Ispitna pitanja iz predmeta Operaciona istraživanja 1

Prva grupa pitanja: Rešavanje problema LP

1. Konveksnost skupa i funkcija i definicija globalnog i lokalnog optimuma.
2. Opšti oblik zadatka LP i njegova osnovna svojstva.
3. Standardni oblik LP i njegova bazna rešenja (dopustiva, susedna, degenerisana).
4. Osnovni koraci simpleks metode i njene osnovne osobine.
5. Kanonski oblik problema LP i njegova primena u rešavanju problema LP.
6. Test optimalnosti dopustivog baznog rešenja na osnovu odgovarajućeg kanonskog oblika problema LP.
7. Određivanje novog kanonskog oblika tj. nalaženje boljeg susednog baznog dopustivog rešenja.
8. Određivanje početnog kanonskog oblika problema LP i odgovarajućeg baznog rešenja.
9. Mogući ishodi simpleks metode: jedinstveno optimalno rešenje i neograničena funkcija cilja (grafička i algebarska interpretacija).
10. Mogući ishodi simpleks metode: višestruko optimalno rešenje i prazna dopustiva oblast (grafička i algebarska interpretacija).
11. Konačnost i računska složenost (definicija) simpleks metode.
12. Mogući načini formiranja dualnog zadatka LP (preko simetričnog i preko opšteg oblika). Svojstvo simetrije primara i duala.
13. Osnovna svojstva dualnosti problema LP: slaba dualnost i komplementarnost optimalnih rešenja.
14. Osnovna svojstva dualnosti problema LP: jaka dualnost i ograničenost — dopustivost.
15. Interpretacija dualnog problema u slučaju optimizacije raspodele ograničenih resursa.

Druga grupa pitanja: Matematičko modeliranje

16. Struktura matematičkih modela i njihova veza sa realnim sistemom.
17. MM: Osnovni MM planiranja ishrane.
18. MM: Podela obradive površine na kulture.
19. MM: Optimalan plan setve na dislociranim njivama.
20. MM: Optimizacija proizvodnje krmnih smeša.
21. MM: Izbor optimalnog asortimana.
22. MM: Optimizacija utroška materijala.
23. MM: Upravljanje zalihama.
24. MM: Usklađivanje programa proizvodnje.
25. MM: Optimalno proširenje kapaciteta.

Ово су материјали који могу послужити као испомоћ приликом спремања првог усменог колоквијума (или првог дела усменог испита) из предмета Операциона истраживања 1. Материјал је написан на основу важећег уџбеника (издање 2012.) и питања за школску 2015/16. Можете га користити као помоћ у налажењу одговора на питања, допуњавање одговора за поједина питања на која се не могу наћу цели одговори и слично. Свакако да је сигурније и пожељније учити из књиге јер се добија шира слика целокупног градива и потенцијално лакше учи. Грешке су могуће због силних индекса и ознака које постоје у књизи. У књизи на страни 39, на којој се налази део одговора на друго питање, постоји грешка (испавка ја дата у материјалу)

Друго издање: Неколико грешака које сам уочио у првом издању материјала сам исправио (грешке су се углавном односиле на индексе), тако да је могућност грешке сведена на минимум, али ипак и даље могућа.

Такође, ево списка страна на којима се налазе одговори за сва питања:

1. Питање: 28, 211, 224. и белешке са предавања
2. Питање: 39, 43, 44.
3. Питање: 45, 48, 49, 51.
4. Питање: 54. и белешке са предавања
5. Питање: 54.55. и белешле са предавања
6. Питање: 57, 58.
7. Питање: 58, 59, 60, 61, 62.
8. Питање: 54, 55.
9. Питање: 33, 37, 85, 89.
10. Питање: 85., 86, 90.
11. Питање: 9, 92, 93.
12. Питање: 94, 96, 97, 98.
13. Питање: 99, 101, 102.
14. Питање: 100.
15. Питање: 105, 106.

Одговори на питања из друге групе се лако налазе јер су сама питања написана као поднаслови из четвртог поглавља књиге (стране: 157 – 206). Једино је за прво питање из ове групе потребно ишчитати поглавље 1.2 „Конструкција математичког модела“ (стране: 8 - 17) запамтити основно (а обавезно набрајање на страни 9.)

Материјал је доступан у Црвеној копирници, а ускоро и на Пушкицама (puskice.org), као и на ФонФоруму (fonforum.org). ☺

1. Конвексност скупа и функција и дефиниција глобалног и локалног оптимума.

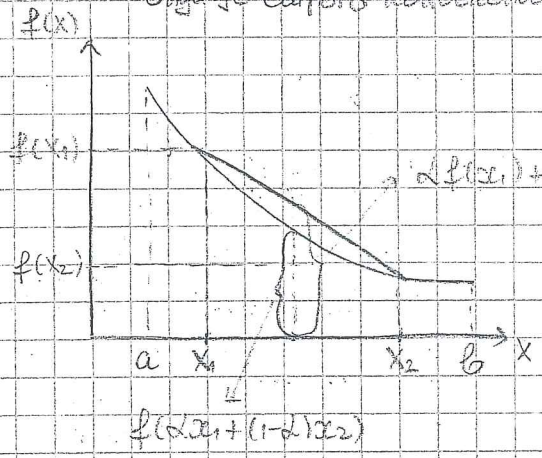
- Скуп $X \subset \mathbb{R}^n$ је конвексан, ако за свака два елемента тог скупа и линеарна конвексна комбинација тих елемената:
$x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$, $\alpha \in [0,1]$ такође припада том скупу.

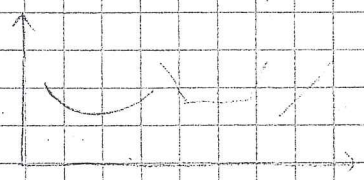
конвексан скуп

неконвексан скуп

- За функцију $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ кажемо да је конвексна на конвексном скупу X, ако важи
$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ за свако $x_1, x_2 \in X$ и за свако $\alpha \in [0,1]$.

