МИНИСТЕРСТВО НАУКИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационный технологий и программирования

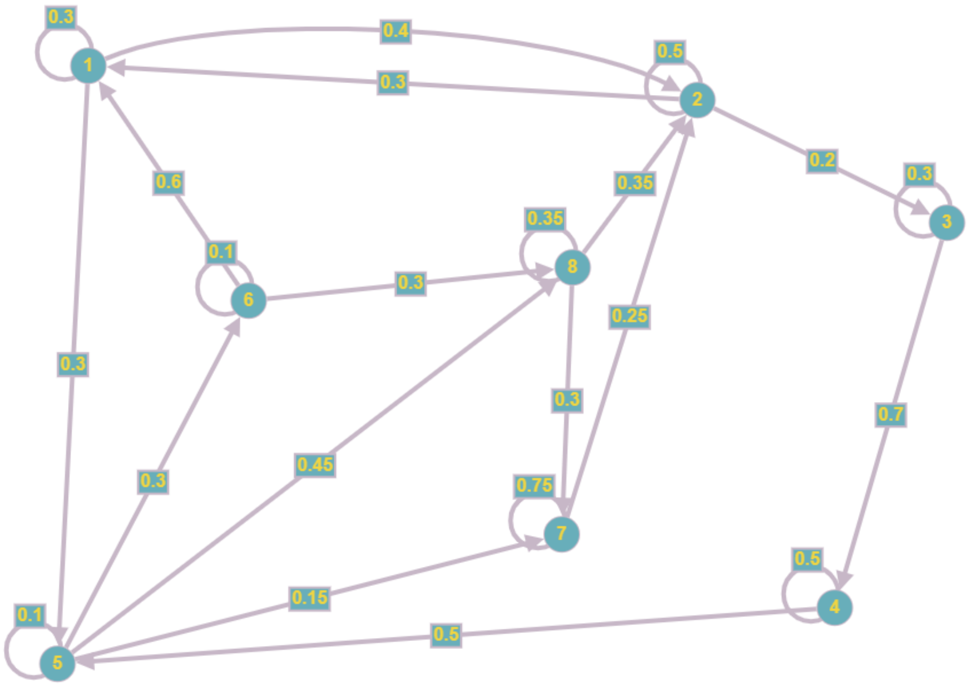
По дисциплине:
«Прикладная математика»
Лабораторная работа №3

Выполнил:

M33091 Ларин В. Д.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2021

1.Исходный граф (Эргодическая цепь Маркова):

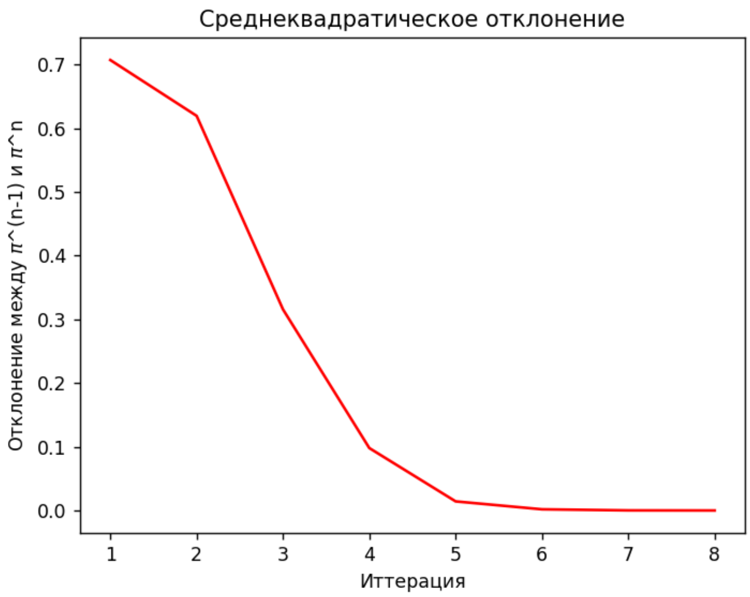


Matrix = 0.3, 0.4, 0, 0, 0.3, 0, 0, 0,
0.3, 0.5, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0.3, 0.7, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0.5, 0.5, 0, 0, 0,
0, 0, 0, 0, 0.1, 0.3, 0.15, 0.45,
0.6, 0, 0, 0, 0, 0.1, 0, 0.3,
0, 0.25, 0, 0, 0, 0, 0.75, 0,
0, 0.35, 0, 0, 0, 0, 0.3, 0.35,

2. Распределение по состояниям при m −>∞ численно

2.1 при изначальном векторе вероятности состояний
[0,0,0,1,0,0,0,0]

График Среднеквадратического отклонения:



