Algebra liniowa i geometria – liczby zespolone

Elżbieta Puźniakowska-Gałuch

e-mail: Elzbieta.Puzniakowska-Galuch@pja.edu.pl

Literatura:

- Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas: Algebra i geometria analityczna: Definicje, twierdzenia, wzory., Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2021.
- W. Krysicki, L. Włodarski: Analiza matematyczna w zadaniach: część 1, PWN, Warszawa 2019 (lub nowsze wydania).

Zasady zaliczenia wykładu:

- Egzamin "open book" w sesji. Zadania problemowe. Zaliczenie od 50% punktów możliwych do zdobycia.
- Egzamin poprawkowy "open book". Zadania problemowe. Zaliczenie od 50% punktów możliwych do zdobycia.
- Nie przewiduję dodatkowych terminów!!
- Zwolnienie z egzaminu dotyczy osób, które otrzymają z ćwiczeń ocenę 4.0, 4.5 lub 5.0.

Liczby zespolone - definicja

Liczby zespolone w postaci algebraicznej (kartezjańskiej), to liczby postaci

$$z = a + bi,$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ oraz i (jednostka urojona) spełnia zależność

$$i^2 = -1.$$

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$.

Cześć rzeczywista, część urojona i sprzężenie liczby zespolonej

Przyjmijmy, że $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Onaczamy:

$$Re\, z = a \qquad Im\, z = b$$

$$\bar{z} = a - bi$$

Przykład

$z_1 = 4 + 3i$
$z_2 = 5 - 3i$
$z_3 = 18$
$z_4 = -2i$

Działania na liczbach zespolonych

Niech $z_1 = a_1 + b_1\, i \in \mathbb{C}$ oraz $z_2 = a_2 + b_2\, i \in \mathbb{C}$ będą liczbami zespolonymi w postaci algebraicznej.

1. Równość liczb zespolonych
   $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_1 = a_2$ oraz $b_1 = b_2$.
2. Suma liczb zespolonych
   $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$.
3. Różnica liczb zespolonych
   $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$.
4. Iloczyn liczb zespolonych
   $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$.
5. Iloraz liczb zespolonych
   $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}\, i$.

Działania na liczbach zespolonych - własności

1. Przemienność dodawania.
2. Łączność dodawania.
3. Istnienie elementu neutralnego dodawania.
4. Istnienie elementu przeciwnego.
5. Przemienność mnożenia.
6. Łączność mnożenia.
7. Istnienie elementu neutralnego mnożenia.
8. Istnienie elememtu odwrotnego.
9. Rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Działania na liczbach zespolonych

Przykład

Niech $z_1 = 3 + 4i$ *oraz* $z_2 = -2 + i$*. Oblicz:*

$z_1 + z_2$,

$z_1 - z_2$,

$z_1 \cdot z_2$,

$\frac{z_1}{z_2}$.

Interpretacja geomatryczna liczb zespolonych.

- Liczba zespolona w postaci algebraicznej.
- Część rzeczywista i część urojona liczby zespolonej.
- Sprzężenie liczby zespolonej.
- Dodawanie liczb zespolonych w postaci algebraicznej.
- Mnożenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej.

Własności Re, Im

Niech $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. Wówczas:

- $Re\,(z_1 + z_2) = Re\,z_1 + Re\,z_2$,
- $Im\,(z_1 + z_2) = Im\,z_1 + Im\,z_2$,
- $Re\,(iz) = -Im\,z$,
- $Im\,(iz) = Re\,z$.

Własności Re, Im

Przykład

Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające warunki:

- $z^2 + 4i = 0$
- $Re\, z - 3Im\, z = 2$
- $\frac{z+2}{i-1} = \frac{3z+i}{2+i}$

Własności sprzężenia liczby zespolonej

Niech $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. Wówczas:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$,
- $z + \overline{z} = 2 Re\, z$,
- $z - \overline{z} = 2i\, Im\, z$,
- $\overline{(\overline{z})} = z$,
- $Im(\overline{z}) = -Im\, z$.

