je rovná zmene kinetickej energie pri uvažovanom pootočení. Vo vete o kinetickej energii, ktorú sme už skôr dokázali pre prípad translačného pohybu telesa (rov.1.129) sa predpokladá, že moment zotrvačnosti telesa sa počas pohybu nemení.

### Moment zotrvačnosti telesa, Steinerova veta

Z definície (1.173) sa dá dedukovať, že moment zotrvačnosti telesa závisí od hmotnosti telesa, od rozloženia hmotnosti vzhľadom k osi, od vzdialosti osi od tāžiska a od jej orientácie vzhľadom k telesu.



Obr. 1.33: Určenie polohy hmotného elementu  $dm$  vzhľadom k osi  $o_T$ , ktorá prechádza tāžiskom telesa tvaru nepravidelnej dosky a vzhľadom k osi  $o$ , ktorá je rovnobežná s tāžiskovou osou  $o_T$ . Obidve osi sú orientované kolmo na dosku. Vektor  $a$  určuje polohu osi  $o_T$  vzhľadom k osi  $o$ .

Odvodíme súvis medzi momentom zotrvačnosti telesa vzhľadom k ľubovoľnej osi  $o$  a momentom zotrvačnosti vzhľadom k osi  $o_T$ , ktorá prechádza tāžiskom telesa a s uvažovanou osou je rovnobežná. Kvôli jednoduchosti výpočtu momentu zotrvačnosti urobíme pre teleso tvaru nepravidelnej dosky zanedbateľnej hrúbky vzhľadom k osi, ktorá je na dosku kolmá. Polohu hmotného elementu  $dm$  budeme určovať pomocou polohových vektorov  $r$  a  $r_0$  vzhľadom k bodom na osiach  $o$  a  $o_T$  tak, ako je to znázornené na obr. 1.33.

Poľoha osi  $o_T$  vzhľadom k osi  $o$  je určená pomocou polohového vektora  $a$ . Z obrázku je zrejmé, že pre uvedené vektorov platí rovnica

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}, \quad (1.183)$$

umocnením ktorej dostaneme

$$r^2 = r_0^2 + a^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_0. \quad (1.184)$$

Vynásobením tejto rovnice hmotnosťou  $dm$  a integráciou dostaneme

$$\int r^2 dm = \int r_0^2 dm + a^2 \int dm + 2\mathbf{a} \cdot \int \mathbf{r}_0 dm, \quad (1.185)$$

pričom pri úpravách na pravej strane rovnice sme zohľadnili skutočnosť, že vektor  $a$  a aj jeho veľkosť  $a$  sú konštantné. Zo vztahu (1.173) vyplýva, že integrál na ľavej strane rovnice predstavuje moment zotrvačnosti  $I$  vzhľadom k osi  $o$ , prvý integrál na pravej strane predstavuje moment zotrvačnosti  $I_0$  vzhľadom k osi  $o_T$  a druhý vztah

na pravej strane nadobúda po integrácii hodnotu  $ma^2$ . Podľa definície polohového vektora tāžiska (rov.1.151) pre integrál v poslednom vzťahu predchádzajúcej rovnice platí  $\int \mathbf{r}_0 dm = m\mathbf{r}_T$  a keďže os  $o_T$  prechádza tāžiskom, potom aj polohový vektor tāžiska  $\mathbf{r}_T$  a aj integrál  $\int \mathbf{r}_0 dm$  sú rovné nule. Teda platí

$$I = I_0 + ma^2. \quad (1.186)$$

Odvodený vzťah, ktorý platí nielen pre dosku zanedbateľnej hrúbky, ale aj pre teleso ľubovoľného tvaru, sa nazýva *Steinerova veta*. Z rovnice (1.186) vyplýva, že moment zotrvačnosti  $I$  telesa vzhľadom k ľubovoľnej osi je rovný súčtu momentu zotrvačnosti  $I_0$  vzhľadom k osi prechádzajúcej tāžiskom a rovnobežnej s uvažovanou osou a súčinu hmotnosti telesa a druhej mocniny kolmej vzdialenosťi obidvoch osí. Zo Steinerovej vety vyplýva, že moment zotrvačnosti má v závislosti od vzdialenosťi  $a$  minimum a nadobúda najmenšiu hodnotu pre os prechádzajúcu tāžiskom.

## 1.4.2 Kyvadlový pohyb

Pri otáčavom pohybe telesa okolo pevnej osi vektor momentu sily stále leží v tej istej priamke, avšak môže meniť svoju orientáciu a svoju veľkosť. Špeciálnym prípadom otáčavého pohybu je kyvadlový pohyb telesa, pri ktorom moment sily má vždy opačný smer ako je smer výchylky z rovnovážnej polohy a jeho hodnota je priamo úmerná veľkosti výchylky. Príkladom kyvadlového pohybu je torzné a fyzikálne kyvadlo. Obidve kyvadlá sú vhodné na experimentálne určenie momentu zotrvačnosti telies.

### Torzné kyvadlo

Pohyb torzného kyvadla spôsobujú pružné sily, ktoré vznikajú pri skrúcaní vlákna alebo tyče. Torzné kyvadlo môže byť realizované pomocou dosky upevnenej v jej strede na zvislom vlákne (obr. 1.34). Z experimentov vyplýva, že súvis medzi momentom sily  $M$ , ktorý spôsobuje otáčavý pohyb okolo pevnej osi, a uhlom pootočenia  $\varphi$  z rovnovážnej polohy je daný vzťahom

$$M = -M_0 \varphi. \quad (1.187)$$

$M_0$  je *torzná tuhost'* vlákna, ktorá je určená jeho elastickými vlastnosťami a geometrickými rozmermi. Pre moment sily súčasne platí pohybová rovnica (1.176)

$$M = I \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (1.188)$$

Porovnaním rovníc (1.187) a (1.188) a jednoduchou úpravou dostaneme pohybovú rovnicu torzného kyvadla

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (1.189)$$

v ktorej  $\omega_0^2 = M_0/I$ . Riešenie pohybovej rovnice môže byť vyjadrené pomocou závislosti

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (1.190)$$

v ktorej  $\varphi_0$  je amplitúda pohybu vyjadrujúca maximálnu výchylku kyvadla z rovnovážnej polohy. Hodnota fázovej konštanty  $\alpha$  závisí od volby začiatku merania času.

Zo vzťahu  $\omega_0^2 = M_0/I$  a z rovnice (1.190) vyplýva, že torzné kyvadlo vykonáva periodický pohyb s uhlovou frekvenciou

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M_0}{I}} \quad (1.191)$$

a períodou pohybu

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M_0}}. \quad (1.192)$$

Výpočtom je možné ukázať, že torzná tuhost' pre vlákno kruhového prierezu polomeru  $r$  a dĺžky  $l$  má hodnotu

$$M_0 = \frac{\pi G r^4}{2l}, \quad (1.193)$$

kde  $G$  je modul pružnosti v šmyku materiálu, z ktorého vlákno je zhotovené.

Obr. 1.34: Znázornenie pohybu torzného kyvadla okolo zvislej osi  $o$ . Kyvadlový pohyb sa uskutočňuje vo vodorovnej rovine.

Modul pružnosti v šmyku  $G$  môže byť určený meraním períody torzného kyvadla. Pre jeho výpočet môžeme použiť vzťah, ktorý dostaneme elimináciou torznej tuhosti  $M_0$  z rovníc (1.192) a (1.193).

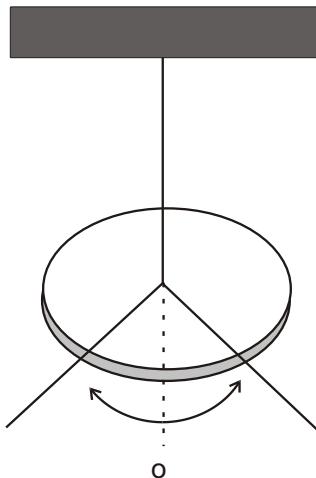
Vzťah medzi períodou  $T$  a momenom zotrvačnosti  $I$  torzného kyvadla umožňuje experimentálne stanovenie momentu zotrvačnosti symetrických telies. Ak torzné kyvadlo zhotovíme tak, že na kruhovú dosku pôvodného kyvadla položíme symetrické teleso, pre períodu takéhoto zloženého kyvadla  $T'$  platí vzťah

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I + I'}{M_0}}, \quad (1.194)$$

v ktorom  $I$  je moment zotrvačnosti kruhovej dosky a  $I'$  je moment zotrvačnosti telesa položeného na kruhovú dosku. Z rovníc (1.192) a (1.194) pre moment zotrvačnosti symetrického telesa dostaneme

$$I' = I \left[ \frac{T'^2}{T^2} - 1 \right] \quad (1.195)$$

Výpočtom integrálu (1.173) dostaneme pre moment zotrvačnosti kruhovej dosky vzťah  $I = mR^2/2$ . Hmotnosť kruhovej dosky  $m$ , jej polomer  $R$  a períody  $T$  a  $T'$  zistíme meraním.



### Fyzikálne kyvadlo

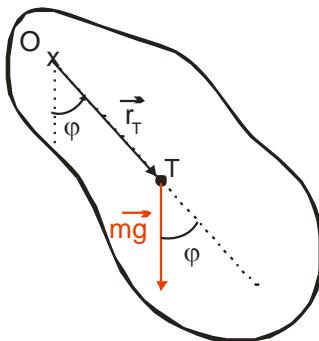
Pod fyzikálnym kyvadlom rozumieme teleso ľubovoľného tvaru, ktoré vplyvom tiažovej sily môže vykonávať kyvadlový pohyb okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej tiažiskom (obr. (1.35)). Budeme skúmať časovú závislosť výchylky kyvadla  $\varphi$  z jeho rovnovážnej polohy. Pre tento účel si na vodorovnej osi  $o$ , ktorá na obrázku je kolmá na nákresňu, zvoľme vztážný bod  $O$  tak, že jeho vzdialenosť  $a$  od tiažiska  $T$  je súčasne aj vzdialenosťou tiažiska od osi  $o$ .

Na ľubovoľný hmotný element kyvadla pôsobí tiažová sila  $gdm$ , ktorej moment vzhľadom k bodu  $O$  je  $dM = \mathbf{r} \times gdm$ , kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor hmotného elementu vzhľadom k vztážnému bodu  $O$ . Pre moment sily pôsobiacej na kyvadlo s hmotnosťou  $m$  platia vztahy

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times gdm = \int r dm \times \mathbf{g} = \mathbf{r}_T \times mg. \quad (1.196)$$

Vektor  $\mathbf{M}$  stále leží v tej istej priamke, preto namiesto vektorovej rovnice (1.196) môžeme písat' skalárnu rovnicu (Dodatok 3.0.4, str.91)

$$M = amg \sin \varphi, \quad (1.197)$$



v ktorej veľkosť polohového vektora tiažiska sme označili pomocou symbolu  $a$ , t. j.  $|\mathbf{r}_T| = a$ . Ak sa obmedzíme na malé výchylky ( $\varphi < 5^\circ$ ), pri ktorých  $\sin \varphi \approx \varphi$ , potom moment sily  $M$  bude priamoúmerný výchylke  $\varphi$  a ak pomocou znamienka mínus zohľadníme orientáciu momentu sily vzhľadom k výchylke  $\varphi$  pre moment sily môžeme písat'

$$M = -amg\varphi. \quad (1.198)$$

Obr. 1.35: Pohyb fyzikálneho kyvadla okolo pevnej vodorovnej osi vlyvom tiažovej sily. Os rotácie je kolmá na nákresňu a prechádza bodom  $O$ .

Ked'že sa opäť jedná o otáčavý pohyb okolo pevnej osi, môžeme použiť rovnicu (1.176). Po dosadení (1.198) do

(1.176) a úprave dostaneme pohybovú rovnicu fyzikálneho kyvadla

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (1.199)$$

v ktorej  $\omega_0^2 = mga/I$ . Vidíme, že odvodená pohybová rovnica má taký istý tvar ako pre torzné kyvadlo. Teda  $\varphi$  je opäť harmonickou funkciou času s uhlovou frekvenciou  $\omega_0$  a períodou  $T$  pre ktoré platí

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}} \quad (1.200)$$

a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg\alpha}}. \quad (1.201)$$

Odvodený vzťah pre períodu fyzikálneho kyvadla môžeme využiť pre experimentálne určenie momentu zotrvačnosti  $I$ .