ако нема знака једнакости, онда је строго конвексна





примери конвексних функција

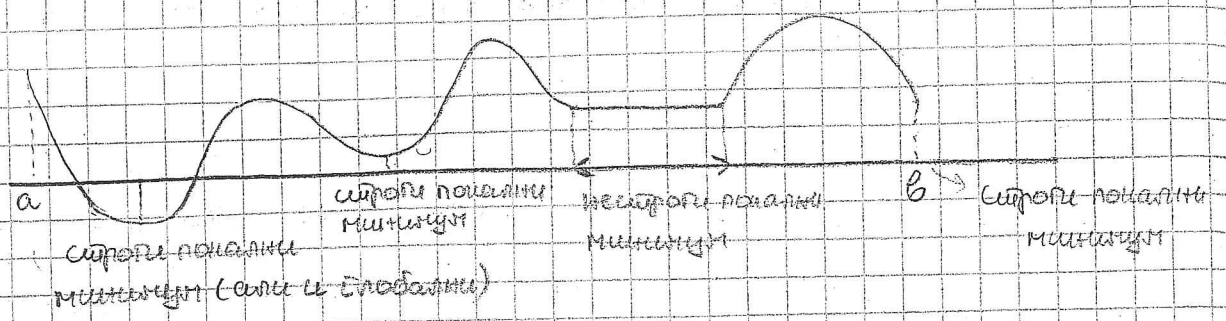
- Ако посматрамо критеријумску функцију f на скупу $X \in \mathbb{R}^n$ за $x^* \in X$ кажемо да је глобално решење, а $f(x^*)$ оптимум те функције, ако за случај оптимизације важи:
$f(x^*) \geq f(x)$, $\forall x \in X$ (за случај максимизације функције - глобални максимум)
$f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in X$ (за случај минимизације функције - глобални минимум)

ако нема знака једнакости, онда је строги оптимум (строги максимум односно строги минимум)

- Ако посматрамо критеријумску функцију f на скупу $X \in \mathbb{R}^n$, за $x^* \in X$ кажемо да је локално решење, а $f(x^*)$ оптимум те функције, ако за случај оптимизације постоји $\delta > 0$ тако да важи:
$f(x^*) \geq f(x)$, $\forall x \in X$ такве да је $\|x - x^*\| < \delta$ (за случај максимизације - локални максимум)
$f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in X$ такве да је $\|x - x^*\| < \delta$ (за случај минимизације - локални минимум)

где је $\|x - x^*\| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + \ldots + (x_n - x_n^*)^2}$ растојање тачака x и x^*.

Локални и глобални минимуми



2. Општи облик задатка линеарног програмирања и његови основни елементи.

- Општи задатак линеарног програмирања може се изказати у формализованом развијеном облику као:

$$\text{или} \begin{cases} \text{максимизирати} \\ \text{минимизирати} \end{cases} f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при ограничењима:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \lesseqqgtr b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \lesseqqgtr b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \lesseqqgtr b_m$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

или сажетије као:

$$\text{или} \begin{matrix} (\max) \\ (\min) \end{matrix} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничењима:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \lesseqqgtr b_i,\ i = 1, 2, \dots, m$$

Грешка у тексту!

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n$$

где су a_{ij}, c_j, b_i, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ задати реални бројеви, а знак $\lesseqqgtr$ означава да се на његовом месту може налазити један од следећих знака: $\leq$, $=$, $\geq$.

Другим речима, треба у допустивој области скуп линеарних ограничења наћи ону тачку у којој линеарна функција $f(x)$ достиже екстремну (највећу или најмању) вредност.

Функција $f(x)$ назива се критеријумском функцијом или функцијом циља, док се m ограничења назива ограничења проблема линеарног програмирања, а услови ненегативности природним ограничењима овог проблема.

Допустива област скуп ограничења зове се допустива област линеарног програмирања, а свака тачка допустиве области представља допустиво решење овог проблема.

Оно допустиво решење у коме функција циља $f(x)$ постиже свој екстремум називамо оптималним решењем проблема.

- Основна својства:

1) Коначан број темена - Ако је допустива област D проблема оптимизације непразан скуп, тада D представља n-димензионални конвексни полиедар, при чему: а) постоји бар једно теме области D

б) број темена области D је коначан

Пошто свако теме из D представља јединствено решење једног система од n између m+n једначина, тада је горња граница укупног броја темена једнака у оптималном случају броју комбинација без понављања n-те класе од n+m елемената то јесте: $\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$

2) Егзистенција оптималних темена - Ако проблем оптимизације има оптимална решења, тада сва она припадају границама ∂D области D. Тврди се:

а) Ако је оптимално решење проблема јединствено, тада оно представља теме области D

б) Ако проблем има више оптималних решења, тада сва она чине неку страну области D која садржи бар једно теме ове области.

3) Критеријум оптималности темена - Ако проблем оптимизације има оптимално решење и теме x_0 из D испуњава услов да не постоји међу суседним теменима у коме је вредност функције циља „боља" од $f(x_0)$, тада x_0 представља једно оптимално решење овог проблема. (Термин „боља" овде значи да је у случају максимизације функције циља вредност ове функције већа а у случају минимизације мања од $f(x_0)$)

4) Егзистенција оптималног решења

а) Ако је област D непразна и ограничена, тада проблем оптимизације увек има оптимално решење

б) Ако је област D непразна и неограничена, тада проблем оптимизације у коме се врши максимизација (минимизација) функције циља има оптимално решење онда и само онда, ако је ова функција ограничена одозго (одоздо).

