Cálculo Numérico

Zeros de funções

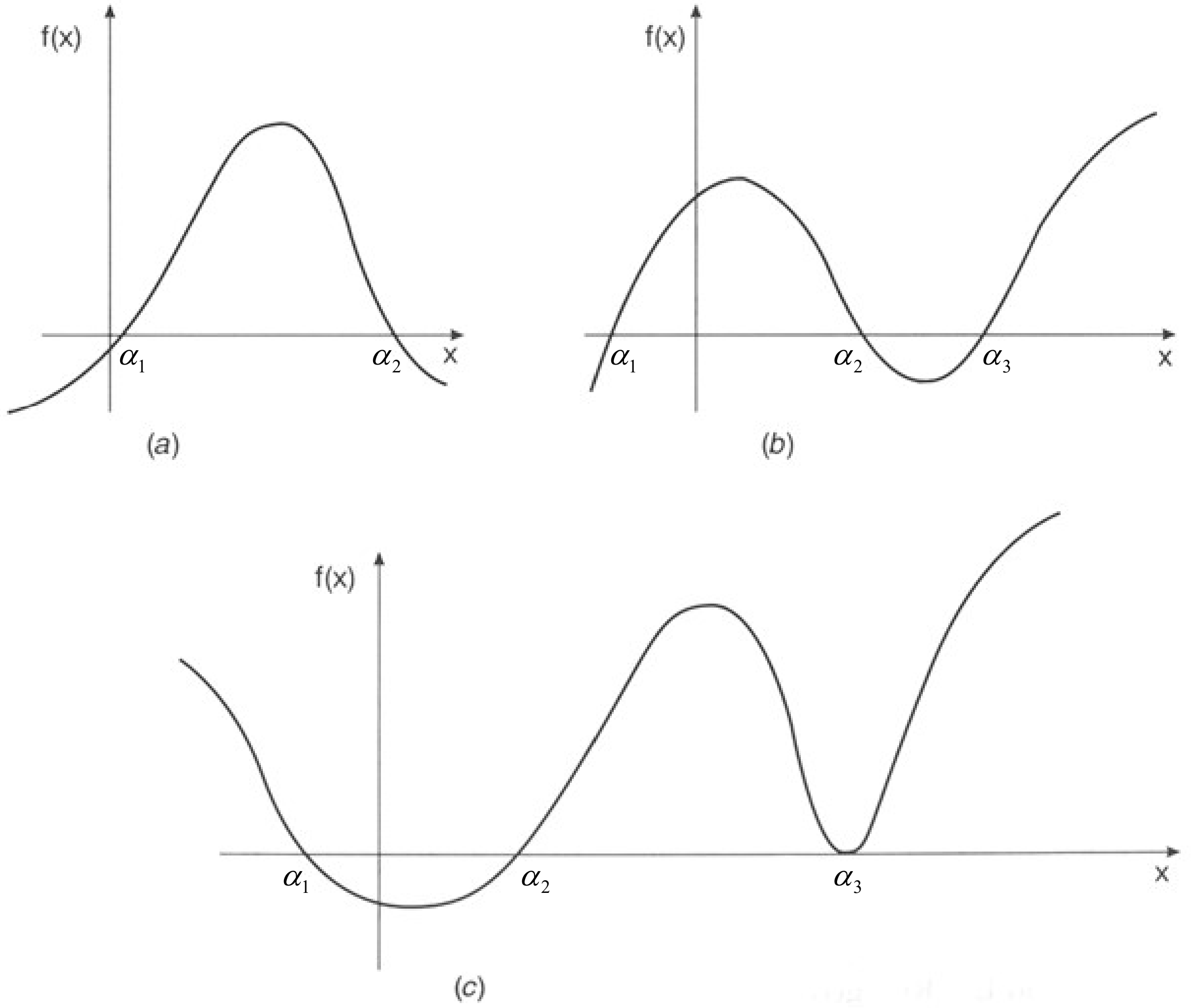
Objetivo

- Estudar métodos numéricos para obtenção de **zeros reais de funções.**

Zero de uma função

Um número real α é um zero da função f(x) ou uma raiz da equação $f(x) = 0$ se $f(\alpha) = 0$.

Zeros de Funções



Obtenção de raízes reais de uma equação

- Para algumas equações como, por exemplo, as equações polinomiais de segundo grau, existem fórmulas explícitas que dão as raízes em função dos coeficientes;

- No caso de polinômios de grau mais alto e no caso de funções mais complexas, é praticamente impossível encontrar os zeros exatamente;

- Nesse caso, determinam-se **aproximações.**

Métodos iterativos para obtenção de raízes

- Partem de uma aproximação inicial para a raiz e refina essa aproximação através de um processo iterativo;
- Esses métodos contemplam duas fases:
  - Fase 1: Isolamento das raízes, que consiste em obter um intervalo que contém a raiz;
  - Fase 2: Refinamento, que consiste em melhorar as aproximações iniciais obtidas na Fase 1 até atingir uma aproximação para raiz dentro de uma precisão prefixada.

Fase 1

Isolamento das Raízes

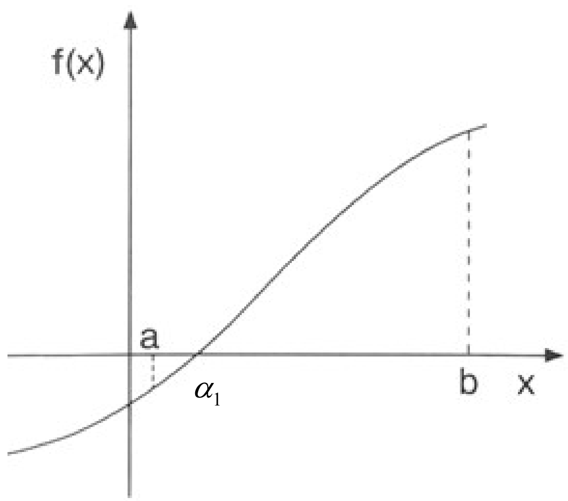
- Nesta fase é feita uma análise **teórica** e **gráfica** da função f(x);
- Na análise teórica usamos o seguinte teorema:

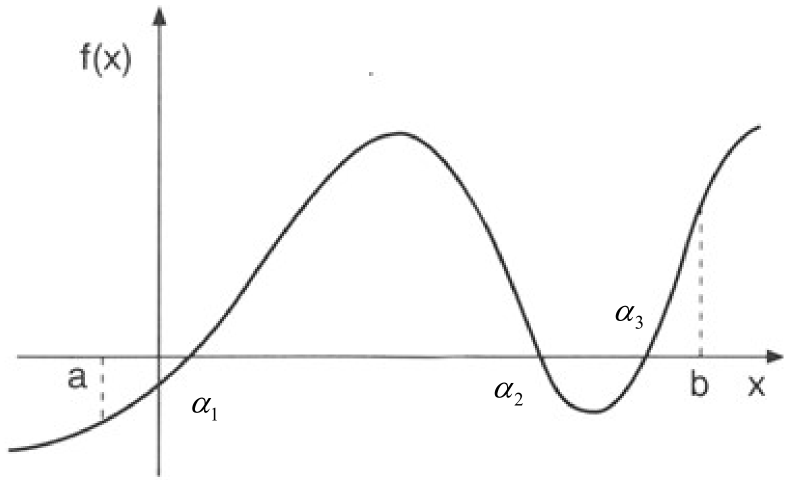
" Seja f(x) uma função contínua em um intervalo $[a, b]$.

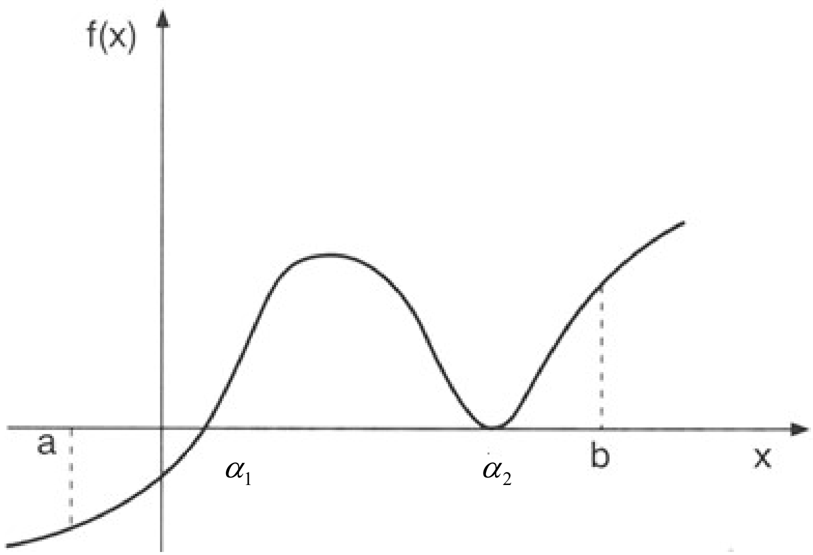
Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \alpha$

entre a e b que é zero de f(x), ou seja, $f(\alpha) = 0$ ".

