

# Introducción a las EDP para fluidos

Rafa Rodríguez Galván

May 15, 2020

# Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)

**Tipos de EDP** (lineales y de orden  $\leq 2$ ):

- ▶ Ecuaciones **Elípticas**

Ejemplo canónico: *ecuación de Poisson*:

$$\Delta u = f$$

- ▶ Ecuaciones **Parabólicas**

Ejemplo canónico: *ecuación del calor*.

$$u_t - \Delta u = f$$

- ▶ Ecuaciones **Hiperbólicas**

Ejemplo canónico: *ecuación de transporte (o convección)*:

$$u_t + v \nabla u = f, \quad \text{donde } v \text{ es un dato (vector que transporta a } u)$$

**Métodos numéricos para resolución aproximada de EDP:**

- ▶ **Método de las Diferencias Finitas (MDF)** Usado para ecuaciones Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas
- ▶ **Método de los Volúmenes Finitos (MVF)** Usado para ecuaciones Hiperbólicas
- ▶ **Método de los Elementos Finitos (MEF)** Usado para ecuaciones Elípticas y Parabólicas

# Ecuaciones de Navier-Stokes

- Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 3$ .
- *Incógnitas:*
  - $u = (u, v, w)$ : campo de velocidades.  $u, v$  y  $w$  son funciones  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$
  - $p$ : presión,  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- *Datos:*
  - $\nu > 0$ : coeficiente de viscosidad (cintemática)
  - $f = (f_1, f_2, f_3)$  fuerza externa que actúa sobre el fluido (por ejemplo, gravedad)
- *Ecuaciones de Navier-Stokes:*

$$u_t + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \partial_x p = f_1 \text{ en } \Omega \quad (1)$$

$$v_t + u \cdot \nabla v - \nu \Delta v + \partial_y p = f_2 \text{ en } \Omega \quad (2)$$

$$w_t + u \cdot \nabla w - \nu \Delta w + \partial_z p = f_3 \text{ en } \Omega \quad (3)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (4)$$

Los términos más "delicados" (de convección o transporte no lineal)

$$u \nabla u = (u, v, w) \cdot (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)^T \quad (5)$$

$$= u \partial_x u + v \partial_y u + w \partial_z u \quad (6)$$

$$u \nabla v = u \partial_x v + v \partial_y v + w \partial_z v \quad (7)$$

$$u \nabla w = u \partial_x w + v \partial_y w + w \partial_z w \quad (8)$$

## Flujos potenciales (irrotacionales) e incompresibles

- Suponemos que existe una función potencial,  $\Phi$ , tal que el flujo se puede obtener como el gradiente de este potencial, es decir

$$u = \Psi_x, \quad v = \Psi_y$$

.

- Entonces, el flujo es **irrotacional**:

$$\text{rot}(u, v, w) = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + (v_x - u_y) \cdot \vec{k} = 0,$$

pues

$$v_x - u_y = (\Psi_y)_x - (\Psi_x)_y = \Psi_{yx} - \Psi_{xy} = \Psi_{xy} - \Psi_{xy} = 0.$$

- Si además el potencial es solución de un problema de Laplace, del tipo

$$-\Delta \Psi = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{9}$$

$$+ \text{ cond. de contorno}, \tag{10}$$

entonces el flujo es **incompresible**:

$$\nabla \cdot (u, v) = u_x + v_y = \Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0.$$

- Así, para determinar un flujo irrotacional e incompresible en cualquier dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , basta proceder como sigue:
  1. Resolver el problema (9)–(10), por ejemplo usando el método de los elementos finitos
  2. Tomar el flujo  $u = \Psi_x$ ,  $v = \Psi_y$ .