3. Стандардни облик линеарног програмирања и његова базна решења (допустива, суседна, дегенерисана)

- Стандардни облик задатка линеарног програмирања, може се исказати у формализованом развијеном облику као:

минимизирати $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

при ограничењима:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

или у матрично-векторском облику:

$(\max)\ c^T x$

при ограничењима

$Ax = b$

$x \geq 0$

Претпоставимо да проблем оптимизације задовољава и два додатна услова:

1) сви слободни чланови b_i, $i=1,2,\dots,m$ су ненегативни, то јесте $b \geq 0$

2) $m \leq n$ и $\operatorname{rang} A = m$, то јесте све једначине система ограничења су линеарно независне.

Оваква формулација проблема линеарног програмирања омогућава да се његове геометријске особине алгебарски интерпретирају.

- Посматрајмо систем линеарних једначина $Ax = b$ (1) који представља ограничења стандардног облика проблема линеарног програмирања при чему је задовољен услов $\operatorname{rang} A = m \leq n$.

<u>Базно решење</u> система (1) представља оно решење овог система за које постоји ненула $m \times m$ подматрица A_b матрице A која је регуларна (то јесте $\det A_b \neq 0$) и тврди да је у овом решењу свима променљива чија се колона коефицијената не налази у A_b, једнака нули.

Променљиве које образују колонама подматрице A_b зову се базне променљиве, а преостале променљиве су небазне. Скуп свих базних променљивих чини базу базног решења, док је A_b матрица базе. Другим речима базно решење је свако оно решење система (1) које има највише m променљивих различитих од нуле.

- <u>Базно допустиво решење</u> - Ако неко базно решење система (1) задовољава и услове ненегативности, оно представља допустиво решење проблема оптимизације.

- Суседна базна допустива решења – Две базна допустива решења проблема оптимизације су суседна, ако им се базе разликују у само једној променљивој
- Дегенерисано базно допустиво решење – Ако је у неком базном допустивом решењу проблема оптимизације бар једна од базних променљивих једнака нули, тада је то дегенерисано базно допустиво решење

4. Основни кораци симплекс методе и њене основне особине

- Симплекс метода је најпознатија и највише коришћена техника за решавање задатка линеарног програмирања, која је развијена 1947. године од стране Џорџа Данцига.
- Основни кораци симплекс методе:

1. почетно решење (иницијализација) – добијање почетног базног решења X_0 свођењем модела на стандардни, а потом на канонски облик
2. итеративни кораци за $k=0,1,2...$
   - тест оптималности: уколико базно решење X_k нема бољих суседних базних решења, онда је X_k оптимално. Крај
3. у супротном, налази се суседно, боље базно решење са враћањем на други корак

- Особине симплекс методе:
  - симплекс метода креће из неког почетног решења
  - симплекс метода креће из система у канонском облику (и трансформација из једног у други канонски облик, приликом сваке итерације)
  - симплекс метода обилази само темена (и то суседна)
  - симплекс метода је прогресивна (среди), то јесте она следи само строго суседна темена приликом провере оптималности, то јесте следи мањи коефицијент циља (не улази у обзир сад корака до оптималног решења...)

5. ~~Проб~~ Канонски облик проблема линеарног програмирања и његове примена у решавању проблема линеарног програмирања

Проблем линеарног програмирања чији стандардни облик има следећу форму:

максимизирати $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

при ограничењима

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$

$x_1, x_2, \dots, x_{n+m} \geq 0$

или у матрично-векторској форми:

$(\max)\ c^T x_N$

при ограничењима

$Ax_N + x_B = b$

$x_B \geq 0,\ x_N \geq 0,$

где је $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, а $x_N = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $x_B = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$. Претпостављамо да су сви слободни чланови b_i, $i = 1, \dots, m$ ненегативни, тј. да је $b \geq 0$.

Овај проблем представља тако званој канонски облик проблема линеарног програмирања у односу на базу $B = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$

У општем случају, канонски облик проблема линеарног програмирања у односу на неки скуп променљивих B (тако звану базу) је тада еквивалентна форма неког стандардног облика у којој се свака променљива из базе (тако звана базна променљива) јавља у само једној једначини ограничења (и ни у једној другој) и то са коефицијентом 1, а не јавља се у функцији циља. Пошто су, осим тога сви слободни чланови у ограничењима ненегативни, база B се зове допустивом, а на основу оваквог облика могу се директно идентификовати базно допустиво решење које одговара бази B и вредност функције циља у овом решењу: Вредности свих променљивих једнаке су слободним члановима ограничења канонског облика, док је одговарајућа вредност функције циља једнака слободном члану ове функције у канонској облику.

- Симплекс метода кроз сваку итерацију прелази из једног у други канонски облик.

6. Тест оптималности допустивог базног решења на основу одговарајућег канонског облика проблема линеарног програмирања

канонски облик проблема линеарног програмирања:	$\Longleftrightarrow$	еквивалентан облик у k-тој итерацији:
максимизирати $c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$		максимизирати $c_1^kx_1^k+c_2^kx_2^k+\dots+c_n^kx_n^k+F_k$
при ограничењима:		при ограничењима:
$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1$		$a_{11}^kx_1^k+a_{12}^kx_2^k+\dots+a_{1n}^kx_n^k+x_{n+1}^k=b_1^k$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2$		$a_{21}^kx_1^k+a_{22}^kx_2^k+\dots+a_{2n}^kx_n^k+x_{n+2}^k=b_2^k$ $\Rightarrow(6)$
$\vdots$		$\vdots$
$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m$		$a_{m1}^kx_1^k+a_{m2}^kx_2^k+\dots+a_{mn}^kx_n^k+x_{n+m}^k=b_m^k$
$x_1,x_2,\dots,x_{n+m}\geq 0$ $\Rightarrow(1)$		$x_1^k,x_2^k,\dots,x_{n+m}^k\geq 0$ $\}(2)$ $\Rightarrow(2)$