Isolamento das Raízes - Graficamente







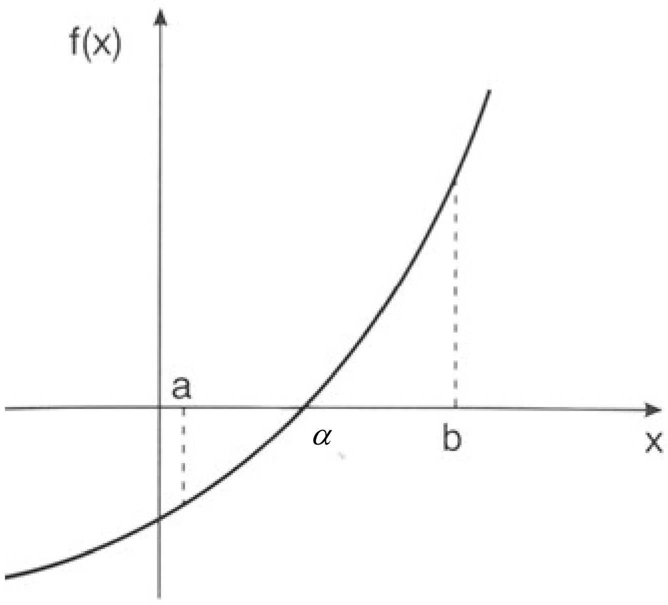
Isolamento das Raízes - Análise Teórica

- Como garantir que só existe uma raiz em um intervalo [a, b]?

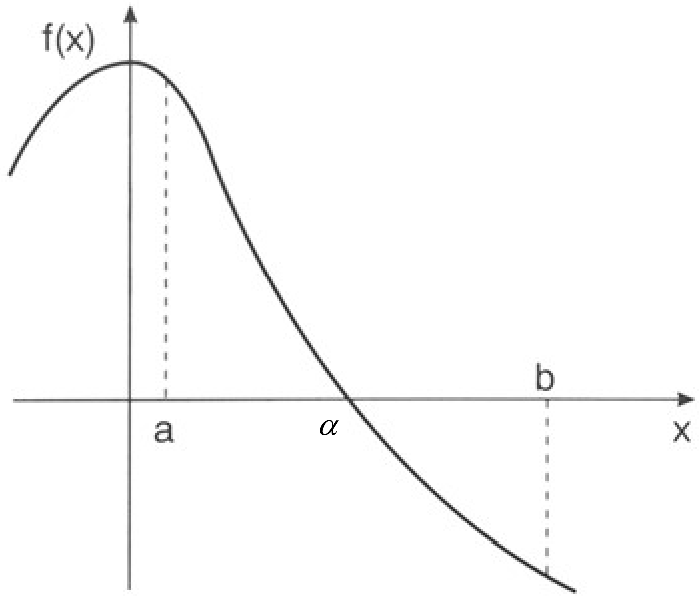
  – Através da análise do sinal da derivada de f(x):

  "Se f'(x) existir e preservar sinal no intervalo [a, b], então esse intervalo contém um único zero de f(x)".

Análise do sinal da derivada Graficamente



$f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$



$f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$

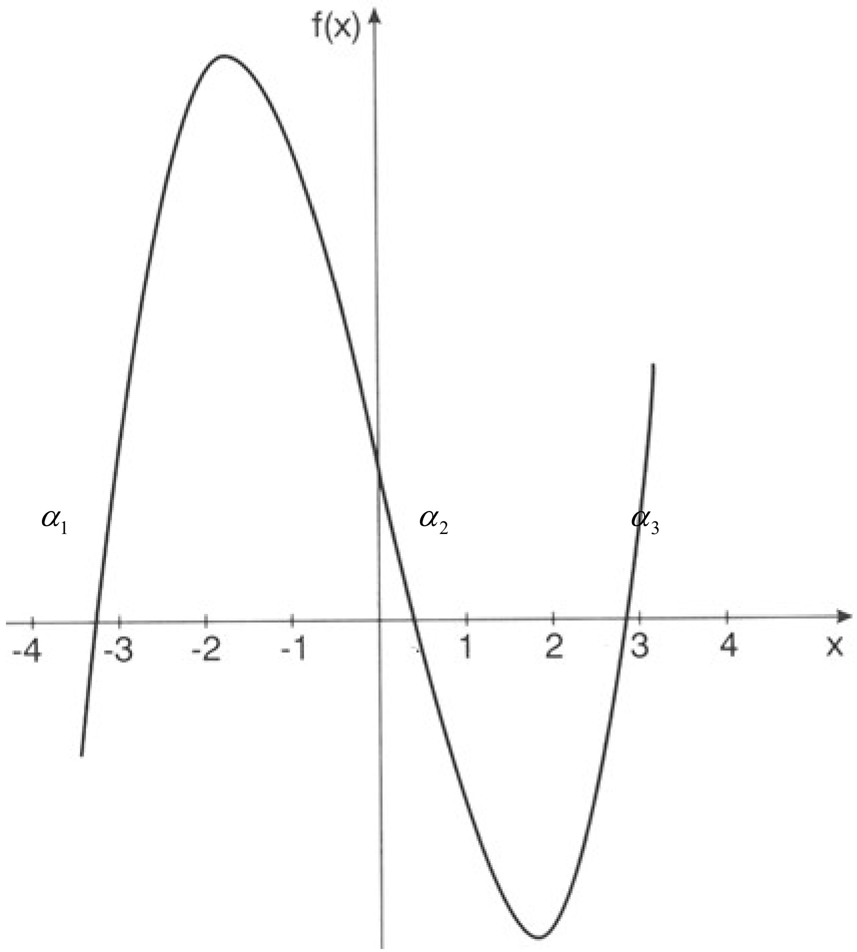
Isolamento das Raízes
Análise Gráfica

A análise gráfica da função f(x) é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz. Essa análise pode ser realizada como segue:

- Esboçar o gráfico da função f(x) e localizar as abscissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo x;
- A partir da equação f(x)=0, obter a equação equivalente g(x) = h(x), esboçar os gráficos das funções g(x) e h(x) (***gráfico particionado***)e localizar os pontos x onde as duas curvas se interceptam;
- Usar programas que traçam gráficos de funções.

Isolamento de Raízes
Análise Gráfica – Esboço do gráfico

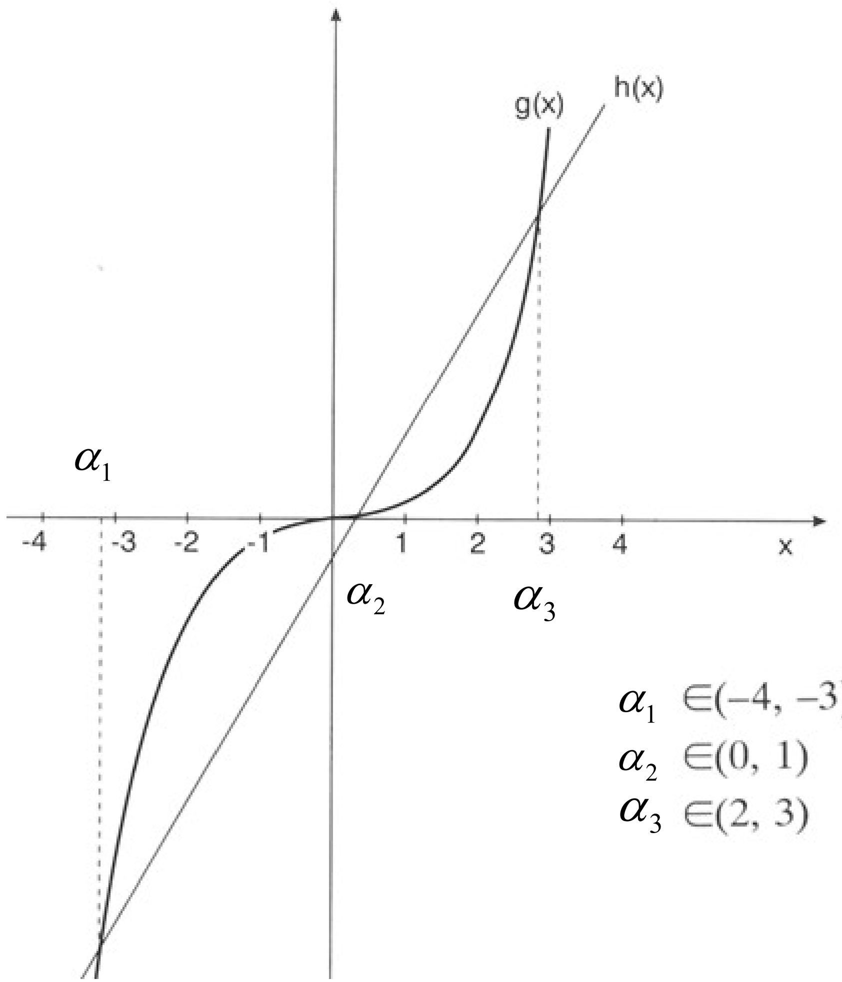
Ex: Isolar as raízes de $f(x) = x^3 - 9x + 3.$



x	f(x)
–4	–25
–3	3
$-\sqrt{3}$	13.3923
–1	11
0	3
1	–5
$\sqrt{3}$	–7.3923
2	–7
3	3

$\alpha_1 \in (-4, -3)$
$\alpha_2 \in (0, 1)$
$\alpha_3 \in (2, 3)$

Isolamento de Raízes- Análise Gráfica – Equação Equivalente *g(x)=h(x)* ou *gráfico particionado*



