Matematyka dyskretna

Logika matematyczna

Anna Wąsik

8 listopada 2023

Źródła i bibliografia

Źródła

- Jerzy Topp, „Wstęp do matematyki", Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2015
- zadania są zaczerpnięte z opracowania dr Elżbiety Puźniakowskiej-Gałuch

Czym jest zdanie w logice?

W matematyce - inaczej niż w języku potocznym - przez *zdanie* rozumiemy stwierdzenie, któremu można przypisać wartość logiczną prawda (1) lub fałsz (0).

Przykłady zdań:

- 2 dzieli 6, (co zapisujemy $2|6$).
- Jeśli w Gdańsku pada deszcz, to $2 + 3 = 5$.
- Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.
- $1 < 1$.

Żadne z następujących zdań nie jest zdaniem

- Czy Paryż jest stolicą Francji?
- 1+1.
- $m < n^2$ (nie jest to zdanie, jest to funkcja zdaniowa, predykat).

Funktory zdaniotwórcze (spójniki logiczne)

Z danych zdań tworzy się nowe, bardziej złożone zdania, za pomocą tzw. funktorów zdaniotwórczych, używając standardowych symboli:

- $\neg$ lub $\sim$ dla „nie”, czyli dla negacji,
- $\wedge$ dla „i”, czyli dla koniunkcji,
- $\vee$ dla „lub”, czyli dla alternatywy,
- $\implies$ dla „implikacji”, czyli dla zdania warunkowego,
- $\iff$ dla „wtedy i tylko wtedy, gdy”, czy dla równoważności.

Przykład

Jeśli p i q są odpowiednio zdaniami *pada deszcz* i *chmury zakrywają niebo*, to

- $\neg p$ oznacza *nieprawda, że pada deszcz*,
- $p \vee q$ oznacza *pada deszcz lub chmury zakrywają niebo*,
- $p \wedge q$ oznacza *pada deszcz i chmury zakrywają niebo*,
- $p \implies q$ oznacza *jeśli pada deszcz, to chmury zakrywają niebo*,
- $p \iff q$ oznacza *pada deszcz wtedy i tylko wtedy, gdy chmury*

Tautologie

Za pomocą funktorów zdaniotwórczych możemy tworzyć schematy (formuły) zdań lub funkcji zdaniowych. Na przykład:

$$(\alpha \iff \beta) \wedge \neg\alpha,$$

gdzie α i β są symbolami dowolnych zdań (zmiennymi zdaniowymi).

Definicja

Tautologią nazywamy takie schematy, które zawsze są prawdziwe niezależnie od wartości logicznych poszczególnych zdań (zmiennych zdaniowych).

Zależności między zdaniami a ich wartościami logicznymi przedstawiają następujące tabele:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

α	β	$\alpha \vee \beta$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \Rightarrow \beta$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

α	β	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

0.6 Zadania

1. Udowodnij, że następujące schematy są tautologiami

   $\alpha \Leftrightarrow \alpha$

   $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

   $\alpha \vee \neg\alpha$

   $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$

   $\neg\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha$

   $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$

   $\neg(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$

   $\neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

2. Udowodnij, że następujące schematy są tautologiami

   $\neg(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta)$

   $(\alpha \wedge \alpha) \Leftrightarrow \alpha$

   $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \alpha$

   $(\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \wedge \neg\beta)$

Definicja

Wartościowaniem nazywamy taką funkcję $\sigma : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$, *czyli funkcję przyporządkowującą każdej zmiennej zdaniowej* p *wartość logiczną* $\sigma(p)$

Definicja

Interpretacją wartościowania $\sigma : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$ *nazywamy funkcję* $\omega_\sigma : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ *przyporządkowującą każdej formule zdaniowej wartość logiczną uwzględniającą rekurencyjną definicję formuł zdaniowych, i to taką że:*

- $\omega_\sigma(p) = \sigma(p)$ *dla każdej zmiennej zdaniowej* p,
- $\omega_\sigma(\neg F) = \neg\omega_\sigma(F)$ *dla każdej formuły* F,
- $\omega_\sigma(F \circ G) = \omega_\sigma(F) \circ \omega_\sigma(G)$ *dla wszystkich formuł* F *i* G *oraz każdego dwuargumentowego funktora zdaniotwórczego* $\circ$.