Własności sprzężenia liczby zespolonej

Przykład

Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające warunki:

- $2z + (3 - i)\overline{z} = 5 + 4i$
- $z + i = \overline{z + i}$

Moduł liczby zespolonej - definicja i własności

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Modułem liczby zespolonej nazywamy wartość:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Własności liczb zespolonych $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$:

- $|\overline{z}| = |z| = |-z|$,
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$,
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nierówność trójkąta - interpretacja geometryczna),
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$,
- $|Re\, z| \leq |z|$, $|Im\, z| \leq |z|$,
- $|Re\,(z_1 z_2)| \leq |z_1|\,|z_2|$.

Moduł liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z modułem

Niech $z, z_0, z_1 \in \mathbb{C}$:

- $|z - z_0| = r$, $|z + i| = 3$,

Moduł liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z modułem

Niech $z, z_0, z_1 \in \mathbb{C}$:

- $|z - z_0| = r$, $|z + i| = 3$,
- $|z - z_0| \leq r$ $(\geq)$,
- $|z - z_0| < r$ $(>)$, $|2i\,z + 6| \leq 4$,

Moduł liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z modułem

Niech $z, z_0, z_1 \in \mathbb{C}$:

- $|z - z_0| = r$, $|z + i| = 3$,
- $|z - z_0| \leq r$ $(\geq)$,
- $|z - z_0| < r$ $(>)$, $|2i\,z + 6| \leq 4$,
- $r \leq |z - z_0| \leq R$, $2 < |z + 2 - i| \leq 3$,

Moduł liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z modułem

Niech $z, z_0, z_1 \in \mathbb{C}$:

- $|z - z_0| = r$, $|z + i| = 3$,
- $|z - z_0| \leq r$ $(\geq)$,
- $|z - z_0| < r$ $(>)$, $|2i\,z + 6| \leq 4$,
- $r \leq |z - z_0| \leq R$, $2 < |z + 2 - i| \leq 3$,
- $|z - z_1| = |z - z_2|$, $|z + 5| = |3i - z|$,

Moduł liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z modułem

Niech $z, z_0, z_1 \in \mathbb{C}$:

- $|z - z_0| = r$, $|z + i| = 3$,
- $|z - z_0| \leq r$ $(\geq)$,
- $|z - z_0| < r$ $(>)$, $|2i\, z + 6| \leq 4$,
- $r \leq |z - z_0| \leq R$, $2 < |z + 2 - i| \leq 3$,
- $|z - z_1| = |z - z_2|$, $|z + 5| = |3i - z|$,
- $|z - z_1| \leq |z - z_2|$ $(\geq, <, >)$, $\left|\frac{z-3}{z-3i}\right| > 1$.

Argument liczby zespolonej - definicja i własności

Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$. Argumentem liczby zespolonej nazywamy każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{|z|} \\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|} \end{cases} .$$

Liczba φ jest argumnetem głównym liczby z jeżeli $0 \leq \varphi < 2\pi$. Oznaczamy $\varphi = arg\, z$. Jeżeli $z = 0$, przyjmujemy $\varphi \in \mathbb{R}$ oraz $arg\, 0 = 0$.
Interpretacja geometryczna.

Przykład

- $z = i$, $z = -3i$,
- $z = 1$, $z = -3$,
- $z = 1 + i$, $z = 1 - i$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z = -3 + 3i$

Argument liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z argumentem

Twierdzenie

Niech $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. *Wówczas:*

- $\arg \overline{z} = 2\pi - \arg z$,
- $\arg(-z) = \begin{cases} \arg z + \pi, & 0 \leq \arg z < \pi \\ \arg z - \pi, & \pi \leq \arg z < 2\pi \end{cases}$,
- $\arg \frac{1}{z} = 2\pi - \arg z$.

