Breve Introducción al Método de los Elementos Finitos para Problemas Elípticos

J. Rafael Rodríguez Galván

29 de abril de 2024

1. Introducción

1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio abierto y acotado, en la práctica $d \in \{1, 2, 3\}$, con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular[1]. En el caso general, dividiremos $\partial\Omega$ en dos partes disjuntas donde impondremos respectivamente condiciones de contorno de tipo Dirichlet y Neumann: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Podría ser $\Gamma_N = \emptyset$, si no se imponen condiciones Neumann (o $\Gamma_D = \emptyset$ si no hay condiciones Dirichlet).

Consideremos el siguiente problema de Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g_D & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N & \text{sobre } \Gamma_N, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ es el operador laplaciano, $\mathbf{n}$ denota al vector unitario normal exterior sobre $\partial\Omega$ y las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g_D : \Gamma_D \to \mathbb{R}$, $g_N : \Gamma_N \to \mathbb{R}$ son datos.

1.2. Más adelante veremos que, simplemente asumiendo que f, g_D y g_N sean funciones de cuadrado integrable, existe una única solución de (1) en un sentido débil. Y, si los datos son funciones continuas en sus dominios, ésta es la solución clásica del problema de Poisson-Dirichlet-Neumann anterior, es decir $u \in C^0(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ y las igualdades en (1) se verifican puntualmente, para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$.

1.3.

El objetivo de este documento es la descripción, de una forma simple pero rigurosa, del **método de los elementos finitos** para aproximar la solución de este problema. A pesar de que este método despliega toda su potencia en la aproximación de problemas bidimensionales[2], comenzaremos estudiando el caso $d = 1$ en la siguiente sección. Más adelante se comprobará cómo los razonamientos son fácilmente generalizables a $d \geq 2$.

La idea de este método consiste en descomponer el dominio como unión de «elementos» más sencillos (por ejemplo, triángulos en el caso 2–dimensional o en subintervalos en el caso 1–dimensional) y aproximar la solución de (1) mediante funciones continuas que, en cada elemento, son polinomios de un grado, k, preestablecido.

[1] Entenderemos que la frontera es regular si es localmente parametrizable por funciones Lipschitzianas, ver por ejemplo [1].

[2] Para una introducción algo más avanzada, yo habría preferidoabordar directamente el caso bidimensional, como algunos autores de la talla de J. Sayas [2].

En el caso 1–dimensional y para $k = 1$, éstas serán simplemente funciones poligonales. Pero, estas funciones, no son derivables en general. Entonces, ¿en qué sentido podemos decir que verifican (1)? ¿Qué entendemos por derivada de una función poligonal? La respuesta está en los espacios de funciones derivables en un sentido débil que definiremos en el siguiente apartado.

2. Algunas Nociones de Análisis Funcional

Para las poder definir precisamente las herramientas matemáticas que son objeto de este documento, es conveniente repasar previamente una serie de conceptos básicos sobre espacios de funciones. Los resultados se enuncian sin demostración. Para ver más detalles, pueden consultarse por ejemplo [3, 4]. En lo que sigue, Ω denotará a un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$, aunque muchos de los conceptos pueden extenderse a dominios no acotados.

Normas y Productos Escalares

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo[3] $\mathbb{R}$, finito o infinito dimensional, cuyos elementos estarán formados por funciones. Por ejemplo, $V = \mathbb{P}_2[x]$, el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2, o $V = C(0,1)$ (funciones continuas en el intervalo $(0,1)$). Las siguientes afirmaciones generalizan los conceptos básicos en espacios vectoriales

2.1. Un ***espacio normado*** es cualquier espacio vectorial V dotado de una ***norma***, es decir de una aplicación $\|\cdot\|_V$: $v \in V \longmapsto \|v\|_V \in \mathbb{R}_+$ tal que: (1) $\|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$, (2) $\|\lambda \cdot v\|_V = |\lambda| \cdot \|v\|_V$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ y (3) $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$ para todos $v, w \in V$.

