Introducción a las EDP para fluidos

Rafa Rodríguez Galván

May 15, 2020

Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP)

Tipos de EDP (lineales y de orden ≤ 2):

- Ecuaciones Elípticas
  Ejemplo canónico: *ecuación de Possion*:

$$\Delta u = f$$

- Ecuaciones Parabólicas
  Ejemplo canónico: *ecuación del calor*:

$$u_t - \Delta u = f$$

- Ecuaciones Hiperbólicas
  Ejemplo canónico: *ecuación de transporte (o convección)*:

$$u_t + \mathrm{v}\nabla u = f, \qquad \text{donde v es un dato (vector que transporta a } u\text{)}$$

Métodos numéricos para resolución aproximada de EDP:

- **Método de las Diferencias Finitas** (MDF) Usado para ecuaciones Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas
- **Método de los Volúmenes Finitos** (MVF) Usado para ecuaciones Hiperbólicas
- **Método de los Elementos Finitos** (MEF) Usado para ecuaciones Elípticas y Parabólicas

Ecuaciones de Navier-Stokes

- Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^d$, $d = 3$.
- *Incógnitas*:
  - $\mathrm{u} = (u, v, w)$: campo de velocidades. u, v y w son finciones $\Omega \to \mathbb{R}$
  - p: presión, $p : \Omega \to \mathbb{R}$
- *Datos*:
  - $\nu > 0$: coeficiente de viscosidad (cintemática)
  - $\mathrm{f} = (f_1, f_2, f_3)$ fuerza externa que actúa sobre el fluido (por ejemplo, gravedad)
- *Ecuaciones de Navier-Stokes*:

$$u_t + \mathrm{u} \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \partial_x p = f_1 \text{ en } \Omega \tag{1}$$
$$v_t + \mathrm{u} \cdot \nabla v - \nu \Delta v + \partial_y p = f_2 \text{ en } \Omega \tag{2}$$
$$w_t + \mathrm{u} \cdot \nabla w - \nu \Delta w + \partial_z p = f_3 \text{ en } \Omega \tag{3}$$
$$\nabla \cdot \mathrm{u} = 0. \tag{4}$$

Los términos más "delicados" (de convección o transporte no lineal)

$$\mathrm{u}\nabla u = (u, v, w) \cdot (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)^T \tag{5}$$
$$= u\partial_x u + v\partial_y u + w\partial_z u \tag{6}$$
$$\mathrm{u}\nabla v = u\partial_x v + v\partial_y v + w\partial_z v \tag{7}$$
$$\mathrm{u}\nabla w = u\partial_x w + v\partial_y w + w\partial_z w \tag{8}$$

Flujos potenciales (irrotacionales) e incompresibles

- Suponemos que existe una función potencial, Φ, tal que el flujo se puede obtener como el gradiente de este potencial, es decir

$$u = \Psi_x, \;\; v = \Psi_y$$

.

- Entonces, el flujo es irrotacional:

$$rot(u, v, w) = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + (v_x - u_y) \cdot \vec{k} = 0,$$

pues

$$v_x - u_y = (\Psi_y)_x - (\Psi_x)_y = \Psi_{yx} - \Psi_{xy} = \Psi_{xy} - \Psi_{xy} = 0.$$

- Si además el potencial es solución de un problema de Laplace, del tipo

$$-\Delta\Psi = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{9}$$

$$+ \text{ cond. de contorno,} \tag{10}$$

entonces el flujo es incompresible:

$$\nabla \cdot (u, v) = u_x + v_y = \Psi_{xx} + \Psi_{yy} = 0.$$

- Así, para determinar un flujo irrotacional e incompresible en cualquier dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, basta proceder como sigue:
  1. Resolver el problema (9)–(10), por ejemplo usando el método de los elementos finitos
  2. Tomar el flujo $u = \Psi_x$, $v = \Psi_y$.

