# Técnicas de Demonstração Princípio da Indução Finita(PIF)

**Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS**
**Ciência da Computação**
**Linguagem Formais e Autômatos**
**Prf Dr Osvaldo Vargas Jaques**
**ojacques@comp.uems.br**

# Princípio da Indução Finita

- Imagine que você tenha que resolver um problema que envolve uma certa quantidade de elementos. Digamos que seja ordenar n números recebidos em um vetor.
- Você desenvolve o algorítmo e obviamente não testará para 1 milhão de números. Você testa para uns 5, 10, 20 talvez.
- O que você está fazendo aqui é aplicando a idéia de indução.
- Você está induzindo que se o seu algorítmo funciona para 10 números, funcionará para 11, 12, 1 milhão de números. Obviamente números **finitos.**

# Princípio da Indução Finita (PIF)

- Para provar que um determinado teorema ou uma determinada fórmula P(n) está certa, verificamos se funciona para o menor valor existente, o $P(n_o)$ ou P(0). A seguir admitimos que funciona para P(n), ou seja com n elementos. Finalmente, verificamos se funcionaria para P(n+1), ou n+1 elementos.
- A PIF consiste de 3 passos:

1) Testar para a **hipótese básica** P(0) ou P(menorValor)
2) **Hipótese Indutiva**. Admitir que funciona com n valores ou seja P(n) é verdadeira
3) **Passo Indutivo**. Testar, uma vez sabendo que funciona para n valores usar o que sabe até o momento e verificar para o n+1-valor.

# Princípio da Indução Finita(PIF)

- Exemplo:

$$\sum_{1}^{n} i = n(n+1)/2$$

- Ou seja, se somar 1+2+3+..+n = n(n+1)/2
- Façamos o teste

  Hipótese Básica: o menor valor é n=1, assim P(1) = 1 = 1(1+1)/2 OK

  Hipótese Indutiva : admitir que P(n) = n(n+1)/2

  Passo Indutivo : Verificar se para P(n+1) = (n+1)(n+1+1)/2, ou seja, se a fórmula funciona com n elementos, basta eu substituir n por n+1 e deve dar certo.

# Princípio da Indução Finita(PIF)

- Resolvendo admitindo que P(n) está certo, pois já verificamos que P(0) está certo.
- Assim, $P(n+1) = \underbrace{1+2+ \ldots + n}_{P(n)} + n+1$

$$= P(n) + n+1$$

$$= n(n + 1)/2 + n+1$$

pondo n+1 em evidência,

$= (n+1)(n/2 + 1) = (n+1)(n+2)/2$

Verificamos que o resultado é o

mesmo que se substituirmos n por n+1.

Ok.

Pela hipótese Indutiva. Estamos Admitindo que até aí está certo

# Princípio da Indução Finita(PIF)

- Provar que $1+3+5+ \ldots +(2n-1)= n^2$, $n \in N^*$ (menos o 0)
- Básica: P(1)

  $1 = 1^2$ , **OK**
- Hipótese de indução admitir que P(n) seja verdadeira, isto $P(n)=1+2+3+ \ldots +n= n^2$

  Verifique que o primeiro termo é 1=2.1-1, o segundo é 2=2.2-1 e assim por diante.

  Provemos usando essa hipótese deveremos chegar a $P(n+1) =1+2+3+ \ldots +n+(2(n+1)-1)$

  $=1+2+3+ \ldots +n+(2n +2 -1)$

  $=1+2+3+ \ldots +n+ \quad 2n +1 = (n+1)^2$
- Passo indutivo

  Temos:

  $1+2+3+ \ldots +(2n-1)+2n+1 = P(n) +2 n+1$ , estamos admitindo que a fórmula está certa

  $= n^2 \quad +2 n+1$, isto é um trinômio quadrado perfeito, logo

  $= (n+1)^2$ , **OK**, confere com o que esperamos.

# Princípio da Indução Finita(PIF)

- Prove que $8 \mid (3^{2n} - 1)$, $n \in N^*$, isto é, 8 é divisor de $(3^{2n} - 1)$, ou de outro modo, se dividirmos $(3^{2n} - 1)$ o resto é 0.
- Básica: P(1) é verdade pois $8 \mid (3^{2.1} - 1) = 8$, **OK**
- Hipótese indutiva:

Admitamos que P(n) é verdadeiro e provemos que $8 \mid (3^{2(n+1)} - 1)$

$(3^{2(n+1)} - 1) = 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n}.\mathbf{3^2} - 1$ veja que $\mathbf{3^2 = 9 = 8+1}$

$= 3^{2n}.\mathbf{(8+1)} - 1$ aqui está o pulo do gato

$= 3^{2n}.8 + 3^{2n}.1 - 1$

$= 3^{2n}.8 + \mathbf{3^{2n} - 1}$

como $8 \mid 3^{2n}.8$ e $8 \mid \mathbf{3^{2n} - 1}$ (pela hipótese de indução), logo

$8 \mid (3^{2n}.8 + 3^{2n} - 1)$ , **OK**

# Exercícios

- Enviar em cópia digital (cópia do manuscrito, etc)
- Demonstre, usando o PIF. As vezes a proposição é falsa. Verifique

**(1)** $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

**(2)** $2 + 5 + 8 + \ldots + \ldots + (2 + 3n) = \dfrac{n(4+3n)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

**(3)** $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

**(4)** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

**(5)** $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = [\dfrac{n(n+1)}{2}]^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$