

El Método de los Elementos Finitos

Rafa Rodríguez Galván

22 de marzo de 2018

- 1 Formulación débil de EDP
- 2 Buen planteamiento del problema
- 3 Aproximación mediante el método de Galerkin
- 4 Estimaciones de error para el método de Galerkin
- 5 El método de los elementos finitos
- 6 Implementación en el ordenador

Lo ideal sería tener una idea muy general sobre...

- Qué es un espacio de Hilbert
- Qué es la formulación variacional de una EDP

Formulación variacional de EDP

Formulación variacional

Problema modelo: dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, hallar $u \in V := C^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Multiplicando por $v \in C^2(\Omega)$ e integrando por partes:

$$\int_{\Omega} u v + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in V.$$

Problema variacional: hallar $u \in V := \{u \in C^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$ tal que

$$(P) \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V,$$

$$\text{donde } a(u, v) = \int_{\Omega} u v + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \quad \text{y} \quad F(v) = \int_{\Omega} f v.$$

- Problema **mal planteado** en $V \sim C^2(\Omega)$ o $V \sim C^1(\Omega)$.
- **Idea:** tomar un espacio más amplio (que contiene a $C^1(\Omega)$):

$$V := H_0^1(\Omega).$$

Buen planteamiento de problemas de
contorno

Problema bien planteado en el sentido de Hadamard:

- Existe una única solución
- Depende continuamente de los datos

Teorema Lax-Milgram

Condición suficiente para que el problema (P) esté bien planteado:

- V espacio de Hilbert
- $a(\cdot, \cdot)$ bilineal, continua, coerciva
- $F(\cdot)$ lineal continua (es decir, $F \in V'$)

Método de Galerkin

Problema aproximado

Dado $V_h \subset V$ **finito-dimensional**, hallar $u_h \in V_h$ tal que:

$$(P_h) \quad a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Resultados ([BS08], secciones 2.5, 2.8):

- Teorema: $\exists!$ solución de (P_h)
- Proposición: el error es a -ortogonal a V_h
- Lema de Céa: u_h minimiza el error (en norma de energía, o sea norma en V):

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V,$$

siendo

- C la constante de continuidad y
- α la constante de coercividad.
- Si C “grande” o α “pequeño” \Rightarrow problemas!!

Dado $V_h \subset V$ **finito-dimensional**, hallar $u_h \in V_h$ tal que:

$$(P_h) \quad a(u_h, v) = F(v) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Idea:

- Fijar una base $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ de V_h .
- Entonces, (P_h) se convierte en un sistema lineal de ecuaciones

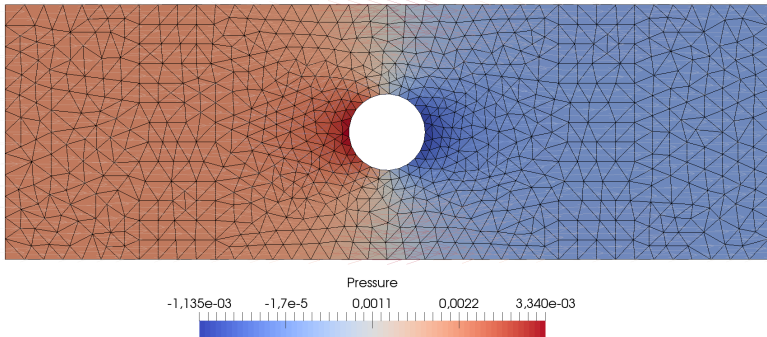
$$A U = b$$

- El vector U contiene las coordenadas de la solución aproximada u_h en la base $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$:

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

- $\exists!$ solución del sistema anterior

El método de los elementos Finitos

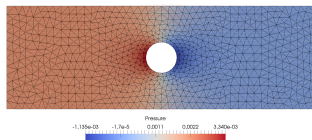


Bibliografía

- Ern-Guermond [EG04], capítulo 1
- Brenner-Scott [BS08], capítulo 3
- G. Allaire [All07], capítulo 6

El método de los elementos Finitos

Idea:



- 1 Definir una «*triangulación*» (un mallado de Ω)

$$\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i=1}^N \quad \text{tal que} \quad \Omega \simeq \cup_{i=1}^n K_i$$

- 2 En cada *elemento*, K , aproximar la solución por un *polinomio* v_h^K

- 3 Definir un *espacio global* V_h finito-dimensional tal que

(usualmente, $V_h \subset C(\overline{\Omega})$)

$$\forall v_h \in V_h, \quad v_h|_K = v_h^K$$

- 4 Aproximar la solución en V_h mediante el método de *Galerkin*

- 5 Lema de Céa + Error en interpolación polinómica

\Rightarrow *Estimaciones de error* para el MEF.