2.2. Un ***producto escalar*** sobre V es una aplicación bilineal (lineal en sus dos variables),

$$(\cdot,\cdot)_V : (v, w) \in V \times V \longmapsto (v, w)_V \in \mathbb{R}$$

tal que, para todos $v, w \in V$: (1) $(v, w)_V = (w, v)_V$ (2) $(v, v) \geq 0$ y (3) $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

2.3. Si $(\cdot,\cdot)_V$ es un producto escalar sobre V, la siguiente expresión define una norma en V (***norma subordinada*** al producto escalar)

$$\|v\|_V = \big(v, v\big)_V^{1/2}$$

y además se verifica la desigualdad de ***Cauchy-Schwarz***:

$$(v, w)_V \leq \|v\|_V \|w\|_V, \quad \forall u, v \in V. \tag{2}$$

2.4. Se llama ***espacio de Banach*** a todo espacio normado V que es completo, es decir, tal que toda sucesión de Cauchy es convergente (para $\|\cdot\|_V$) y su límite está en V.

2.5. Dados dos espacios normados, V y W, se denota por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las funciones lineales de V en W. Este conjunto es un espacio vectorial y a sus elementos, $A : V \to W$, se les llama ***operadores*** (lineales).

2.6. Se denomina ***espacio de Hilbert*** a todo aquel espacio vectorial V dotado de un producto escalar y tal que V es completo para la norma subordinada (por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach).

[3] Por supuesto, todos estos conceptos se generalizan a otros cuerpos como $\mathbb{Q}$

Espacios de Funciones Lebesgue-Integrables

2.7. Denotamos por $L^1(\Omega)$ al espacio de funciones de Ω en $\mathbb{R}$ que son integrables en el sentido de Lebesgue. Y más en general, dado $p \in [1, +\infty)$, denotamos

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ \|f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty \right\},$$

donde se define la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

2.8. En el caso $p = +\infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \right\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}(f) = \inf\{M \in \mathbb{R}+ \ / \ |f(\mathbf{x})| \le M \text{ c.p.t } \mathbf{x} \in \Omega\}.$$

2.9. En el caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert para el siguiente producto escalar:

$$(f, g) = (f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f \cdot g, \tag{3}$$

cuya norma asociada es

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{1/2}.$$

2.10. Algunas propiedades:

- Si f^2 es integrable Riemmann, entonces $f \in L^2(\Omega)$. En particular, toda función continua y acotada en Ω es integrable y en este sentido $C^(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$.
- El conjunto $L^p(\Omega)$ se generaliza a funciones con valores en $\mathbb{R}^d$, sin más que considerar en (3) el producto escalar en $\mathbb{R}^d$.

Espacios de Sobolev

El resto de esta sección debe verse como una introducción rápida y superficial a algunos resultados de análisis funcional que no son, en absoluto, evidentes. Con el fin de tratar solamente los conceptos que serán necesarios en las próximas secciones, se han evitado algunos de ellos, como la teoría de distribuciones, que habrían sido más generales y dotado de más rigor a los contenidos. Se recomienda profudizar en esta fascinante teoría matemática, por ejemplo a través de los libros de J. Sayas et al [4] o el clásico de Adams et al [3].

2.11. Fórmulas de integración por partes.

2.12. Definimos el ***soporte*** de una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ como el conjunto

$$\operatorname{sop}(\varphi) = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega \ / \ \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}},$$

donde $\overline{A}$ denota a la clausura de un conjunto A cualquiera en $\mathbb{R}$.

2.13. Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio de funciones[4] infinitamente derivables cuyo soporte es un compacto contenido en Ω.

$$\mathcal{D}(\Omega) = \big\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \ / \ \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto y } \text{sop}(\varphi) \subset \Omega\big\}.$$

Obsérvese que toda función de $\mathcal{D}(\Omega)$ es cero «en las cercanías[5] de $\partial\Omega$.

2.14. Sea $u \in L^2(\Omega)$. Decimos que u es ***derivable en sentido débil*** (con respecto a la variable x_i) si existe alguna función $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v\,\varphi \ = -\int_\Omega u\,\partial_{x_i}\varphi \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En este caso, decimos que v es la ***derivada débil*** de u con respecto a x_i y la denotamos del mismo modo que a la derivada convencional: $v = \partial_{x_i} u$ o $v = u_{x_i}$ o $v = \partial u/\partial x_i$ o $v = D_i u$.

Operadores usuales como el vector ***gradiente*** o el operador ***divergencia*** se generalizan a derivadas débiles. La idea de derivada débil se generaliza al concepto más elebante de de distribuciones [3].