Argument liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z argumentem

Niech $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

- $\arg z = \varphi$, $arg\, z = \frac{\pi}{4}$,

Argument liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z argumentem

Niech $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

- $\arg z = \varphi$, $arg\, z = \frac{\pi}{4}$,
- $\arg(z - z_0) = \varphi$, $\arg(z + i) = \pi$

Argument liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z argumentem

Niech $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

- $\arg z = \varphi$, $arg\, z = \frac{\pi}{4}$,
- $\arg(z - z_0) = \varphi$, $\arg(z + i) = \pi$
- $\alpha < \arg z \leq \beta$, $\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{2}$,

Argument liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z argumentem

Niech $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

- $\arg z = \varphi$, $arg\, z = \frac{\pi}{4}$,
- $\arg(z - z_0) = \varphi$, $\arg(z + i) = \pi$
- $\alpha < \arg z \leq \beta$, $\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{2}$,
- $\alpha < \arg(z - z_0) \leq \beta$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 1) \leq \frac{\pi}{4}$.

Argument liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z argumentem

Niech $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

- $\arg z = \varphi$, $arg\, z = \frac{\pi}{4}$,
- $\arg (z - z_0) = \varphi$, $\arg(z + i) = \pi$
- $\alpha < \arg z \leq \beta$, $\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{2}$,
- $\alpha < \arg (z - z_0) \leq \beta$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg (z + 1) \leq \frac{\pi}{4}$.

Inne przykłady:

- $\arg (-z) = \frac{2\pi}{3}$,

Argument liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z argumentem

Niech $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

- $\arg\, z = \varphi$, $arg\, z = \frac{\pi}{4}$,
- $\arg\,(z - z_0) = \varphi$, $\arg(z + i) = \pi$
- $\alpha < \arg\, z \leq \beta$, $\frac{\pi}{2} \leq \arg\, z < \frac{3\pi}{2}$,
- $\alpha < \arg\,(z - z_0) \leq \beta$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg\,(z + 1) \leq \frac{\pi}{4}$.

Inne przykłady:

- $\arg\,(-z) = \frac{2\pi}{3}$,
- $\arg\,(\overline{z}) = \frac{3\pi}{4}$,

Argument liczby zespolonej - interpretacja geometryczna równań i nierówności z argumentem

Niech $z, z_0 \in \mathbb{C}$:

- $\arg z = \varphi$, $arg\, z = \frac{\pi}{4}$,
- $\arg(z - z_0) = \varphi$, $\arg(z + i) = \pi$
- $\alpha < \arg z \leq \beta$, $\frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{2}$,
- $\alpha < \arg(z - z_0) \leq \beta$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 1) \leq \frac{\pi}{4}$.

Inne przykłady:

- $\arg(-z) = \frac{2\pi}{3}$,
- $\arg(\overline{z}) = \frac{3\pi}{4}$,
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5\pi}{6}$,

Podobnie postępujemy w przypadku nierówności (dom).

Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej

Niech $z \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\, z$. Każdą liczbę zespoloną można zapisać w postaci

$$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Przykład

$z = -1$

$z = 1 + i$

$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej - działania na liczbach

1. Równość liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.
2. Mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.
3. Dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.

Przykład

$(1+i)(\sqrt{3}+i)$, $\dfrac{3i}{1+i}$

Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej - argumenty

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Wóczas:

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \{0, -1\}$,
2. $\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \{0, 1\}$, $z_2 \neq 0$.

Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej - argumenty

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Wóczas:

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \{0, -1\}$,
2. $\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \{0, 1\}$, $z_2 \neq 0$.

Przykład

Rozwiązać równanie: $z^2 = (\bar{z})^2$.

Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej - argumenty

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Wóczas:

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \{0, -1\}$,
2. $\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
3. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \{0, 1\}$, $z_2 \neq 0$.

Przykład

Rozwiązać równanie: $z^2 = (\bar{z})^2$.

Przykład

Rozwiązać nierówność: $\frac{\pi}{4} \leq \arg \frac{i}{z} \leq \frac{\pi}{2}$.

Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej - potęgowanie

Twierdzenie (Wzór de Moivre'a)

Niech $z \in \mathbb{C}$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi = \arg z$. *Wóczas:*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej - potęgowanie

Twierdzenie (Wzór de Moivre'a)

Niech $z \in \mathbb{C}$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi = \arg z$. *Wówczas:*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Przykład

$(\sqrt{3} - i)^{60}$

Liczby zespolone w postaci trygonometrycznej - potęgowanie

Twierdzenie (Wzór de Moivre'a)

Niech $z \in \mathbb{C}$ *oraz* $n \in \mathbb{N}$, $\varphi = \arg z$. *Wóczas:*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Przykład

$(\sqrt{3} - i)^{60}$

Przykład

Wyrazić funkcję $\cos 3\varphi$ *kąta* φ *przez* $\cos \varphi$ *i* $\sin \varphi$.