# Kapitola 2

## Mechanické kmity

V prírode a aj v technickej praxi sa často stretávame s rozmanitými periodickými procesmi, medzi ktoré napr. patrí pohyb kyvadiel, pohyb piestov vo vozidlách, pohyb membrány v reproduktore, rytmické pohyby srdca a pod. Periodický pohyb vykonávajú aj atómy v tuhej látke, elektróny v televíznych vysielačoch atď. Všetky periodické procesy sú charakteristické tým, že objekt sa pohybuje v blízkosti určitej strednej polohy, ktorú nazývame *rovnovažná poloha* a pozorované javy sa opakujú v pravidelných intervaloch. Každý z uvedených periodických procesov môžeme popísat' pomocou periodickej funkcie  $f(t)$  závislej od času  $t$ , pre ktorú platí rovnosť  $f(t + T) = f(t)$  pre ľubovoľný čas  $t$ . Čas  $T$  je *periódou* procesu (javu, pohybu).

Často sa stretaváme aj s neperiodickými javmi, ktoré sa ponášajú na periodický proces. Príkladom tohto druhu môže byť pohyb telesa zaveseného na pružine. Teleso vykonáva kmitavý pohyb, ktorý však po určitom čase, kvôli jeho tlmeniu vzduchom, zanikne. Všetky procesy, pri ktorých sa objekt pohybuje okolo rovnovážnej polohy patria do skupiny javov, ktoré sú známe ako *kmity alebo oscilácie*. Periodické oscilácie sú špeciálnym prípadom z rozmanitých javov patriacich do tejto skupiny.

Pod pojmom kmitanie sa nerozumie len mechanický proces, ktorý popisujeme pomocou výchylky (vzdialenosťi) častice z rovnovážnej polohy. K týmto procesom patria aj elektrické kmity, ktoré popisujeme pomocou závislosti elektrického prúdu alebo elektrického náboja od času. V ďalších častiach sa budeme venovať len mechanickým javom.

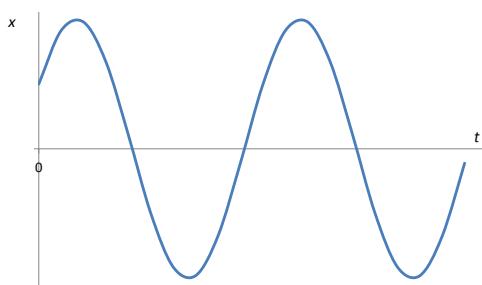
Pri skúmaní pohybu telesa, ktorý sa uskutočňuje vplyvom pružnej sily sme zistili, že teleso vykonáva kmitavý pohyb, ktorý sa môže udržiavať ľubovoľne dlhú dobu. Závislosť výchylky telesa z rovnovážnej polohy je vyjadrená harmonickou funkciou, preto tento pohyb budeme nazývať *harmonickým kmitaním alebo harmonickými kmitami*. Prípad kmitania budeného jedine silou pružnosti je ideálny, ku ktorému je možné sa viacmenej len priblížiť. Pri kmitavom pohybe na teleso okrem sily pružnosti pôsobí aj odporová sila prostredia, ktorá spôsobuje postupný zánik kmitania. Také kmitanie budeme nazývať *kmitaním tlmeným*.

Teleso alebo aj fyzická sústava (konštrukcia) vykonávajúca kmitavý pohyb sa nazýva *oscilátorom*. Jednoduchým oscilátorom je teleso zavesené na pružine, avšak môže

nim byť aj napr. mostná konštrukcia. Oscilátor vykonávajúci harmonické kmity sa nazýva *harmonickým oscilátorom*<sup>1</sup> alebo aj *lineárny (harmonický) oscilátorom*, pričom termín "lineárny" súvisí s lineárnou závislosťou sily pôsobiacej na oscilátor od výchylky.

## 2.1 Harmonické kmity

Pri skúmaní pohybu hmotného bodu nás zaujíma výpočet závislosti parametrov pohybu (polohy, rýchlosťi, zrychlenia) od času. Uvedené závislosti môžeme získať riešením príslušných pohybových rovníc.



Obr. 2.1: Lineárny oscilátor vykonáva netlmený harmonický kmitavý pohyb.

$\omega_0 t + \alpha$  sa nazýva *fáza* kmitov a  $\alpha$  je *počiatok fázy* alebo *fázová konštantă*, ktorá vyjadruje hodnotu fázy v čase  $t = 0$ .

Uhlová frekvencia kmitavého pohybu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2)$$

závisí jedine od vlastností oscilátora, ktoré sú určené tuhostou pružiny  $k$  a hmotnosťou telesa  $m$ . Keďže priebeh oscilácií je určený len vlastnosťami oscilátora, príslušné kmity sa nazývajú *vlastné alebo volné kmity* a uhlová frekvencia určená rovnicou (2.2) sa nazýva aj *vlastná uhlová frekvencia*. Odpovedajúca periódna kmitov (vlastná periódna alebo periódna voľných kmitov) je určená vzťahom

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.3)$$

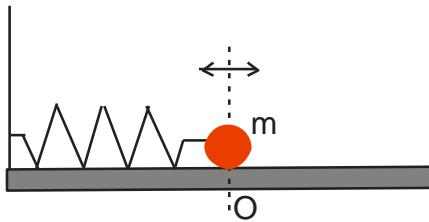
Zo vzťahov (2.2) a (2.3) je vidieť, že ani uhlová frekvencia a ani periódna kmitov nezávisia od amplitúdy. Pomocou periódy je definovaná frekvencia kmitov

$$f_0 = \frac{1}{T_0}, \quad (2.4)$$

ktorá vyjadruje počet kmitov za jednotku času. Jednotkou frekvencie je 1 Hz (*hertz*).

<sup>1</sup>Pomocou termínu harmonický oscilátor sa niekedy rozumie sústava (pružina a teleso) vykonávajúca harmonické kmity.

### Energia harmonického oscilátora



Obr. 2.2: Kmitavý pohyb guľôčky vplyvom sily pružnosti.

sat'

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (2.5)$$

Kinetická energia oscilátora o hmotnosti  $m$  v ľubovoľnom čase  $t$  je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (2.6)$$

Pri výpočte potenciálnej energie oscilátora budeme vychádzať zo vzťahu (1.132), ktorý pre pohyb pozdĺž osi X môžeme vyjadriť v tvare

$$dE_p = -F dx. \quad (2.7)$$

Dosadením sily pružnosti (rov. (1.68)) do poslednej rovnice a jej integráciou dostaneme

$$E_p = k \int x dx + C = \frac{1}{2}kx^2 + C. \quad (2.8)$$

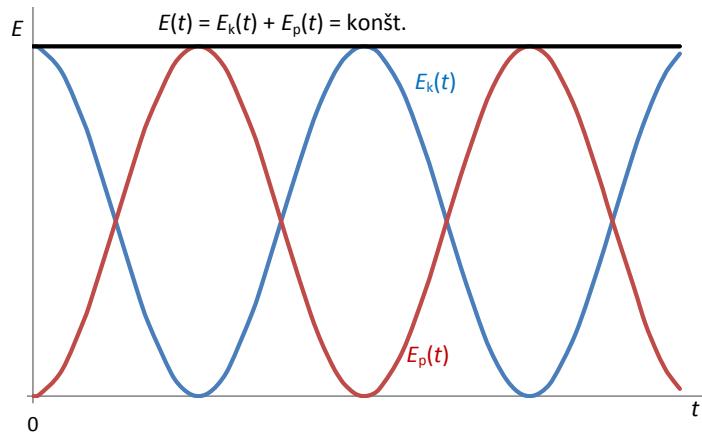
Hodnota integračnej konštanty  $C$  závisí od voľby miesta, v ktorom potenciálna energia oscilátora je nulová. Ak za tento bod si zvolíme rovnovážnu polohu oscilátora, t. j.  $E_p = 0$  pre  $x = 0$ , potom konštanta  $C = 0$ . Za tohto predpokladu pre potenciálnu energiu môžeme písat'

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (2.9)$$

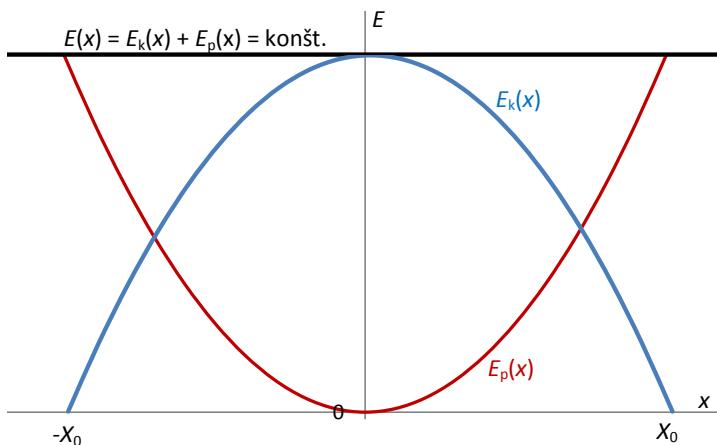
Pri poslednej úprave sme tuhost' pružiny vyjadrili pomocou vzťahu (1.87).

Zo vzťahov pre kinetickú (2.6) a potenciálnu (2.9) energiu oscilátora môžeme vypočítať jeho mechanickú energiu  $E = E_k + E_p$ . Po dosadení a jednoduchých úpravách dostaneme

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2. \quad (2.10)$$



Obr. 2.3: Závislosť kinetickej  $E_k$ , potenciálnej  $E_p$  a mechanickej energie  $E$  lineárneho harmonického oscilátora od času  $t$ .



Obr. 2.4: Závislosť kinetickej  $E_k$ , potenciálnej  $E_p$  a mechanickej energie  $E$  lineárneho harmonického oscilátora od výchylky  $x$ .

Z odvodeného vzťahu vyplýva, že mechanická energia oscilátora nezávisí od času a jej hodnota je priamoúmerná jeho hmotnosti  $m$ , kvadrátu amplitúdy  $x_0^2$  a kvadrátu uhlovej frekvencie  $\omega_0^2$ .

Pri harmonických osciláciách nastáva premena kinetickej energie na potenciálnu a naopak, avšak celková mechanická energia sa zachováva (obr.2.3). Premenu kinetickej energie na potenciálnu je vidieť aj z grafickej závislosti potenciálnej energie od výchylky  $x$  znázornenej na obr. 2.4. Podľa rov. (2.8) grafom tejto závislosti je parabola, ktorej vrchol odpovedá rovnovážnej polohe oscilátora. S narastom  $x$  sa zmenšuje  $E_k$ , zväčšuje sa potenciálna energia  $E_p$ , ktorá nadobúda maximálnu hodnotu v bodech  $x = \pm x_0$ .

## 2.2 Tlmené kmity

Z predchádzajúceho rozboru vyplýva, že ak kmity majú harmonický priebeh, nedochádza k rozptylu energie oscilátora a oscilátor si udržiava svoju mechanickú energiu. V reálnych systémoch vždy existujú odporové sily, ktoré vedú k útlmu kmitov a rozptylu energie. Mechanická energia udelená oscilátoru sa premieňa na teplo, avšak ak počas doby pozorovania straty mechanickej energie sú malé, oscilačné procesy môžu byť považované za netlmené harmonické oscilácie.

Budeme predpokladat', že doba pozorovania kmitania je tak veľká, že pôsobenie odporovej sily nie je možné zanedbať. Pri dostatočne malej rýchlosi guľôčky pohybujúcej sa vplyvom pružnej sily  $F_p = -kx$  (rov. 1.68) odporová sila je priamoúmerná rýchlosi a môže byť vyjadrená pomocou vzťahu  $F_o = -Kv$  (rov. 1.66). Potom na oscilátor pôsobí výsledná sila daná súčtom týchto sôl

$$F = -kx - K \frac{dx}{dt}, \quad (2.11)$$

kde  $v = \frac{dx}{dt}$  je rýchlosť, ktorou kmitá oscilátor. Po dosadení výslednice pôsobiacich sôl (2.11) do pohybového zákona  $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$  a po jednoduchých úpravách dostaneme pohybovú rovnicu pre tlmené kmity oscilátora v tvare

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.12)$$

v ktorej

$$\delta = \frac{K}{2m} \quad (2.13)$$

je koeficient útlmu a ako už vieme  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  má význam uhlovej frekvencie vlastných kmitov. Rov. (2.12) z matematického hľadiska predstavuje diferenciálnu rovnicu druhého radu s konštantnými koeficientami bez pravej strany. Charakteristická rovnica diferenciálnej rovnice (2.12) má tvar

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.14)$$

a korene tejto kvadratickej rovnice sú

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}. \quad (2.15)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (2.12) závisí od toho, v akom vzájomnom vzťahu sú konštanty  $\omega_0$  a  $\delta$ . Vo všeobecnosti môžu nastat' tieto tri prípady:

$$\omega_0^2 - \delta^2 > 0, \quad (2.16a)$$

$$\omega_0^2 - \delta^2 < 0, \quad (2.16b)$$

$$\omega_0^2 - \delta^2 = 0. \quad (2.16c)$$

Ak  $\omega_0^2 > \delta^2$ , potom korene rovnice (2.14) majú tvar

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_1. \quad (2.17)$$

V prvom prípade korene charakteristickej rovnice sú komplexné čísla, v druhom prípade korene sú reálne čísla a v treťom prípade dostávame dvojnásobný koreň. V závislosti od vzájomného vzťahu  $\omega_0$  a  $\delta$  pohybová rovnica (2.12) má tieto všeobecné riešenia

$$x = C_1 e^{(-\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t} + C_2 e^{(-\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2})t}, \quad (2.18a)$$

$$x = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}, \quad (2.18b)$$

$$x = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t}, \quad (2.18c)$$

v ktorých  $C_1$  a  $C_2$  sú integračné konštanty<sup>2</sup>. V ďalšom urobíme analýzu jednotlivých riešení.