Нека је x_j^k, $j\in\{1,2,\dots,n\}$ нека небазна променљива решења X_k. Пошто је канонски облик (2) еквивалентан проблему (1) (то јесте они имају исту допустиву област на којој им се добијају вредности функције циља) тада важи:

Ако би x_j^k у неком допустивом решењу проблема (2) било једнако ε, $\varepsilon>0$, док све остале небазне променљиве остају једнаке нули, тада би нова вредност функције циља била очигледно једнака $F_k+c_j^k\varepsilon$. Другим речима, ако би x_j^k постало у неком базном допустивом решењу, суседном X_k, веће од нула (то јесте базна променљива) тада би се вредност функције циља променила за c_j^k по јединици повећања вредности x_j^k. Прецизније, повећање x_j^k довело би до повећања функције циља у случају $c_j^k>0$, до смањења у случају $c_j^k<0$, а не би утицало на вредност ове функције, ако је $c_j^k=0$.

<u>Критеријум оптималности</u> - Ако је $c_j^k\leq 0$ за свако $j=1,2,\dots,n$ тада је X_k оптимално решење проблема, а F_k максимална вредност функције циља.

Ако X_k није оптимално, тада је очигледно да боље суседно решење треба тражити међу свим оним базним допустивим решењима, суседним X_k, у којима улази база нека од небазних променљивих x_j^k, $j\in\{1,2,\dots,n\}$ за коју је $c_j^k>0$.

Чим се потврдим да у суседну базу уђе она од свих променљивих под чије је c_j^k максимално:

7. Одређивање новог канонског облика као јесте налажење бољег суседног базног допустивог решења

Након што смо утврдили да тренутно решење X_k није оптимално, потребно је утврдити која од небазних променљивих треба да уђе у базу, која од базних треба да изађе из базе, а потом формирати и нови канонски облик.

Критеријум уласка променљиве у базу – У базу B_{k+1} улази она променљива x_s^k, $s \in \{1,2,\dots,n\}$ за чији индекс s важи: $c_s^k = \max\limits_{j \in \{1,2,\dots,n\}} \{c_j^k : c_j^k > 0\}$

Излазак променљиве из базе:

За променљиву x_s^k која улази у базу B_{k+1} треба одредити колико се њена вредност може највише повећати у неком допустивом решењу проблема (2) у коме су све остале небазне променљиве једнаке нули, а да она остане допустива.

Очигледно, у сваком оваквом решењу X променљиве x_s^k и x_{n+i}^k, $i=1,2,\dots,m$ треба да задовоље базу система ограничења облика:

$$a_{1s}^k x_s^k + x_{n+1}^k = b_1^k$$
$$a_{2s}^k x_s^k + x_{n+2}^k = b_2^k$$
$$\vdots$$
$$a_{ms}^k x_s^k + x_{n+m}^k = b_m^k$$
$$x_s^k, x_{n+1}^k, \dots, x_{n+m}^k \geq 0$$

или еквивалентан, канонски облик $x_{n+i}^k = b_i^k - a_{is}^k x_s^k$, $i=1,2,\dots,m$, $x_s^k \geq 0$ (3)

Ако је $a_{is}^k > 0$ тада се x_s^k може повећавати највише до вредности $\frac{b_i^k}{a_{is}^k}$ при чему се x_{n+i}^k смањује до нуле. Повећањем x_s^k преко ове вредности x_{n+i}^k постаје негативно, па би X тада било недопустиво.

Ако је $a_{is}^k = 0$ тада повећање x_s^k не утиче на вредност x_{n+i}^k и она је увек једнака $x_{n+i}^k = b_i^k$.

Ако је $a_{is}^k < 0$ тада се x_s^k може неограничено повећавати, а да при томе расте неограничено и x_{n+i}^k и остаје увек ненегативно.

Очигледно је да решење система (3) постоји онда и само онда, ако вредност x_s^k не прелази горњу границу дефинисану са $d_s^k = \min\limits_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \left\{ \frac{b_i^k}{a_{is}^k} : a_{is}^k > 0 \right\}$ (4)

Ако би $x_s^k = d_s^k$, тада би све оне базне променљиве x_{n+i}^k код којих се достиже минимум у (4), постале једнаке нули. Тада је X базно допустиво решење из (2). Вредност функције циља у том решењу била би једнака $F_k + c_s^k \cdot d_s^k$. Зато би се овакво X могло узети као следеће боље суседно базно допустиво решење X_{k+1}, односно његова база сматрати базом B_{k+1}.

Критеријум изласка променљиве из базе – Из базе B_k излази она променљива x_{n+r}^k, $r \in \{1,2,\dots,m\}$ за чији индекс r важи $\frac{b_r^k}{a_{rs}^k} = \min\limits_{i \in \{1,2,\dots,m\}} \left\{ \frac{b_i^k}{a_{is}^k} : a_{is}^k > 0 \right\}$

Пошто је сваку допустиву тачку X дефинисану системом (3) активно n ограничења из (6) и n-1 ограничења из (7) тада ове тачке чине ивицу $X_k X_{k+1}$ допустиве области. При томе за $x_s^k = 0$, X се поклапа са теменом X_k, док се за $x_s^k = d_s^k$, X своди на теме X_{k+1}. Геометријски решавајући симплекс методом прелази из темена X_k у теме X_{k+1}, „крећући" се дуж ивице допустиве области која спаја ова темена.

Ако је $a_{is}^{k} \leq 0$ за свако $i=1,2,\dots,m$ тада се повећањем вредности x_s^k у неком решењу X, не може смањити на нулу ниједна базна променљива из B_k, па би се x_s^k могло неограничено повећавати, а да X остане и даље допустиво. То конструисани значи да се X налази на једној полуправој која представља неограничену ивицу допустиве области са почетном X-ом као крајњом тачком. При томе вредност функције циља неограничено расте дуж ове ивице, па проблем нема решење и метода се решује са разлогом.

