Matematyka dyskretna

Zbiory

Anna Wąsik

8 listopada 2023

Źródła

Źródła i bibliografia

JT Jerzy Topp, *Wstęp do matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2015

EPG opracowanie Elżbiety Puźniakowskiej-Gałuch z przedmiotu matematyka dyskretna

Uwaga do zadań

Umieszczone screeny zadań są zaczerpnięte z EPG. Wyjątkiem są zadania na dwóch ostatnich slajdach.

Czym jest zbiór?

W matematyce zbiór oraz należenie do zbioru są pojęciami pierwotnymi, to znaczy, że nie definiuje się ich. Bazujemy więc na intuicji.

W 1895 roku Georg Cantor (twórca teorii mnogości – działu matematyki zajmującym się badaniem zbiorów) napisał: „Przez zbiór rozumiemy dowolną kolekcję M, składającą się z dobrze określonych obiektów, które postrzegamy bądź są wytworami naszej myśli"

Dla zaznaczenia, że obiekt *a jest elementem zbioru A* (mówimy też, że *a należy do zbioru A* lub *a jest w A*) używamy symbolu $\in$ i piszemy:

$$a \in A.$$

Jeżeli obiekt a nie jest elementem zbioru A, to zamiast pisać $\neg(a \in A)$ piszemy:

$$a \notin A.$$

Oznaczenia zbiorów lub ich elementów

Oznaczenia ogólne

W większości przypadków używa się następujących oznaczeń:

- wielkich liter $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ do oznaczenia **zbiorów**;
- małych liter $a, b, c, \ldots, x, y, z$ do oznaczenia **elementów zbiorów**;
- liter kaligraficznych $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ do oznaczenia **rodzin zbiorów**, czyli zbiorów, których elementami są zbiory.

W matematyce są też pewne „specjalne" oznaczenia zbiorów.

Oznaczenia

- $\emptyset$ – zbiór pusty.
- $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych.
- $\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych.
- $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych.
- $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych. $\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych.

Sposoby zapisywania zbiorów

W matematyce większość zbiorów określamy za pomocą własności wyróżniającej elementy zbioru. Jeśli $\varphi(x)$ jest funkcją zdaniową, to zapis

$$A = \{x : x \in X \wedge \varphi(x)\}$$

czytamy: *A jest zbiorem wszystkich tych x, które należą do X i mają własność φ*. Często piszemy krócej

$$A = \{x \in X : \varphi(x)\} \quad \text{lub} \quad A = \{x \in X | \varphi(x)\},$$

albo nawet

$$A = \{x : \varphi(x)\} \quad \text{lub} \quad A = \{x | \varphi(x)\},$$

gdy zbiór X jest znany.

Definicja

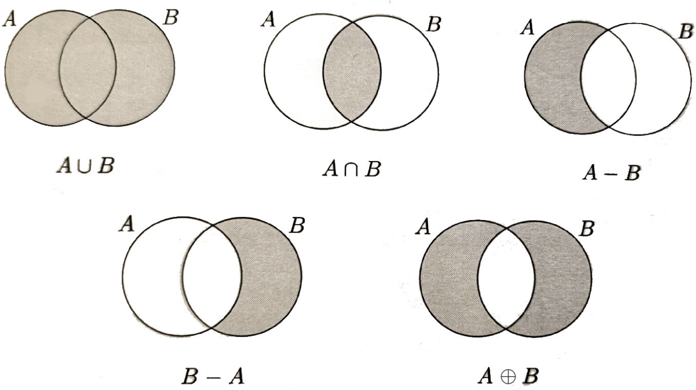
Dla zbiorów A i B możemy zdefiniować:

- *sumę, czyli* $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,
- *iloczyn, czyli* $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,
- *różnicę, czyli* $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$,
- *różnicę symetryczną, czyli* $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

Uwaga 1: Iloczyn = część wspólna = przekrój zbiorów.