### a) Pohyb pri slabom tlmení

V prípade, že koeficient útlmu je menší než uhlová frekvencia vlastných kmitov, t. j.  $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$ , hovoríme o slabom tlmení. Keďže korene charakteristickej rovnice sú komplexné čísla, potom podobne ako v prípade netlmených kmitov (str. 33), riešenie rovnice (2.18a) môže byť transformované do tvaru

$$x = x_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad (2.19)$$

v ktorom sme zaviedli označenie  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_1$  a namiesto konštánt  $C_1$  a  $C_2$  sme zaviedli nové konštánty  $x_0$  a  $\alpha_1$ . Hodnoty týchto konštánt sú určené počiatočnými podmienkami. Vidíme, že pohyb je popísaný harmonickou funkciou charakterizovanou uhlovou frekvenciou  $\omega_1$  a počiatočnou fázou  $\alpha_1$ . Na rozdiel od harmonických kmitov amplitúda kmitov  $x_0 e^{-\delta t}$  nie je konštantná, ale závisí od času  $t$  (obr. 2.5).

Integračná konštantă  $x_0$  má význam počiatočnej amplitúdy, t. j. amplitúdy v čase  $t = 0$ . Pohyb oscilátora, ktorého závislosť výchylky od času je určená rovnicou (2.19) budeme nazývať *tlmenými harmonickými kmitmi*. Uhlová frekvencia tlmených kmitov

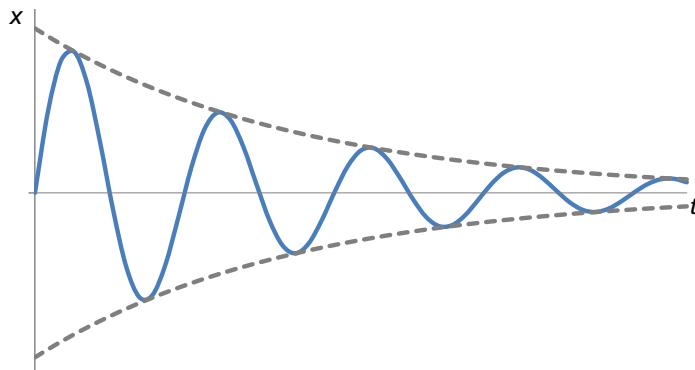
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad (2.20)$$

je v porovnaní s uhlovou frekvenciou vlastných kmitov  $\omega_0$  menšia a je zrejmé, že períoda tlmených kmitov

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (2.21)$$

---

<sup>2</sup>Integračné konštánty v jednotlivých rovniciach (2.18) sme kvôli jednoduchosti označili rovnakými symbolmi  $C_1$  a  $C_2$ , aj keď vo všeobecnosti nie sú rovnaké.



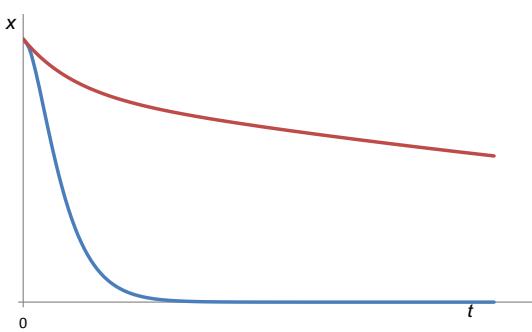
Obr. 2.5: Časová závislosť výchylky oscilátora  $x(t)$  pre prípad slabého tlmenia. V znázornenej závislosti je počiatočná fáza nulová a pokles amplitúdy  $x_0 e^{-\delta t}$  je znázornený pomocou čiarkovanej čiary.

je v porovnaní s periódou vlastných kmitov  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  väčšia. Zo závislosti výchylky od času znázornennej na obr. 2.5 je vidieť, že so vzrastajúcim časom amplitúda oscilácií sa zmenšuje a výchylky sú ohraničené krivkami  $\pm x_0 e^{-\delta t}$ . Podľa vzťahu (2.10) mechanická energiu oscilátorá je určená amplitúdou a frekvenciou kmitania, preto energia tlmených kmitov

$$E = \frac{1}{2} m \omega_1^2 x_0^2(t)^2 = \frac{1}{2} m \omega_1^2 x_0^2 e^{-2\delta t} \quad (2.22)$$

s časom exponenciálne klesá a teoretsky po nekonečne veľkej dobe kmity zaniknú.

### b) Pohyb pri silnom tlmení



Obr. 2.6: Závislosť výchylky oscilátora od času  $t$  pri silnom tlmení (červená krvka) a pre hraničný prípad pohybu (modrá krvka).

Silné tlmenie máme na myslí vtedy, keď  $\omega_0^2 - \delta^2 < 0$ . V tomto prípade obidva korene (2.17) kvadratickej rovnice sú záporné čísla a ak pomocou rovníc  $-\beta_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  a  $-\beta_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  zavedieme kladné čísla  $\beta_1$  a  $\beta_2$ , potom riešenie (2.18b) diferenciálnej rovnice môžeme vyjadriť v tvare

$$x = C_1 e^{-\beta_1 t} + C_2 e^{-\beta_2 t}, \quad (2.23)$$

pričom  $\beta_1, \beta_2 > 0$ . Z posledného vzťahu je vidieť, že závislosť výchylky  $x$  od času  $t$  je vyjadrená superpozíciou dvoch klesajúcich exponenciálnych funkcií. Po vychýlení oscilátora z rovnovážnej polohy oscilátor sa pomaly približuje k rovnovážnej polohe a cez rovnovážnu polohu neprekmitne.

Závislosť výchylky od času pre taký aperiodický pohyb je znázornená na obr. 2.6.

### c) Hraničný prípad pohybu

Riešenie (2.18c) pohybovej rovnice bolo odvodené pre prípad, keď uhlová frekvencia vlastných kmitov oscilátora  $\omega_0$  je rovná koeficientu útlmu  $\delta$ . Ak predpokladáme, že v čase  $t = 0$  oscilátor má výchylku  $x_0$  a jeho rýchlosť v tomto okamihu bola rovná nule ( $v = \frac{dx}{dt} = 0$ ), integračné konštanty nadobúdnu hodnoty  $C_1 = x_0$  a  $C_2 = x_0\delta$ . Za týchto okolností závislosť výchylky od času, ktorá je znázornená na obr. 2.6 spolu s prípadom pre aperiodický pohyb, je určená rovnicou

$$x = x_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t). \quad (2.24)$$

Hraničný prípad je zaujímavý tým, že oscilátor sa v porovnaní s prípadom slabého tlmenia pohybuje dostatočne pomaly, aby neprekročil rovnovážnu polohu, avšak v porovnaní s prípadom silného tlmenia sa pohybuje dostatočne rýchlo, aby sa čím skôr dostal k rovnovážnej polohe.

Výsledky analýzy tlmených kmitov majú značné využitie v technickej praxi. Napr., vieme si dobre predstaviť, aká by bola jazda osobným autom, keby súčasťou ich výbavy neboli pružiny. Na každej nerovnosti by dochádzalo k tvrdému nárazu a kvôli tomu aj rýchlemu opotrebeniu. Na druhej strane samotné pružiny by spôsobovali rozkmitanie auta, ktoré taktiež nie je želateľným efektom. Z tohto dôvodu vo vnútri každej pružiny sa nachádza tlmič, úlohou ktorého je zabrániť rozkmitaniu vozidla. Hmotnosťou auta, jeho geometrickými rozmermi a vlastnosťami pružín je určená vlastná frekvencia oscilátora (auta). Konštrukciou tlmiča je stanovený koeficient útlmu. Je zrejmé, že perovanie a tlmenie musí byť konštruované tak, aby bola splnená podmienka pre hraničný prípad.

## 2.3 Vynútené kmity a rezonancia

V časti o tlmených kmitoch bolo ukázané, že pri slabom tlmení sa pozoruje tlmený pohyb oscilátora, ktorý po určitom čase zanikne. Často sa však stretávame s prípadmi, keď aj v tlmiacom prostredí oscilátor vykonáva harmonické kmity s konštantnou amplitúdou. V takých prípadoch energia, ktorú oscilátor odovzdáva okoliu vo forme tepelnej energie je periodicky dodávaná pôsobením ďalšej vonkajšej sily. Jednoduchým príkladom je pohyb na hojdačke, ktorá je vo vhodných okamihoch posunutá. Ďalším príkladom sú kmity spôsobené spaľovacím motorom, ktorého piesty sa nachádzajú v periodickom pohybe udržiavanom periodickou silou.

Kmity, ktoré vykonáva oscilátor vplyvom vonkajšej periodickej sily sa nazývajú *vynútené kmity*. Budeme predpokladať, že na hmotný bod okrem sily pružnosti  $-kx$  a odporovej sily  $-K \frac{dx}{dt}$  pôsobí aj *vynucujúca sila*, ktorá má harmonický priebeh

$$F_v = F_0 \sin \omega t, \quad (2.25)$$

v ktorej  $F_0$  je amplitúda vynucujúcej sily a  $\omega$  je uhlová frekvencia tejto sily. Výslednica

všetkých sôl pôsobiacich na oscilátor je

$$F = -kx - K \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \omega t. \quad (2.26)$$

Známym postupom dostaneme pohybovú rovnicu vynútených kmitov

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \gamma \sin \omega t, \quad (2.27)$$

v ktorej  $\omega_0$  je uhlová frekvencia vlastných kmitov,  $\delta$  je koeficient útlmu a  $\gamma = \frac{F_0}{m}$ . Teda pohybovou rovnicou vynútených kmitov je lineárna diferenciálna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientami a pravou stranou. Všeobecné riešenie tejto diferenciálnej rovnice sa skladá zo všeobecného riešenia diferenciálnej rovnice bez pravej strany a z partikulárneho riešenia diferenciálnej rovnice (2.27). Diferenciálna rovnica bez pravej strany je pohybová rovnica pre tlmené kmity, ktoré všeobecné riešenie pre prípad slabého tlmenia, t. j. pre  $\omega_0 > \delta$ , je závislosť vyjadrená vzťahom (2.19). Budeme predpokladať, že partikulárnym riešením diferenciálnej rovnice (2.27) je závislosť výchylky od času, ktorá má harmonický priebeh s frekvenciou vynucujúcej sily

$$x = X_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.28)$$

Potrebuje však zistiť, aké podmienky musia splňať konštanty  $X_0$  a  $\alpha$ , aby vzťah (2.28) vyhovoval diferenciálnej rovnici (2.27). Po dosadení riešenia (2.28) do diferenciálnej rovnice (2.27) dostaneme vzťah

$$-X_0\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) + 2\delta X_0 \omega \cos(\omega t + \alpha) + \omega_0^2 X_0 \sin(\omega t + \alpha) = \gamma \sin \omega t, \quad (2.29)$$

v ktorom sú dve neznáme  $X_0$  a  $\alpha$ .

Ak odvodenú rovnicu, ktorá platí pre ľubovoľný čas  $t$ , vyjadríme pre dva ľubovoľné okamihy, dostaneme dve rovnice, z ktorých vieme vypočítať  $X_0$  a  $\alpha$ . Kvôli jednoduchosti zvolíme si také dva časy  $t_1$  a  $t_2$ , pre ktoré argumenty funkcií sínus a kosínus sú  $\omega t_1 + \alpha = 0$  a  $\omega t_2 + \alpha = \frac{\pi}{2}$ . Po dosadení dostaneme sústavu dvoch rovníc

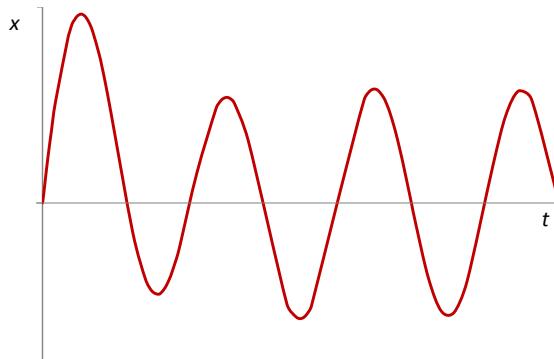
$$-2\delta\omega X_0 = \gamma \sin \alpha, \quad (2.30a)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)X_0 = \gamma \cos \alpha, \quad (2.30b)$$

z ktorých pre amplitúdu  $X_0$  a fázovú konštantu  $\alpha$  po jednoduchých výpočtoch dostaneme

$$X_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{4\delta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}, \quad (2.31)$$

$$\tan \alpha = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.32)$$



Obr. 2.7: Časová závislosť výchylky oscilátora pri vynútených kmitoch.