$\alpha_1 \in (-4, -3)$
$\alpha_2 \in (0, 1)$
$\alpha_3 \in (2, 3)$

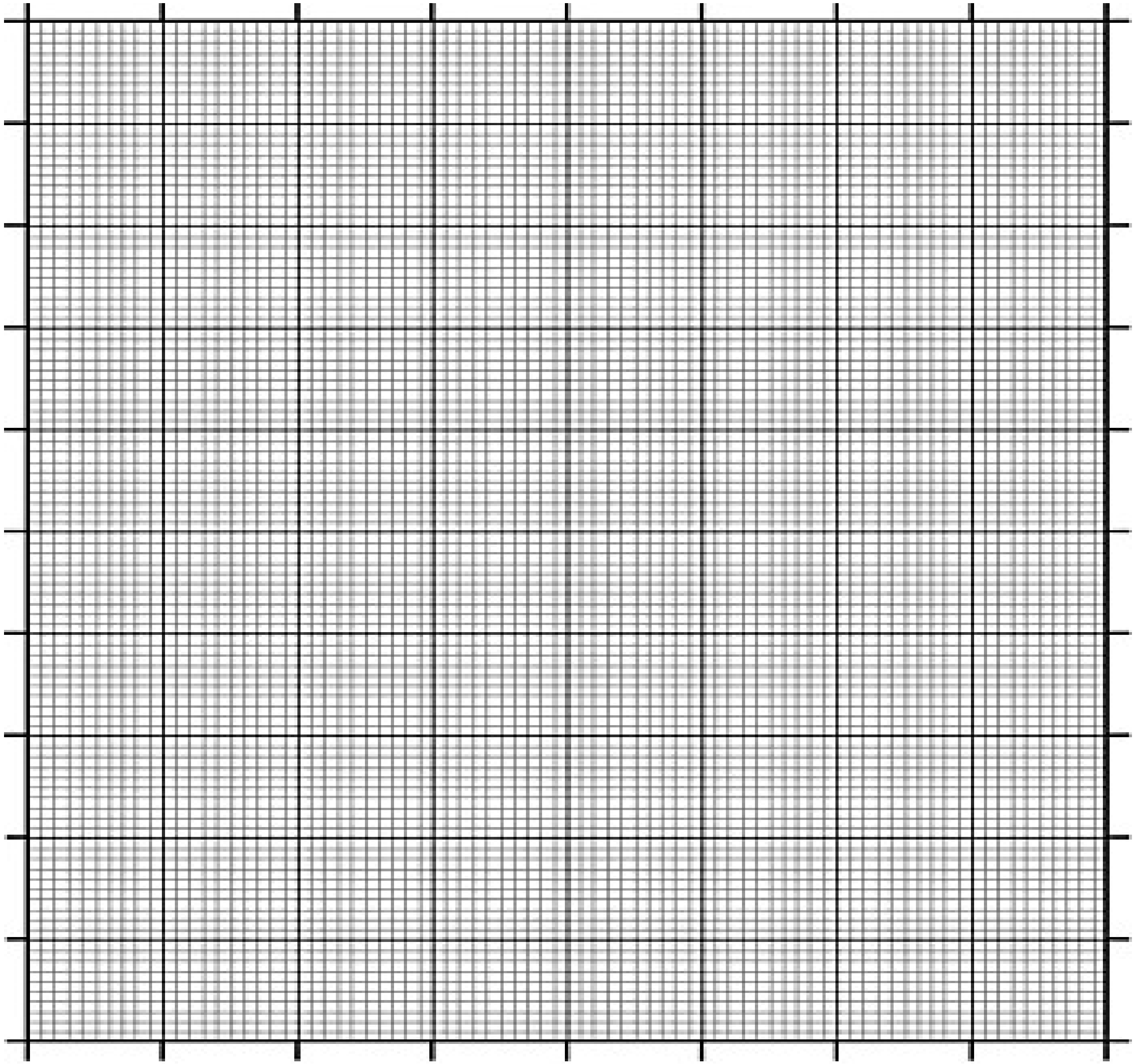
Exercícios:

Isole as raízes das funções a seguir, utilizando a equação equivalente g(x)=h(x) (gráfico particionado).

$$a)\, f(x) = x\ln x - 2{,}2$$

$$b)\, f(x) = x\log x - 1\,,\ \alpha \in (2;3),\ \alpha \in (2.5;2.6)$$

$$c)\, f(x) = xe^{x} - x - 3$$



Fase 2
Refinamento

- Um método iterativo consiste em uma seqüência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais repetidas em ciclos.

- A execução de um ciclo recebe o nome de **iteração**.

Refinamento
Critérios de Parada

- Quando utilizamos um método iterativo precisamos decidir o momento de parar;
- Que tipo de teste efetuar para verificar se a raiz aproximada $\bar{x}$ está suficientemente próximo da raiz exata α ?
- $\bar{x}$ é *raiz aproximada* com precisão ε se:
  - $|\bar{x} - \alpha| < \varepsilon$ ou
  - $|f(\bar{x})| < \varepsilon$

Refinamento: Critérios de Parada

Como não conhecemos a raiz α , uma forma de efetuar o teste de parada é reduzir o intervalo que contém a raiz, até conseguir um intervalo [a, b] tal que:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \in [a,b] \\ b-a<\varepsilon\end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in [a,b], |x-\alpha| < \varepsilon$$

Isso pode ser realizado a partir de 3 critérios :

1. $f(x_n) \leq \varepsilon$

2. $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$

3. $\dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \leq \varepsilon$,

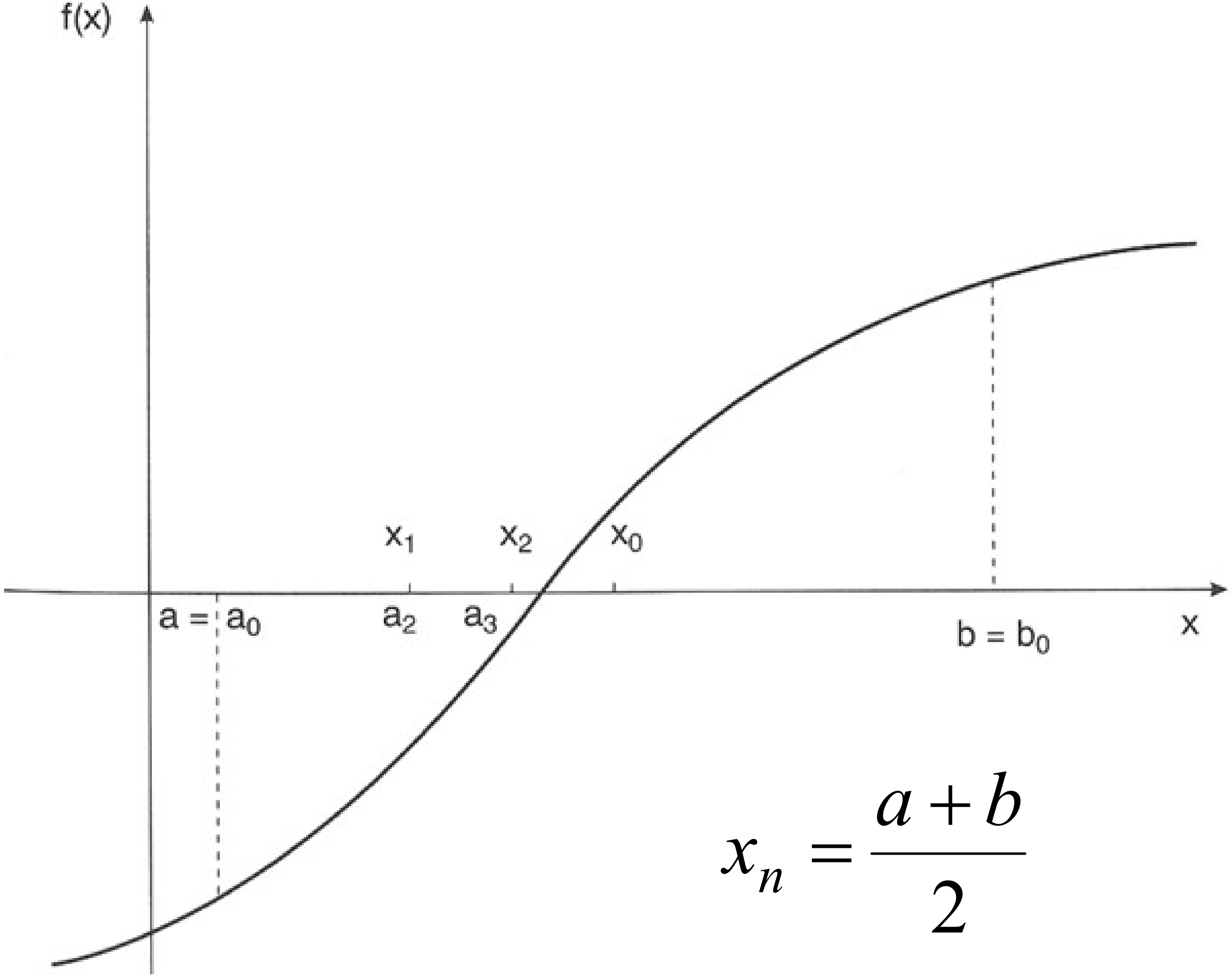
onde os x_i's são as aproximações para a raiz e ε é o erro ou precisão pré-fixada.

Método da Bissecção

- Seja a função f(x) contínua no intervalo [a, b] e tal que

$f(a)f(b) < 0$. O objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até atingir a precisão requerida, usando para isto sucessivas divisões de [a, b] ao meio.

