Breve Introducción al Método de los Elementos Finitos para Problemas Elípticos

J. Rafael Rodríguez Galván

Versión: 05.13 (2024)

1. Introducción

1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio abierto y acotado, en la práctica $d \in \{1,2,3\}$, con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular[1]. En el caso general, dividiremos $\partial\Omega$ en dos partes disjuntas donde impondremos respectivamente condiciones de contorno de tipo Dirichlet y Neumann: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Podría ser $\Gamma_N = \emptyset$, si no se imponen condiciones Neumann (o $\Gamma_D = \emptyset$ si no hay condiciones Dirichlet).

Consideremos el siguiente problema de Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g_D & \text{sobre } \Gamma_D, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N & \text{sobre } \Gamma_N, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ es el operador laplaciano, $\mathbf{n}$ denota al vector unitario normal exterior sobre $\partial\Omega$ y las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g_D : \Gamma_D \to \mathbb{R}$, $g_N : \Gamma_N \to \mathbb{R}$ son datos.

1.2. Más adelante veremos que, simplemente asumiendo que f, g_D y g_N sean funciones de cuadrado integrable, existe una única solución de (1) en un sentido débil. Y, si los datos son funciones continuas en sus dominios, ésta es la solución clásica del problema de Poisson-Dirichlet-Neumann anterior, es decir $u \in C^0(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ y las igualdades en (1) se verifican puntualmente, para todo $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$.

1.3.

El objetivo de este documento es la descripción, de una forma simple pero rigurosa, del **método de los elementos finitos** para aproximar la solución de este problema. A pesar de que este método despliega toda su potencia en la aproximación de problemas bidimensionales[2], comenzaremos estudiando el caso $d = 1$ en la siguiente sección. Más adelante se comprobará cómo los razonamientos son fácilmente generalizables a $d \geq 2$.

La idea de este método consiste en descomponer el dominio como unión de «elementos» más sencillos (por ejemplo, triángulos en el caso 2–dimensional o en subintervalos en el caso 1–dimensional) y aproximar la solución de (1) mediante funciones continuas que, en cada elemento, son polinomios de un grado, k, preestablecido.

En el caso 1–dimensional y para $k = 1$, éstas serán simplemente funciones poligonales. Pero, estas funciones, no son derivables en general. Entonces, ¿en qué sentido podemos decir que verifican (1)?

[1] Entenderemos que la frontera es regular si es localmente parametrizable por funciones Lipschitzianas, ver por ejemplo [1].

[2] Para una introducción algo más avanzada, yo habría preferidoabordar directamente el caso bidimensional, como algunos autores de la talla de J. Sayas [2].

¿Qué entendemos por derivada de una función poligonal? La respuesta está en los espacios de funciones derivables en un sentido débil que definiremos en el siguiente apartado.

2. Algunas nociones de análisis funcional

Para las poder definir precisamente las herramientas matemáticas que son objeto de este documento, es conveniente repasar previamente una serie de conceptos básicos sobre espacios de funciones. Los resultados se enuncian sin demostración. Para ver más detalles, pueden consultarse por ejemplo [3, 4]. En lo que sigue, Ω denotará a un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$, aunque muchos de los conceptos pueden extenderse a dominios no acotados.

Normas y productos escalares

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo[3] $\mathbb{R}$, finito o infinito dimensional, cuyos elementos estarán formados por funciones. Por ejemplo, $V = \mathbb{P}_2[x]$, el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2, o $V = C(0,1)$ (funciones continuas en el intervalo $(0,1)$). Las siguientes afirmaciones generalizan los conceptos básicos en espacios vectoriales

2.1. Un ***espacio normado*** es cualquier espacio vectorial V dotado de una ***norma***, es decir de una aplicación $\|\cdot\|_V$: $v \in V \longmapsto \|v\|_V \in \mathbb{R}_+$ tal que: (1) $\|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$, (2) $\|\lambda \cdot v\|_V = |\lambda| \cdot \|v\|_V$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ y (3) $\|v + w\|_V \leq \|v\|_V + \|w\|_V$ para todos $v, w \in V$.