Z uvedených výpočtov vyplýva, že všeobecným riešením diferenciálnej rovnice (2.27) je závislosť výchylky od času

$$x = x_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + X_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad (2.33)$$

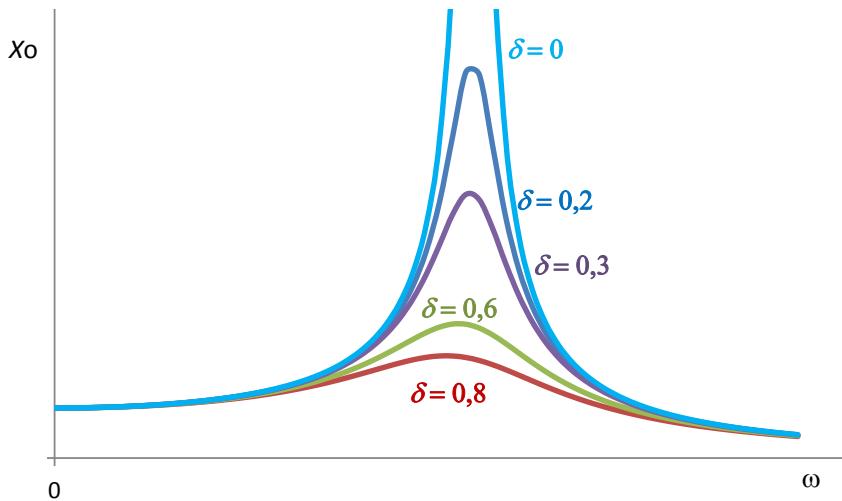
v ktorej  $X_0$  a  $\alpha$  sú určené rovnicami (2.31) a (2.32).

Zo získaného výsledku vidíme, že kmitavý pohyb spôsobený harmonickou vynúcejúcou silou má zložitý priebeh, skladá sa z tlmených harmonických kmitov s uhlovou frekvenciou  $\omega_1$  a z harmonického pohybu s uhlovou frekvenciou  $\omega$  rovnou frekvencii vynucujúcej sily (obr. 2.7). Amplitúda tlmených kmitov exponenciálne klesá, preto prvý člen rovnice (2.33) po krátkom čase zanikne. Po tomto *prechodnom stave*, t. j. v *ustálenom stave* kmitanie je harmonické a závislosť výchylky od času je určená rovnicou (2.28).

### Rezonancia

Zo vzťahu (2.31) je vidieť, že amplitúda vynútených kmitov  $X_0$  je priamoúmerná amplitúde vynucujúcej sily  $F_0$ , je nepriamoúmerná hmotnosti oscilátora  $m$  a závisí aj od frekvencie vynucujúcej sily  $\omega$ . Závislosť amplitúdy  $X_0$  od frekvencie vynucujúcej sily je pre rôzne hodnoty koeficientu útlmu znázornená na obr. 2.8. Zo vzťahu (2.31) vyplýva, že ak by oscilátor vykonaval kmitavý pohyb bez odporu prostredia ( $\delta = 0$ ), amplitúda kmitov by nadobúdala nekonečne veľké hodnoty pri frekvencii vynucujúcej sily  $\omega$  rovnej frekvencii vlastných kmitov oscilátora  $\omega_0$ .

V ostatných prípadoch, t. j. pri  $\delta \neq 0$ , pri priblížovaní sa frekvencie vynucujúcej sily  $\omega$  k frekvencii vlastných kmitov oscilátora  $\omega_0$  amplitúda vynútených kmitov  $X_0$  prudko narastá a pri frekvencii blízkej frekvencii vlastných kmitov dosahuje konečnú maximálnu hodnotu. Jav, pri ktorom sa pozoruje prudký nárast amplitúdy kmitov pri priblížovaní sa frekvencie vynucujúcej sily k vlastnej frekvencii sa nazýva *rezonancia*. Závislosti znázornené na obr. 2.8 sa nazývajú *rezonančné charakteristiky alebo rezonančné krivky*.



Obr. 2.8: Rezonančné krivky pre rôzne hodnoty koeficientu útlmu  $\delta$ .

Vyšetrovaním priebehu funkcie  $X_0 = X_0(\omega)$ , ktorá je určená rovnicou (2.31) môžeme zistiť frekvenciu vynúcujúcej sily  $\omega = \omega_r$ , pri ktorej nastáva rezonancia a rezonančnú amplitúdu oscilátora  $X_0 = X_{0r}$ . Z výpočtov vyplýva, že rezonancia nastáva pri frekvencii

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (2.34)$$

a dosadením tejto hodnoty za frekvenciu  $\omega$  vo vzťahu (2.31) dostaneme hodnotu rezonančnej amplitúdy

$$X_{0r} = \frac{F_0}{2\delta m \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (2.35)$$

Zo vzťahu je vidieť, že amplitúda  $X_{0r}$  narastá s klesajúcou hodnotou koeficientu útlmu  $\delta$ .

Periodicky pracujúce zariadenia (oscilačné systémy), ktoré sú charakterizované svojou vlastnou frekvenciou majú schopnosť selektívne reagovať na vonkajšie periodické vplyvy (rezonovať). Táto skutočnosť dovoľuje prostredníctvom vonkajších kmitov cielene pôsobiť na také systémy. Z tohto dôvodu rezonancia má veľký praktický význam a široké využitie v rádiotechnike, technickej akustike a optike. Napr., na rezonanciu musia pamätať konštruktéri lietadiel. Pri konštrukcii krídel lietadla musia použiť také materiály, ktoré majú inú vlastnú frekvenciu kmitov ako je frekvencia motora lietadla. V opačnom prípade, by mohlo dôjsť vplyvom kmitania motora k rozkmitaniu krídel s rezonačnou frekvenciou rovnou ich vlastnej frekvencii. Čo by mohlo spôsobiť narušenie materiálu krídel a ich následne otrhnutie.

## 2.4 Skladanie harmonických kmitov

Ak je hmotný bod nútený vonkajšími silami konáť súčasne dva alebo viac kmitavých pohybov, výsledný pohyb získame ich zložením. V tejto kapitole sa budeme zaobereť skladaním dvoch rovnobežných a dvoch vzájomne kolmých kmitavých pohybov. Bude nás zaujímať, aký pohyb vznikne pri skladaní kmitavých pohybov s rovnakými a aj s rôznymi frekvenciami pri špecifických počiatočných podmienkach.

### a) Skladanie kmitov rovnakého smeru s rovnakými uhlovými frekvenciami, rôznymi amplitúdami a rôznymi fázovými konštantami

Nech hmotný bod vplyvom vonkajších síl vykonáva pohyb zložený z dvoch netlmených harmonických kmitavých pohybov s rovnakými uhlovými frekvenciami, rôznymi amplitúdami a rôznymi fázovými konštantami, t.j.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $x_{01} \neq x_{02}$ ,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , pozdĺž osi  $x$ . Podľa rovnice (2.1), ktorá vyjadruje výchylku netlmeného harmonického kmitavého pohybu v závislosti od času, pre výchylku obidvoch kmitavých pohybov môžeme písat' vzťahy

$$x_1 = x_{01} \sin(\omega t + \alpha_1), \quad (2.36)$$

$$x_2 = x_{02} \sin(\omega t + \alpha_2). \quad (2.37)$$

Výchylku výsledného kmitavého pohybu, ktorý vznikne zložením, dostaneme sčítaním výchyiek  $x_1$  a  $x_2$

$$x = x_1 + x_2 = x_{01} \sin(\omega t + \alpha_1) + x_{02} \sin(\omega t + \alpha_2). \quad (2.38)$$

Pri úprave vzťahu (2.37) použijeme súčtový vzorec  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ , potom

$$x = x_{01}(\sin \omega t \cos \alpha_1 + \cos \omega t \sin \alpha_1) + x_{02}(\sin \omega t \cos \alpha_2 + \cos \omega t \sin \alpha_2). \quad (2.39)$$

Úpravou rovnice (2.38) a použitím substitúcie

$$x_0 \cos \alpha = x_{01} \cos \alpha_1 + x_{02} \cos \alpha_2, \quad (2.40)$$

$$x_0 \sin \alpha = x_{01} \sin \alpha_1 + x_{02} \sin \alpha_2. \quad (2.41)$$

pre výslednú výchylku dostaneme

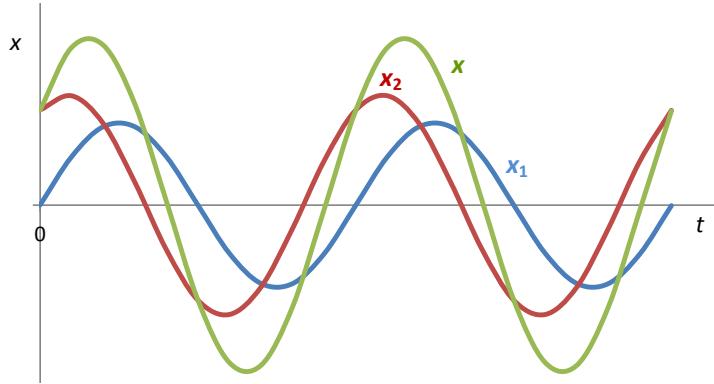
$$x = x_0(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha) = x_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.42)$$

Fázovú konštantu  $\alpha$  výsledného harmonického kmitavého pohybu dostaneme delením rovnice (2.40) rovnicou (2.39)

$$\tan \alpha = \frac{x_{01} \sin \alpha_1 + x_{02} \sin \alpha_2}{x_{01} \cos \alpha_1 + x_{02} \cos \alpha_2}. \quad (2.43)$$

Umocnením a sčítaním pravých a ľavých strán rovníc (2.39) a (2.40) a použitím rovnice  $(\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$  dostaneme vzťah pre amplitúdu výsledného kmitavého pohybu

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (2.44)$$



Obr. 2.9: Skladanie dvoch netlmených harmonických kmitavých pohybov s rovnakými frekvenciami, rôznymi amplitúdami a rôznymi fázami.

Teda skladaním dvoch netlmených harmonických kmitavých pohybov v rovnomnom smere s rovnakými uhlovými frekvenciami  $\omega$  dostaneme netlmený harmonický kmitavý pohyb, ktorého závislosť výchylky od času je vyjadrená rovnicou

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.45)$$

Výsledný pohyb je harmonický pohyb s uhlovou frekvenciou rovnou uhlovej frekvenčii skladaných kmitov (obr. 2.9). Amplitúda a fázová konštantá výsledného pohybu je určená amplitúdami a fázovými konštantami skladaných kmitavých pohybov. Amplitúda výsledného kmitavého pohybu  $x_0$  daná vzťahom (2.43) navyše závisí od fázového rozdielu  $\alpha_1 - \alpha_2$ . Zaujímavé prípady nastanú pri skladaní kmitov s rovnakou alebo opačnou fazou.