Uwaga 2: Różnicę zbiorów A i B można oznaczać także $A \setminus B$

Diagramy Venna



Rysunek: Źródło: JT, str 51.

Twierdzenie

Dla dowolnych zbiorów A, B, C mamy następujące równości:

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ *(łączność sumy)*
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ *(łączność iloczynu)*
3. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$ *(łączność różnicy symetrycznej)*

Uwaga: własności działań na zbiorach jest oczywiście więcej, jednak do zadania przydadzą nam się powyższe.

1. Niech $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,5,7\}$ i $C = \{4,5,6,7,8\}$. Oblicz $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A - B$, $A \cap (B - C)$, $A \oplus B$, $A \oplus B \oplus C$.

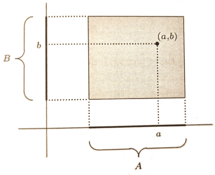
Iloczyn kartezjański zbiorów

Definicja

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \land b \in B\},$$

gdzie (a, b) jest parą uporządkowaną.



Rysunek: Źródło: JT, str. 59.

2. Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Wypisz elementy $A \times B$, $B \times A$ oraz B^2

$|A|$ oznacza *moc zbioru* A, czyli liczbę jego elementów,

$$|\{3,6,9\}| = 3, \qquad |\emptyset| = 0.$$

Lemat 1

Dla zbiorów X i Y mamy

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$

Lemat 2

Wszystkich podzbiorów zbioru A jest $2^{|A|}$.

Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru A oznaczamy $\wp(A)$ lub $\mathcal{P}(A)$ lub 2^A.

Przykład: Niech $A = \{a, b, c\}$. Wówczas
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Definicja

Niech X oraz Y będą zbiorami. Relacją pomiędzy elementami zbioru X a elementami zbioru Y nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$.

Definicja

Relacja $F \subset X \times Y$ jest funkcją, jeżeli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$ taki, że $(x, y) \in F$. Zwykle zamiast $(x, y) \in F$ będziemy pisać $F(x) = y$

3. Niech $X = \{A, B, C\}$, $Y = \{a, b\}$. Ile jest relacji w zbiorze $X \times Y$. Czy relacja $R = \{(A, a), (A, b), (B, a)\}$ jest funkcją
4. Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. wypisz wszystkie elementy relacji $R = \{(a, b) \in A \times B \mid a < b\}$. Czy relacja R jest funkcją?
5. Niech $X = \{a, b, c\}$. Wypisz elementy X^2, X^3 oraz $\{(x, y) \in X^2 \mid x \neq y\}$.

Składanie relacji

Złożenie relacji dwuargumentowych – uogólnienie złożenia funkcji na dowolne relacje dwuargumentowe; sposób konstrukcji relacji dwuargumentowej z dwóch innych, a zarazem wynik tej konstrukcji. Formalnie dla zbiorów X, Y, Z i relacji $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ **złożenie** tej dwójki to zbiór $S \circ R$ zdefiniowany warunkiem[1][2]:

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z : \underset{y \in Y}{\exists} \; x \, R \, y \wedge y \, S \, z\};$$

innymi słowy $x \; (S \circ R) \; z$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego y zachodzi $x \; R \; y \; S \; z$[3].

Przykłady [edytuj | edytuj kod]

Niech R i S będą takimi relacjami w zbiorze $\mathbb{N}$, że:

$$R = \{(2,1), (3,1), (4,2), (4,5), (5,3)\}$$
$$S = \{(1,3), (4,1), (3,6), (6,8), (6,7)\}$$

Wtedy odpowiednio złożeniem relacji będą:

$$S \circ R = \{(2,3), (3,3), (5,6)\}$$
$$R \circ S = \{(1,1)\}$$

Rysunek: Złożenie relacji,
//pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Z%C5%82o%C5%BCenie_relacji&oldid=71656867
(ostatni dostęp paź. 9, 2023).