2.15. **Propiedades** de la derivada débil.[6]

1. La derivada débil es única salvo conjuntos de medida nula. Así, si existe la derivada débil de $u \in L^2(\Omega)$ con respecto x_i, ésta es la única función $u_{x_i} \in L^2(\Omega)$tal que:

$$\int_\Omega u_{x_i}\,\varphi \ = -\int_\Omega u\,\varphi_{x_i} \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2. Si una función es derivable en sentido clásico, entonces existe su derivada débil y coincide (c.p.d.) con la clásica. En efecto, si $u \in C^1(\Omega)$, basta aplicar la fórmula de integración por partes para tener que, con cualquier $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\int_\Omega \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}\,\varphi(\mathbf{x})\;d\mathbf{x} = -\int_\Omega u(\mathbf{x})\,\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x}.$$

3. Las reglas clásicas para las derivadas de sumas y productos de funciones también son válidas para la derivada débil

Existen funciones que son derivables en sentido débil pero no en sentido clásico. Por ejemplo, si $u(x) = |x|$ en $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, entonces

$$\partial_x u = u'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 0, \\ \ \ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Nota: se puede demostrar que esta última función no (por ser discontinua y $d = 1$) no es derivable en sentido débil. Por tanto no existe una «segunda derivada débil» de $u(x) = |x|$.

2.16. Definimos el ***espacio de Sobolev*** $H^1(\Omega)$ como el conjunto de las funciones que tienen todas sus derivadas débiles en $L^2(\Omega)$, esto es

$$H^1(\Omega) = \big\{v \in L^2(\Omega) \ / \ \nabla v \in [L^2(\Omega)]^d\big\}.$$

[4]Como ejercicio, se puede comprobar que la función $g(x) = \exp(1/(x^2-1))$ si $|x| \le 1$, $g(x) = 0$ si $|x| > 1$, es de $C^\infty(\mathbb{R})$ y $\text{sop}(g) = [-1,1]$. Por tanto $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ para todo $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ tal que $[-1,1] \subset (a,b)$. Pueden consultarse más ejemplos de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$, por ejemplo, en [3, 4].

[5]Para cualquier punto $\mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$, existe una bola $B_{\mathbf{x}_0}$ tal que $\varphi \equiv 0$ sobre $B_{\mathbf{x}_0} \cap \Omega$.

[6]Parea más detalles, demostaciones, etc, ver, por ejemplo, [3].

2.17. $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert (y por tanto un espacio norrmado completo) para el producto escalar

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

2.18. Puesto que las funciones de $C^1(\overline{\Omega})$ y sus derivadas son de $L^2(\Omega)$,

$$C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega).$$

2.19. Consideremos la siguiente función, a la que llamamos ***función traza*** sobre $\partial\Omega$:

$$\gamma : C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\partial\Omega),$$

que asocia a cada función de $u \in C^0(\overline{\Omega})$ su restricción a $\partial\Omega$, $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$. . El siguiente resultado, una de las claves en la teoría de espacios de Sobolev, garantiza que se puede definir también una la restricción a la frontera[7] de funciones de $H^1(\Omega)$. En concreto, se puede demostrar (ver por ejemplo [4] el siguiente teorema: existe una función lineal y continua, a la que seguiremos llamando traza y denotando por γ,

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega),$$

que para funciones continuas coincide con la restricción a $\partial\Omega$, es decir verifica:

$$\gamma(u) = u|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

Abusando del lenguaje, diremos que $u|_{\partial\Omega} = g$ si $\gamma(u) = g$.

2.20. Denotamos por $H^1_0(\Omega)$ al núcleo de γ. Es decir:

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \ / \ \gamma(u) = 0\}.$$

2.21. Se verifica la siguiente propiedad: $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$ y de hecho[8]

$$H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)},$$

clausura respecto a la norma de $H^1(\Omega)$.

2.22. **Desigualdad de Poincaré-Friecrichs**: si Ω es acotado[9], existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_\Omega \le C\|\nabla u\|_\Omega, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

2.23. Consecuencia: la siguiente expresión define una norma en $H^1_0(\Omega)$ que, de hecho, es equivalente en este espacio a la norma de $H^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^1_0} = \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \right)^{1/2}.$$

[7] Obsérvese que la frontera es un conjunto de medida nula, por tanto no tendría sentido el definir la restricción a $\partial\Omega$ de funciones medibles Lebesgue (y por tanto definida c.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$).

Por otra parte, es necesario dotar de sentido preciso al espacio $L^2(\partial\Omega)$, ver por ejemplo [4].