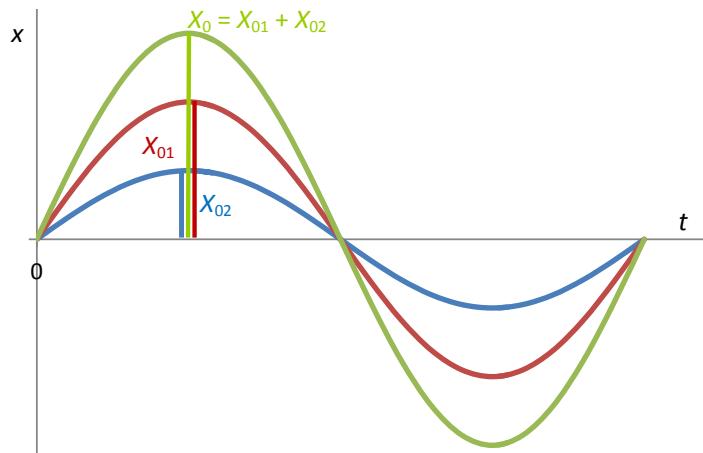
V prípade, že  $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 1$ , fázový rozdiel

$$\alpha_1 - \alpha_2 = k2\pi, \quad (2.46)$$

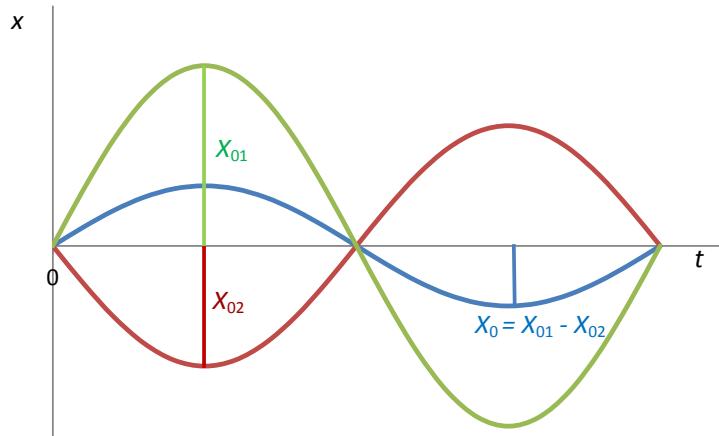
kde  $k = 0, 1, 2, \dots$ , potom skladané kmitavé pohyby sú vo fáze. V takom prípade podľa rovnice (2.45) a (2.44), výsledná amplitúda bude daná súčtom amplitúd skladaných kmitavých pohybov t.j.  $x_0 = x_{01} + x_{02}$  (obr. 2.10). Ak amplitúdy skladaných kmitov budú rovnaké, t.j.  $x_{01} = x_{02}$ , výsledná amplitúda bude najviac zosilnená a rovná  $x_0 = 2x_{01} = 2x_{02}$ .

V prípade, že  $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$ , fázový rozdiel

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (2k + 1)\pi. \quad (2.47)$$



Obr. 2.10: Skladanie dvoch netlmených harmonických kmitavých pohybov s rovnakými frekvenciami, rôznymi amplitúdami a rovnakými fázami.



Obr. 2.11: Skladanie dvoch netlmených harmonických kmitavých pohybov s rovnakými frekvenciami, rôznymi amplitúdami a s opačnými fázami.

V tomto prípade podľa vzťahov (2.46) a (2.44), amplitúda  $x_0 = |x_{01} - x_{02}|$ . Teda výsledná amplitúda sa bude rovnať rozdielu amplitúd skladaných kmitavých pohybov (obr. 2.11). V tomto prípade hovoríme o skladaní kmitov s opačnou fázou. V prípade kmitov s opačnou fázou a rovnakými amplitúdami  $x_{01} = x_{02}$ , dôjde k úplnému potlačeniu kmitavého pohybu, výsledná amplitúda bude nulová a kmitanie zanikne.

### b) Skladanie kmitov rovnakého smeru s rovnakými amplitúdami, rôznymi periódami a rovnakými fázovými konštantami

Nech hmotný bod vykonáva vplyvom vonkajších sôl pohyb zložený z dvoch netlmených harmonických kmitavých pohybov s rovnakými amplitúdami, rôznymi periódami a rovnakými fázovými konštantami pozdĺž osi  $x$ . Teda pre amplitúdy, periódy a fázové konštanty platí:  $x_{01} = x_{02} = x_0$ ,  $T_1 \neq T_2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Pre výchylky obidvoch

kmitavých pohybov, ktoré vyjadrieme pomocou rovnice (2.1), môžeme písat'

$$x_1 = x_0 \sin(\omega_1 t + \alpha), \quad (2.48)$$

$$x_2 = x_0 \sin(\omega_2 t + \alpha). \quad (2.49)$$

Výchylku výsledného kmitavého pohybu, dostaneme sčítaním výchyiek  $x_1$  a  $x_2$

$$x = x_1 + x_2 = x_0 (\sin(\omega_1 t + \alpha) + \sin(\omega_2 t + \alpha)). \quad (2.50)$$

Úpravou rovnice (2.49) a využitím vzorca

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (2.51)$$

pre výslednú výchylku dostávame vzťah

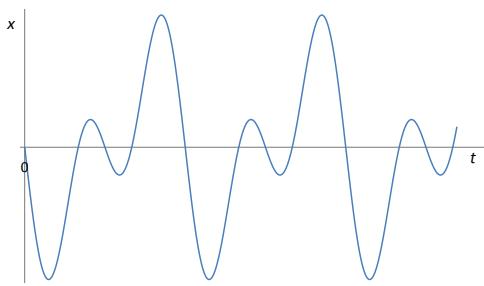
$$x = 2x_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \alpha\right), \quad (2.52)$$

ktorý môžeme upraviť na tvar

$$x = X_0 \sin(\omega' t + \alpha). \quad (2.53)$$

Zo vzťahu (2.52) vyplýva, že skladaním vznikol kmitavý pohyb s amplitúdou  $X_0$  a s uhlovou frekvenciou  $\omega$ , ktorá je

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \quad (2.54)$$



Amplitúda výsledného kmitavého pohybu

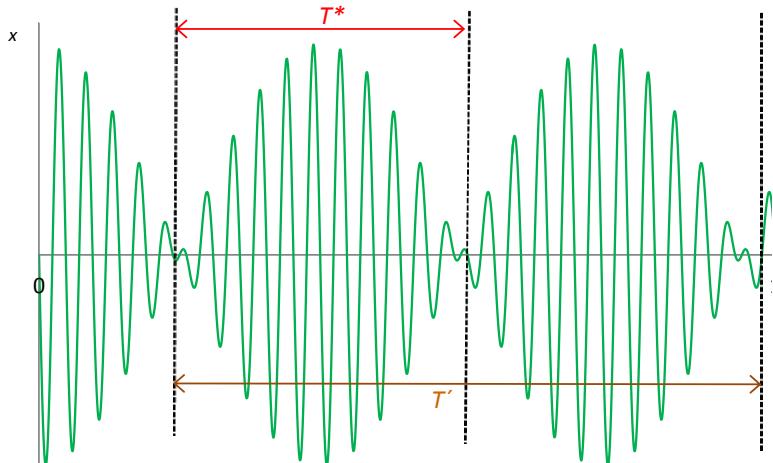
$$X_0 = |2x_0 \cos \omega' t|, \quad (2.55)$$

sa harmonicky mení s časom s uhlovou frekvenciou

$$\omega' = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}. \quad (2.56)$$

Obr. 2.12: Výsledný kmitavý pohyb, ktorý vznikol pri skladaní dvoch kmitavých pohybov s frekvenciami 100 Hz a 200 Hz.

Zo vzťahu (2.54) vyplýva, že amplitúda periodicky dosahuje maximá a minimá. Ak sú hodnoty frekven- cií skladaných kmitov blízke (napr.  $f_1 = 550$  Hz a  $f_2 = 500$  Hz), potom dôjde k vzniku rázov (obr. 2.13). Jeden ráz predstavuje jedno zosilnenie a jedno zoslabenie amplitúdy. Časový interval, za ktorý amplitúda dosiahne opäť minimum (maximum) je perióda rázov  $T^*$ , ktorú vyjadrieme ako jednu polovicu z periódy amplitúdy  $T$ . Potom pre



Obr. 2.13: Periódou rázov  $T^*$  je rovná jednej polovici periódy amplitúdy  $T'$ .

periódu rázov

$$T^* = \frac{T'}{2} = \frac{2\pi}{2\omega'} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}, \quad (2.57)$$

kde za uhlovú frekvenciu amplitúdy sme dosadili vzťah (2.55). Frekvenciu rázov vyjadrieme pomocou prevrátenej hodnoty periódy rázov

$$f^* = \frac{1}{T^*} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi} = |f_1 - f_2|. \quad (2.58)$$

Zo vzťahu pre frekvenciu vyplýva, že frekvencia rázov sa rovná rozdielu frekvencií skladaných kmitov. Rázy zaniknú, ak sa frekvencie skladaných kmitov budú navzájom rovnať.

### c) Skladanie kmitov na seba kolmých

Nech hmotný bod koná pohyb zložený z dvoch netlmených harmonických kmitavých pohybov, jeden v smere osi  $x$  a druhý v smere osi  $y$ . Predpokladajme, že tieto netlmené harmonické kmitavé pohyby vo všeobecnosti majú rovnakú frekvenciu a teda aj rovnakú uhlovú frekvenciu, rôzne amplitúdy a rôzne fázové konštanty, t.j.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $x_0 \neq y_0$ ,  $\alpha \neq \beta$ . Výchylky obidvoch kmitavých pohybov vyjadrieme pomocou rovnice (2.1) v tvare

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha), \quad (2.59)$$

$$y = y_0 \sin(\omega t + \beta). \quad (2.60)$$

Pre získanie výslednej výchylky skladaných kmitov najprv urobíme nasledujúce matematické úpravy. Vzťah (2.58), upravíme pomocou súčtového vzťahu  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  a vynasobíme najprv výrazom  $\cos \beta$  (rovnica 2.60) a potom

výrazom  $\sin \beta$  (rovnica 2.61). Úpravou dostaneme rovnice

$$\frac{x}{x_0} \cos \beta = \sin \omega t \cos \alpha \cos \beta + \cos \omega t \sin \alpha \cos \beta, \quad (2.61)$$

a

$$\frac{x}{x_0} \sin \beta = \sin \omega t \cos \alpha \sin \beta + \cos \omega t \sin \alpha \sin \beta. \quad (2.62)$$

Po podobných úpravách vzťahu (2.59) dostaneme

$$\frac{y}{y_0} \cos \alpha = \sin \omega t \cos \beta \cos \alpha + \cos \omega t \sin \beta \cos \alpha, \quad (2.63)$$

a

$$\frac{y}{y_0} \sin \alpha = \sin \omega t \cos \beta \sin \alpha + \cos \omega t \sin \beta \sin \alpha. \quad (2.64)$$

Odčítaním rovníc (2.60) a (2.62) dostaneme

$$\frac{x}{x_0} \cos \beta - \frac{y}{y_0} \cos \alpha = \cos \omega t (\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha) \quad (2.65)$$

a odčítaním rovníc (2.61) a (2.63) dostaneme

$$\frac{x}{x_0} \sin \beta - \frac{y}{y_0} \sin \alpha = \sin \omega t (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta). \quad (2.66)$$

Pri úprave pravých strán rovníc (2.64) a (2.65) použijeme súčtový vzorec  $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha - \beta)$ . Potom

$$\frac{x}{x_0} \cos \beta - \frac{y}{y_0} \cos \alpha = \cos \omega t \sin(\alpha - \beta), \quad (2.67)$$

a

$$\frac{x}{x_0} \sin \beta - \frac{y}{y_0} \sin \alpha = \sin \omega t \sin(\beta - \alpha). \quad (2.68)$$

Umocnením rovníc (2.66) a (2.67) na druhú a následnom sčítaní pravých a ľavých strán týchto rovníc dostávame

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} - 2 \frac{xy}{x_0 y_0} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \sin^2(\alpha - \beta). \quad (2.69)$$

Ked'že výraz  $(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \cos(\alpha - \beta)$ , rovnica (2.68) nadobudne tvar

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} - 2 \frac{xy}{x_0 y_0} \cos(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta). \quad (2.70)$$

Pomocou rovnice (2.69) je vyjadrený tvar trajektórie pohybu, ktorý je zložený z dvoch vzájomné kolmých kmitavých pohybov. Vo všeobecnosti je to rovnica elipsy, ktorej

vlastnosti závisia od fázového rozdielu  $\alpha - \beta$  skladaných kmitov. Ak fázový rozdiel  $\alpha - \beta = 0$ , potom rovnica (2.69) nadobudne tvar

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} - 2\frac{xy}{x_0y_0} = 0 \quad (2.71)$$

alebo

$$\left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0. \quad (2.72)$$

V uvažovanom prípade dostávame rovnicu priamky prechádzajúcu počiatkom súradnicovej sústavy so smernicou  $\frac{y_0}{x_0}$ , t.j.

$$y = \frac{y_0}{x_0}x. \quad (2.73)$$

Teda hmotný bod bude vykonávať kmitavý pohyb po priamke s kladnou smernicou (obr. 2.14). Ak fázový rozdiel  $\alpha - \beta = \pi$ , potom rovnica (2.69) bude mať tvar

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} + 2\frac{xy}{x_0y_0} = 0, \quad (2.74)$$

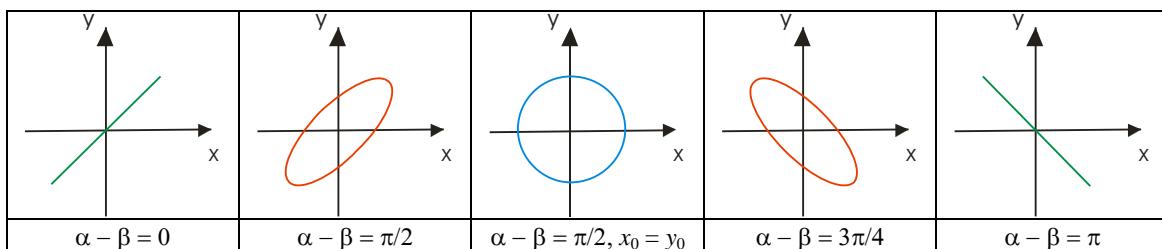
resp.

$$\left(\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0. \quad (2.75)$$

Zo vzťahu (2.74) dostávame rovnicu priamky

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x \quad (2.76)$$

prechádzajúcu počiatkom súradnicovej sústavy so smernicou  $-\frac{y_0}{x_0}$ . Hmotný bod vykonáva kmitavý pohyb po priamke so zápornou smernicou (obr. 2.14). Ak fázový



Obr. 2.14: Skladanie dvoch netlmených harmonických kmitavých pohybov na seba kolmých pri rôznych fázových rozdieloch.