Składanie relacji – zadania do domu

6. Dane są dwie relacje:

$$P = \{(1,a),(2,b),(3,b)\} \subset \{1,2,3\} \times \{a,b\}$$

oraz

$$R = \{(a,1),(a,2),(b,3)\} \subset \{a,b\} \times \{1,2,3\}.$$

Oblicz złożenie $P \circ R$.

7. Dane są dwie relacje:

$$P = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\} \subset \{0,1\} \times \{1,2,3\}$$

oraz

$$R = \{(3,1),(3,2),(3,3)\} \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}.$$

Oblicz ich złożenie $P \circ R$.

Rysunek: Źródło: EPG, zbiory.

Relacja równoważności

Definicja [edytuj | edytuj kod]

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Relację $R \subseteq X \times X$ nazywamy **relacją równoważności** wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona

- *zwrotna*, tzn. dla dowolnych $x \in X$ zachodzi

  $$x\,R\,x,$$

- *symetryczna*, tzn. dla dowolnych $x, y \in X$

  $$x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x,$$

- *przechodnia*, tzn. dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzi wynikanie

  $$(x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z.$$

Dwa elementy $x, y \in X$ takie, że $(x, y) \in R$, oznacza się symbolicznie $x\,R\,y$[3][4] i nazywa się **równoważnymi** lub **tożsamymi w sensie R**. Relacje równoważności oznacza się zwykle symbolami $\sim$, $\equiv$ lub podobnymi.

Rysunek: Relacja równoważności, `//pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Relacja_r%C3%B3wnowa%C5%BCno%C5%9Bci&oldid=71656851` (ostatni dostęp paź. 9, 2023).

Relacje – zadania

8. Niech $X = \{a, b, c\}$. i relacja $R = \{(x, y) \in X^2 \mid x \neq y\}$. Czy relacja R jest relacją równoważności? Oblicz złożenie $R \circ R$

9. Niech $A = \{a, b\}$. Ile jest relacji w zbiorze A^2. Które z nich są a) zwrotne, b) relacjami równoważności?

10. Niech $A = \{a, b, c\}$. Ile jest relacji w zbiorze A^2. Które z nich są a) zwrotne, b) relacjami równoważności

11. Czy relacja $R = \{(a, b) \in N \times N \mid a < b\}$ w zbiorze liczb naturalnych jest przechodnia?

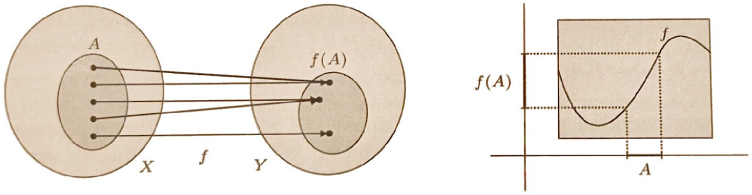
Rysunek: Źródło: EPG, zbiory.

Obraz zbioru przez funkcję

Definicja 4.7.1. Dana jest funkcja $f\colon X \to Y$ i podzbiór A zbioru X. *Obrazem zbioru* A poprzez funkcję f (lub wyznaczonym przez funkcję f) (zob. rys. 4.23), nazywamy zbiór

$$f(A) = \{y \in Y : \exists_{x \in A}\, y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\},$$

czyli zbiór złożony ze wszystkich wartości $f(x)$ dla wszystkich możliwych elementów x ze zbioru A.



Rysunek 4.23. Ilustracja do definicji 4.7.1

Rysunek: Źródło: JT, str. 129.