[8] El hecho de que los espacios de Sobolev pueden ser definidos por completitud no es evidente. Este fue el objeto de una curiosa publicación de sólo dos páginas con el intenioso título «$H = W$» [5].

[9] Basta acotado en alguna dirección

3. El Problema de Poisson–Dirichlet Unidimensional

Comenzaremos considerando particular de (1) en el que $d = 1$, siendo $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, y con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas. Es decir, $\Gamma_D = \{a, b\}$ y $\Gamma_N = \emptyset$. Tenemos así el siguiente problema de Poisson-Dirichlet:

$$\begin{cases} -u_{xx} = f & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \end{cases} \tag{4}$$

siendo $u_{xx} = d^2u/dx^2$ y $f \in C^0(\Omega)$. Una solución clásica será una función $u \in C^(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ para las que se verifica (4) de forma puntual, es decir $-u_{xx}(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$ y $u(a) = u(b) = 0$.

4. Formulación Variacional

En este apartado se estudia una formulación alternativa para el problema (4). Veremos que ésta permite establecer condiciones suficientes para la existencia y unicidad de solución, en un sentido débil o más general que el de solución clásica. Estas soluciones débiles serán, de hecho, soluciones clásicas siempre que los datos sean suficientemente regulares.

Como veremos luego, este tipo de formulación débil o variacional es generalizable de forma sencilla a $d > 1$, así como a condiciones de contorno más generales. Y será la base sobre la que se construye el método de los elementos finitos.

4.1. Suponiendo que u es una solución clásica del problema (4) y v es una función de $C^1(\overline{\Omega})$ tal que $v = 0$ sobe Γ_D, basta integrar por partes para obtener:

$$\int_\Omega (-u_{xx})\, v = -\int_a^b u_{xx}(x)v(x)\, dx = \int_a^b u_x(x)v_x(x)\, dx - \big(u(b)v(b) - u(a)v(a)\big).$$

Y usando que $v(a) = v(b) = 0$ y que $-u_{xx}(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$:

$$\int_a^b u_x(x)v_x(x)\, dx = \int_a^b f(x)v(x)\, dx.$$

Es decir, toda solución clásica u de (4) verifica, para toda $v \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $v(a) = v(b) = 0$, una ecuación de la forma:

$$a(u, v) = (f, v), \tag{5}$$

donde denotamos

$$a(u, v) = \int_a^b u_x(x)v_x(x)\, dx, \tag{6}$$

$$(f, v) = \int_a^b f(x)v(x)\, dx. \tag{7}$$

4.2. Para que la última integral esté bien definida, no es necesario que f y u sean funciones de $C^0([a, b])$: es suficiente que f y v sean funciones de $L^2(\Omega)$, el espacio vectorial de funciones de cuadrado integrable. De hecho, la expresión (7) es un producto escalar en $L^2(\Omega)$.

Y para que la integral (6) esté bien definida, no es necesario que u y v sean funciones de $C^1(\Omega)$. Bastaría que tanto u como v tengan derivadas u' y v' en un sentido débil y que $u', v' \in L^2(\Omega)$.

Precisamente, al espacio de funciones de $L^2(\Omega)$ cuya derivada es también de $L^2(\Omega)$ lo denotamos[10] por $H^1(\Omega)$ y así podemos decir que (6) está bien definido para todos $u, v \in H^1(\Omega)$.

Por tanto, si definimos el espacio

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega),\ /\ v(a) = v(b) = 0\},$$

podemos decir que toda solución clásica u de (4) verifica la siguiente propiedad:

$$u \in V, \quad a(u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V. \tag{8}$$

Referencias

[1] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements.* Springer, 2004.

[2] Francisco-Javier Sayas. A gentle introduction to the finite element method. *Lecture notes, University of Delaware*, 2008.

[3] Robert A Adams and John JF Fournier. *Sobolev spaces.* Elsevier, 2003.

[4] Francisco J Sayas, Thomas S Brown, and Matthew E Hassell. *Variational techniques for elliptic partial differential equations: Theoretical tools and advanced applications.* CRC Press, 2019.

[5] NG Meyers and J Serrin. H= w, pyoc. In *Nat. Acad. Sci. USA*, volume 51, pages 1055–1056, 1964.

[10] De nuevo, y aunque sea menos evidente, la expresión (6) es un producto escalar en $H^1(\Omega)$.