Subsection 1

Mallados o «triangulaciones»

Supondremos:

- $\Omega = \cup_{i=1}^N K_i, \quad \overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset, i \neq j, \quad K_i, K_j \in \mathcal{T}_h,$

donde $K_i \dots \begin{cases} 1\text{d: intervalos} \\ 2\text{d: polígonos (usualmente triángulos o rectángulos)} \\ 3\text{d: poliedros (usualmente tetraedros o prismas)} \end{cases}$

- Todo $K \in \mathcal{T}_h$ se puede obtener como transformación afín de un **elemento de referencia** \hat{K} :

$$T_K : \hat{K} \rightarrow K$$

- Hipótesis: «**elementos geoméricamente conformes**»¹ Dados dos elementos K_i, K_j ($i \neq j$), entonces $K_i \cap K_j$ es:
 - O bien vacío
 - O bien un vértice, un lado o una cara común

¹Ver e.g [EG04]. Hipótesis fundamental para elementos finitos continuos

Subsection 2

Aproximación local por polinomios

Definición abstracta de elemento finito

Definition (Ciarlet [Cia78], Ern-Guermond [EG04])

Un **Elemento finito** en \mathbb{R}^n es un triple (K, P, Σ) tal que:

- (i) K = compacto de \mathbb{R}^n con interior no vacío y frontera lipschitziana
- (ii) P = espacio de polinomios en K de dimensión $N_p + 1$
- (iii) $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N_p}\} \subset V'$ tales que la aplicación lineal

$$\begin{aligned}\sigma : P &\longrightarrow \mathbb{R}^{N_p+1}, \\ q &\longmapsto \sigma(q) = (\sigma_0(q), \sigma_1(q), \dots, \sigma_{N_p}(q))\end{aligned}$$

es biyectiva. Las formas lineales $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N_p}\}$ se llaman *grados de libertad* locales

Observación:

En ocasiones (por ejemplo [Cia78]) la biyectividad de σ no se incluye en la definición de elemento finito. En ese caso, es una propiedad adicional y a los elementos que la verifican se les llama “unisolventes”.

Elementos finitos de Lagrange

Definition

(K, P, Σ) es un **elemento finito de Lagrange** si sus grados de libertad están definidos de la siguiente forma:

$$\sigma_i(p) := p(a_i), \quad \forall i = 0, \dots, N_p,$$

donde $\{a_0, \dots, a_{N_p}\} \subset K$ es un conjunto de puntos llamados «**nodos**»

Elementos finitos de Lagrange

Definition

(K, P, Σ) es un **elemento finito de Lagrange** si sus grados de libertad están definidos de la siguiente forma:

$$\sigma_i(p) := p(a_i), \quad \forall i = 0, \dots, N_p,$$

donde $\{a_0, \dots, a_{N_p}\} \subset K$ es un conjunto de puntos llamados «**nodos**»

Proposition

- 1 Existe una base $\{p_0, \dots, p_{N_p}\}$ de P tal que $\sigma_i(p_j) = \delta_{ij}$
 \hookrightarrow **funciones base** locales ("local shape functions") del elemento finito
- 2 Todo $p \in P$ verifica: $p(x) = \sum_{i=0}^{N_p} \sigma_i(p) p_i(x)$
 \hookrightarrow Es decir $(\sigma_0(p), \dots, \sigma_{N_p}(p)) = \text{coordenadas de } p(x) \text{ en la base } \{p_0, \dots, p_{N_p}\}$

- 1 Demostración 1: Tomar $\{p_i\} =$ base de interpolación de Lagrange en el soporte $\{a_i\}$
Demostración 2: Consecuencia directa de la biyectividad de σ
- 2 Unicidad de interpolación de valores $\sigma_i(p)$ en nodos a_i

Observación: esta proposición es válida para cualquier elemento finito (no necesariamente de Lagrange) \Leftarrow demostración 2

Familia de elementos finitos de Legendre

- Polinomios de Legendre (definición recursiva):

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_k(x) = \frac{2k-1}{k}L_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k}L_{k-2}(x), \quad k \geq 2$$

- $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ base de $\mathbb{P}_n = \{\text{polinomios de grado } n\}$
- Base jerárquica:** $\{L_0, L_1, \dots, L_n\} \subset \{L_0, L_1, \dots, L_n, L_{n+1}\}$
- Ortogonalidad** en $\hat{K} = [-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 L_i(x)L_j(x) = 2/(2i+1)\delta_{ij}$$

- Extensión a intervalo K arbitrario mediante la transformación afín

$$T_K : \hat{K} \rightarrow K$$

- Generalización a $K \subset \mathbb{R}^n$ [SSD04]

Definition

(K, P, Σ) es un **elemento finito de Legendre** si sus grados de libertad se definen como:

$$\sigma_i(p) := \alpha_i, \quad \forall i = 0, \dots, N_p,$$

donde $(\alpha_0, \dots, \alpha_{N_p}) \in \mathbb{R}^{N_p+1}$ son las

coordenadas de $p(x)$ en la **base de Legendre** $\{L_0(x), \dots, L_{N_p}(x)\}$

Familia de elementos finitos de Lobatto

- Polinomios de Lobatto (definición recursiva):

$$l_0(x) = \frac{1-x}{2}, \quad l_1(x) = \frac{1+x}{2}, \quad l_k(x) = \frac{1}{\|L_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}} \int_{-1}^x L_{k-1}(t) dt, \quad k \geq 2$$