Formulación variacional de las ecuaciones de Stokes

Ecuaciones de Stokes estacionarias

Problema de Stokes de estacionario (con condiciones de contorno Dirichlet):

- Supongamos dado un dominio (un conjunto abierto con frontera regular) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
- Consideramos los datos:

$$\nu > 0 \text{ (coeficiente de viscosidad)}, \tag{11}$$

$$\mathrm{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3 \text{ (fuerza externa)} \tag{12}$$

- Planteamos: hallar $u = u(\mathrm{x})$, $v = v(\mathrm{x})$, $w = w(\mathrm{x})$ $p = p(\mathrm{x})$, todas ellas funciones definidas en un conjunto abierto Ω y con valores en $\mathbb{R}$, tales que:

$$-\nu\Delta u + \partial_x p = f_1 \tag{13}$$

$$-\nu\Delta v + \partial_y p = f_2 \tag{14}$$

$$-\nu\Delta w + \partial_z p = f_3 \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{u} = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u = 0, \tag{16}$$

junto a las condiciones de contorno (para los datos frontera g_1, g_2 y g_3)

$$u(\mathrm{x}, t) = g_1(\mathrm{x}), \quad v(\mathrm{x}, t) = g_2(\mathrm{x}), \quad w(\mathrm{x}, t) = g_3(\mathrm{x}), \qquad \forall \mathrm{x} \in \partial\Omega. \tag{17}$$

Ecuaciones de Stokes Estacionarias: Formulación variacional (I)

- Por simplicidad, consideramos condiciones Dirichlet homogéneas en toda la frontera de Ω.
- Definimos los espacio $V = H_0^1(\Omega)$ y $Q = L_0^2(\Omega)$. Multiplicamos, respectivamente, a las tres ecuaciones de momentos en el problema de Stokes por funciones test $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$. Multiplicamos la ecuación de divergencia por otra función test $q \in Q$.
- Integramos por partes cada una de estas ecuaciones, teniendo en cuenta que los términos frontera son cero y, por tanto, desaparecen. Así obtenemos:

$$\int_\Omega \nu \nabla u \nabla \overline{u} - \int_\Omega p \partial_x \overline{u} = \int_\Omega f_1 \overline{u}, \quad \forall \overline{u} \in V,$$

$$\int_\Omega \nu \nabla v \nabla \overline{v} - \int_\Omega p \partial_y \overline{v} = \int_\Omega f_2 \overline{v}, \quad \forall \overline{v} \in V,$$

$$\int_\Omega \nu \nabla w \nabla \overline{w} - \int_\Omega p \partial_z \overline{w} = \int_\Omega f_3 \overline{w}, \quad \forall \overline{w} \in V,$$

$$\int_\Omega \overline{p} \nabla \cdot \mathrm{u} = 0, \quad \forall \overline{p} \in Q.$$

Ecuaciones de Stokes Estacionarias: Formulación variacional (II)

- Sumamos las ecuaciones anteriores y planteamos el problema: Hallar $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ y $p \in L_0^2(\Omega)$ tales que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nu \Big(\nabla u \nabla \overline{u} + \nabla v \nabla \overline{v} + \nabla w \nabla \overline{w}\Big) \\ - \int_\Omega (\partial_x \overline{u} + \partial_y \overline{v} + \partial_z \overline{w})\, p \\ + \int_\Omega (\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w)\, \overline{p} \\ = \int_\Omega (f_1 \overline{u} + f_2 \overline{v} + f_3 \overline{w})\end{aligned}$$

$\forall \overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in V$, $\forall \overline{p} \in Q$.

Formulación variacional de sistemas evolutivos

Ecuación del calor

Fijamos un dominio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y un **intervalo de tiempo** $[0, T]$.
Planteamos: hallar u solución de

$$\partial_t u - \Delta u = f, \quad (x,t) \text{ en } \Omega \times (0,T), \tag{18}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \text{(condición de contorno)}, \tag{19}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \text{(condición inicial)}. \tag{20}$$

donde f, u_0 y g son funciones conocidas (datos).

Discretización en tiempo

Consideramos la siguiente partición del **intervalo de tiempo** $[0, T]$:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} < \cdots < t_M = T.$$

- Suponemos que $t_{m+1} - t_m = \Delta t$ (constante).
- Intentaremos hallar ciertos valores $u^m \approx u_(t_m)$, para $m = 0, 1, ..., M$.

Calculamos los valores u^m de la siguiente forma:

- Inicialización: para $m = 0$: $u^0 = u_0$ (u_0 es el dato inicial).
- Iteración de tiempo m: conocida la solución en la etapa $m-1$, hallamos u^m como solución de:

$$\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} - \Delta u^m = f^m \quad \text{en } \Omega \tag{21}$$

$$u^m = g^m \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \text{(condición de contorno)}, \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

  donde $f^m(x)$ y $g^m(x)$ denotan respectivamente a $f(x, t^m)$ y $g(x, t^m)$.
- El problema anterior es estacionario (el tiempo t_m está fijo) y lo podemos resolver mediante el MEF.
- A este tipo de discretizaciones en tiempo se les llama método de **Euler implícito**.