2.2. Dos ***normas equivalentes*** en V son todas aquellas $\|\cdot\|_{(1)}$ y $\|\cdot\|_{(2)}$ tales que existen $C_1, C_2 > 0$ para las que

$$\|v\|_{(2)} \leq C_1 \|v\|_{(1)} \quad y \quad \|v\|_{(1)} \leq C_2 \|v\|_{(2)}, \quad \forall v \in V.$$

En espacios finito-dimensionales, todas las normas son equivalentes, pero no en espacios de dimensión infinita.

2.3. Dados dos espacios normados V y W, una aplicación lineal $L : V \to W$, $v \in V \mapsto Lv = L(v) \in W$, es continua si existe $C > 0$ tal que $\|Lv\|_W \leq C\|v\|_V$ para todo $v \in V$.

Se denota por $\mathcal{L}(V, W)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de V en W. Este conjunto es un espacio vectorial y a sus elementos se les llama ***operadores*** (lineales).

2.4. Una ***forma bilineal*** sobre $V \times W$ es una aplicación $a : (v, w) \in V \times W \mapsto a(v, w) \in \mathbb{R}$ que es lineal y continua para cada una de sus dos componentes. Es decir, existe $C > 0$ tal que:

$$a(v, w) \leq C\|v\|_V \, \|w\|_W \quad \forall (v, w) \in V \times W.$$

2.5. Un ***producto escalar*** sobre V es una forma bilineal

$$(\cdot, \cdot)_V : (v, w) \in V \times V \longmapsto (v, w)_V \in \mathbb{R}$$

tal que, para todos $v, w \in V$: (1) $(v, w)_V = (w, v)_V$ (2) $(v, v) \geq 0$ y (3) $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

[3] Por supuesto, todos estos conceptos se generalizan a otros cuerpos como $\mathbb{Q}$

2.6. Si $(\cdot,\cdot)_V$ es un producto escalar sobre V, la siguiente expresión define una norma en V (***norma subordinada*** al producto escalar)

$$\|v\|_V = \big(v,v\big)_V^{1/2}$$

y además se verifica la desigualdad de ***Cauchy-Schwarz***:

$$(v,w)_V \leq \|v\|_V \|w\|_V, \quad \forall u,v \in V. \tag{2}$$

2.7. Se llama ***espacio de Banach*** a todo espacio normado V que es completo, es decir, tal que toda sucesión de Cauchy es convergente (para $\|\cdot\|_V$) y su límite está en V.

2.8. Se denomina ***espacio de Hilbert*** a todo aquel espacio vectorial V dotado de un producto escalar y tal que V es completo para la norma subordinada (por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach).

2.9. Se verifica la siguiente propiedad: todo subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert también un espacio de Hilbert para el mismo producto escalar.

Espacios de funciones Lebesgue-integrables

2.10. Denotamos por $L^1(\Omega)$ al espacio de funciones de Ω en $\mathbb{R}$ que son integrables en el sentido de Lebesgue[4] . Y más en general, dado $p \in [1,+\infty)$, denotamos

$$L^p(\Omega) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ \|f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty \big\},$$

donde se define la norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

2.11. En el caso $p = +\infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \big\},$$

donde

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}(f) = \inf\{ M \in \mathbb{R}+ \ / \ |f(\mathbf{x})| \leq M \text{ c.p.t } \mathbf{x} \in \Omega \}.$$

2.12. En el caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert para el siguiente producto escalar:

$$(f,g) = (f,g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f \cdot g, \tag{3}$$

cuya norma asociada es

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^2 \right)^{1/2}.$$

[4] Se prefiere usar integrales de Lebesgue por motivos de completitud, es decir, porque bajo hipóteis razonables el límite de funciones integrables es integrable. Esto no ocurre con la integral de Riemann. Véase [5], sección 1.1, para un ejemplo motivador.

2.13. Algunas propiedades:

- Si f^2 es integrable Riemmann, entonces $f \in L^2(\Omega)$. En particular, toda función continua y acotada en Ω es integrable y en este sentido $C^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$.
- El conjunto $L^p(\Omega)$ se generaliza a funciones con valores en $\mathbb{R}^d$, sin más que considerar en (3) el producto escalar en $\mathbb{R}^d$.