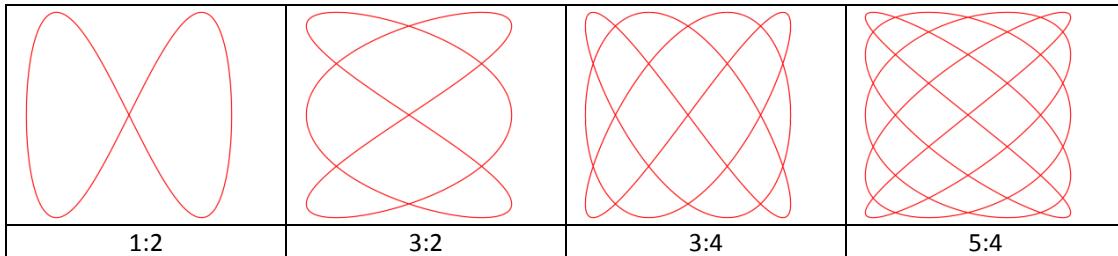
rozdiel  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ , potom úpravou rovnice (2.69) dostávame vzťah

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1, \quad (2.77)$$

ktorý predstavuje rovnicu elipsy, ktorej osi spadajú do smeru súradnicových osí  $x$ ,  $y$ . Podobným postupom sa môžeme presvedčiť, že pohyb po rovnakej elipse bude aj v prípade fázového rozdielu  $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2}$ . Pomocou rovnice (2.58) a (2.59) môžeme zistiť, že v prípade fázového rozdielu  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$  sa hmotný bod pohybuje v smere hodinových ručičiek a v druhom uvažovanom prípade pohyb bude proti smeru hodinových ručičiek. V špeciálom prípade, ak budú amplitúdy skladaných kmitov rovnaké  $x_0 = y_0 = r_0$  a fázový rozdiel  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ , potom dostaneme rovnicu kružnice

$$x^2 + y^2 = r_0^2. \quad (2.78)$$

Hmotný sa bude pohybovať po kružnici polomeru  $r_0$  v smere hodinových ručičiek (obr. 2.14) a v prípade fázového rozdielu  $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{2}$  bude hmotný bod vykonávať kmitavý pohyb po kružnici proti smeru hodinových ručičiek. Na obrázku 2.14 je znázornená aj trajektória pohybu pre  $\alpha - \beta = \frac{3\pi}{4}$ .



Obr. 2.15: Lissajousove krivky zložitejších tvarov.(zdroj - <http://sk.wikipedia.org>)

Tvary trajektorií kmitavého pohybu, ktoré sme dostali pre rôzne fázové rozdiely sa nazývajú *Lissajousove krivky*. V prípade skladania dvoch nesúlomenných kmitavých pohybov vo vzájomne kolmých smeroch s rôznymi frekvenciami, ktoré sú v pomere celých malých čísel (napr. 2:3, 1:4) dostaneme Lissajousove krivky zložitejších tvarov (obr. 2.15).



# Kapitola 3

## Dodatky

### 3.0.1 Derivácia

Pojem derivácie patrí do základov matematickej analýzy. Ako „pracovný nástroj“ ho začal používať I. Newton pri riešení fyzikálnych úloh a G. W. Leibnitz pri riešení geometrických úloh.

#### Definícia derivácie

Derivácia je definovaná nasledovne: Nech je daná funkcia  $f(x)$  a nech bod  $x_0$  je z definičného oboru funkcie  $D(f)$ . Funkcia  $f(x)$  má v bode  $x_0$  deriváciu, ak existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (3.1)$$

Túto limitu označujeme znakom  $f'(x_0)$  alebo  $[f(x)]'_{x=x_0}$  (označenie podľa Lagrangea) a nazývame ju *deriváciou funkcie*  $f(x)$  v bode  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (3.2)$$

Ak má funkcia v bode  $x_0$  deriváciu hovoríme, že je v bode  $x_0$  *diferencovateľná*. Ak pre funkciu použijeme označenie  $y = f(x)$ , môžeme jej deriváciu v bode  $x_0$  označiť  $y'(x_0)$ . Toto označenie spolu s Lagrangeovym označením sa používa prevažne v matematike. Existujú označenia derivácie podľa Leibnitza v tvare  $\left[ \frac{df}{dx} \right]_{x=x_0}$  alebo  $\left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=x_0}$ , ktoré sa používajú viac vo fyzike.

#### Vety o deriváciach

Pri výpočte derivácie platia nasledujúce pravidlá:

1. derivácia súčinu funkcií

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \quad (3.3)$$

2. derivácia súčinu konštanty  $c$  a funkcie

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \quad (3.4)$$

3. derivácia súčtu (rozdielu) funkcií

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \quad (3.5)$$

4. derivácia podielu funkcií

$$(f(x)/g(x))' = (f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x))/g^2(x), \quad (3.6)$$

5. derivácia zloženej funkcie

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \quad (3.7)$$

Tabuľka 3.1: Derivácie niektorých funkcií.

Funkcia	Derivácia funkcie v bode	Podmienky
$y = x^r, \quad r \in R$	$y' = r x^{r-1}$	$x > 0$
$y = c, \quad c - \text{konšt.}$	$y' = 0$	$c \in R$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in R$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in R$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in Z$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in R$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$x > 0, a > 0, a \neq 1$
<b>Vysvetlivky:</b>		
$\in$ - je z množiny, $Z$ - množina celých čísel, $R$ - množina reálnych čísel		
Zápis $x \in R$ znamená: $x$ je z množiny reálnych čísel.		

Derivácie niektorých funkcií sú uvedené v tab. 3.1.

## Druhá derivácia

Nech funkcia  $f$  je diferencovateľná na množine  $M$ , ktorá je podmnožinou definičného oboru funkcie  $D(f)$ , t.j. existuje funkcia  $f'$ . Ak je táto funkcia diferencovateľná v bode  $x_0$ , ktorý je z množiny  $M$ , nazývame jej deriváciu *druhou deriváciou* funkcie  $f$  v bode  $x_0$ . Druhá derivácia môže byť zapísaná v tvare:  $f''(x_0)$ ,  $y''(x_0)$ ,  $f^{(2)}(x_0)$ ,  $\frac{d^2f}{dx^2}$ .

## Geometrický význam derivácie

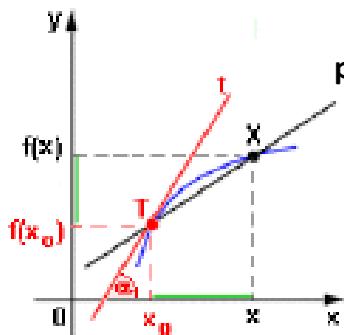
Rovnica priamky  $p$ , ktorá prechádza bodmi  $[x_0, f(x_0)]$  a  $[x, f(x)]$  grafu funkcie  $f(x)$  (obr. 3.1) má tvar

$$f(x) - f(x_0) = k(x - x_0), \quad (3.8)$$

kde  $k$  je smernica priamky. V limitnom prípade pre  $x \rightarrow x_0$  priamka  $p$  nebude pretínať graf funkcie  $f(x)$ , ale bude sa jej dotýkať v bode  $[x_0, f(x_0)]$  a podľa rovnice (3.8) smernica dotyčnice  $t$  v tomto bode bude

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \quad (3.9)$$

Teda derivácia funkcie  $f(x)$  v bode  $x_0$  sa rovná smernici dotyčnice  $k = \tan \alpha$  ku krivke  $f(x)$  v bode  $T[x_0, f(x_0)]$  (obr. 3.1).



Obr. 3.1: Derivácia funkcie  $f(x)$  v bode  $T(x_0, f(x_0))$  je smernicou dotyčnice  $t$  ku grafu funkcie  $f(x)$  v bode  $x_0$ . Priamka  $p$  je sečnicou funkcie  $f(x)$ .

S vyššie uvedenou interpretáciou derivácie sa často stretávame aj vo fyzike. Napríklad okamžitá rýchlosť je definovaná ako prvá derivácia polohového vektora podľa času, t.j.

$$\vec{v} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t_0).$$

Porovnaním tejto rovnice so vzťahom (3.9) vyplýva, že okamžitá rýchlosť  $\vec{v}$  je dotyčnicou ku trajektórii opísanej polohovým vektorom  $\vec{r}$  v bode, ktorého poloha je daná polohovým vektorom  $\vec{r}_0$ .

Vo fyzike sa pre derivácie často používa Leibnitzov zápis. Podľa neho sa prvá derivácia podľa  $x$  označuje  $\frac{d}{dx}$  a derivácia funkcie  $f(x)$  podľa  $x$  môže byť zapísaná v tvare  $\frac{df(x)}{dx}$  alebo  $\frac{d}{dx}f(x)$ . Druhá derivácia podľa  $x$  sa označuje  $\frac{d^2}{dx^2}$  a druhá derivácia funkcie  $f(x)$  podľa  $x$  sa môže zapísat'  $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$  alebo  $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ . Napríklad  $\frac{dv(t)}{dt}$  predstavuje prvú deriváciu rýchlosťi  $v(t)$  podľa času. Druhú deriváciu dráhy  $s(t)$  podľa času zapisujeme v tvare  $\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)$ . Pri jej výpočte budeme dráhu dvakrát derivovať podľa času. Derivácia podľa času umožňuje určiť hodnotu fyzikálnej veličiny a v prípade vektorovej veličiny aj jej smer v konkrétnom čase, resp. zmenu fyzikálnej veličiny za malý (infinitezimálny) časový úsek. Príkladom je určenie okamžitého zrýchlenia, ktoré je definované ako prvá derivácia vektora okamžitej rýchlosťi podľa času

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

kde  $\Delta t = t - t_0$  a  $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ . Okamžité zrýchlenie dostaneme pomocou priemerného zrýchlenia ( $\vec{a}_p = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ). Ak časový interval  $\Delta t$  bude veľmi malý (blížiaci sa k nule), dostaneme okamžité zrýchlenie, ktoré je limitou priemerného zrýchlenia.

### 3.0.2 Integrál

#### Neurčitý integrál

Skôr ako definujeme neurčitý integrál, zavedieme definíciu primitívnej funkcie. Nech  $f$  je funkcia a platí, že interval  $(a, b)$  je podmnožinou definičného oboru funkcie  $D(f)$ . Funkciu  $F$  nazveme *primitívou funkciou* k funkcií  $f$  na intervale  $(a, b)$ , ak  $F'(x) = f(x)$  pre všetky  $x$  z intervalu  $(a, b)$ . Ľubovoľnú funkciu  $F$  z primitívnych funkcií k funkcií  $f$  nazývame *neurčitým integrálom* a zapisujeme

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad (3.10)$$

kde  $c$  je integračná konštanta.

#### Vlastnosti neurčitého integrálu

Ak  $F$  je primitívna funkcia k funkcií  $f$  a  $G$  je primitívna funkcia k funkcií  $g$  na intervale  $(a, b)$ , tak pre všetky  $x$  z intervalu  $(a, b)$  platí, že

1. integrál zo súčinu konštanty  $k$ , kde  $k$  je reálne číslo, a funkcie  $f(x)$  je

$$\int k f(x)dx = k \int f(x)dx = k F(x) + c, \quad (3.11)$$

2. integrál zo súčtu (rozdielu) funkcií  $f(x)$  a  $g(x)$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx = F(x) \pm G(x) + c. \quad (3.12)$$

Integrály niektorých funkcií sú v tab. 3.2.

Tabuľka 3.2: Neurčité integrály niektorých funkcií.