## Formulación variacional de las ecuaciones de Stokes

# Ecuaciones de Stokes estacionarias

**Problema de Stokes de estacionario** (con condiciones de contorno **Dirichlet**):

- Supongamos dado un dominio (un conjunto abierto con frontera regular)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .
- Consideramos los datos:

$$\nu > 0 \text{ (coeficiente de viscosidad),} \quad (11)$$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (fuerza externa)} \quad (12)$$

- Planteamos: hallar  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$ ,  $w = w(x)$   $p = p(x)$ , todas ellas funciones definidas en un conjunto abierto  $\Omega$  y con valores en  $\mathbb{R}$ , tales que:

$$-\nu \Delta u + \partial_x p = f_1 \quad (13)$$

$$-\nu \Delta v + \partial_y p = f_2 \quad (14)$$

$$-\nu \Delta w + \partial_z p = f_3 \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (16)$$

junto a las condiciones de contorno (para los datos frontera  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ )

$$u(x, t) = g_1(x), \quad v(x, t) = g_2(x), \quad w(x, t) = g_3(x), \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (17)$$

# Ecuaciones de Stokes Estacionarias: Formulación variacional (I)

- ▶ Por simplicidad, consideramos condiciones Dirichlet homogéneas en toda la frontera de  $\Omega$ .
- ▶ Definimos los espacio  $V = H_0^1(\Omega)$  y  $Q = L_0^2(\Omega)$ . Multiplicamos, respectivamente, a las tres ecuaciones de momentos en el problema de Stokes por funciones test  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ . Multiplicamos la ecuación de divergencia por otra función test  $\bar{q} \in Q$ .
- ▶ Integramos por partes cada una de estas ecuaciones, teniendo en cuenta que los términos frontera son cero y, por tanto, desaparecen. Así obtenemos:

$$\int_{\Omega} \nu \nabla u \nabla \bar{u} - \int_{\Omega} p \partial_x \bar{u} = \int_{\Omega} f_1 \bar{u}, \quad \forall \bar{u} \in V,$$

$$\int_{\Omega} \nu \nabla v \nabla \bar{v} - \int_{\Omega} p \partial_y \bar{v} = \int_{\Omega} f_2 \bar{v}, \quad \forall \bar{v} \in V,$$

$$\int_{\Omega} \nu \nabla w \nabla \bar{w} - \int_{\Omega} p \partial_z \bar{w} = \int_{\Omega} f_3 \bar{w}, \quad \forall \bar{w} \in V,$$

$$\int_{\Omega} \bar{p} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \forall \bar{p} \in Q.$$

## Ecuaciones de Stokes Estacionarias: Formulación variacional (II)

- Sumamos las ecuaciones anteriores y planteamos el problema: Hallar  $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$  y  $p \in L_0^2(\Omega)$  tales que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nu \left( \nabla u \nabla \bar{u} + \nabla v \nabla \bar{v} + \nabla w \nabla \bar{w} \right) \\ & - \int_{\Omega} (\partial_x \bar{u} + \partial_y \bar{v} + \partial_z \bar{w}) p \\ & + \int_{\Omega} (\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w) \bar{p} \\ & = \int_{\Omega} (f_1 \bar{u} + f_2 \bar{v} + f_3 \bar{w}) \end{aligned}$$

$$\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V, \forall \bar{p} \in Q.$$



## Formulación variacional de sistemas evolutivos

# Ecuación del calor

Fijamos un dominio espacial  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y un **intervalo de tiempo**  $[0, T]$ .

Planteamos: hallar  $u$  solución de

$$\partial_t u - \Delta u = f, \quad (x, t) \text{ en } \Omega \times (0, T), \quad (18)$$

$$u(x, t) = g(x, t) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (\text{condición de contorno}), \quad (19)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, (\text{condición inicial}). \quad (20)$$

donde  $f$ ,  $u_0$  y  $g$  son funciones conocidas (datos).

## Discretización en tiempo

Consideramos la siguiente partición del **intervalo de tiempo**  $[0, T]$ :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} < \cdots < t_M = T.$$

- ▶ Suponemos que  $t_{m+1} - t_m = \Delta t$  (constante).
- ▶ Intentaremos hallar ciertos valores  $u^m \approx u(t_m)$ , para  $m = 0, 1, \dots, M$ .

Calculamos los valores  $u^m$  de la siguiente forma:

- ▶ Inicialización: para  $m = 0$ :  $u^0 = u_0$  ( $u_0$  es el dato inicial).
- ▶ Iteración de tiempo  $m$ : conocida la solución en la etapa  $m - 1$ , hallamos  $u^m$  como solución de:

$$\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} - \Delta u^m = f^m \quad \text{en } \Omega \tag{21}$$

$$u^m = g^m \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (\text{condición de contorno}), \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

donde  $f^m(x)$  y  $g^m(x)$  denotan respectivamente a  $f(x, t^m)$  y  $g(x, t^m)$ .