Método da Bissecção – Interpretação Geométrica



$$x_n = \frac{a+b}{2}$$

Estimativa do número de iterações

- Dada uma precisão ε e um intervalo inicial [a, b], é possível saber quantas iterações serão efetuadas pelo método da bissecção até que se obtenha b – a < ε ;
- Vimos que

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Rightarrow k.\log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon) \Rightarrow$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Exercícios

Através do método da bissecção, calcule:

$a) x \log x - 1 = 0$, com $\varepsilon \leq 7 \times 10^{-3}$ 4 casas decimais

$b) x^2 + \ln x = 0$, com $\varepsilon \leq 0{,}05$, tomando-se como intervalo inicial $(0{,}5;1)$. 5 casas decimais

Resolução (a):

n	$\overset{-}{a}$	$\overset{+}{b}$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	2,5	2,6	2,55	0,0367	
1	2,5	2,55	2,525	0,0157	0,025
2	2,5	2,525	2,5125	0,0053	0,0125
3	2,5	2,5125	2,5063	0,0001	0,0062

$$\therefore \alpha \cong 2{,}5063 \ \text{(com 4 casas decimais)}$$

Resolução (b):

n	$\overset{-}{a}$	$\overset{+}{b}$	$x_n = \dfrac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	0,5	1	0,75	0,27482	
1	0,5	0,75	0,625	-0,07938	0,125
2	0,625	0,75	0,6875	0,09796	0,0625
3	0,625	0,6875	0,65625	0,00945	0,03125

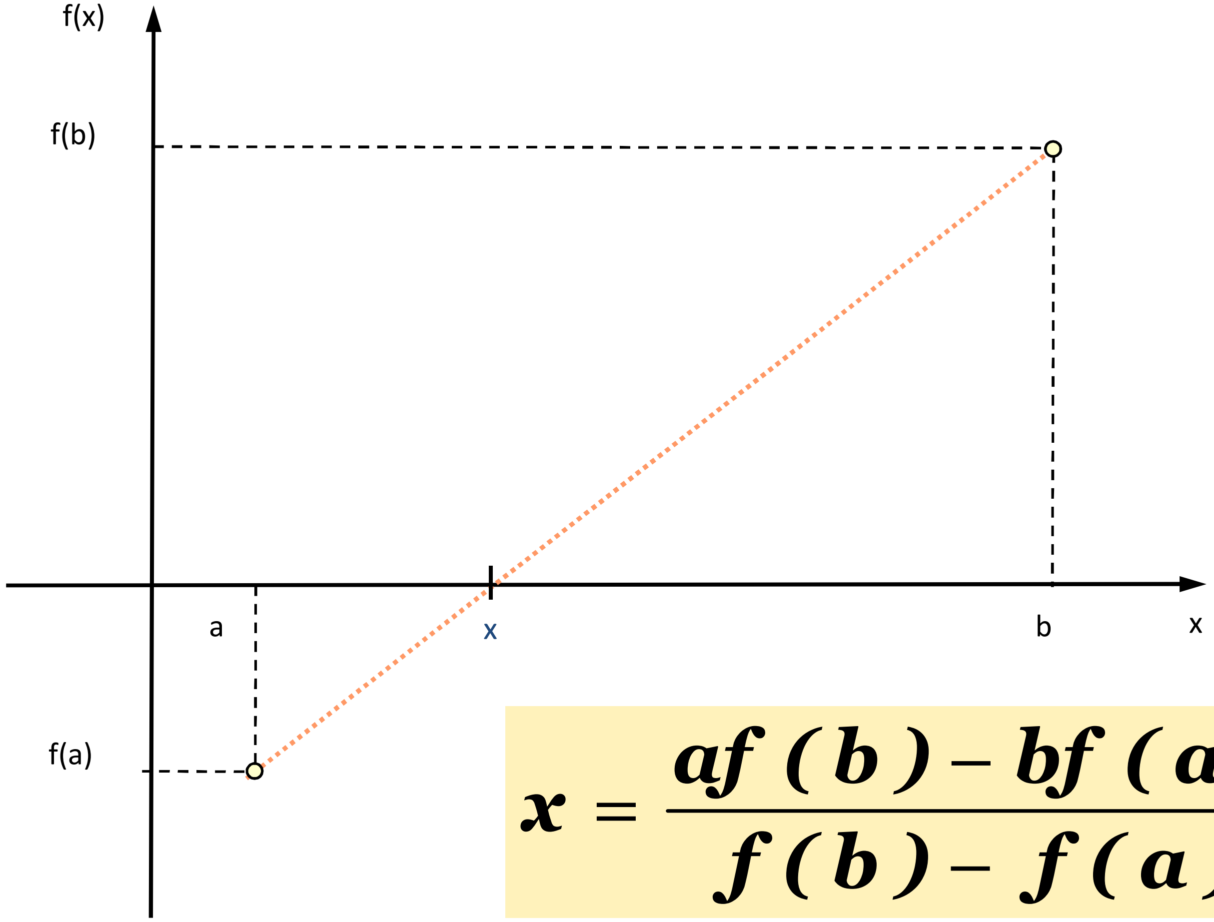
$$\therefore \alpha \cong 0{,}65625 \ \ \text{(com 5 casas decimais)}$$

- Desenvolva um algoritmo que calcule a raiz de uma equação pelo método da bissecção.
  - Dados de entrada: intervalo e erro

Método das cordas

- Método da *Cordas*
  - Calcula a média ponderada dos limites do intervalo que contém a raiz (*[a, b]*).

Obs: No método da *Bissecção* é calcula a média aritmética dos limites do intervalo que contém a raiz (*[a, b]*).