Нови канонски облик.Ново базно допустиво решење:

Уколико, r-ту једначину у (6) треба решити по x_s^k чиме се x_s^k изражава преко нових небазних променљивих, па затим на основу ње елиминисати ову променљиву из свих осталих једначина у (6) и из функције циља.

Оваква трансформација проблема може се реализовати применом следећих алгебарских операција:

i) множење (дељење) i-те једначине ненултом константом $i \in \{1,2,\dots,m\}$

ii) сабирање i-те једначине и j-те једначине $i,j \in \{1,2,\dots,m\}$ $i \neq j$

Применом коначно много оваквих трансформација на неки систем једначина увек се добија систем еквивалентан почетном.

Канонски облик проблема (1) у односу на базу B_{k+1} сада се може добити када се на (2) примени следећи поступак базиран на операцијама (i) и (ii)

Добијање канонског облика у односу на базу B_{k+1}.

1) r-то ограничење из (6) се дели са a_{rs}^k

2) Ако је $a_{is}^k \neq 0$ тада се r-то ограничење трансформисано у поступку 1) множи са $-a_{is}^k$ и додаје i-том ограничењу из (6) за свако $i \in \{1,2,\dots,m\}$ $i \neq r$

3) Ако је $c_s^k \neq 0$ тада се r-то ограничење трансформисано у поступку 1) множи са $-c_s^k$ па се његова лева страна додаје функцији циља док се његова десна страна одузима од ове функције.

Добијени канонски облик може се записати у следећој форми:

минимизирати $c_1^{k+1}x_1^{k+1} + c_2^{k+1}x_2^{k+1} + \dots + c_n^{k+1}x_n^{k+1} + F_{k+1}$

при ограничењима

$$a_{11}^{k+1}x_1^{k+1} + a_{12}^{k+1}x_2^{k+1} + \dots + a_{1n}^{k+1}x_n^{k+1} + x_{n+1}^{k+1} = b_1^{k+1}$$

$$a_{21}^{k+1}x_1^{k+1} + a_{22}^{k+1}x_2^{k+1} + \dots + a_{2n}^{k+1}x_n^{k+1} + x_{n+2}^{k+1} = b_2^{k+1}$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}^{k+1}x_1^{k+1} + a_{m2}^{k+1}x_2^{k+1} + \dots + a_{mn}^{k+1}x_n^{k+1} + x_{n+m}^{k+1} = b_m^{k+1}$$

$$x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{n+m}^{k+1} \geq 0$$

8. Одређивање почетног канонског облика ~~[illegible]~~ проблема линеарног програмирања и одговарајућег базног решења

- Канонски облик проблема линеарног програмирања:

максимизирати $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

при ограничењима:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+m} &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Ако је проблем оптимизације задат у симетричном облику тако да су сва његова ограничења типа $\leq$, тада отклањањем његовог стандардног облика, добијеним додавањем по једне изравнавајуће променљиве левој страни сваког од ограничења, има форму канонског облика.

Ако стандардни облик неког проблема линеарног програмирања нема форму (1) тада се он може приказати решавању симплекс методом увођењем, тако званих вештачких променљивих, или директно свести на ову форму, применом на пример Гаус Жорданове методе елиминације или одговарајућих операција матричног рачуна.

- Почетно базно допустиво решење X_0 једнако је базном решењу система ограничења, које одговара бази b почетног канонског облика (1), док је одговарајућа вредност F_0 функције циља једнака нули, то јесте

- почетно базно допустиво решење $X_0 = (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$
- почетна база: $b_0 = b\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$
- почетна вредност функције циља: $F_0 = 0$

9. Могући исходи симплекс методе: јединствено оптимално решење и неограничена функција циља (графичка и алгебарска интерпретација)

- Нека је симплекс метода у својој последњој k-тој итерацији дошла до неког оптималног базног допустивог решења X_k са максималном вредношћу F_k функције циља, то јесте $c_j^k \le 0$, за све $j=1,2,\dots,n$.

Ако је за свако $s \in \{1,2,\dots,n\}$ $c_s^k < 0$ (строго мање!) тада је дато оптимално решење једно и једино, то јесте јединствено.

Графичка интерпретација:

Максимизирати $F = 5x_1 + 2x_2$

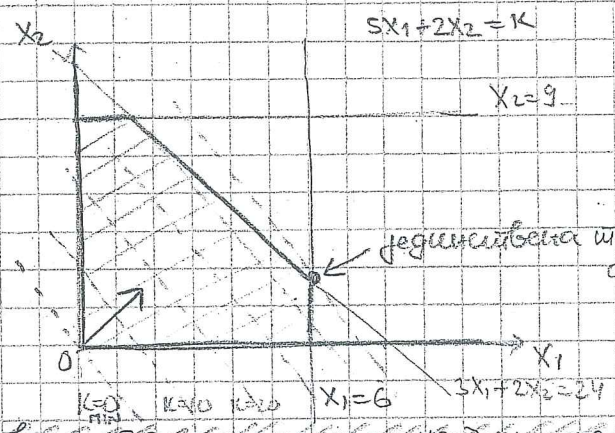
при ограничењима:

$x_1 \le 6$

$2x_2 \le 18$

$3x_1 + 2x_2 \le 24$

$x_1, x_2 \ge 0$



9. Могући исходи симплекс методе: јединствено оптимално решење и неограничена функција циља (графичка и алгебарска интерпретација)

- Ако за неку небазну променљиву x_s^k важи да је $c_s^k > 0$ и $a_{is}^k \le 0$ за свако $i=1,2,\dots,m$ тада функција циља неограничено расте дуж неограничене области допустивих решења са правцем тачкама у X_k и правцем једничким P_s^k, то јесте у свим оним тачкама X облика $X = X_k + \alpha P_s^k$ при неограниченом повећавању непознатог параметра α. У том случају проблем линеарног програмирања нема решења, па симплекс метода стаје.

