The Covariance of the Discrete- and Continuous-time Signal

在IMU的模型中提到了高斯白噪声和随机游走(random walk)模型，及其离散化。这部分在 kalibr 库[1][2]中的 IMU noise model 有简单的介绍，其中离散化中部分内容还是有些令人疑惑的。本文与网页[3]中的方法有些不同，与论文附录[4]中的方法一致。

首先我们先考虑随机游走模型：

$$\dot{x} = w, \quad w \sim (0, Q_c)$$

其中 w 是时间连续白噪声：

$$E[w(t)] = 0$$

$$E[w(t)w(\tau)^T] = Q_c\delta(t-\tau)$$

$\delta()$ 表示狄拉克函数，$\delta(t-\tau)$ 是连续时间脉冲响应，它是一个在 $t=\tau$ 时刻函数值为 ∞ 的函数，在其他时刻为 0， 并且面积为 1。这些对于数字计算机来说是无法实现的，因此需要离散的形式。

假设当 $t_k < t < t_{k+1}$ 时，w 为常数，记为 $w_{d,k}$。我们可以直接写出随机游走模型的离散化模型：

$$x[k+1] = x[k] + w_{d1,k}\Delta t, \quad w_{d1} \sim (0, Q_{d1})$$

$$x[k+1] = x[k] + w_{d2,k}, \quad w_{d2} \sim (0, Q_{d2})$$

这里给出了两种形式，其中 $w_{d2,k} = w_{d1,k}\Delta t$，事实上第二种形式只是把 Δt 隐藏了，本质上是一样的。其中 w_d 为时间离散白噪声：

$$E[w_{d,i}] = 0$$

$$E[w_{d,i}w_{d,j}^T] = Q_d\delta_{ij}$$

δ_{ij} 表示克罗内克函数，可以看作是与狄拉克函数对应的离散函数，当 $i=j$ 时函数值为1，其他情况为0。

根据方差的性质 $P(A+B) = P(A) + P(B) + Cov(A,B)$，可以写出两离散化模型的方差分别为（$x[k]$与$w_{d,k}$不相关）：

$$P[k+1] = P[k] + Q_{d1}\Delta t^2$$

$$P[k+1] = P[k] + Q_{d2}$$

下面我们将对原先时间连续的信号进行处理，从而得出 Q_{d1}，Q_{d2} 与 Q_c 之间的联系。首先我们需要时间连续下方差的递推公式，因为：

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} w(\tau)d\tau$$

可得：

$$
\begin{aligned}
P(t+\Delta t) &= P(t) + \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} w(\tau)w(t)d\tau dt \\
&= P(t) + \int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} Q_c\delta(t-\tau)d\tau dt \\
&= P(t) + \int_t^{t+\Delta t} Q_c dt \\
&= P(t) + Q_c\Delta t
\end{aligned}
$$

离散信号和连续信号得到的统计特性应该是相同的，因此对比3个方差公式可以得出：

$$
Q_{d1} = \frac{Q_c}{\Delta t}
$$

$$
Q_{d2} = Q_c\Delta t
$$

最后用一个表格将结果更清晰地展示出来，对于时间连续信号 $\dot{x} = w,\ w \sim (0, Q_c)$

表达式	方差	
$x(t+\Delta t) = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} w(\tau)d\tau$	$P(t) + Q_c\Delta t$	
$x[k+1] = x[k] + w_{d1,k}\Delta t$	$P[k+1] = P[k] + Q_{d1}\Delta t^2$	$Q_{d1} = \frac{Q_c}{\Delta t}$
$x[k+1] = x[k] + w_{d2,k}$	$P[k+1] = P[k] + Q_{d2}$	$Q_{d2} = Q_c\Delta t$

同理，对于更复杂的形式[4]，如 $\dot{x} = Ax + w$，$\dot{x} = f(x) + w$；或者更简单的形式[5]，如 $\widetilde{x} = x + w$ ，经过离散化后 Q_d 与 Q_c 之间的关系和表格总结的相同。关键在于 w_d 的单位是否与离散化之前相同，若相同，则 $Q_d = Q_c/\Delta t$；若不同（特指乘上了时间单位，如$w_{d2} = w\Delta t$），则 $Q_d = Q_c\Delta t$ 。

例子

回到IMU的模型中，

$$
\widetilde{w}(t) = w(t) + b(t) + n(t),\ n(t) \sim (0, \sigma_g^2)
$$

$$
\dot{b}_g = n_b(t),\ n_b(t) \sim (0, \sigma_{bg}^2)
$$

则离散化后

$$
\widetilde{w}[k] = w[k] + b_d[k] + n_d[k]
$$

$$
n_d[k] \sim (0, \sigma_{gd}^2),\ \sigma_{gd} = \sigma_g/\sqrt{\Delta t}
$$

$$
b_d[k+1] = b_d[k] + n_{bd}[k]
$$

$$
n_{bd}[k] \sim (0, \sigma_{bgd}^2),\ \sigma_{bgd} = \sigma_{bg}\sqrt{\Delta t}
$$

我们也可以将Bias部分的离散化写成如下形式，此时的协方差就不一样了

$$
b_d[k+1] = b_d[k] + n_{bd}[k]\Delta t
$$

$$
n_{bd}[k] \sim (0, \sigma_{bgd}^2),\ \sigma_{bgd} = \sigma_{bg}/\sqrt{\Delta t}
$$

参考

[1] IMU Noise Model · ethz-asl/kalibr Wiki · GitHub
[2] Nikolic, Janosch, et al. “Maximum likelihood identification of inertial sensor noise model parameters.” IEEE Sensors Journal 16.1 (2015): 163-176.
[3] 从零开始的 IMU 状态模型推导
[4] Monte Carlo and Linear Covariance Analysis for Closed-Loop GN&C Systems
[5] Smith, M. W. A., and A. P. Roberts. “An exact equivalence between the discrete-and continuous-time formulations of the Kalman filter.” Mathematics and Computers in Simulation 20.2 (1978): 102-109.