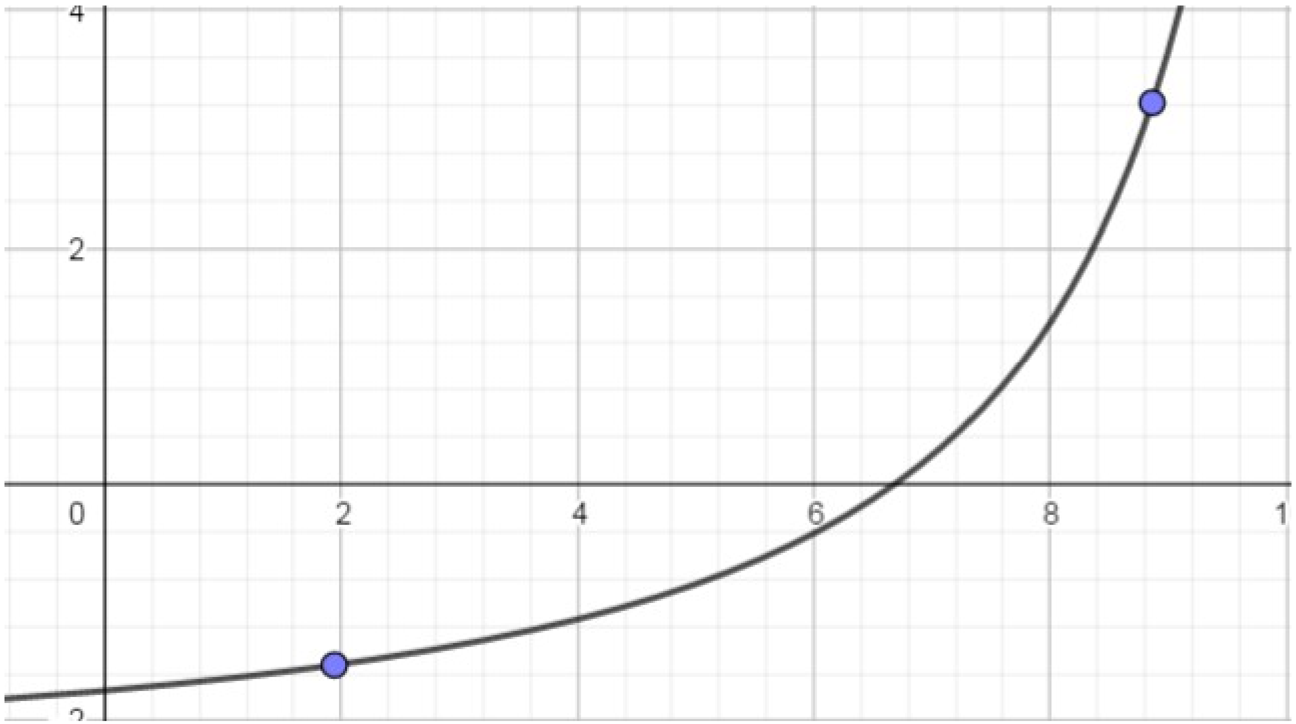


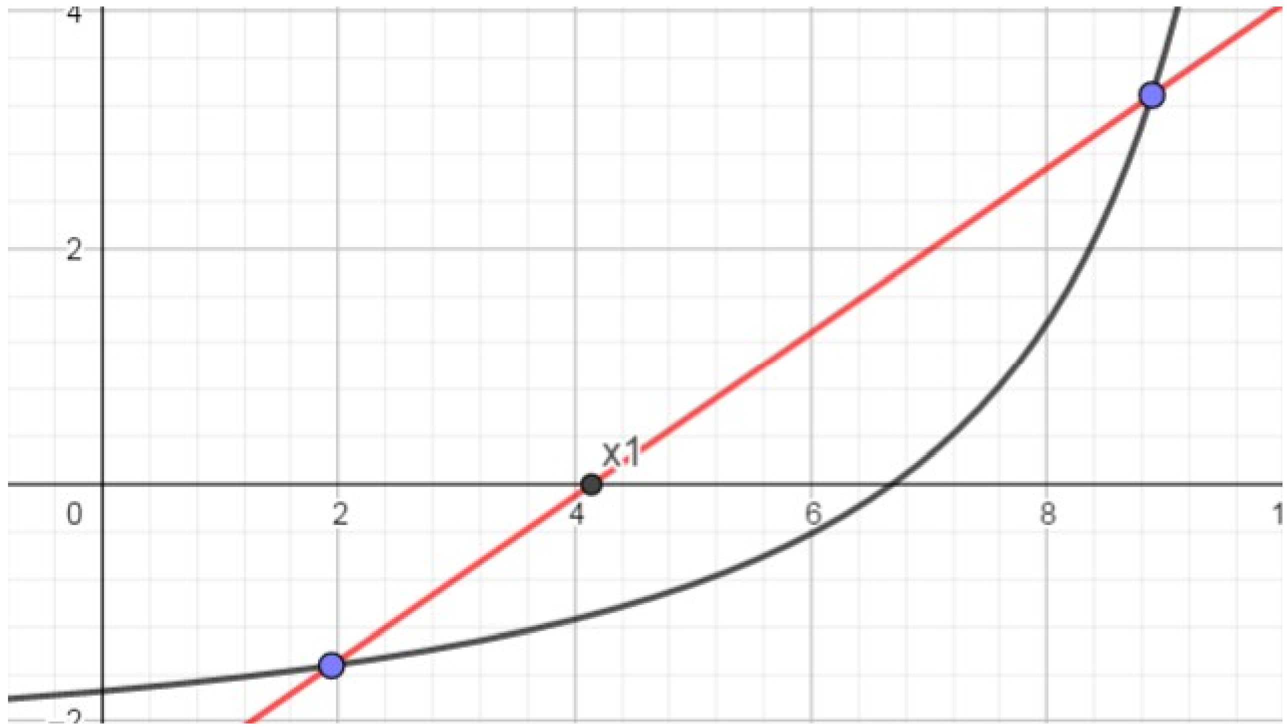
Média ponderada com pesos $|f(a)|$ e $|f(b)|$:

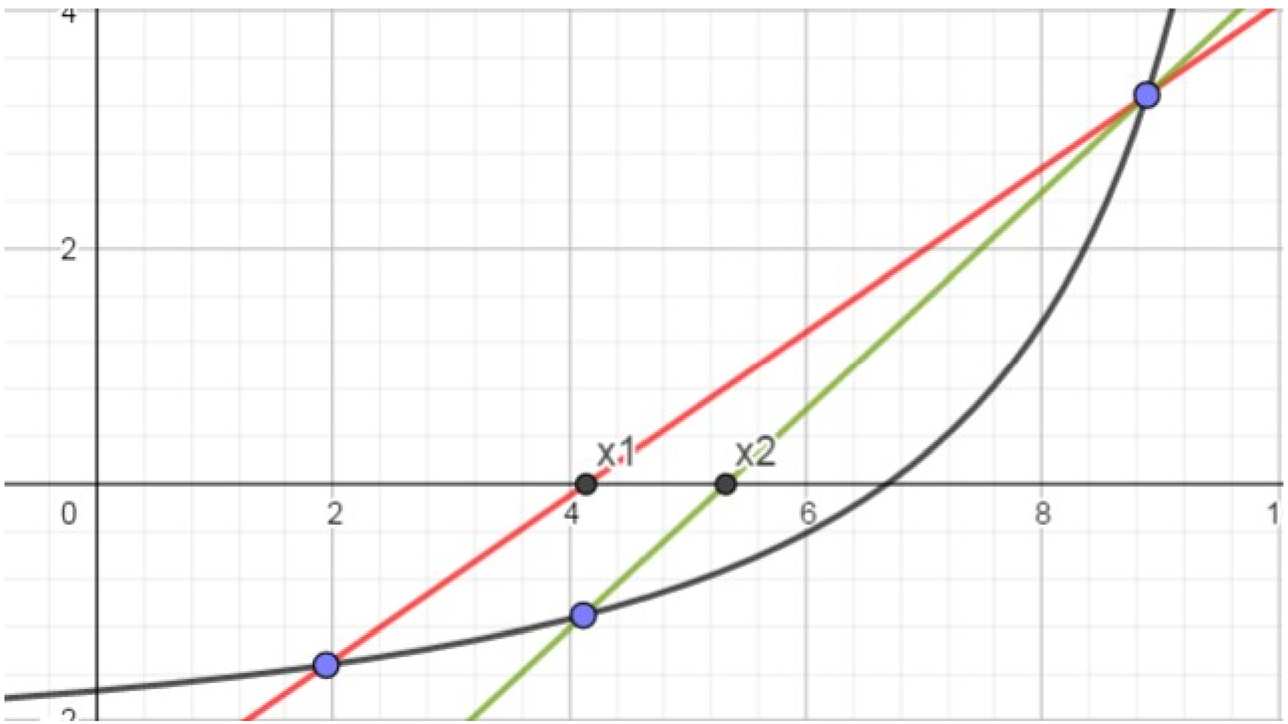
$$\frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

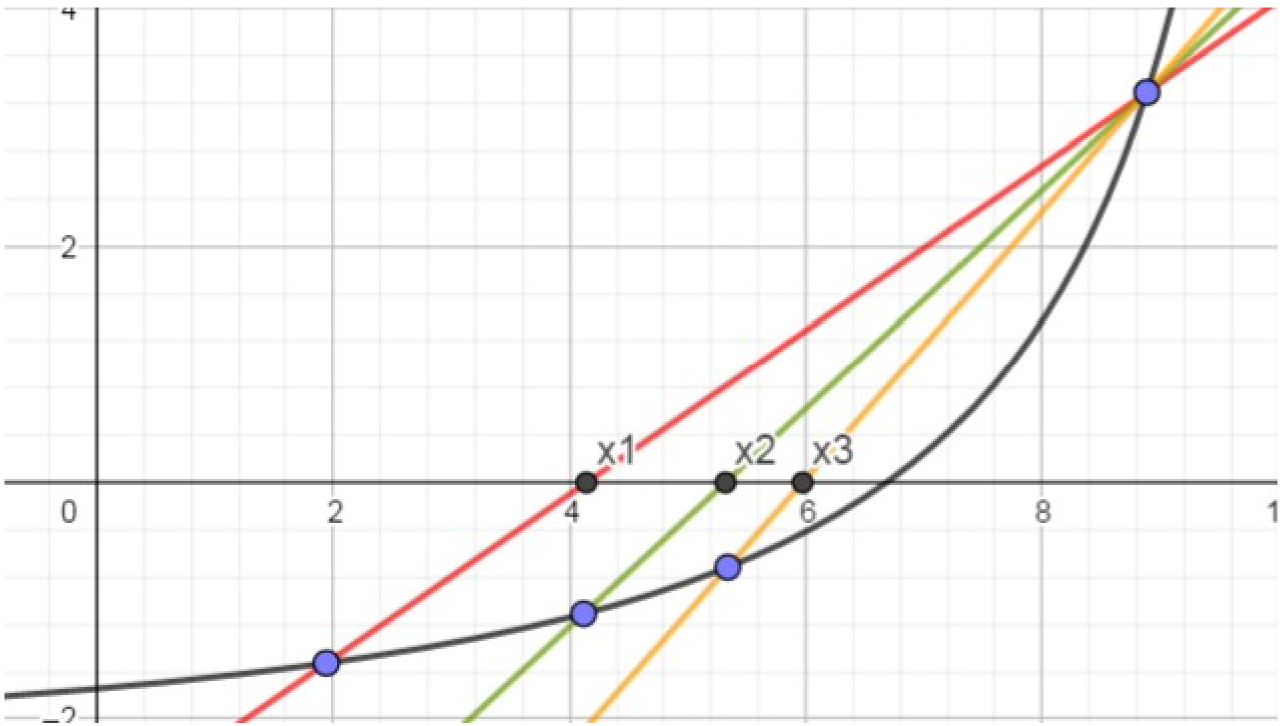
Geometricamente, *x* é a intersecção entre o eixo *OX* e a reta que passa por *(a, f(a))* e *(b, f(b))*.