Liczby zespolone w postaci wykładniczej - definicja

Definicja

Niech $\varphi \in \mathbb{R}$. Oznaczamy

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Każdą liczbę zespoloną można zapisać w postci wykładniczej $z = |z|e^{i\varphi}$.

Niech $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Własności symbolu:

1. $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$,
2. $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$,
3. $(e^{i\varphi})^k = e^{ik\varphi}$,
4. $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$,
5. $e^{i\varphi} \neq 0$,
6. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\varphi_1 = \varphi_2 + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$,
7. $|e^{i\varphi}| = 1$, $arg(e^{i\varphi}) = \varphi + 2l\pi$ dla pewnego $l \in \mathbb{Z}$.

Liczby zespolone w postaci wykładniczej - wzory Eulera

Twierdzenie (Wozry Eulera)

Niech $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Przykład

Za pomocą wzorów Eulera wyrazić funkcję $\sin^2 x$ w zależności od sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x.

Liczby zespolone w postaci wykładniczej - wzory Eulera

Twierdzenie (Wozry Eulera)

Niech $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Przykład

Za pomocą wzorów Eulera wyrazić funkcję $\sin^2 x$ w zależności od sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x.

Przykład

Za pomocą wzorów Eulera przedstawić $\sin\alpha\cos\beta$ za pomocą sum sinusów i cosinusów.

Liczby zespolone w postaci wykładniczej - własności

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg z$, $\varphi_1 = \arg z_1$, $\varphi_2 = \arg z_2 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Własności:

1. $\overline{z} = |z|e^{-i\varphi}$,
2. $-z = |z|e^{-i(\varphi+\pi)}$,
3. $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$,
4. $z^k = |z|^k e^{ik\varphi}$,
5. $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$,
6. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$, $z_2 \neq 0$.

Przykład

Rozwiązać $z^2 = \overline{z}$ oraz $z^3 = (2+2i)^6$ korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej.

Pierwiastki liczb zespolonych - definicja

Definicja

Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z określamy kazdą liczbę zespoloną w, spełniającą

$$w^n = z$$

Oznaczamy $\sqrt[n]{z}$ (nie używamy do obliczeń).

Przykład

Z definicji obliczyć $\sqrt{-7 + 24i}$.

Pierwiastki liczb zespolonych - wzory

Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Liczba z ma dokładnie n pierwiastków zespolonych stopnia $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{z} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$, gdzie

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Pierwiastki liczb zespolonych - wzory

Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Liczba z ma dokładnie n pierwiastków zespolonych stopnia $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{z} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$, gdzie

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Prawdziwa jest zależność:

$$\omega_{k+1} = \omega_k\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

Pierwiastki liczb zespolonych - wzory

Niech $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Liczba z ma dokładnie n pierwiastków zespolonych stopnia $n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{z} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$, gdzie

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Prawdziwa jest zależność:

$$\omega_{k+1} = \omega_k\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

Interpretacja geometryczna.

Pierwiastki liczb zespolonych - przykłady

Przykład

Obliczyć i narysować $\sqrt[3]{8i}$, $\sqrt[8]{1}$.

Pierwiastki liczb zespolonych - przykłady

Przykład

Obliczyć i narysować $\sqrt[3]{8i}$, $\sqrt[8]{1}$.

Przykład

Rozwiązać równanie $z^2 + 3z + 3 - i = 0$.

Przykład

Rozwiązać równanie $z^3 = (1 - i)^3$.

Pierwiastki liczb zespolonych - przykłady

Przykład

Obliczyć i narysować $\sqrt[3]{8i}$, $\sqrt[8]{1}$.

Przykład

Rozwiązać równanie $z^2 + 3z + 3 - i = 0$.

Przykład

Rozwiązać równanie $z^3 = (1 - i)^3$.