Algebra liniowa i geometria – macierze i wyznaczniki

Elżbieta Puźniakowska-Gałuch

e-mail: Elzbieta.Puzniakowska-Galuch@pja.edu.pl

Macierze rzeczywiste i zespolone

Definicja

Prostokątną tablicę liczb ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) o n wierszach i m kolumnach nazywamy macierzą (rzeczywistą lub zespoloną) wymiaru $n \times m$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Oznaczamy $A = [a_{ij}]_{i=1,\dots n, j=1,\dots m}$.

Rodzaje macierzy

1. macierz zerowa,
2. macierz kwadratowa,
3. macierz trójkątna dolna/górna,
4. macierz diagonalna (przekątniowa),
5. macierz jednostkowa,
6. macierz blokowa.

Działania na macierzach

Niech $A, B \in M_{n\times m}$, $C \in M_{m\times k}$, $A = [a_{ij}]_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$, $B = [b_{ij}]_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$, $C = [b_{ij}]_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,k}$. Wówczas możemy wykonać następujące działania:

1. dodawanie/odejmowanie:

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$$

2. mnożenie przez liczbę α:

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,m}$$

3. mnożenie macierzy:

$$B \cdot C = \left[\sum_{l=1}^{m} b_{il}c_{lj}\right]_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,k}$$

Przykład

Obliczyć:

- $$(1-i)\begin{bmatrix} i & 0 & 3+2i & 1 \\ -1 & 2i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & -5 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Przykład

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 10 & 9 & 11 \\ 5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

gdzie a_{ik}, $i = 1, \dots, 4$, $k = 1, \dots, 5$ *z macierzy* A *oznaczają ilość sztuk towaru* T_k, *który chce kupić klient* K_i, *zaś elementy* b_{kj}, $k = 1, \dots, 5$, $j = 1, 2, 3$, *z macierzy* B *oznaczają cenę towaru* T_k *w sklepie* S_j. *W jaki sposób za pomocą tych macierzy otrzymać informację o:*

1. *kwocie, jaką zapłaciłby klient* K_2 *w sklepie* S_3,
2. *kwocie, jaką zapłaciliby w sumie wszyscy klienci w sklepie* S_3,
3. *sklepie, w którym klient* K_4 *zapłaciłby najwięcej a w którym zapłaciłby najmniej?*

Przykład

Niech $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *będzie przekształceniem punktu* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *z płaszczyzny. Macierz przekształcenia* L *będziemy oznaczali* $P_L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

1. *Składanie przekształceń jest równoważne z mnożeniem macierzy (uzasadnienie, że* $P_{L \circ K} = P_L P_K$*).*
2. *Jak wygląda macierz symetrii względem osi* Ox*?*
3. *Jak wygląda macierz obrotu o kąt* $\frac{\pi}{6}$*?*
4. *Jak wygląda macierz złożenia przekształceń symetrii względem osi* Ox *oraz obrotu o kąt* $\frac{\pi}{6}$*?*

Własności działań na macierzach

Twierdzenie

Niech $A, B, C \in M_{n\times m}$ *oraz* α, β *liczby* ($\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$). *Wówczas:*

1. $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$,
2. $A + 0 = 0 + A = A$, $A + (-A) = 0$,
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
4. $1 \cdot A = A$, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Twierdzenie

Niech $A \in M_{n\times m}$, $B, C \in M_{m\times k}$ *oraz* α *liczba* ($\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$). *Wówczas:*

1. $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$,
2. $A(\alpha B) = \alpha(AB) = (\alpha A)B$,
3. $A(BC) = (AB)C$,
4. $A = I_n A = AI_m$.

Wyznaczniki - definicja

Definicja

Niech $A \in M_{n\times n}$. *Funkcję* $\det : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ *(lub* $\mathbb{C}$*) spełniającą*

1. $n = 1 \Rightarrow \det A = a_{11}$,
2. $n > 1 \Rightarrow$
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$
gdzie $A_{1j} \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ *powstaje przez usunięcie pierwszego wiersza i* j*-tej kolumny z macierzy* A *nazywamy wyznacznikiem macierzy* A*. Alternatywne oznaczenie to* $|A|$.

Wyznaczniki dla $n = 2$ i $n = 3$

Przykład

Obliczyć wyznaczniki:

1. $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Interpretacja geometryczna (równoległobok, równoległościan).