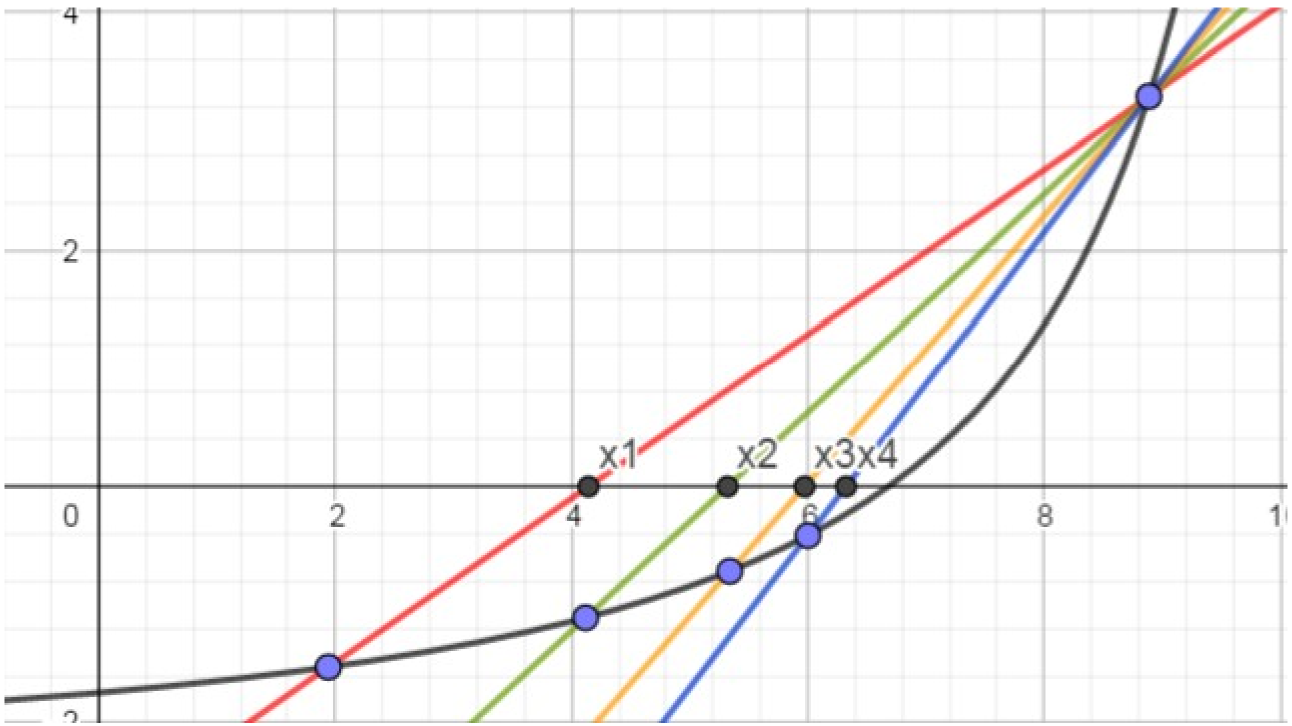

4
2
0
2
4
6
8
1


4
2
x1
0
2
4
6
8
1
−2



4
2
0
2
4
6
8
1
x1
x2

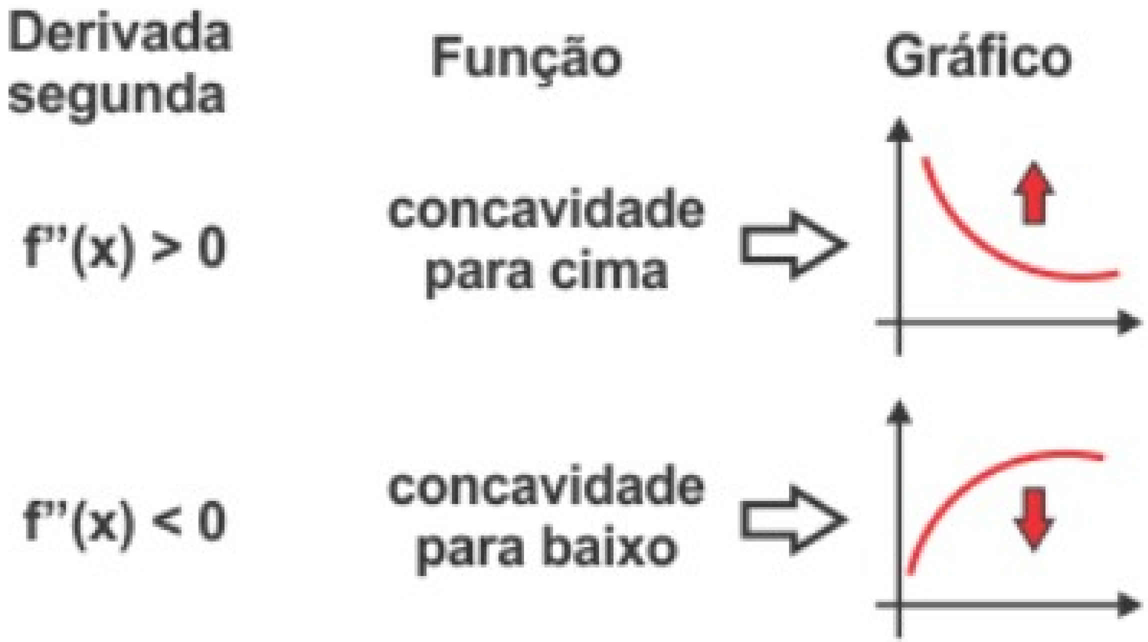

4
2
0
2
4
6
8
1
−2
x1
x2
x3



4
2
0
2
4
6
8
x1
x2
x3x4

Método das cordas – Interpretação Geométrica

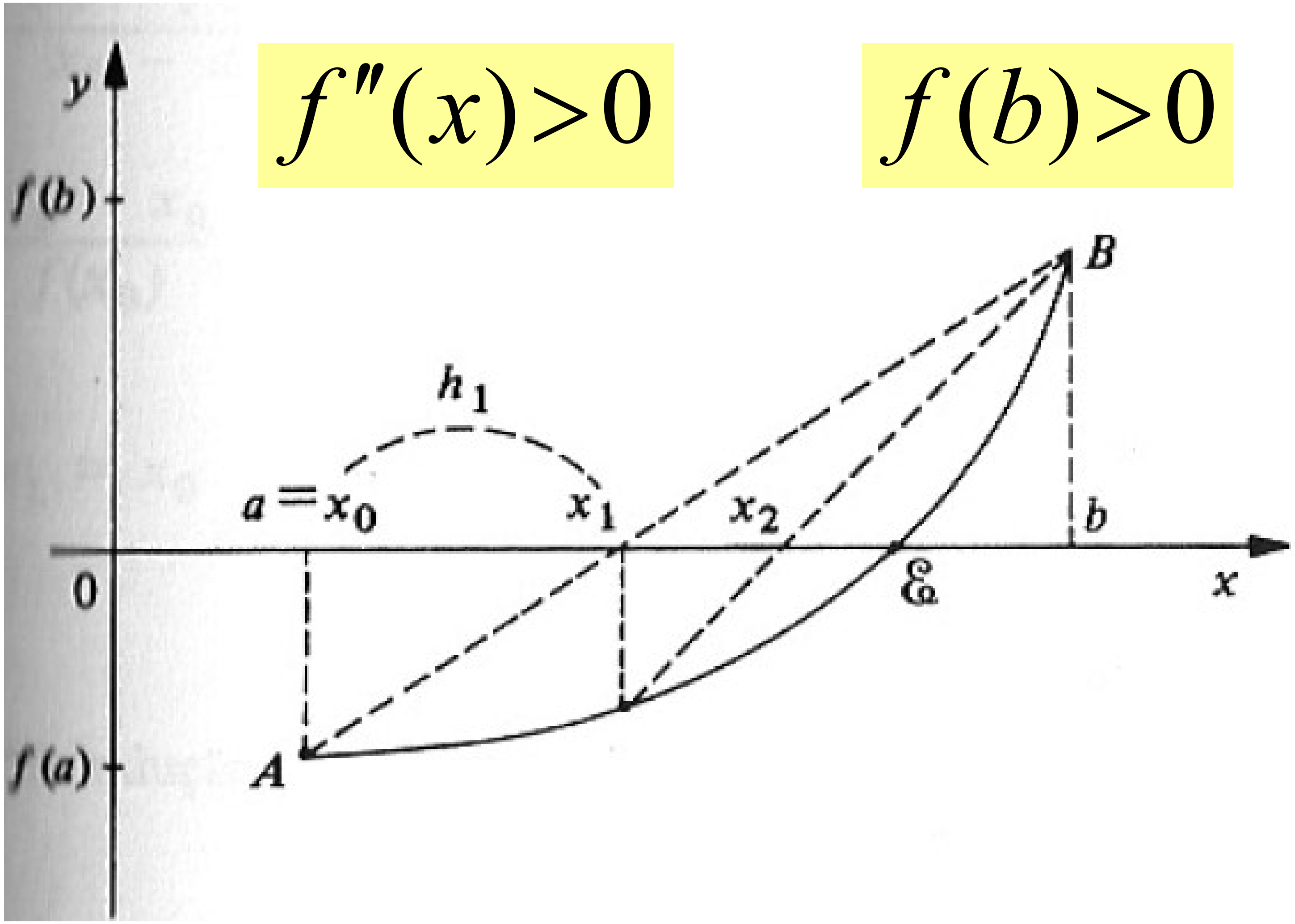
Se $f''(x)$ existe e não muda de sinal no intervalo $[a,b]$, então uma das extremidades do intervalo será fixa.