Ecuaciones de Stokes de evolución

Problema de Stokes de evolución (con condiciones de contorno Dirichlet):

- Supongamos dado un dominio (un conjunto abierto con frontera regular) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y un intervalo temporal $[0, T]$, siendo $T > 0$ el tiempo final de observación.
- Consideramos los datos:

$$\nu > 0 \text{ (coeficiente de viscosidad)}, \tag{24}$$

$$\mathrm{f} = (f_1, f_2, f_3) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^3 \text{ (fuerza externa)} \tag{25}$$

- Planteamos: hallar $u = u(\mathrm{x}, t)$, $v = v(\mathrm{x}, t)$, $w = w(\mathrm{x}, t)$ $p = p(\mathrm{x}, t)$, todas ellas funciones definidas en un conjunto abierto Ω y con valores en $\mathbb{R}$, tales que:

$$\partial_t u - \nu \Delta u + \partial_x p = f_1 \tag{26}$$

$$\partial_t v - \nu \Delta v + \partial_y p = f_2 \tag{27}$$

$$\partial_z w - \nu \Delta w + \partial_z p = f_3 \tag{28}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{u} = \partial_x u + \partial_y u + \partial_z u = 0, \tag{29}$$

junto a las condiciones de contorno (para los datos frontera g_1, g_2 y g_3)

$$u(\mathrm{x}, t) = g_1(\mathrm{x}, t), \quad v(\mathrm{x}, t) = g_2(\mathrm{x}, t), \quad w(\mathrm{x}, t) = g_3(\mathrm{x}, t), \tag{30}$$

$$\forall \mathrm{x} \in \partial\Omega, \ \forall t \in (0, T) \tag{31}$$

y las condiciones iniciales (para los datos iniciales u_1, u_2, u_3)

$$u(\mathrm{x}, 0) = u_0(\mathrm{x}), \quad v(\mathrm{x}, 0) = v_0(\mathrm{x}), \quad w(\mathrm{x}, 0) = w_0(\mathrm{x}),$$

Discrtetización del problema de Stokes evolutivo

- Planteamos: hallar $u^m \approx u(\mathrm{x}, t_m)$, $v^m \approx v(\mathrm{x}, t_m)$, $w^m \approx w(\mathrm{x}, t_t m)$, $p^m \approx p(\mathrm{x}, t_m)$, todas ellas funciones definidas en un conjunto abierto Ω, tales que:

$$\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta t} - \nu \Delta u^m + \partial_x p^m = f_1^m \tag{32}$$

$$\frac{v^m - v^{m-1}}{\Delta t} - \nu \Delta v^m + \partial_y p^m = f_2^m \tag{33}$$

$$\frac{w^m - w^{m-1}}{\Delta t} - \nu \Delta w^m + \partial_z p^m = f_3^m \tag{34}$$

$$\nabla \cdot \mathrm{u}^m = \partial_x u^m + \partial_y u^m + \partial_z u^m = 0, \tag{35}$$

junto a las condiciones de contorno (para los datos frontera g_1, g_2 y g_3)

$$u^m = g_1^m \quad v^m(\mathrm{x}, t) = g_2^m \quad w^m(\mathrm{x}, t) = g_3^m \tag{36}$$

$$\forall \mathrm{x} \in \partial\Omega \tag{37}$$

Ecuaciones de Stokes Evolutivas: Formulación variacional (II)

En la etapa de tiempo m (conocidas u^{m-1}, v^{m-1}, w^{m-1}), hallar u^m, v^m, $w^m \in H_0^1(\Omega)$ y $p^m \in L_0^2(\Omega)$ tales que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \left(u^m\overline{u} + v^m\overline{v} + w^m\overline{w}\right) &+ \int_\Omega \nu\Big(\nabla u^m\nabla\overline{u} + \nabla v^m\nabla\overline{v} + \nabla w^m\nabla\overline{w}\Big)\\
&- \int_\Omega \left(\partial_x\overline{u} + \partial_y\overline{v} + \partial_z\overline{w}\right) p^m\\
&+ \int_\Omega \left(\partial_x u^m + \partial_y v^m + \partial_z w^m\right) \overline{p}\\
&= \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \left(u^{m-1}\overline{u} + v^{m-1}\overline{v} + w^{m-1}\overline{w}\right) + \int_\Omega \left(f_1^m\overline{u} + f_2^m\overline{v} + f_3^m\overline{w}\right)
\end{aligned}$$

$\forall\overline{u},\overline{v},\overline{w} \in V$, $\forall\overline{p} \in Q$.