Графичка интерпретација:

Максимизирати $F = 5x_1 + 2x_2$

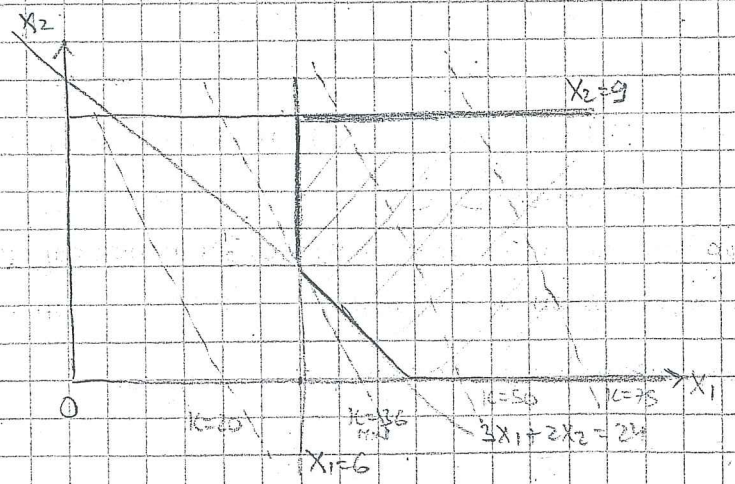
при ограничењима:

$x_1 \ge 6$

$2x_2 \le 18$

$3x_1 + 2x_2 \ge 24$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$



Горња полуправа праве очигледно не пролази, јер све праве облика $5x_1+2x_2=K$ за $K \ge 36$ увек имају заједничке тачке са допустивом областу.

– Исправно, у неком облику у оба примера се могу поновити бројни дати одговори –

10. Могући исходи симплекс методе: Вишеструко оптимално решење и празна допустива област (графичка и алгебарска интерпретација)

- Нека је симплекс метода у својој последњој k-тој итерацији дошла до неког оптималног базног допустивог решења X_k, са минималном вредношћу F_k функције циља, то јесте $c_j^k \leq 0$, за све $j=1,2,\dots,n$.

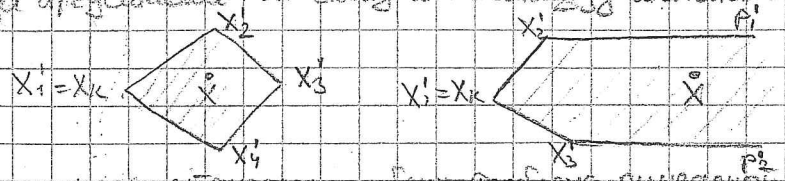
Ако је за бар неко $s \in \{1,2,\dots,n\}$ $c_s^k=0$, тада нимало повећање вредности небазне променљиве x_s^k при чему су све остале небазне променљиве једнаке нули, не би променило вредност функције циља, то јесте ова вредност би остала једнака F_k. То значи да решавани проблем линеарног програмирања има (осим X_k) још оптималних решења која сва чине једну страну допустиве области проблема. Таква оптимална страна би се могла алгебарски идентификовати на следећи начин:

За свако $s \in \{1,2,\dots,n\}$ за које је $c_s^k=0$, ивица са правцем у X_k и правцем P_s^k ($X=X_k+\alpha P_s^k$) представља ивицу оптималне стране. Ако је ова ивица ограничена, тада се још једном итерацијом симплекс методе, у којој ће у базу ући x_s^k може идентификовати још једно оптимално теме проблема линеарног програмирања. На тај начин се, реализацијом одговарајућих додатних итерација симплекс методе могу идентификовати сва темена и сви правци неограничених ивица (ако таквих ивица има) оптималне стране.

Обележимо са $X_1', X_2', \dots, X_\ell'$ сва овако генерисана темена оптималне стране, а са $P_1', P_2', \dots, P_h'$ све овако добијене правце њених неограничених ивица (ако их има).

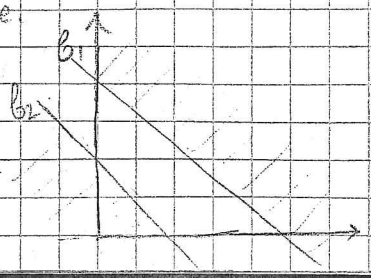
Сада се било која тачка X оптималне стране може приказати као

(1) $X=\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i X_i' + \sum_{j=1}^{h}\alpha_j P_j'$ где је $\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i=1$, $\lambda_i \geq 0$ за $i=1,\dots,\ell$ и $\alpha_j \geq 0$ за $j=1,\dots,h$. У случају када је оптимална страна ограничена, то јесте нема неограничених ивица, тада је било која њена тачка X дефинисана првим сумом из (1). Другим речима X тада представља конвексну комбинацију темена ове стране.



$\Rightarrow$ ограничена и неограничена оптимална страна

- У случају када стандардни облик проблема линеарног програмирања није остварено и његов канонски облик (то, јесте треба методом великог M увести вештачку базу за примену симплекс методе) може се десити да је допустива област овог проблема празна. Тада се симплекс метода зауставља у неној итерацији k у којој су сви $c_j^k \leq 0$ $j=1,2,\dots,n$, а база B_k садржи вештачку променљиву која је у базном допустивом решењу X_k већа од нуле.