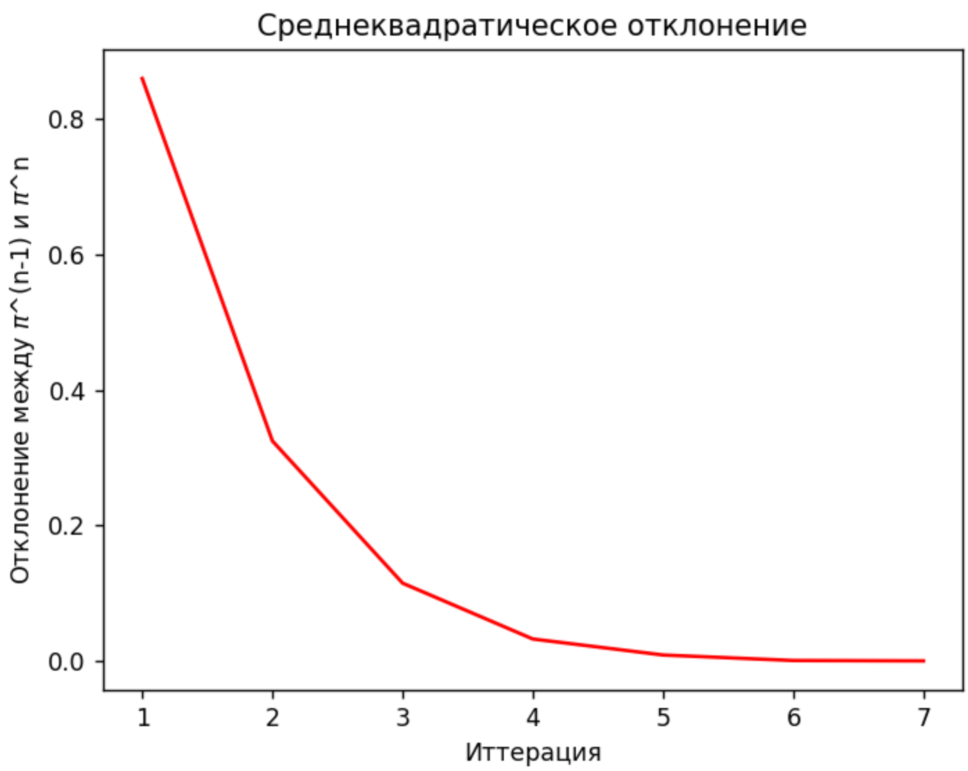
Полученный результат:

```
Solution for state vector [0 0 0 1 0 0 0 0]
[0.14461123 0.26589795 0.07597083 0.10635939 0.1072924  0.03576417
 0.17331808 0.09078594]
```

2.2 при изначальном векторе вероятности состояний
[0,0,0,1,0,0,0,0]

График Среднеквадратического отклонения:
при изначальном векторе вероятности состояний
[1,0,0,0,0,0,0,0]

График Среднеквадратического отклонения:



Полученный результат:

```
Solution for state vector [1 0 0 0 0 0 0 0]
[0.14461174 0.26589931 0.0759718  0.10635963 0.1072919  0.03576353
 0.17331819 0.0907839 ]
```

Вывод:

```
Среднеквадратическое отклонение для разных первоначальных условий: 2.8216241095348665e-06
```

Таким образом π_j-вероятность того, что система находится в j-м состоянии. π_j не зависит от начального состояния, с которого начинается имитационное π моделирование (финальные вероятности).

3. Распределение по состояниям при m −>∞ аналитически:

Полученный результат:

```
Analytics solution for state vector [1. 0. 0. 0. 0. 0. 0. 0.]
[0.14461129 0.26589819 0.07597091 0.10635927 0.10729225 0.03576408
 0.17331825 0.09078575]
```

Листинг кода:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

matrix = np.array([[0.3, 0.4, 0, 0, 0.3, 0, 0, 0,],
        [0.3, 0.5, 0.2, 0, 0, 0, 0, 0,],
        [0, 0, 0.3, 0.7, 0, 0, 0, 0,],
        [0, 0, 0, 0.5, 0.5, 0, 0, 0,],
        [0, 0, 0, 0, 0.1, 0.3, 0.15, 0.45,],
        [0.6, 0, 0, 0, 0, 0.1, 0, 0.3,],
        [0, 0.25, 0, 0, 0, 0, 0.75, 0,],
        [0, 0.35, 0, 0, 0, 0, 0.3, 0.35,]])
vector1 = np.array([0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0])
vector2 = np.array([1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])
epsilon = 0.0001
step = 1
mse = 1


def solve(vector, matrix, step, mse, epsilon):
    print('Solution for state vector', vector)
    mse_values = []
    x_values = []
    while mse > epsilon:
        powered_matrix = np.linalg.matrix_power(matrix, step)  # возведение
матрицы в степень
        new_vector = vector.dot(powered_matrix)  # скалярное произведенеие
        mse = np.linalg.norm(vector - new_vector)

        mse_values.append(mse)
        x_values.append(step)

        vector = new_vector
        step += 1

    plt.title("Среднеквадратическое отклонение")
    plt.xlabel("Иттерация")
    plt.ylabel("Отклонение между $\pi$^(n-1) и $\pi$^n")
    plt.plot(x_values, mse_values, 'r')
    plt.show()

    print(vector, '\n')
    return vector


def analytics(matrix, n):
    matrix_this = matrix.T
    matrix_this -= np.eye(n)
    matrix_this[0] = np.ones(n)
    vector_analytics = np.zeros((n,))
    vector_analytics[0] = 1
    result = np.linalg.solve(matrix_this, vector_analytics)  # решение
системы
```

Ответы на вопросы:

1. Случайная величина(дискретная) - это функция из множества элементарных исходов в множество вещественных не отрицательных чисел. Множество элементарных исходов должно быть конечным или счётным множеством чисел.

2. Модель Марковского процесса представляет собой граф, где узлы обозначают состояние моделируемого объекта, а дуги – вероятность перехода из одного состояния в другое.

3. Марковские процессы делятся на два вида:

    1. Дискретные цепи Маркова, где система меняет свое состояние в определенные такты времени (P-схема)

    2. Непрерывные цепи Маркова, где система меняет свое состояние в произвольный момент времени (q-схема)

4. λ_{ij}- вероятность переходи из i-го состояния в j-ое

5. Стохастическая матрица в теории вероятностей — это неотрицательная матрица, в которой сумма элементов любой строки или любого столбца равна единице.

6. Если существует такое k >0 , что при любых допустимых состояниях Xi и X j вероятности πij(k) положительны, то цепь эргодична.