Derivadas débiles y espacios de Sobolev

El resto de esta sección debe verse como una introducción rápida y superficial a algunos resultados de análisis funcional que no son, en absoluto, evidentes. Con el fin de tratar solamente los conceptos que serán necesarios en las próximas secciones, se han evitado algunos de ellos, como la teoría de distribuciones, que habrían sido más generales y dotado de más rigor a los contenidos. Se recomienda profundizar en esta fascinante teoría matemática, por ejemplo a través de los libros de J. Sayas et al [4] o el clásico de Adams et al [3].

2.14. Fórmulas de integración por partes. La siguiente identidad se puede demostrar en un sentido clásico y en una amplia familia de dominios Ω acotados, en particular en dominios con frontera poligonal a trozos como los que utilizaremos al aplicar el método de los elementos finitos. Puede accederse a una demostración, por ejemplo, en [4]. Si $f \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_\Omega \partial_{x_i} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x})\, n_i\, dS, \tag{4}$$

donde para todo $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}) = (n_1, \ldots, n_d)$ es el vector normal unitario orientado al exterior de Ω. Si $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$, aplicando (4) al producto $f \cdot g$ se tiene la fórmula de integración por partes

$$\int_\Omega \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega f(\mathbf{x}) \cdot \partial_{x_i} g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})\, n_i\, dS. \tag{5}$$

Aplicando la misma idea para el producto $\partial_{x_i} f \cdot g$, y sumando el resultado para $i = 1, \ldots d$, se tiene la siguiente fórmula de integración por partes, conocida como **fórmula de Green**:

$$\int_\Omega \Delta f(\mathbf{x})\, g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla f(\mathbf{x})\, \nabla g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})\, g(\mathbf{x})\, dS. \tag{6}$$

2.15. La identidad(5) implica que la derivada de toda $f \in C^1(\overline{\Omega})$ verifica la siguiente propiedad:

$$\int_\Omega \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega f(\mathbf{x}) \cdot \partial_{x_i} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \ / \ \varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \tag{7}$$

Pero esta identidad tiene sentido sin más que asumir que las funciones f y g, así como sus derivadas, sean funciones de $L^2(\Omega)$. Utilizaremos este hecho para generalizar el concepto de derivada.

2.16. Definimos el ***soporte*** de una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ como el conjunto

$$\operatorname{sop}(\varphi) = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega \ / \ \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}},$$

donde $\overline{A}$ denota a la clausura de un conjunto A cualquiera en $\mathbb{R}$.

2.17. Denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ al espacio de funciones[5] infinitamente derivables cuyo soporte es un compacto contenido en Ω.

$$\mathcal{D}(\Omega) = \big\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \ / \ \text{sop}(\varphi) \text{ es compacto y } \text{sop}(\varphi) \subset \Omega\big\}.$$

No es difícl demostrar que toda función de $\mathcal{D}(\Omega)$ es cero «en las cercanías[6] de $\partial\Omega$. Ahora estamos en disposición de dar sentido a una fórmula de integración por partes similar a (7) que usaremos para generalizar el concepto de derivada.

2.18. Decimos que una función $u \in L^2(\Omega)$ es ***derivable en sentido débil*** (en $L^2(\Omega)$ y con respecto a la variable x_i) si existe alguna función $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v\,\varphi \ = -\int_\Omega u\,\partial_{x_i}\varphi \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En este caso, decimos que v es la ***derivada débil*** de u con respecto a x_i y la denotamos del mismo modo que a la derivada convencional: $v = \partial_{x_i}u$ o $v = u_{x_i}$ o $v = \partial u/\partial x_i$ o $v = D_i u$.

Operadores usuales como el vector ***gradiente*** o el operador ***divergencia*** se generalizan a derivadas débiles. La idea de derivada débil se generaliza al concepto más elegante de de distribuciones [3].

2.19. Propiedades de la derivada débil.[7]

1. La derivada débil es única salvo conjuntos de medida nula. Esto es, si existe la derivada débil de $u \in L^2(\Omega)$ con respecto x_i, ésta es la única función $u_{x_i} \in L^2(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega u_{x_i}\,\varphi \ = -\int_\Omega u\,\varphi_{x_i} \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2. Si una función es derivable en sentido clásico, entonces existe su derivada débil y coincide (c.p.d.) con la clásica. Esta es una consecuencia directa de (7).