Fonte: https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/limites-derivadas-e-integrais/derivadas/interpretacao-grafica-das-derivadas-primeira-e-segunda/

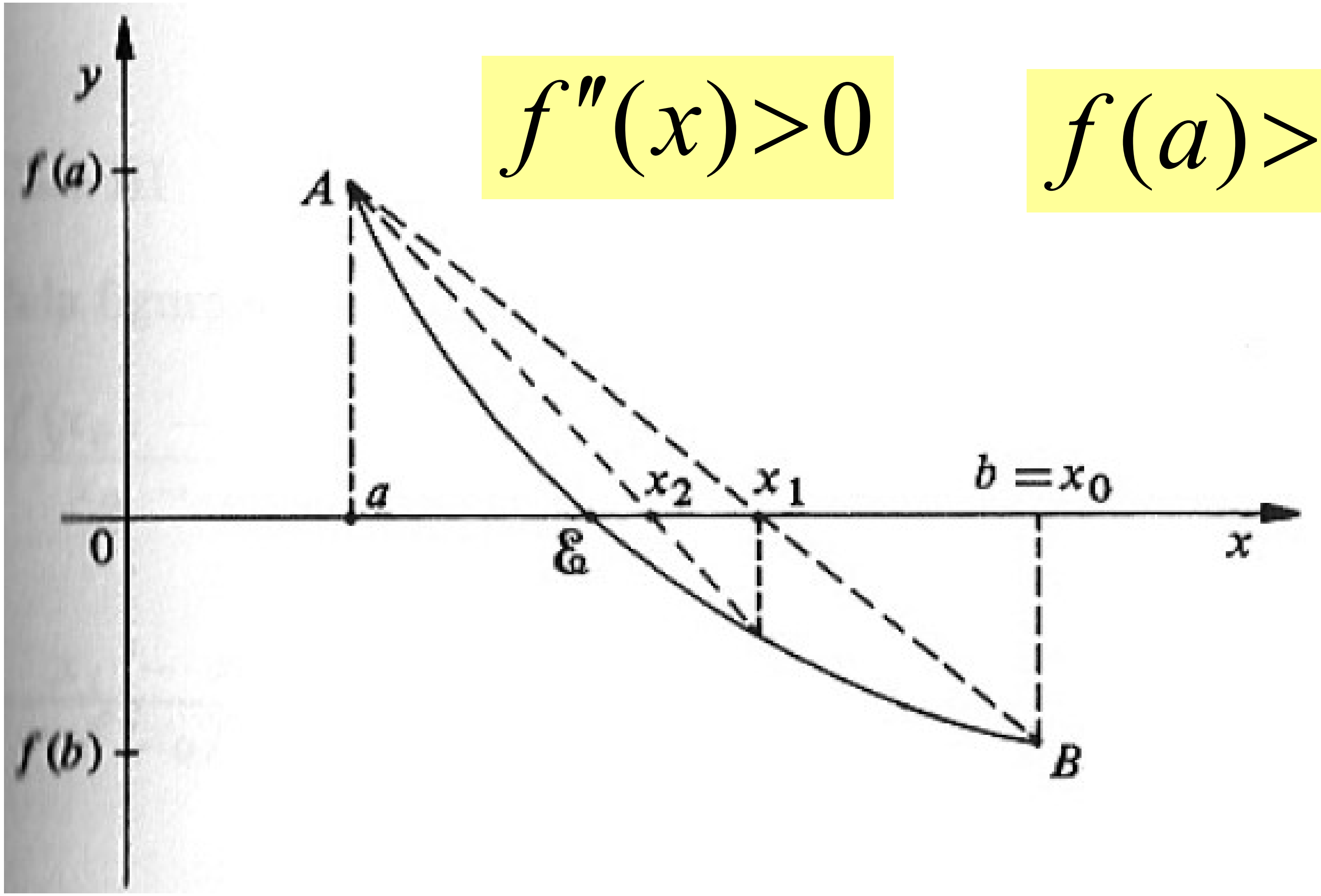
Método das cordas – Interpretação Geométrica