Przykład

Obliczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (-1, 3)$ oraz $\vec{v} = (2, 5)$. Jakie jest pole trójkąta rozpiętego na tych wektorach?

Przykład

Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, -1)$, $B = (3, 4)$, $C = (-2, 5)$.

Przykład

Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (-1, 3, 4)$, $\vec{v} = (2, 5, 0)$ oraz $\vec{w} = (3, 0, 2)$. Jaka jest objętość czworościanu rozpiętego na tych wektorach?

Przykład

Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 3, 4)$, $C = (-2, 0, 5)$, $D = (4, 1, 0)$?

Rozwinięcie Laplace'a

Twierdzenie (Rozwinięcie względem i-tego wiersza)

Niech $A \in M_{n\times n}$. Wyznacznik macierzy A obliczamy w następujący sposób:

1. $n = 1 \Rightarrow \det A = a_{11}$,
2. $n > 1 \Rightarrow$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

gdzie $A_{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ powstaje przez usunięcie i-tego wiersza i j-tej kolumny z macierzy A.

Twierdzenie (Rozwinięcie względem j-tej kolumny)

Niech $A \in M_{n \times n}$. Wyznacznik macierzy A obliczamy w następujący sposób:

1. $n = 1 \Rightarrow \det A = a_{11}$,
2. $n > 1 \Rightarrow$
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$
gdzie $A_{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ powstaje przez usunięcie i-tego wiersza i j-tej kolumny z macierzy A.

Przykład

Obliczyć na dwa sposoby

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Przykład

Obliczyć wyznacznik macierzy diagonalnej i trójkątnej.

Własności wyznaczników

Niech $A \in M_{n\times n}$, $c \neq 0$. Niech k_j oznacza j-tą kolumnę macierzy A. Wówczas:

1. $\det[k_1 \dots 0 \dots k_n] = 0$
2. $\det[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] = -\det[k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_n]$
3. $k_i = k_j$, $\det[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] = 0$
4. $\det[k_1 \dots ck_i \dots k_n] = c\det[k_1 \dots k_i \dots k_n]$
5. $\det[k_1 \dots k_i + ck_j \dots k_n] = \det[k_1 \dots k_i \dots k_n]$
6. $\det[k_1 \dots k_i + k_i' \dots k_n] = \det[k_1 \dots k_i \dots k_n] + \det[k_1 \dots k_i' \dots k_n]$
7. $\det A = \det A^T$

Analogicznie dla wierszy.

Przykład

Obliczyć

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

z wykorzystaniem operacji elementarnych na wierszach/kolumnach:

Przykład

Wkorzystując własności wyznaczników zapisać część rzeczywistą wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 5+i & 7-7i & 2 \\ 2-2i & 9-5i & 3 \\ 1-8i & 3+2i & 4 \end{vmatrix}$$

w postaci sumy wyznaczników o elementach rzeczywistych.

Twierdzenie (Cauchy'ego)

Niech $A, B \in M_{n\times n}$. *Wówczas* $\det(AB) = \det A \det B$.

Przykład

Obliczyć wyznacznik macierzy X *spełniającej równanie*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 36 \\ 5 & 12 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja

Niech $A \in M_{n\times n}$. *Macierzą odwrotną do macierzy* A *nazywamy macierz* $A^{-1} \in M_{n\times n}$ *spełniającą*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Twierdzenie

Niech $A \in M_{n\times n}$. *Jeżeli* $\det A \neq 0$, *to macierz* A^{-1} *istnieje.*

Przykład

Czy macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

jest odwracalna?

Metody znajdowania macierzy odwrotnej

Niech $A \in M_{n\times n}$, $\det A \neq 0$. Wówczas macierz odwrotną możemy policzyć za pomocą metody:

1. macierzy dopełnień algebraicznych

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_d)^T$$

gdzie $A_d = [(-1)^{i+j} \det A_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$

2. przekształceń elementarnych (algorytm Gaussa)

$$[\ A \mid I\ ] \sim [\ I \mid A^{-1}\ ]$$

Przykłady

1. Obiczyć macierze odwrotne (dwoma metodami)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3+2i & 2 \\ 4 & 3-2i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Rozwiązać równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$