3. Las reglas clásicas para las derivadas de sumas y productos de funciones también son válidas para la derivada débil.

2.20. Existen funciones que son derivables en sentido débil pero no en sentido clásico. Por ejemplo, la función $u(x) = |x|$ en $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ es derivable en sentido débil, siendo[8]

$$\partial_x u = u'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \le 0, \\ \ \ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Nota: se puede demostrar que esta última función, $u'(x)$, no es derivable en sentido débil[9]. Por tanto no existe una «derivada segunda en sentido débil» de $u(x) = |x|$.

[5]Como ejercicio, se puede comprobar que la función $g(x) = \exp(1/(x^2-1))$ si $|x| \le 1$, $g(x) = 0$ si $|x| > 1$, es de $C^\infty(\mathbb{R})$ y $\text{sop}(g) = [-1, 1]$. Por tanto $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{D}(\Omega)$ para todo $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $[-1, 1] \subset (a, b)$. Pueden consultarse más ejemplos de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$, por ejemplo, en [3, 4].

[6]Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces existe un abierto Ω_0 tal que $\text{sop}(\varphi) \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ y por tanto $\varphi|_{\partial\Omega_0} = 0$.

[7]Parea más detalles, demostaciones, etc, ver, por ejemplo, [3].

[8]Se recomienda comprobarlo como ejercicio.

[9]En el caso $d = 1$, todas las funciones con derivada débil en $L^2(\Omega)$ son continuas.

2.21. Definimos el ***espacio de Sobolev*** $H^1(\Omega)$ como el conjunto de las funciones que tienen todas sus derivadas débiles en $L^2(\Omega)$, esto es

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \ / \ \nabla v \in [L^2(\Omega)]^d\}.$$

2.22. $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert (y por tanto un espacio norrmado completo) para el producto escalar

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

cuya norma subordinada es

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{L^2(\Omega)} v^2 + \int_{L^2(\Omega)} |\nabla v|^2\right)^{1/2}.$$

2.23. Puesto que las funciones de $C^1(\overline{\Omega})$ y sus derivadas son de $L^2(\Omega)$, se tiene que

$$C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega).$$

2.24. Consideremos la siguiente función, a la que llamamos ***función traza*** sobre[10] $\partial\Omega$:

$$\gamma : C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\partial\Omega),$$

que asocia a cada función de $u \in C^0(\overline{\Omega})$ su restricción a $\partial\Omega$, $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$.

El siguiente resultado, una de las claves en la teoría de espacios de Sobolev, garantiza que se puede definir también una la restricción a la frontera[11] de funciones de $H^1(\Omega)$.

2.25. Teorema.[12] Existe una función lineal y continua, a la que seguiremos llamando traza y denotando por γ,

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega),$$

que para funciones continuas coincide con la restricción a $\partial\Omega$, es decir verifica:

$$\gamma(u) = u|_{\partial\Omega} \quad \forall u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

Abusando del lenguaje, diremos que $u|_{\partial\Omega} = g$ si $\gamma(u) = g$.

2.26. En el caso de condiciones de contorno Dirichlet (homogéneas y no homogéneas), serán muy importantes las funciones que *son cero en la frontera*. Denotamos por $H^1_0(\Omega)$ al núcleo de γ. Es decir:

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \ / \ \gamma(u) = 0\}.$$

2.27. Teorema.[13] Se verifica la siguiente propiedad: $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$ y de hecho

$$H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)},$$

clausura respecto a la norma de $H^1(\Omega)$.

[10] El concepto de traza se puede extender a otras regiones de la frontera, $\gamma : C^0(\Omega) \to C^0(\Gamma)$, con $\Gamma \subset \partial\Omega$.

[11] Obsérvese que la frontera es un conjunto de medida nula, por tanto no tendría sentido el definir la restricción a $\partial\Omega$ de funciones medibles Lebesgue (y por tanto definida c.p.t. $\mathbf{x} \in \Omega$).

Por otra parte, es necesario dotar de sentido preciso al espacio $L^2(\partial\Omega)$, ver por ejemplo [4].

[12] Ver por ejemplo [4] para una demostración.