На пример:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \geq b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2 \leq b_2$

$\Downarrow$

нема заједничке области (допустива област је празна)

11. Коначност и рачунска сложеност (дефиниција) симплекс методе

- Ако за свако базно допустиво решење X_k, $k=0,1,\dots$ генерисано током примене симплекс методе, важи да је оно недегенерисано, то јесте да је $b_i>0$, за $i=1,2,\dots,m$ тада се вредност функције циља строго повећава у свакој итерацији ове методе, па зато сва генерисана решења морају бити међусобно различита. Пошто је укупан број допустивих решења коначан, очигледно следи да ће у овом случају симплекс метода кроз коначно много итерација довести до оптималног решења или до закључка да проблем нема решење (услед неограничености функције циља или празне допустиве области).
Ако се симплекс метода примени на дегенерисани проблем линеарног програмирања, тада се током њеног рада може генерисати неко дегенерисано базно допустиво решење. При томе се може десити да метода у следећих неколико итерација, и пред тога што генерише нове базе, све време остане у овом решењу. У најгорем случају се може заглавити у дегенерисаном темену, при чему се генерисане базе периодично понављају у бесконачном циклусу, што онемогућава завршетак методе. Оваква појава се зове циклирање. Срећом, иако је друга циклирања теоретска могућа, она је ретко јавља у практичним проблемима.
Развијен је читав низ техника којима се спречава циклирање и обезбеђује коначност симплекс методе и у случају дегенерисаних темена. Једна од њих је и Блендово правило. Може се доказати да се симплекс метода која користи Блендово правило обавезно завршава кроз коначно много корака.

- Под рачунском сложношћу неког алгоритма обично се подразумева укупан број елементарних корака које треба реализовати током овог алгоритма да би се дошло до решења постављеног проблема. Овај број корака очигледно зависи од обима улазних података, то јесте од димензије проблема. Код алгебарских процедура као у симплекс методи, под елементарним кораком се подразумева нека алгебарска операција над два реална броја (на пример, множење или сабирање), а под димензијом проблема број битова потребних за памћење свих његових улазних целобројних података записаних у бинарном запису.

Ако за сваки низ улазних података проблема произвољне дужине L и за неки алгоритам који га решава, важи да је

укупан број елементарних корака $\leq Cf(L)$ где је C позитивна константа, а f нека реална функција, тада се каже да алгоритам има рачунску сложеност $O(f(L))$.

Ако $f(L)$ представља полином по L, тада се алгоритам назива полиномијалним.

У супротном, алгоритам је експоненцијалан. Полиномијалне алгоритме сматрамо рачунски ефикасним јер укупан број елементарних корака расте полиномијално са повећањем димензије проблема (код експоненцијалног алгоритма овај број у најгорем случају расте експоненцијално).

Код симплекс методе, примењене на проблем линеарног програмирања са m ограничења и n променљивих, може се показати да свака итерација захтева $O(mn)$ аритметичких операција. Пошто укупан број базних решења не прелази $\binom{n}{m}$ тада укупан број итерација методе, такође не може да пређе овај број. Зато је горња граница сложености симплекс методе $O\left(mn\binom{n}{m}\right)$ што дефинише експоненцијалну сложеност.

Иако је просечно понашање при решавању практичних проблема оцењено као веома успешним (просечно је потребно између m и $3m$ итерација). Може се непрецизно доћи до разлике ефикасних компјутерских имплементација.

12. Могући начини формирања дуалног задатка линеарног програмирања (према симетричном и према општем облику): Својство симетрије примара и дуала

Нека је задат проблем линеарног програмирања у симетричном облику као:

максимизирати $F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

при ограничењима:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

Овакав проблем називамо примарни проблем или примал.

Овакавом проблему се придружује такозвани дуални проблем или дуал који има следећу симетричну форму:

минимизирати: $\Phi(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

при ограничењима:

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$

$\vdots$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$

Очигледно да дуал има онолико променљивих колико примал има ограничења и уопшто ограничења колико примал има променљивих. Матрица ограничења дуала једнака је транспонованој матрици ограничења примала, док коефицијенти у функцији циља дуала представљају слободне чланове примала и обрнуто. Чланови, слободни чланови примала не могу обавезно да буду ненегативни.

Ако неки проблем линеарног програмирања није задат у симетричном облику он се може једноставним трансформацијама свести на еквивалентни проблем овог облика:

(1) Проблем минимизације функције $F(X)$ може се свести на проблем максимизације функције $-F(X)$

(2) Ограничење типа $\geq$ се, множењем обе његове стране са -1, своди на еквивалентно ограничење типа $\leq$

(3) Ограничења облика $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ се може заменити са два ограничења $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ и $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_i$

(4) Ако за променљиву x_j не постоји никакав услов који ограничава њен знак, то јесте x_j је неограничено по знаку, тада се у проблем уводи смена $x_j = x_j^+ - x_j^-$ где су $x_j^+ \geq 0$ и $x_j^- \geq 0$

(5) Ако променљива x_j треба да испуњава услов $x_j \leq 0$ тада се у проблем уводи смена $x_j' = -x_j$, где је $x_j' \geq 0$

Сада се полазећи од овако трансформисаног проблема, може формирати његов дуални проблем на претходно дефинисан начин.

Други начин формирања дуала јесте да се полазећи од проблема линеарног програмирања који није дат у симетричном облику директно дође до његовог дуала. Матрица ограничења, коефицијенти у функцији циља и слободни чланови дуала одређују на уобичајен начин док је сврх правила за одређивање типа његових ограничења и ограничења знака саме његове променљиве дато у табели.

Примални проблем (или дални проблем)	Дални проблем (или примални проблем)
максимизирати $F(X)$ (или $\Phi(y)$)	минимизирати $\Phi(y)$ (или $F(X)$)
Ограничење i примала (или дуала)	Променљива y_i (или x_i)
тип $\leq$	ненегативна
тип $\geq$	непозитивна
тип $=$	неограничена по знаку
променљива x_j (или y_j)	ограничење j дуала (или примала)
ненегативна	тип $\geq$
непозитивна	тип $\leq$
неограничена по знаку	тип $=$

• Дуал дуалног проблема је једнак прималном проблему.

Услед својстава симетрије све особине једног дуалног проблема прелазе прималу баш и обрнуто, па није битно који од проблема звати примал, а који дуал.