- $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$ base jerárquica de \mathbb{P}_n
- $\forall i \geq 0: \quad l_i(-1) = 0$ excepto $l_0(-1) = 1, \quad l_i(1) = 0$ excepto $l_1(1) = 1$
 \hookrightarrow aplicación a **continuidad** entre intervalos

- $l'_k(x) = L_{k-1}(x) \Rightarrow$ **ortogonalidad de $l'_i(x)$** en $\hat{K} = [-1, 1]$,

$$\int_{-1}^1 l_i(x) l_j(x) = C \cdot \delta_{ij}, i, j \geq 2$$

- Extensión a intervalo K arbitrario mediante la transformación afín

$$T_K: \hat{K} \rightarrow K$$

- Generalización a $K \subset \mathbb{R}^n$ [SSD04]

Definition

(K, P, Σ) es un **elemento finito de Lobatto** si sus grados de libertad son:

$$\sigma_i(p) := \alpha_i, \quad \forall i = 0, \dots, N_p,$$

donde $(\alpha_0, \dots, \alpha_{N_p}) \in \mathbb{R}^{N_p+1}$ son las

coordenadas de $p(x)$ en la base de Lobatto $\{L_0(x), \dots, L_{N_p}(x)\}$

Familia de elementos finitos de Bernstein

- Polinomios de Bernstein

$$b_k^n(x) = \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k, \quad k = 0, \dots, n$$

- $\{b_0^n, b_1^n, \dots, b_n^n\}$ base *no jerárquica* pero **positiva** de \mathbb{P}_n en $\widehat{K} = [0, 1]$
- $\forall i \geq 0 : \quad b_i^n(0) = 0$ excepto $b_0^n(0) = 1$, $b_i^n(1) = 0$ excepto $b_n^n(1) = 1$
 \hookrightarrow aplicación a **continuidad** entre intervalos
- Extensión a intervalo K arbitrario mediante la transformación afín

$$T_K : \widehat{K} \rightarrow K$$

- Generalización a $K \subset \mathbb{R}^n$ [SSD04]

Definition

(K, P, Σ) es un **elemento finito de Bernstein** si sus grados de libertad son:

$$\sigma_i(p) := \alpha_i, \quad \forall i = 0, \dots, N_p,$$

donde $(\alpha_0, \dots, \alpha_{N_p}) \in \mathbb{R}^{N_p+1}$ son las

coordenadas de $p(x)$ en la **base de Bernstein** $\{b_0^{N_p}(x), \dots, b_{N_p}^{N_p}(x)\}$

Subsection 3

Espacios globales de elementos finitos

Elementos discontinuos

- Construir espacios de elementos discontinuos es fácil:

$$V_h^{dc} = \{v_h \in L^2(\Omega), / v_h|_K \in \mathbb{P}_n \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

- Para aplicar Galerkin necesito una base.

- Fijamos una base local $\{\varphi_i^K\}_{i=0}^{N_p}$ en cada $K \in \mathcal{T}_h$
- Definimos la base global $\{\varphi_{i,k}\}_{i=1\dots N_p, j=1\dots N}$ como

$$\varphi_{i,k}(x) = \begin{cases} \varphi_i^{K_k}(x) & \text{si } x \in K_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Ventaja: simplicidad, más fácil el cálculo paralelo
- Inconveniente método no conforme, es decir:

$$V_h \not\subset H^1(\Omega)$$

luego

$$V_h \not\subset V \subset H^1(\Omega)$$

luego **no** se puede aplicar **directamente** el **método de Galerkin**

- Construir espacios de elementos discontinuos es más difícil:

$$V_h^{dc} = \{v_h \in C(\Omega), / v_h|_K \in \mathbb{P}_n \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

- Para aplicar Galerkin necesito una base.
 - Fijamos una base local $\{\varphi_i^K\}_{i=0}^{N_p}$ en cada $K \in \mathcal{T}_h$
 - Definimos la base global $\{\varphi_{i,k}\}_{i=1\dots N_p, j=1\dots N}$ como

$$\varphi_{i,k}(x) = \begin{cases} \varphi_i^{K_k}(x) & \text{si } x \in K_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Exigimos que la base global sea **continua**
- Inconveniente: más difícil construir las funciones base, cálculo paralelo más complejo
- Ventaja: método conforme, puede aplicar directamente el **método de Galerkin**



Grégoire Allaire.

Numerical analysis and optimization an introduction to mathematical modelling and numerical simulation.

Oxford University Press, Oxford, 2007.



S.C. Brenner and L.R. Scott.

The Mathematical Theory of Finite Element Methods.

Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, third edition edition, 2008.



P.G. Ciarlet.

The Finite Element Method for Elliptic Problems.

North-Holland, Amsterdam, 1978.



A. Ern and J.-L. Guermond.

Theory and Practice of Finite Elements.

Springer, 2004.



Pavel Solin, Karel Segeth, and Ivo Dolezel.

Higher-order finite element methods.

Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.