[13] El hecho de que los espacios de Sobolev pueden ser definidos por completitud no es evidente. Este fue el objeto de una curiosa publicación de sólo dos páginas con el intenioso título «$H = W$» [6].

2.28. Teorema (Desigualdad de Poincaré-Friedrichs). Si Ω es acotado[14], existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_\Omega \leq C\|\nabla u\|_\Omega, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

2.29. Consecuencia: la siguiente expresión define una norma en $H_0^1(\Omega)$, que es equivalente a la norma de $H^1(\Omega)$.

$$\|u\|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2\right)^{1/2}.$$

Esta es la norma subordinada al siguiente producto escalar:

$$(u,v)_{H_1^0(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

3. El Problema de Poisson–Dirichlet Unidimensional

Comenzaremos considerando particular de (1) en el que $d = 1$, siendo $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, y con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas. Es decir, $\Gamma_D = \{a, b\}$ y $\Gamma_N = \emptyset$. Tenemos así el siguiente problema de Poisson-Dirichlet:

$$\begin{cases} -u_{xx} = f & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \Gamma_D, \end{cases} \tag{8}$$

siendo $u_{xx} = d^2u/dx^2$ y $f \in C^0(\Omega)$. Una solución clásica será una función $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ para las que se verifica (8) de forma puntual, es decir $-u_{xx}(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$ y $u(a) = u(b) = 0$.

3.1. Formulación Variacional

En este apartado se estudia una formulación alternativa para el problema (8). Veremos que ésta permite establecer condiciones suficientes para la existencia y unicidad de solución en un sentido débil, más general que el de solución clásica. Estas soluciones débiles serán, de hecho, soluciones clásicas siempre que los datos sean suficientemente regulares.

Como veremos luego, este tipo de formulación débil o variacional es generalizable de forma sencilla a dimensión $d > 1$, así como a condiciones de contorno más generales. Y será la base sobre la que se construye el método de los elementos finitos.

3.1. Supongamos que u es una sjlución clásica del problema (8) y que v es una función de $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ tal que $v = 0$ sobe Γ_D. Entonces podemos aplicar la fórmula de Green de integración por partes (6), obteniendo:

$$\int_\Omega (-u_{xx})\, v = -\int_a^b u_{xx}(x) v(x)\, dx = \int_a^b u_x(x) v_x(x)\, dx - \big(u(b)v(b) - u(a)v(a)\big).$$

Usando que $v(a) = v(b) = 0$ y que $-u_{xx}(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$:

$$\int_a^b u_x(x) v_x(x)\, dx = \int_a^b f(x) v(x)\, dx.$$

[14] Basta acotado en alguna dirección

Esta expresión la podemos denotar como

$$a(u, v) = L(v),$$

para

$$a(u, v) = \int_a^b u_x(x) v_x(x)\, dx, \tag{9}$$

$$L(v) = \int_a^b f(x) v(x)\, dx. \tag{10}$$

Así, hemos visto que toda solución clásica u de (8) es en particular solución del siguiente problema sobre el espacio $V^* = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)\ /\ v \in V^*,\ v(a) = v(b) = 0\}$:

$$\text{Hallar } u \in V^* \text{ tal que: } a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V^*. \tag{11}$$

3.2. Sin embargo, a pesar de que el problema (11) es más débil que el original (pues la solución sólo requiere tener derivadas primeras), no podremos garantizar existencia y unicidad de solución, esencialmente debido a que el espacio V^* no es completo para una norma adecuada[15] . De hecho, para espacios espacios de Hilbert (es decir, completos para la norma asociada a su producto escalar) tenemos un resultado muy potente que introduciremos en la siguiente proposición.

3.3. Decimos que una forma bilineal sobre $V \times V$ es ***elíptica*** o ***coercitiva*** si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

3.4. Proposición (Lema de Lax-Milgram)[16] Sea V un espacio de Hilbert y $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coercitiva. Entonces, para toda $L : V \to \mathbb{R}$ lineal y continua existe una única $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Además, esta solución verifica la siguiente estimación de tipo estabilidad[17]:

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V}.$$

3.5. Nos proponemos, pues, escribir una formulación débil del problema (8) que se encuentre en las hipótesis del Lema de Lax-Milgram. Para ello basta observar que las aplicaciones $a(\cdot, \cdot)$ y $F(\cdot)$, definidas en (9) y (10) tengan sentido es suficiente que $u, v \in H_0^1(\Omega)$ y que $f \in L^2(\Omega)$.