Przeciwobraz zbioru przez funkcję

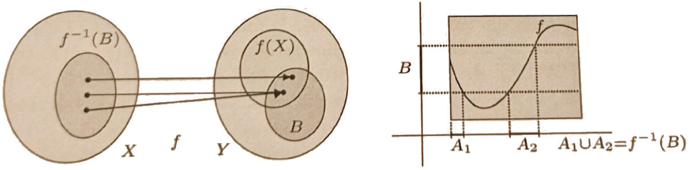
Definicja 4.7.2. Dana jest funkcja $f\colon X \to Y$ i podzbiór B zbioru Y. *Przeciwobrazem zbioru B* względem funkcji f (lub wyznaczonym przez funkcję f) (zob. rys. 4.24), nazywamy zbiór

Przeciwobraz zbioru

$$f^{-1}(B) = \{x \in X\colon f(x) \in B\}.$$

Z powyższej definicji jest oczywiste, że mamy równoważność:

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$



Rysunek: Źródło: JT, str. 131.

Zadanie + notacja uogólniona działań na zbiorach

12. Niech $X = \{1, 2, 3\}$ i $Y = \{a, b, c\}$. niech $F = \{(1, a)(2, b), (3, a)\} \subset X \times Y$. Czy relacja F jest funkcją? Wyznacz obraz $F(\{1, 3\})$ oraz przeciwobraz $F^{-1}(\{b, c\})$.

Uogólnione działania na zbiorach

Niech $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$, wówczas

- $$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_{n-1} \cup A_n$$
- $$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{n-1} \cap A_n$$
- $$\bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \oplus A_{n-1} \oplus A_n$$

Twierdzenie 0.5 *Różnica symetryczna n zbiorów*

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$$

zawiera elementy, które należą do nieparzystej liczby spośród zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Rysunek: Źródło: EPG, zbiory.

13. Niech $I = \{1,2,3,4,5\}$ będzie zbiorem indeksów. Dla każdego $i \in I$ określamy zbiór $B_i = \{x \in \mathbb{N} \mid i \leqslant x \leqslant 2i\}$. Oblicz $\bigcup_{i \in I} B_i$, $\bigcap_{i \in I} B_i$, $B_1 \oplus B_3 \oplus B_5$ oraz $B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_4 \oplus B_5$.
14. Niech $I = \{1,2,3,4,5\}$. Dla każdego $i \in I$ mamy $A_i = \{3i-3, 3i, 3i+3\}$. Oblicz $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} A_i$ oraz $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5$.
15. Niech $I = \{1,2,3,4,5\}$ będzie zbiorem indeksów. Dla każdego $i \in I$ określamy zbiór $C_i = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 30$ oraz i dzieli $x\}$. Oblicz $\bigcup_{i \in I} C_i$ oraz $\bigcap_{i \in I} C_i$.

16. Niech F będzie dowolną funkcją z A w B. Udowodnić, że relacja

$$R = \{(a, b) \mid F(a) = F(b)\}$$

jest relacją równoważności.

17. Niech A_1, ..., A_k będzie podziałem zbioru A. To znaczy zbiory A_1, ..., A_k są parami rozłączne i w sumie tworzą zbiór A. Zdefiniujmy relację $R \subset A \times A$. Para $(a, b) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy a i b należą do tego samego zbioru A_i. Udowodnić, że relacja R jest relacją równoważności.

Dodatkowe zadania z relacji równoważności

Poniższe zadania można znaleźć w JT, str. 162.

Zadanie 1

Niech R będzie relacją w zbiorze $A = \{1, 2, 3, ...7\}$, taką że $(a, b) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a/b = 2^m$ dla pewnej liczby całkowitej m. Wyznacz wszystkie pary (a, b) należące do relacji R. Wyjaśnij, dlaczego R jest relacją równoważności w zbiorze A.

Zadanie 2

Niech R będzie relacją w zbiorze $A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$, taką że $(a, b) \in R$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba ab jest kwadratem liczby naturalnej. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) należące do relacji R. Wyjaśnić, dlaczego R jest relacją równoważności w zbiorze A.

Zadanie 3

Czy relacja $R \subset \{1,2,3\}^2$ jest relacją równoważności, gdy:

a) $R = \{(1,1),(1,2),(3,2),(3,3),(2,3),(2,1)\}$,
b) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(1,2),(2,3),(3,1),(1,3)\}$.

Odpowiedź uzasadnij.