Reguły dowodzenia

Pierwszą regułą dowodzenia jest reguła odrywania

$$\frac{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$$

oznacza, ona, że jeżeli prawdziwe są wszystkie formuły nad kreską (zwane przesłankami), to prawdziwa jest także reguła pod kreską (zwana wnioskiem). Reguła ta jest często stosowana w dowodach matematycznych. Jeżeli udowodnimy twierdzenie (zdanie) α oraz implikację $\alpha \Rightarrow \beta$, to możemy wnioskować, że zdanie β jest prawdziwe.

Reguły dowodzenia a tautologie

Twierdzenie

Jeśli $F_1, F_2, \ldots, F_n$ oraz F są schematami zdaniowymi, to schemat $\frac{F_1, F_2, \ldots, F_n}{F}$ jest regułą wnioskowania wtedy i tylko wtedy, gdy schemat zdaniowy $(F_1 \land F_2 \land \ldots \land F_n) \implies F$ jest tautologią.

Powyższe twierdzenie pozwala nam sprawdzać, że dany schemat jest regułą wnioskowania w podobny sposób, w jaki sprawdzało się, czy formuła zdaniowa jest tautologią.

Zadania

3. Udowodnij, że następujące schematy są regułami dowodzenia

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$$

$$\frac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta} \qquad \frac{\alpha}{\beta \Rightarrow \alpha} \qquad \frac{\neg\alpha}{\alpha \Rightarrow \beta}$$

W rachunku zdań istnieje coś takiego jak siła wiązania funktorów, czyli w pewnym sensie kolejność wykonywania działań. Zawsze pierwszeństwo ma wyrażenie w nawiasie.

Najsilniej wiąże negacja, następnie alternatywa oraz koniunkcja, następnie implikacja, a następnie równoważność.

Kwantyfikatory

Zdanie *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *zachodzi* $n \geqslant 0$ zapiszemy:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad n \geqslant 0.$$

A zdanie *istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że* $n \geqslant 1$ zapiszemy:

$$\exists_{n \in \mathbb{N}} \quad n \geqslant 1.$$

Badanie wartości logicznej zdania z kwantyfikatorem

Dla dowodu prawdziwości zdania $\exists_{x \in X} \varphi(x)$ wystarczy wskazać pewien element x_0 w zbiorze X i uzasadnić, że zdanie $\varphi(x_0)$ jest prawdziwe. Jest to **dowód istnienia przez podanie przykładu** x_0.

Jeśli chcemy pokazać, że zdanie $\forall_{x \in X} \varphi(x)$ **nie** jest prawdziwe, czyli chcemy wykazać prawdziwość zdania $\neg(\forall_{x \in X} \varphi(x))$ – które, jak się zaraz okaże jest równoważne ze zdaniem $\exists_{x \in X} \neg\varphi(x)$ – to wystarczy wskazać element $x_0 \in X$, taki że zdanie $\varphi(x_0)$ jest fałszywe. Taki rodzaj dowodu nazywamy **dowodem przez podanie kontrprzykładu**.

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów, czyli zaprzeczanie zdań z kwantyfikatorami

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

- $\neg(\forall_x \varphi(x)) \iff \exists_x \neg\varphi(x)$
- $\neg(\exists_x \varphi(x)) \iff \forall_x \neg\varphi(x)$

4. Sprawdź, które zdania są prawdziwe

$$\exists_{n\in\mathbb{N}}\ 2|n, \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}}\ 2|n, \qquad \exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2+1>0, \qquad \forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2+1>0$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{m\in\mathbb{N}}\ m^2=n, \qquad \forall_{m\in\mathbb{N}}\exists_{n\in\mathbb{N}}\ m^2=n,$$

$$\exists_{n\in\mathbb{N},n<11}\ n^2\geqslant 100, \qquad \forall_{n\in\mathbb{N},n<11}\ n^2\leqslant 100$$

$$\exists_{n\in\mathbb{N},n<0}\ 2|n, \qquad \forall_{n\in\mathbb{N},n<0}\ 2|n, \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{m\in\mathbb{N}}\ m<n$$

5. Zapisz zdania równoważne negacjom zdań z poprzedniego zadania nie używając znaku negacji.