3.6. Planteamos, por tanto, el siguiente problema, al que llamamos ***problema variacional*** asociado a (8):

$$\text{Hallar } u \in V = H_0^1(\Omega) \text{ tal que } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{12}$$

con $a(\cdot, \cdot)$ y $F(\cdot)$, definidas en (9) y (10).

---

[15] Intuitivamente, podemos considerar $D(\Omega) \subset V^*$ pero recordemos que $\overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, un espacio más amplio que V^*.

[16] Puede consultarse una demostración en [3, 4].

[17] Cuya demostración es sencilla, se deja como ejercicio

3.7. Proposición. Para todo $f \in L^2(\Omega)$, existe una única solución del problema variacional (12), que verifica la siguiente acotación de estabilidad:

$$\|u\|_{H_0^1} \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{13}$$

donde $\alpha > 0$ y $C > 0$ son, respectivamente, las constantes de coercitividad y de la desigualdad de Poincaré-Friedrichs.

Demostración. Idea:

1. Consideremos el espacio $V = H_0^1(\Omega)$, que es un espacio de Hilbert para el producto escalar $(\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}$, pues es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$.
2. $a(\cdot,\cdot)$ y $L(\cdot)$ son respectivamente, una forma bilineal continua y una alicación lineal continua sobre V. Esto es evidente usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y teniendo en cuenta la norma $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ (que es equivalente a la $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.
3. La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es coercitiva. De hecho, por definición, $a(v,v) = \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ para todo $v \in V$. Podemos tomar la constante de coercitividad $\alpha = 1$.
4. Por tanto podemos aplicar Lema de Lax-Milgram, de donde existe una única solución de (12). Aplicaremos (13) y, consecutivamente: (1) $a(u,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)}$ para todo $v \in V$, (2) la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3) la desigualdad de Poincaré-Friedrichs (con constante $C > 0$):

$$\begin{aligned}\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{0\neq v\in V} \frac{|a(u,v)|}{\|v\|_V} = \frac{1}{\alpha} \sup_{0\neq v\in V} \frac{|(f,v)_{L^2(\Omega)}|}{\|v\|_V} &\leq \frac{1}{\alpha} \sup_{0\neq v\in V} \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_V} \\ &\leq \frac{C}{\alpha} \sup_{0\neq v\in V} \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_V}{\|v\|_V} = \frac{C}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

□

3.8. Proposición. Si los datos son suficiente regulares ($f \in C^0(\Omega)$), entonces la solución débil es una solución clásica del problema (8).

4. El Método de los Elementos Finitos

Para definir el método de los elementos finitos para el problema de Poisson-Dirichlet 1-dimensional (8), partimos de un ***mallado del dominio*** $\Omega = (a,b)$. Esto es, de un conjunto de intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots,n$ (con $n \in \mathbb{N}$) que forman una partición de Ω, es decir $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. A los intervalos I_i los llamamos ***elementos*** o ***celdas***. A los puntos x_i los llamamos ***vértices***. Al conjunto de celdas y vértices lo llamamos un ***mallado*** de Ω y lo denotamos $\mathcal{T}_h(\Omega)$.

Los elementos de la malla pueden tener un tamaño variable, $h_i = x_{i-1} - x_i$. Al valor $h = \max_{i=1\dots n}(x_i - x_{i-1})$ lo llamamos ***talla de la malla***. Por supuesto, si todos los elementos tienen el mismo tamaño se tendrá $h = x_i - x_{i-1}$ para todo i. Como veremos, todas estas definiciones se generalizan fácilmente a mallas de dominios de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, donde los elemento s estarán formados por triángulos, rectángulos, tetraedros etc.

4.1. Aproximamos el espacio $V = H_0^1(\Omega)$ por el subespacio vectorial

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \ / \ v|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_m \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad v(a) = v(b) = 0 \right\},$$

siendo $\mathbb{P}_m$ el espacio de los polinomios con coficientes reales de grado no superior a $m \in \mathbb{N}$.