13. Основна својства дуалности проблема линеарног програмирања: слаба дуалности и комплементарност оптималних решења

- Ако је x допустиво решење примала, а y допустиво решење дуала, тада је $F(x) \leq \Phi(y)$. → ово је за случај максимизације

Својство слабе дуалности обезбеђује горњу границу $\Phi(y)$ максималне вредности функције циља примала, односно доњу границу $F(x)$ минималне вредности функције циља дуала.

У случају минимизације функције $F(X)$, односно максимизације функције $\Phi(y)$ неједнакост би имала облик $F(x) \geq \Phi(y)$

- Комплементарност оптималних решења примала и дуала

Ако координате тачке $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ задовољавају следеће услове:

(1) Ако је x_j исправнавајућа променљива додата i-том ограничењу примала, тада је $y_i^* = -c_j^*$

(2) Ако је x_j исправнавајућа променљива одузета од i-тог ограничења примала, тада је $y_i^* = c_j^*$

(3) Ако је x_j вештачка променљива додата i-том ограничењу примала, тада је $y_i^* = -M - c_j^*$, тада је y^* оптимално решење дуала. При томе y^* задовољава и услов:

(4) $c_j^* = c_j - A_j^T y^*$ за $j = 1, 2, \dots, n$ где је A_j j-та колона матрице ограничења A примала

(у случају минимизације функције циља примала у услову (3) је $y_i^* = M - c_j^*$.

На основу овог својства координате оптималног решења дуала се могу директно идентификовати баш на основу оних елемената из реда $-f$ последње табеле примала који редом одговарају променљивама из њихове почетне базе.

Приметимо да је према (4) за $j = 1, 2, \dots, n$ c_j^* једнако „довољно" j-ном ограничењу дуала, односно разлици десне и леве стране овог ограничења у тачки y^*.

Пошто је $x_j \geq 0$ то ограничење има облик $A_j^T y \geq c_j$. Зато је услов $c_j^* \leq 0$ за $j = 1, 2, \dots, n$ који је искуљен услед оптималности решења примала, у складу са допустивошћу y^*.

Пошто свакој базној променљивој одговара нулти елемент у реду $-f$ последње последње табеле примала, тада очигледно важи:

- $x_j^* \cdot y_i^* = 0$ за сваку исправнавајућу променљиву x_j уведену у i-то ограничење примала
- $x_j^* (c_j - A_j^T y^*) = 0$ за $j = 1, 2, \dots, n$, где су x_j^* оптималне вредности прималних променљивих.

14. Основна својства дуалности проблема линеарног програмирања: јака дуалност и ограниченост-допустивост

- Примал има оптимално решење, ако и само ако, дуал има оптимално решење при чему су оптималне вредности функција циља ова два проблема једнаке.

Према својству јаке дуалности примал има решење, ако и само ако, дуал има решења.

- Ако је функција циља примала неограничена одоздо на његовој допустивој области, тада је допустива област дуала празна.

Ако је функција циља дуала неограничена одоздо на његовој допустивој области, тада је допустива област примала празна.

Следи да, ако су допустиве области примала и дуала непразне, оба ова проблема имају оптимална решења. Иначе, могуће је да допустиве области примала и дуала буду празне.

15. Интерпретација дуалног проблема у случају оптимизације расподеле ограничених ресурса

Примарни проблем облика:

максимизирати $F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

при ограничењима:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

са свим позитивним коефицијентима типично се интерпретира као проблем алокације (додељивања) ограничених ресурса одређеном циљу оптимизације. Наиме, x_j може представљати непознату количину j-тог производа коју неки фирма треба да произведе у задатом временском периоду, c_j јединични профит од производње овог производа, а F укупни профит који се при томе остварује. Фирма располаже са ограниченим количинама ресурса потребним за производњу, где b_i представља расположиву количину i-тог ресурса, а a_{ij} количину i-тог ресурса потребну за производњу јединице j-тог производа. Оптимално решење проблема се сада тумачи као план производње који овој фирми обезбеђује максималан профит у посматраном временском периоду.

Полазећи од овакве тумачења примала, дуални модел:

минимизирати: $\Phi(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

при ограничењима:

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$

$\vdots$

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$

и оптималне вредности његових променљивих могуће се економски интерпретирају на следећи начин:

Претпоставимо да фирма жели да испита утицај повећања расположиве количине b_i, i-тог ресурса на максималан профит који она може да оствари овојом производњом. Лако се види да делимичну информацију о оваквом утицају садржи оптимално решење $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ дуалног проблема. Наиме, услед својства јаке дуалности по коме су оптималне вредности функција циља примала и дуала једнаке, вредности y_i^* може се добити следеће тумачење:

Ако би се расположива количина b_i i-тог ресурса повећала за ε, при чему y_i^* остаје оптимално решење дуала тако трансформисаног проблема, тада би се максимални профит F^* повећао за $\varepsilon \cdot y_i^*$. Другим речима, величине y_i^* представљају мери маргиналну добити која би се остварила при јединичном повећању расположиве количине i-тог ресурса, па се зато ова величина назива „цена у сенци".

Увек када у оптималном решењу проблема i-то ограничење није активно, то јесте расположива количина b_i, i-тог ресурса није у потпуности искоришћена, тада је $y_i^* = 0$ и повећање величине b_i неће довести до промене оптималног плана производње нити промене максималног профита F^*. Зато се овај профит може повећати само повећањем количине оног ресурса који је у оптималном решењу проблема у потпуности искоришћен.

Често, при повећању расположиве количине неког ресурса, оптимално решење y^* дуала остаје непромењено само за врло мала повећања ε. У случају већих повећања која мењају ово оптимално решење, вредности y_i^* престају да буду мерила маргиналних добити, па се тада промена максималног профита може анализирати коришћењем одговарајућих резултата анализе осетљивости.