$$f''(x) > 0 \qquad f(b) > 0$$



Caso 1

Método das cordas – Interpretação Geométrica



$$f''(x)>0$$

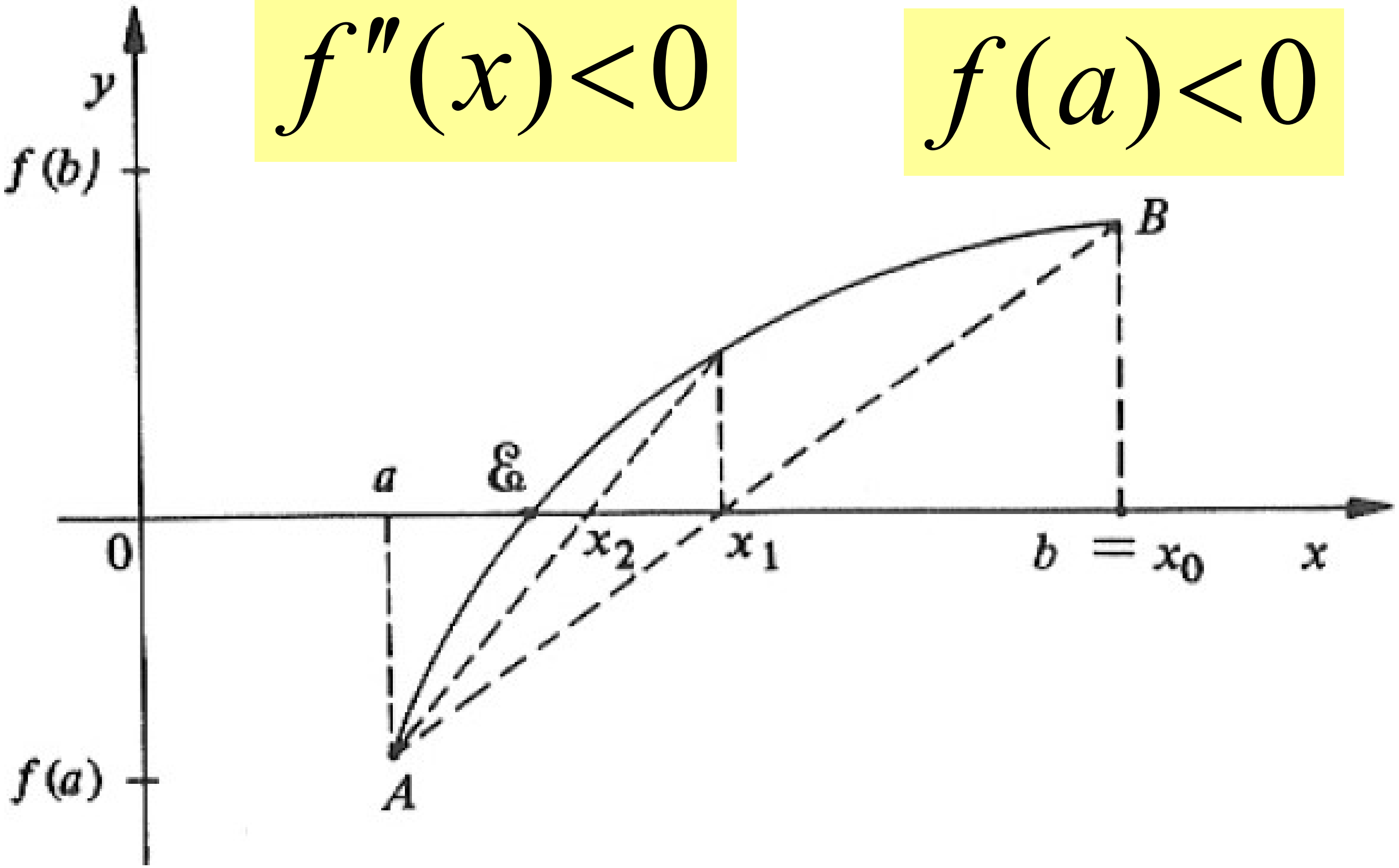
$$f(a)>0$$

Caso 2

Método das cordas – Interpretação Geométrica

$$f''(x)<0$$

$$f(a)<0$$

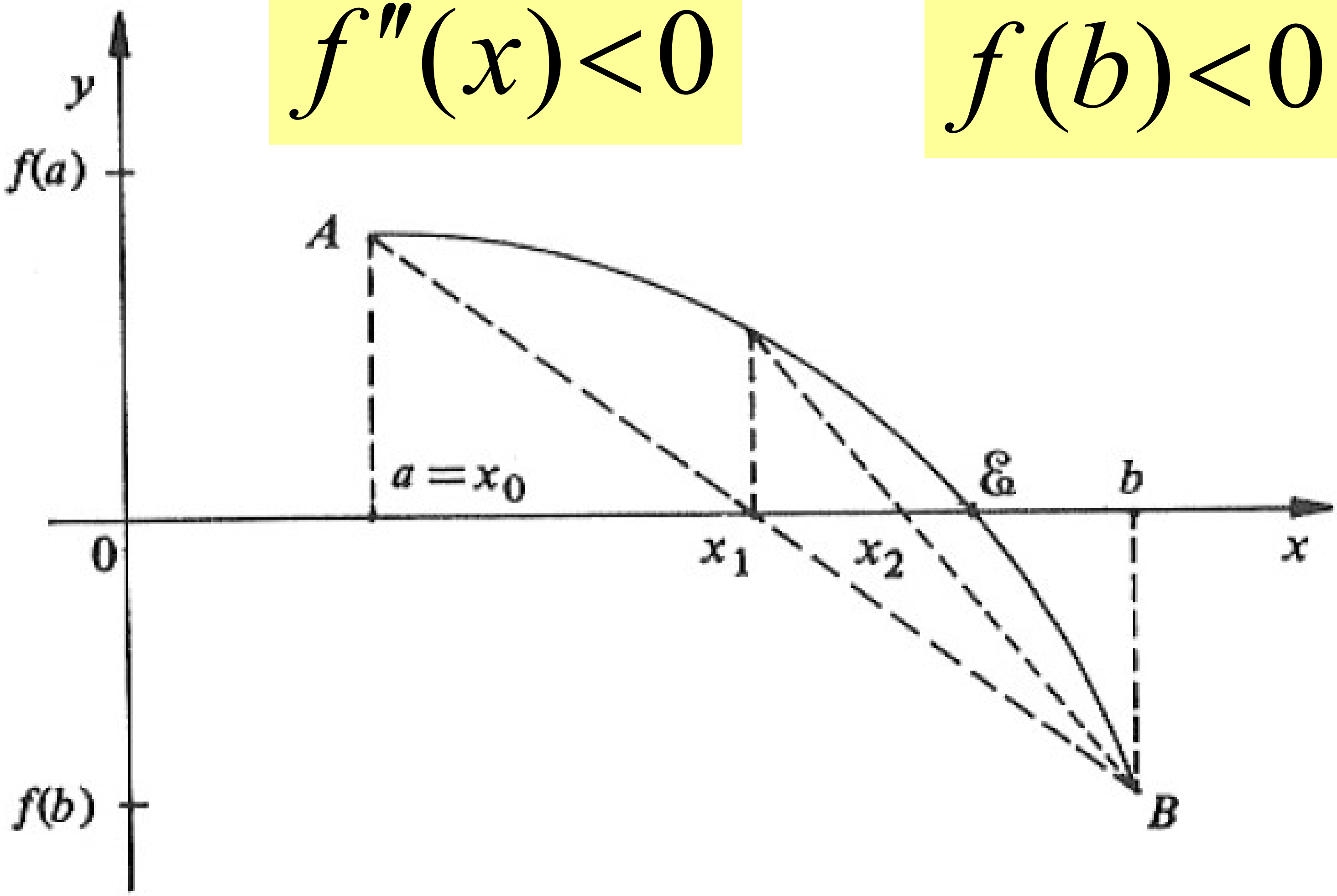


Caso 3

Método das cordas – Interpretação Geométrica

$$f''(x) < 0$$

$$f(b) < 0$$



Caso 4

Ponto fixo

x é ponto fixo se:

$$f(x) \cdot f''(x) > 0$$

Teste de parada:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

Exercícios:

1) Através do método das cordas , determine a raiz aproximada de f:

$a) x\log x - 1 = 0 \quad \xi \leq 10^{-5}$

$c) \cos x - \log x = 0 \quad \xi \leq 10^{-5}$

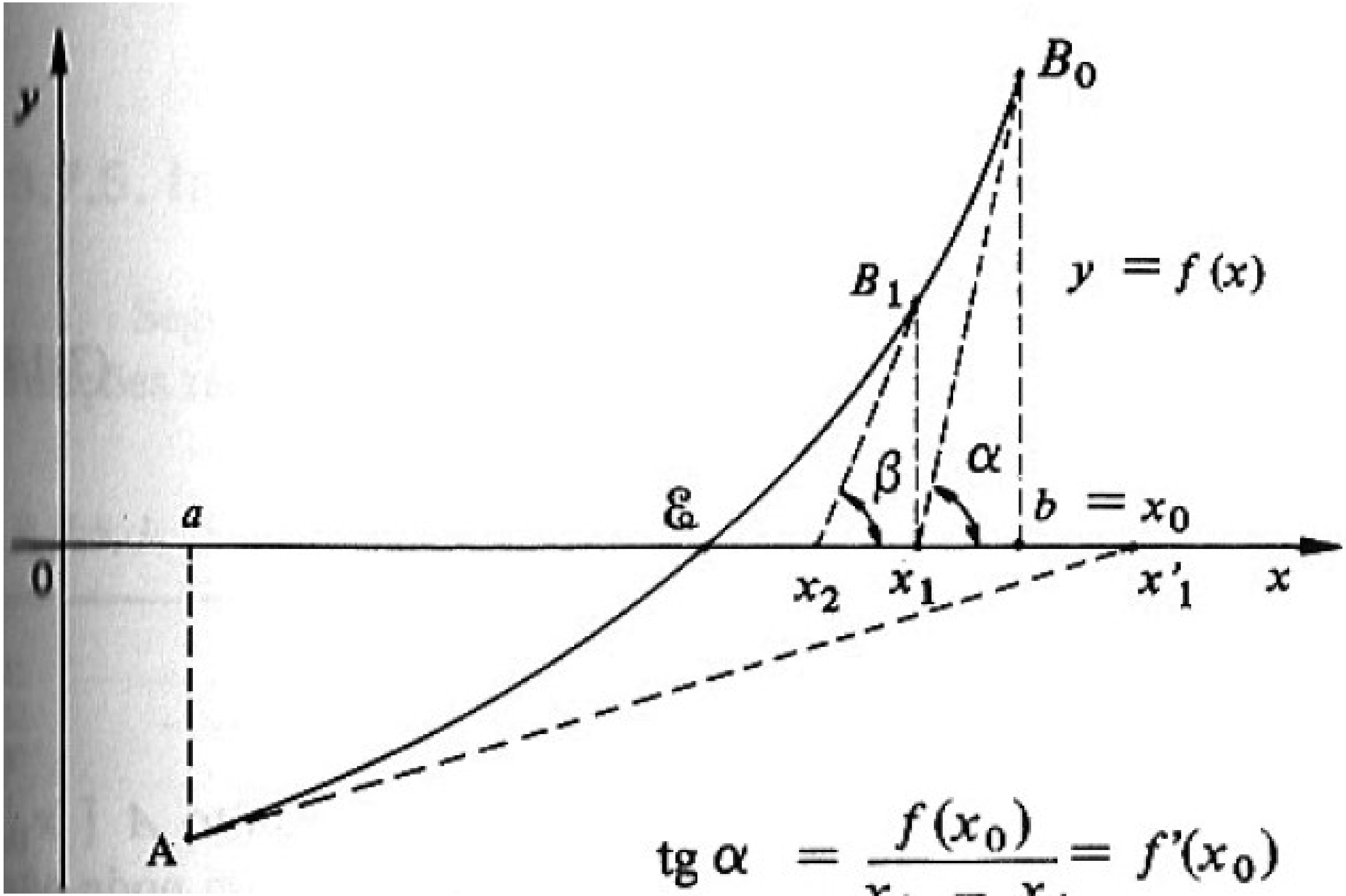
$b) xe^{x} - 1{,}2 = 0 \quad \xi \leq 10^{-4}$

$d) 2\cos x - e^{x} = 0 \quad \xi \leq 10^{-6}$

2) Escreva um algoritmo que calcule a raiz de uma função pelo método das cordas , tendo como dados de entrada a função, o intervalo e a tolerância.

Método de Newton-Raphson

Dada uma função $f(x)$ *contínua no intervalo* $[a,b]$ *onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto* x_0 *com o eixo das abscissas.*



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

$$x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

- Por indução:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

- Escolha de x_0:

$$f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$$

- Teste de parada:

$$\left| x_{n+1} - x_n \right| < \varepsilon$$

Exemplo :

f(x)=xlogx-1 com $\varepsilon \leq 10^{-6}$.

- Calcule a raiz negativa de:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3, \quad \text{com} \quad \varepsilon \leq 10^{-5}.$$

- Utilizando o método de Newton, desenvolva um procedimento para calcular :

$a)\ \sqrt{p}\ ,\ \ p \in R_{+}^{*},$ e teste em $\sqrt{64{,}81}.$

$b)\ \sqrt[3]{p}\ ,\ \ p \in R_{+}^{*},$ e teste em $\sqrt[3]{27{,}432}.$

$c)\ \sqrt[4]{p}\ ,\ \ p \in R_{+}^{*},$ e teste em $\sqrt[4]{8{,}21}.$

$d)\ \sqrt[n]{p}\ ,\ \ p \in R_{+}^{*},$ e teste em $\sqrt[7]{1{,}438}.$

- Exercícios práticos:

1) Implemente os métodos da Bisseção, das cordas e de Newton.

2) Implemente um procedimento para calcular

$$\sqrt[n]{p}\ ,\ \ p \in R_{+}^{*}.$$

3) Realize um estudo de procedimentos para reconhecimento/interpretação de funções como dados de entrada de um programa.

Algumas considerações

➢Bissecção

<u>Vantagens</u>

- Facilidade de implementação;
- Estabilidade e convergência para a solução procurada;
- Desempenho regular e previsível.

Desvantagens

- Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de *f(x)* em um elevado número de iterações);
- Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível);

➢ Cordas

Vantagens

- Estabilidade e convergência para a solução procurada;
- Desempenho regular e previsível;
- Cálculos mais simples que o método de Newton.

Desvantagens

- Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de *f(x)* em um elevado número de iterações);
- Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível).

➢ Newton-Raphson

Vantagens

- Rapidez no processo de convergência;
- Desempenho elevado.

Desvantagens

- Necessidade da obtenção de *f'(x) , o que pode ser impossível em determinados casos;*
- O cálculo do valor numérico de *f'(x)* a cada iteração;
- Difícil implementação.

Bibliografia

- BARROSO, L. C.; BARROSO, M. M. A.; CAMPOS, FILHO, F. F.; CARVALHO, M. L. B. & MAIA, M. L. Cálculo Numérico (com aplicações). Editora Harbra, São Paulo, 1987.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R.; Cálculo Numérico- Aspectos teóricos e computacional. Makron books, São Paulo, 1996.
- Queiroz, B. C. N.; Queiroz, J. E. R.; Barros, M. A.; Resolução Numérica de Equações Parte II. Disponível em: http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=resolu%C3%A7%C3%A3o%20num%C3%A9rica%20de%20equa%C3%A7%C3%B5es%20parte%20ii&source=web&cd=10&ved=0CGcQFjAJ&url=http%3A%2F%2Fwww.dsc.ufcg.edu.br%2F~cnum%2Fmodulos%2FModulo4%2FCN_Parte2_Metodos.ppt&ei=oZSFT7G5F4Si8QSRhpCwCA&usg=AFQjCNHmd9GRcRHrua--wuA06-Uua51-eQ