Sobre este espacio $V_h \subset V$ planteamos el problema:

$$\text{Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{14}$$

Veremos que V_h es un espacio finito-dimensional de $V = H_0^1(\Omega)$ y que el problema anterior equivale a resolver un sistema lineal de ecuaciones. Este razonamiento se puede extender a subespacios finito-dimensionales más generales que el espacio de elementos finitos V_h. En el caso general, es conocido como ***método de Galerkin***.

4.2. Comenzaremos centrándonos en el caso $m = 1$, donde las funciones de V_h son funciones poligonales y es muy fácil dar una base de V_h. En concreto, definamos para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ las funciones

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_i}(x - x_{i-1}) & \text{si } x \in I_i, \\ \dfrac{1}{h_{i+1}}(x_{i+1} - x) & \text{si } x \in I_{i+1}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

que por supuesto están en V_h. Éstas se llaman «funciones sombrero», debido al aspecto de su gráfica.

4.3. Proposición. El conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$ es una base de V_h.

Demostración. Para ver que este conjunto es linealmente idependientes, sea $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale que la función $w = \sum_{i=1}^{n-1} u_i \varphi_i$ es identicamente nula. Como por definición $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ (delta de Kronecker) entonces, para todo i, $w(x_i) = u_i = 0$.

Para ver que es un sistema generador, basta observar de que toda función $v_h \in V_h$ puede escribirse como $v_h = \sum_{i=1}^{m-1} v_h(x_i)\varphi_i$, pues ambas funciones son afines en cada I_i y toman los mismos valores en los extremos del intervalo. $\square$

4.4. Proposición. $V_h \subset H_0^1(\Omega)$

Demostración. Para toda función v_h se puede definir v_h' como la función constenate a trozos cuyo valor en cada intervalo I_i es igual a la pendiente de la función afín $v_h|_{I_i}$. Evidentemente, esta función es de $L_2(\Omega)$ Por otra parte, v_h es una función continua y $v_h|_{\partial\Omega}$=0, por lo tanto[18] es de $H_0^1(\Omega)$. $\square$

4.5. Proposición. El problema de elementos finitos (14) tiene una única solución.

Demostración. V_h es un espacio finito-dimensional de $V = H_0^1(\Omega)$, por tanto un subespacio cerrado. Por tanto, V_h es también un espacio de Hilbert para el producto escalar de $H_0^1(\Omega)$ y su norma asociada.

Puesto que, para esta norma, $a(\cdot, \cdot)$ es bilineal, continua y coercitiva y $L(\cdot)$ es lineal y continua, podemos aplidar el teorema de Lax-Milgram. $\square$

[18] Ver Teorema 2.25

4.6. Proposición. El problema de elementos finitos (14) es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales $AU = B$ donde

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad B_i = F(\phi_i).$$

Demostración. Una solución de (14) $\square$

Estimaciones de error y orden de convergencia

La clave en las estimaciones de error está en comprobar que el error es ortogonal al espacio V_h, en el siguiente sentido:

4.7. Proposición. Sea $u \in V = H_0^1(\Omega)$ la solución del la formulación variacional (12) del problema de Poission con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas. Sea $u_h \in V_h$ la solución del problema de elementos finitos (14). Entonces el error es a–ortogonal a V_h, es decir:

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

4.8. Observación: aunque el resultado anterior se ha enunciado en el caso en que u_h es una aproximación de u por elementos finitos, puede generalizarse al caso más general de métodos de Galerkin, en el que V_h es cualquier subespacio finito-dimensional de un espacio de Hilbert V.

Referencias

[1] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements.* Springer, 2004.

[2] Francisco-Javier Sayas. A gentle introduction to the finite element method. *Lecture notes, University of Delaware*, 2008.

[3] Robert A Adams and John JF Fournier. *Sobolev spaces.* Elsevier, 2003.

[4] Francisco J Sayas, Thomas S Brown, and Matthew E Hassell. *Variational techniques for elliptic partial differential equations: Theoretical tools and advanced applications.* CRC Press, 2019.

[5] S.C. Brenner and L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, third edition edition, 2008.

[6] NG Meyers and J Serrin. H= w, pyoc. In *Nat. Acad. Sci. USA*, volume 51, pages 1055–1056, 1964.