- ▶ El problema anterior es estacionario (el tiempo  $t_m$  está fijo) y lo podemos resolver mediante el MEF.
- ▶ A este tipo de discretizaciones en tiempo se les llama método de **Euler implícito**.

## Ecuaciones de Stokes de evolución

**Problema de Stokes de evolución** (con condiciones de contorno **Dirichlet**):

- Supongamos dado un dominio (un conjunto abierto con frontera regular)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  y un intervalo temporal  $[0, T]$ , siendo  $T > 0$  el tiempo final de observación.
- Consideramos los datos:

$$\nu > 0 \text{ (coeficiente de viscosidad),} \quad (24)$$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (fuerza externa)} \quad (25)$$

- Planteamos: hallar  $u = u(x, t)$ ,  $v = v(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$ , todas ellas funciones definidas en un conjunto abierto  $\Omega$  y con valores en  $\mathbb{R}$ , tales que:

$$\partial_t u - \nu \Delta u + \partial_x p = f_1 \quad (26)$$

$$\partial_t v - \nu \Delta v + \partial_y p = f_2 \quad (27)$$

$$\partial_t w - \nu \Delta w + \partial_z p = f_3 \quad (28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (29)$$

junto a las condiciones de contorno (para los datos frontera  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ )

$$u(x, t) = g_1(x, t), \quad v(x, t) = g_2(x, t), \quad w(x, t) = g_3(x, t), \quad (30)$$

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t \in (0, T) \quad (31)$$

y las condiciones iniciales (para los datos iniciales  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ )

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x),$$

## Discretización del problema de Stokes evolutivo

- Planteamos: hallar  $u^m \approx u(x, t_m)$ ,  $v^m \approx v(x, t_m)$ ,  $w^m \approx w(x, t_m)$ ,  $p^m \approx p(x, t_m)$ , todas ellas funciones definidas en un conjunto abierto  $\Omega$ , tales que:

$$\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} - \nu \Delta u^m + \partial_x p^m = f_1^m \quad (32)$$

$$\frac{v^m - v^{m-1}}{\Delta t} - \nu \Delta v^m + \partial_y p^m = f_2^m \quad (33)$$

$$\frac{w^m - w^{m-1}}{\Delta t} - \nu \Delta w^m + \partial_z p^m = f_3^m \quad (34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^m = \partial_x u^m + \partial_y v^m + \partial_z w^m = 0, \quad (35)$$

junto a las condiciones de contorno (para los datos frontera  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ )

$$u^m = g_1^m \quad v^m(x, t) = g_2^m \quad w^m(x, t) = g_3^m \quad (36)$$

$$\forall x \in \partial\Omega \quad (37)$$

## Ecuaciones de Stokes Evolutivas: Formulación variacional (II)

En la etapa de tiempo  $m$  (conocidas  $u^{m-1}$ ,  $v^{m-1}$ ,  $w^{m-1}$ ), hallar  $u^m$ ,  $v^m$ ,  $w^m \in H_0^1(\Omega)$  y  $p^m \in L_0^2(\Omega)$  tales que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (u^m \bar{u} + v^m \bar{v} + w^m \bar{w}) + \int_{\Omega} \nu (\nabla u^m \nabla \bar{u} + \nabla v^m \nabla \bar{v} + \nabla w^m \nabla \bar{w}) \\ & - \int_{\Omega} (\partial_x \bar{u} + \partial_y \bar{v} + \partial_z \bar{w}) p^m \\ & + \int_{\Omega} (\partial_x u^m + \partial_y v^m + \partial_z w^m) \bar{p} \\ & = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (u^{m-1} \bar{u} + v^{m-1} \bar{v} + w^{m-1} \bar{w}) + \int_{\Omega} (f_1^m \bar{u} + f_2^m \bar{v} + f_3^m \bar{w}) \end{aligned}$$

$\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V, \forall \bar{p} \in Q$ .