Algebra liniowa i geometria – układy równań liniowych

Elżbieta Puźniakowska-Gałuch

e-mail: Elzbieta.Puzniakowska-Galuch@pja.edu.pl

Układy równań liniowych: rzeczywiste i zespolone

Definicja

Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Układem równań nazywamy m równań z n niewiadomymi:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \hfill \ldots & = & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}\right.$$

Zapis macierzowy

Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Wówczas układ równań można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B$$

Przykład

Zapisać układ równań w postaci macierzowej:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 17 \\ -x_2 + 6x_3 &= 73 \\ 5x_1 - 7x_3 &= 0 \end{cases}$$

Układ jednorodny i niejednorodny

Definicja

Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Układem równań jednorodnym nazywamy układ:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m & = & 0 \\ \hfill \ldots & = & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m & = & 0 \end{array}\right.$$

Jednym z rozwiązań układu jednorodnego jest $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.

Układ Cramera

Definicja

Układem Cramera nazywamy układ równań $AX = B$ *gdzie* $A \in M_{n\times n}$ *jest macierzą nieosobliwą.*

Twierdzenie

Układ Cramera ma jednoznaczne rozwiązanie dane wzorem:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n$$

gdzie $A_i \in M_{n\times n}$ *jest macierzą z* i*-tą kolumną zastąpioną przez kolumnę wyrazów wolnych.*

Przykład

Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 2 \\ x_1 + 5x_2 & = & 6 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 & = & 12 \end{cases}$$

Twierdzenie

Rozwiązanie układu Cramera dane jest wzorem:

$$X = A^{-1}B.$$

Przykład

Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 2 \\ x_1 + 5x_2 & = & 6 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 & = & 12 \end{cases}$$

Metoda eliminacji Gaussa

$$[\,A\,|\,B\,] \to [\,I_n\,|\,X\,]$$

Przykład

Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 2 \\ x_1 + 5x_2 & = & 6 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 & = & 12 \end{cases}$$

Metoda elilminacji Gaussa

Przykład

Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 17x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 13x_2 + 5x_3 &= 8 \end{cases}$$

Przykład

Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 4x_4 &= -6 \end{cases}$$

Metoda elilminacji Gaussa

Przykład

Rozwiązać układ równań liniowych:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = & -4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = & -2 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 & = & 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 1 \end{cases}$$