Integrál funkcie	Podmienky
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\forall n \in R, n \neq -1, x > 0$
$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$	pre $\forall k \in Z - \{-1\}, \forall x \in R - \{0\}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	pre $\forall x \in R^+$
$\int e^x dx = e^x + c$	pre $\forall x \in R$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	pre $\forall 0 < a \neq 1, x \in R$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	pre $\forall x \in R$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	pre $\forall x \in R$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot g x + c$	pre $x \neq k\pi, k \in Z$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$	pre $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
<b>Vysvetlivky:</b>	
$\forall$ - pre každé, $\in$ - je z množiny, $N$ - množina prirodzených čísel, $Z$ - množina celých čísel,	
$R$ - množina reálnych čísel, $R^+$ - množina kladných reálnych čísel,	
$Z - \{-1\}$ - množina celých čísel okrem čísla $-1$ ,	
Zápis $\forall n \in N$ znamená: pre každé $n$ z množiny prirodzených čísel.	

## Určitý integrál

Nech  $f$  je funkcia integrovateľná na intervale  $\langle a, b \rangle$ . Nech funkcia  $F$  je spojité na intervale  $\langle a, b \rangle$  a nech je na intervale  $(a, b)$  primitívou funkciou k funkcií  $f$ . Potom platí

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3.13)$$

Pri výpočte určitého integrálu sa používa *Newtonova - Leibnitzova formula*

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad (3.14)$$

Napríklad pomocou určitého integrálu je vo fyzike vyjadrený impulz sily  $\vec{I}$  v tvare  $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ .

## Vlastnosti určitého integrálu

Nech  $f$  je spojité funkcia na intervale  $\langle a, b \rangle$ . Potom pre určitý integrál platí

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ kde } k \text{ je reálne číslo,} \quad (3.15)$$

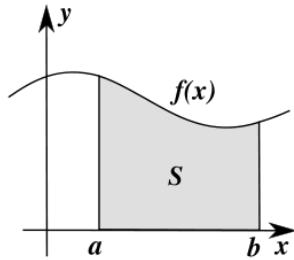
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad (3.16)$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (3.17)$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \quad (3.18)$$

### Aplikácie určitého integrálu

Určitý integrál sa používa napr. pri výpočte obsahu rovinných útvarov, objemu rotačných telies, dĺžky kriviek a povrchov rotačných plôch. Určitý integrál  $\int_a^b f(x) dx$  predstavuje obsah plochy pod krivkou  $f(x)$ , ktorý je znázornený na ilustráciu (obr. 3.2).



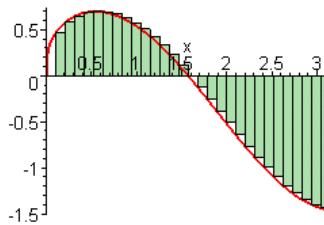
Obr. 3.2: Určitý integrál  $\int_a^b f(x) dx$  - obsah plochy pod krivkou.

Plocha pod krivkou  $f(x)$  je približne určená súčtom obsahov obdĺžnikov  $f(x)\Delta x$ , ktorých jedna strana má veľkosť  $\Delta x$  a druhá strana je vyjadrená hodnotou funkcie  $f(x)$ . Zmenšovaním veľkosti  $\Delta x$  na veľmi malú (infinitezimálnu) hodnotu  $dx$  ( $\Delta x \rightarrow dx$ ) sa počet obdĺžnikov  $n$  bude zväčšovať a obsah plochy pod krivkou bude určený limitou zo súčtu obsahov  $f(x)dx$  pre  $n \rightarrow \infty$  (obr. 3.3).

Limita zo sumy obsahov obdĺžnikov predstavuje určitý integrál (jeho grafický symbol je veľké natiahnuté S ako suma)

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (3.19)$$

Výpočet obsahu pod krivkou sa často využíva aj vo fyzike.



Obr. 3.3: Určitý integrál - limita zo sumy obsahu obdĺžnikov.

### 3.0.3 Prehľad fyzikálnych jednotiek

Základom v súčasnosti používanej Medzinárodnej sústavy jednotiek, ktorá sa označuje SI sústava, je sedem *základných jednotiek*. Sú to jednotky dĺžky  $l$ , hmotnosti  $m$ , času  $t$ , elektrického prúdu  $I$ , termodynamickej teploty  $T$ , svietivosti  $I$  a látkového množstva  $n$ . Pomocou základných jednotiek sú odvodené jednotky ostatných fyzikálnych veličín, ku ktorým patrí napr. jednotka plošného obsahu (štvorcový meter,  $\text{m}^2$ ), frekvencie (hertz, Hz), sily (newton, N), energie (joule, J) a iné. Tieto jednotky sa nazývajú *odvozené*. Patria medzi ne aj jednotky rovinného a priestorového uhla. Základné jednotky sústavy SI sú definované nasledovným spôsobom:

- **Meter** (m) je dĺžka, rovnajúca sa 1 650 763,63 násobku vlnovej dĺžky žiarenia šíriaceho sa vo vákuu, ktoré prislúcha prechodu medzi energetickými hladinami  $2p_{10}$  a  $5d_5$  atómu kryptónu 86.
- **Kilogram** (kg) je hmotnosť medzinárodného prototypu kilogramu, ktorý je uložený v Medzinárodom úrade pre váhy a miery v Sévres.
- **Sekunda** (s) je doba trvania 9 129 631 770 períođ žiarenia, ktoré zodpovedá prechodu medzi dvoma hladinami veľmi jemnej štruktúry základného stavu izotopu cézia  $^{133}\text{Cs}$ .
- **Ampér** (A) je stály elektrický prúd, ktorý pri prechode dvoma rovnobežnými, nekonečne dlhými priamymi vodičmi, zanedbateľného kruhového prierezu, umiestnenými vo vákuu vo vzájomnej vzdialenosći 1 meter, vyvolá silu  $2 \cdot 10^{-7}$  newtona na 1 meter dĺžky.
- **Kelvin** (K), jednotka termodynamickej teploty, je 273,16-tá časť termodynamickej teploty trojného bodu vody.
- **Kandela** (cd) je svietivosť absolútne čierneho telesa v kolmom smere na povrch, ktorého veľkosť je  $\frac{1}{6} 10^{-5} \text{ m}^2$ , pri teplote tuhnutia platiny, pri tlaku 101 325 pascalov.
- **Mól** (mol) je látkové množstvo sústavy, ktorá obsahuje práve toľko molekúl (alebo iných elementárnych entít), koľko je atómov v 0,012 kg izotopu uhlíka  $^{12}\text{C}$ .

Definície radiánu a steradiánu sú

- **Radián** (rad) je rovinný uhol zovretý dvoma radiálnymi polpriamkami, ktoré vytínajú na kružnici oblúk rovnakej dĺžky, akú má jej polomer.
- **Steradián** (sr) je priestorový uhol s vrcholom v strede gule, ktorý vytína na povrchu tejto gule plochu s obsahom rovnajúcim sa druhej mocnine polomeru gule.

Používané *násobky a diely* jednotiek sústavy SI sú v tab. 3.3.

Tabuľka 3.3: Násobky a diely.

Predpona	Značka	Násobok
eka	E	$10^{18}$
peta	P	$10^{15}$
tera	T	$10^{12}$
giga	G	$10^9$
mega	M	$10^6$
kilo	k	$10^3$
mili	m	$10^{-3}$
mikro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
piko	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$
atto	a	$10^{-18}$

Okrem jednotiek sústavy SI sa môžu používať aj ďalšie jednotky. Sú to jednotky

- času: minúta ( $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ ), hodina ( $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$ ), deň ( $1 \text{ d} = 24 \text{ h}$ );
- rovinného uhla: stupeň ( $1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$ ), minúta ( $1' = (\pi/10800) \text{ rad}$ ), sekunda ( $1'' = (\pi/648000) \text{ rad}$ );
- objemu: liter ( $1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3$ );
- hmotnosti: tona ( $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$ ), atómová hmot. jednotka ( $1 \text{ u} = 1,66053 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ );
- teploty: Celsiov stupeň ( ${}^\circ\text{C}$ );
- energie: elektrónvolt ( $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ );
- dĺžky: astronom. jednotka ( $1 \text{ AU} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ), parsek ( $1 \text{ pa} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$ ).

Môžu sa používať aj násobky alebo diely uvedené v tab. 3.4.

Tabuľka 3.4: Násobky a diely.

Predpona	Značka	Násobok
hektó	h	$10^2$
deka	da	$10^1$
deci	d	$10^{-1}$
centi	c	$10^{-2}$

### 3.0.4 Základy vektorového počtu

Vo fyzike sa najčastejšie stretávame s fyzikálnymi veličinami, ktoré môžeme rozdeliť na skaláry a vektory. *Skalár* je fyzikálna veličina, ktorá je úplne určená svojou veľkosťou, t.j. číselnou hodnotou v príslušných jednotkách. K týmto veličinám patrí napr. dĺžka, hmotnosť, čas, teplota, energia, elektrický náboj a iné. *Vektor* je taká fyzikálna veličina, ktorá je určená svojou veľkosťou a smerom. Príkladom vektorových veličín môže byť rýchlosť, hybnosť, sila, moment sily, intenzita elektrického poľa a ďalšie.

Pri výpočtoch so skalármi a vektormi sa často stretávame s *operátormi*, ktoré značne zjednodušujú výpočty. Operátorom rozumieme znak alebo súbor znakov, ktoré definujú určitú operáciu s príslušnou funkciou. Po vykonaní operácie dostávame novú funkciu.

#### Základné pojmy a operácie s vektormi

Pre označenie vektorov sa používajú písmená so šípkami alebo vodorovnými čiarkami alebo tučné písmená v tlačenom teste ( $\vec{a}, \vec{b}, \bar{a}, \bar{b}, \text{a}, \text{b}$ ). Graficky sa vektory označujú orientovanými úsečkami, pričom dĺžka úsečky vyjadruje veľkosť vektora a šípka určuje jeho smer.

Obr. 3.4: Grafické zobrazenie vektorov  $\vec{a}, \vec{b}$ .

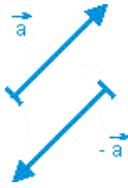
Každý vektor môžeme vyjadriť súčinom veľkosti daného vektora a *jednotkového vektora*, ktorého smer je totožný so smerom daného vektora (obr. 3.5).

Veľkosť jednotkového vektora sa rovná +1. Teda pre vektor  $\vec{v}$  môžeme písat'

Obr. 3.5: Grafické zobrazenie vektoru pomocou jednotkového vektora  $\vec{v}_0$ .

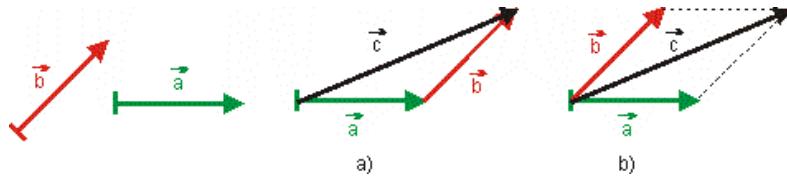
$$\vec{v} = |\vec{v}| \vec{v}_0 = v \vec{v}_0 \quad (3.20)$$

kde  $v = |\vec{v}|$  je veľkosť vektora (absolútna hodnota)  $\vec{v}$  a  $\vec{v}_0$  je jednotkový vektor. Vektor  $-\vec{a}$  má rovnakú veľkosť, ale opačný smer ako vektor  $\vec{a}$  (obr. 3.6).



Obr. 3.6: Dva opačné vektory.

Dva vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  považujeme za tožné, keď majú rovnaké veľkosti aj smery. Súčet dvoch vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  je vektor  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , ktorý dostaneme, keď ku koncovému bodu vektora  $\vec{a}$  pridáme vektor  $\vec{b}$ . Vektor  $\vec{c}$  je určený začiatočným bodom vektora  $\vec{a}$  a koncovým bodom vektora  $\vec{b}$  (obr. 3.7a). Vektor  $\vec{c}$  dostaneme aj pomocou rovnobežníka zostrojeného z vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$ . Vektor  $\vec{c}$  je potom určený uhlopriečkou rovnobežníka (obr. 3.7b), ktorá vychádza zo spoločného počiatku sčítavaných vektorov. Podobným spôsobom môžeme sčítať aj viacero vektorov. Napr. tri vektorov sčítame tak, že k súčtu dvoch vektorov pripočítame tretí vektor.



Obr. 3.7: Vektorový súčet dvoch vektorov.

Pre súčet dvoch vektorov platí komutatívny zákon

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (3.21)$$

Rozdiel dvoch vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  je vektor  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ , ktorý určíme podľa pravidiel pre sčítanie dvoch vektorov tak, že ku vektoru  $\vec{a}$  pripočítame vektor  $-\vec{b}$ . Súčinom skalárnej veličiny  $s$  a vektoru  $\vec{v}$  dostaneme vektor  $\vec{V}$ , pre ktorý platí

$$\vec{V} = s\vec{v} \quad (3.22)$$

pričom ak  $s > 0$ , vektor  $\vec{V}$  má rovnaký smer ako  $\vec{v}$  a ak  $s < 0$ , vektor  $\vec{V}$  má opačný smer ako  $\vec{v}$ . Pre veľkosť vektora  $\vec{V}$  platí

$$V = |\vec{V}| = |s| |\vec{v}| \quad (3.23)$$

Skalárny súčin dvoch vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$ , ktorý sa označuje  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , je definovaný vzťahom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = a b \cos \varphi, \quad (3.24)$$

v ktorom  $|\vec{a}| = a$  a  $|\vec{b}| = b$  sú veľkosti príslušných vektorov a  $\varphi$  je uhol, ktorý zvierajú vektory  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$ . Výsledkom skalárneho násobenia je skalár. Z definície vyplýva, že v špeciálnych prípadoch, keď vektor  $\vec{a}$  je súhlasne rovnobežný s vektorom  $\vec{b}$ , skalárny súčin  $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab$  a ak je vektor  $\vec{a}$  kolmý na vektor  $\vec{b}$ , potom  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Príkladom zápisu fyzikálnej veličiny pomocou skalarného súčinu je elementárna práca  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Pre skalárny súčin platí komutatívny zákon

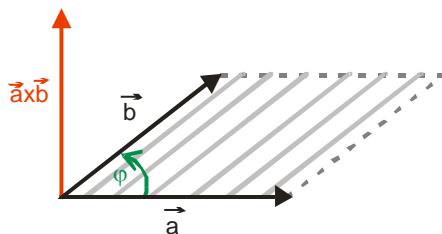
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (3.25)$$

a distributívny zákon

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \quad (3.26)$$

*Vektorovým násobením* vektora  $\vec{a}$  s vektorom  $\vec{b}$ , ktorý sa označuje  $\vec{a} \times \vec{b}$ , dostaneme vektor  $\vec{e}$ , ktorého veľkosť  $e = |\vec{e}|$  je definovaná vzťahom

$$e = |\vec{a} \times \vec{b}| = a b \sin \varphi. \quad (3.27)$$



Obr. 3.8: Vektorový súčin dvoch vektorov.

Vektor  $\vec{e}$  leží na priamke, ktorá je kolmá na rovinu určenú vektormi  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  a smeruje na tú stranu uvažovanej roviny, z ktorej sa stotožnenie prvého vektora ( $\vec{a}$ ) s druhým ( $\vec{b}$ ) na kratšej ceste javí proti smeru pohybu hodinových ručičiek (obr.3.8). Ak vektory  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  sú rovnobežné, potom  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$  a ak vektory  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  sú navzájom kolmé, potom veľkosť vektora  $\vec{e}$  je  $e = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab$ .

Pomocou vektorového súčinu je vo fyzike vyjadrený napr. moment sily  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Pre vektorový súčin neplatí komutatívny zákon, možno písat'

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (3.28)$$

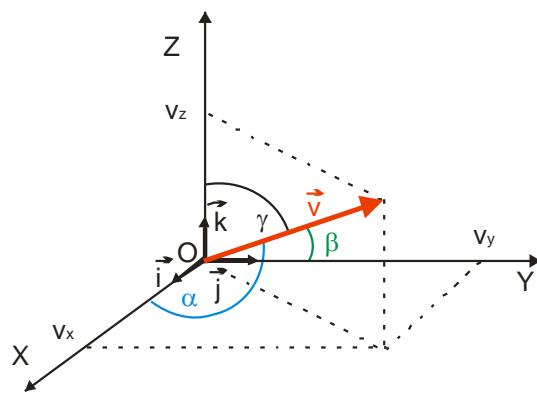
Pre vektorový súčin platí distributívny zákon

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}), \quad (3.29)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (3.30)$$

### Rozklad vektora na zložky

Vo fyzike často potrebujeme nahradit jeden vektor dvoma alebo viacerými vektormi, ktorých súčet predstavuje pôvodný vektor. Existuje však mnoho možností rozkladu príslušného vektora na zložky. Rozklad sa stane jednoznačným, keď predpíšeme určité doplňujúce podmienky. Často požadujeme, aby zložky vektora boli navzájom kolmé. Pre tento účel je výhodné rozkladať vektor na zložky ležiace v osiach pravouhlnej súradnicovej sústavy.



Obr. 3.9: Rozklad vektora na jednotlivé zložky v pravoúhlnej súradnicovej sústave.

Uvažujme o pravouhlnej súradnicovej sústave s osami  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  a s jednotkovými vektormi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  v smere príslušných osí. Nech vektor  $\vec{v}$  má začiatok v začiatokom bode  $O$  uvažovaného súradnicového systému (obr. 3.9). Keď zložky vektora  $\vec{v}$  v smere súradnicových osí označíme  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ , potom môžeme písat'

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (3.31)$$

kde  $v_x$ ,  $v_y$  a  $v_z$  sú veľkosti jednotlivých zložiek (súradnice vektora  $\vec{v}$ ). Pre veľkosť vektora  $\vec{v}$  platí

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3.32)$$

Smer vektora  $\vec{v}$  môžeme vyjadriť pomocou uhlov  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ktoré zviera vektor  $\vec{v}$  s jednotlivými vektormi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  a  $\vec{k}$ . Z obr. 3.9 pre jednotlivé uhly vyplývajú vzťahy

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}. \quad (3.33)$$

Nech  $a_x, a_y, a_z$  a  $b_x, b_y, b_z$  sú súradnice vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  v pravouhlom súradnicovom systéme, takže platí

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}. \quad (3.34)$$

Pre súčet resp. rozdiel vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  môžeme písat'

$$\vec{c} = \vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}, \quad (3.35)$$

kde

$$c_x = a_x \pm b_x \quad c_y = a_y \pm b_y \quad c_z = a_z \pm b_z. \quad (3.36)$$

Podľa definície skalárneho súčinu pre jednotlivé vektory  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  platia vzťahy

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 & \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 & \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 & \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 & \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 & \vec{k} \cdot \vec{j} = 0 & \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \end{array} .$$

Ak skalárny súčin dvoch vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  vyjadríme pomocou ich zložiek, dostaneme

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (3.37)$$

Pre vektorový súčin medzi jednotlivými vektormi  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  je možné písat' vzťahy

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array} .$$

Vektorový súčin vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  vyjadrených pomocou zložiek je vektor  $\vec{e} = \vec{a} \times \vec{b}$ , pre ktorý platí

$$\vec{e} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k},$$

čo je možné vyjadriť aj pomocou determinantu

$$\vec{e} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (3.38)$$

### 3.0.5 Diferenciálne a integrálne operácie s vektormi

Nech vektor  $\vec{v}$ , ktorý je vyjadrený pomocou zložiek v pravouhlej súradnicovej sústave, je vektorovou funkciou skalárnej premennej  $t$ , t.j.  $\vec{v} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$ . Derivácia vektora  $\vec{v}$  podľa skalárnej premennej  $t$  je vektor

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}, \quad (3.39)$$

ktorého zložky sa rovnajú deriváciám zložiek vektora  $\vec{v}$ . Integrál vektora  $\vec{v}$  je vektor

$$\int \vec{v} dt = \int v_x dt \vec{i} + \int v_y dt \vec{k} + \int v_z dt \vec{k}, \quad (3.40)$$

ktorého zložky sa rovnajú integrálom zložiek vektora  $\vec{v}$ . Nech vektorovými funkiami skalárnej premennej, t.j.  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ ,  $\vec{b} = \vec{b}(t)$ . Pre deriváciu skalárneho, resp. vektorového súčinu vektorov  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  platia vzťahy

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}, \quad (3.41)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}. \quad (3.42)$$

Vo fyzike sa často používa *Hamiltonov operátor*  $\nabla$  (nabla) a *Laplaceov operátor*  $\Delta$  (delta), ktoré sú definované vzťahmi

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (3.43)$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.44)$$

### Skalárne a vektorové pole

Pod pojmom *skalárne pole* rozumieme oblasť v priestore, v ktorej je definovaná skalárna funkcia  $f(x, y, z, t)$  súradníc  $x, y, z$  a času  $t$ . Každému bodu uvažovanej oblasti v každom okamihu je priradená určitá hodnota funkcie  $f$ . Ak funkcia  $f$  nezávisí od času, t. j. hodnoty funkcie  $f$  sú v každom bode stále, pole sa nazýva *stacionárne*. V takom poli sú definované ekviskalárne hladiny poľa. Rozumieme nimi množinu bodov, ktorým prislúcha rovnaká hodnota funkcie  $f$ .

V každom bode časovo nepremenného poľa môžeme zestrojiť vektor  $\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$ , ktorého zložky sa rovnajú parciálnym deriváciám funkcie  $f$  podľa jednotlivých súradníc. Tento vektor dostaneme aplikáciou operátora  $\nabla$  na funkciu  $f$ , označujeme ho *grad f*, čítame gradient funkcie  $f$  a platí

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}. \quad (3.45)$$

Gradient funkcie je kolmý k ekviskalárnej hladine a udáva smer, v ktorom funkcia  $f$  rastie najrýchlejšie. Záporný gradient funkcie  $f$  sa nazýva spád funkcie  $f$ .

*Vektorové pole* je časť priestoru, v ktorom je v každom bode definovaný vektor  $\vec{v}(x, y, z, t)$ . Vo všeobecnosti zložky tohto vektora sú taktiež funkiami súradníc  $x, y, z$  a času  $t$ . Pole, v ktorom zložky vektora  $\vec{v}$  nezávisia od času, je stacionárny

vektorovým poľom. Ak vektor  $\vec{v}$  nezávisí ani od času ani od polohy, vektorové pole je *homogénne*. V takom prípade vektor  $\vec{v}$  má v každom bode rovnakú hodnotu a rovnaký smer.

Skalárny súčin vektorového operátora  $\nabla$  a vektorovej funkcie  $\vec{v}$  sa nazýva divergencia vektora  $\vec{v}$ , označuje sa  $\operatorname{div} \vec{v}$  a platí

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (3.46)$$

Z uvedeného vzťahu vidieť, že divergencia vektora je skalár.

Vektorový súčin operátora  $\nabla$  a vektorovej funkcie  $\vec{v}$  je rotácia vektora  $\vec{v}$ , označuje sa  $\operatorname{rot} \vec{v}$  a platí

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}. \quad (3.47)$$

Pomocou Gaussovej vety

$$\oint_S f d\vec{S} = \int_V \operatorname{grad} f dV, \quad (3.48)$$

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{v} dV \quad (3.49)$$

je možné prevest' integrál cez uzavretú plochu  $S$  na integráciu cez objem  $V$ , ktorý je obklopený touto plochou. Pomocou Stokesovej vety

$$\oint_l f dl = \int_S \operatorname{grad} f \cdot d\vec{S}, \quad (3.50)$$

$$\oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.51)$$

je možné pretransformovať krivkový integrál cez uzavretú krivku  $l$  na integráciu cez plochu  $S$ , ktorá je krivkou  $l$  ohraničená.



## **Použitá literatúra:**

- ČERVEŇ, I. 2007. *Fyzika po kapitolách*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2007
- FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R.B., SANDS, M. 1988. *Feynmanove prednášky z fyziky I.* Bratislava: ALFA, 1980
- HAJKO, V., DANIEL – SZABÓ, J. 1980. *Základy fyziky*. Bratislava: VEDA, 1980
- HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. 2000. *Fyzika*. Brno: VUTIUM, 2000
- HORÁK, Z., KRUPKA, F. 1976. *Fyzika*. Bratislava: ALFA – SNTL, 1976
- ILKOVIČ, D. 1973. *Fyzika*. Bratislava: ALFA – SNTL, 1973
- KREMPASKÝ, J. 1982. *Fyzika*. Bratislava: ALFA – SNTL, 1982
- OLČÁK, D. 1996. *Fyzika I.* Košice: Technická univerzita, 1996
- RÁCOVÁ, M. 1997. *Matematika*. Pezinok: ENIGMA jr, 1997
- STRELKOV, S.P. 1985. *Mechanics*. Moscow: Mir Publishers, 1985

Doc. RNDr. Dušan Olčák, CSc., RNDr. Zuzana Gibová, PhD.

**Mechanický pohyb častice a telesa**

Vydavateľ: **Technická univerzita v Košiciach**

Náklad: 500 kusov

Počet strán: 100

Vydanie: prvé

2014

**ISBN 978 – 80 – 553 – 1817 - 2**