Лабораторная работа №1

Сафонова М3133

1) $x_n = \operatorname{arctg} \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{20n+3}{n+2}$

пусть n - нечетно, $n = 2k-1$

$$x_n = x_{2k-1} = \frac{20(2k-1)+3}{(2k-1)+2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1+(-1)^{2k-1}}{2}\right) =$$

$$= \frac{40k-17}{2k+1} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1-1}{2}\right) = \frac{40k-17}{2k+1} \cdot 0 = 0$$

пусть n - четно, $n = 2k$

$$x_n = x_{2n} = \frac{20(2k)+3}{2k+2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1+(-1)^{2k}}{2}\right) = \frac{40k+3}{2k+2} \operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \frac{40k+3}{2k+2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{40k+3}{2k+2} \cdot \frac{\pi}{4}$$

Первая последовательность $x_k = 0$, $k = 1, 2\ldots$

Вторая последовательность $x_k = \frac{40k+3}{2k+2} \cdot \frac{\pi}{4}$

Частичные пределы: $k = 1, 2\ldots$

$$\lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{40n+3}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{40 + \overbrace{\frac{3}{n}}^{\to 0}}{2 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}} \cdot \frac{\pi}{4} = 5 \cdot \pi$$

Верхний предел последовательности – наибольший предел среди всех частичных пределов

$$\overline{\lim}\, x_n = 0$$

Нижний предел последовательности – наименьший предел среди всех частичных пределов

$$\underline{\lim}\, x_n = 5 \cdot \pi$$

Последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда

$$\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n.$$

т.к в нашем случае

$\underline{\lim} x_n \neq \overline{\lim} x_n.$, то последов. расходится.

2) Первая последовательность

$x_n = 0, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

$\inf x_n = 0$

$\sup x_n = 0$

$$\overline{\lim} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

$$\underline{\lim} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Вторая последовательность.

$$x_k = \frac{40k+3}{2k+2} \cdot \frac{\pi}{4}, \quad k = 1, 2 \ldots$$

$$\frac{40k+3}{2k+2} = \frac{20(2k+2) - 37}{2k+2} = 20 - \frac{37}{2k+2}$$

$$x_k = \left(20 - \frac{37}{2k+2}\right) \cdot \frac{\pi}{4}, \quad k = 1, 2 \ldots$$

пос-ть, монотонно возрастает.

Покажем это. Пусть $n < m$

$$x_n - x_m = \frac{\pi}{4}\left(\cancel{20} - \frac{37}{2n+2} - \cancel{20} + \frac{37}{2m+2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{37}{2m+2} - \frac{37}{2n+2}\right) = \frac{37\pi}{4}\left(\frac{n-m}{(2m+2)(n+1)}\right)$$

$$n < m \Rightarrow \begin{array}{l} 2m+2>0 \\ n+1>0 \\ n-m<0 \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} x_n - x_m < 0 \\ x_n < x_m \end{array}$$

$\Rightarrow$ пос-ть монотонно возрастает

$$x_1 = \frac{40\cdot 1+3}{2\cdot 1+2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{43}{8}\pi$$

$\inf x_n = \frac{43}{8}\pi$, т.к

1) $x_n \geqslant \frac{43}{8}\pi$ для всех $n = 1,2,3\ldots$ (в силу возрастания последовательности)

2) Для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n = 1 : x_n < \frac{43}{8}\pi + \varepsilon$

Покажем, что $\sup x_n = 5\pi$

1) $$x_n = \left(20 - \frac{37}{2n+2}\right)\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{37}{2n+2} > 0, \quad 20 - \frac{37}{2n+2} < 20$$

$$x_n = \left(20 - \frac{37}{2n+2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} < 20\cdot\frac{\pi}{4} = 5\pi$$

$x_n \leq 5\pi$, для всех $n = 1,2,3\ldots$

2) $\varepsilon > 0$, найдем n, такое, что

$$x_n > 5\cdot\pi - \varepsilon$$

$$\left(20 - \frac{37}{2n+2}\right)\cdot\frac{\pi}{4} > 5\cdot\pi - \varepsilon$$

$$20-\frac{37}{2n+2}>(5\cdot\pi-\varepsilon)\cdot\frac{4}{\pi}$$

$$\cancel{20}-\frac{37}{2n+2}>\cancel{20}-\frac{4\varepsilon}{\pi}$$

$$\frac{37}{2n+2}<\frac{4\varepsilon}{\pi}$$

$$2n+2>\frac{37\pi}{4\varepsilon}$$

$$2n>\frac{37\pi}{4\varepsilon}-2$$

$$\boxed{n>\frac{37\pi}{8\varepsilon}-1}$$

Пусть $n=\left[\frac{37\pi}{8\varepsilon}-1\right]+1$

$\Rightarrow x_n>5\cdot\pi-\varepsilon$

Получили, что

1) $x_n\le 5\cdot\pi$, $n=1,2,3\ldots$

2) Для $\forall\,\varepsilon>0$ существует $\left[\frac{37\pi}{8\varepsilon}-1\right]+1$, такое что $x_n>5\cdot\pi-\varepsilon$

$\Rightarrow \sup x_n=5\cdot\pi$

Верхний предел последоват.

$$\overline{\lim} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$

$$\sup_{k\geq n} x_k = 5\cdot\pi$$

Нижний предел послед.

$$\underline{\lim} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

$$\inf_{k\geq n} x_k = x_n = \frac{40n+3}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\underline{\lim} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{40n+3}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{4} = 5\pi$$

3) Имеет ли x_n наибольший и наим. элементы.

$$x_n = \frac{20n+3}{n+2} \operatorname{arctg} \frac{1+(-1)^n}{2}$$

$x_1 = \frac{20+3}{1+2} \operatorname{arctg} 0 = 0$ – наименьший элемент.

Наибольшего элемента не сущ, т.к $\sup x_n = 5\cdot\pi$, при этом не сущ. n, такого, чтобы $x_n = 5\cdot\pi$. Покажем это.

$$\frac{40n+3}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{4} = 5\cdot\pi$$

$$\frac{40\cdot n+3}{2n+2} = 20$$

$$40\cdot n+3 = 40n+40$$

$$0\cdot n = 37$$

реш. нет.

(4)

$$x_n = \frac{40n+3}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{4}, \quad n=1,2,\ldots$$

определение предела для этой последовательности:

Для $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ номер n_0 такой что, для $\forall n \geq n_0$ выполнено

$$|x_n - 5\cdot\pi| < \varepsilon$$

Д-м это

$$|x_n - 5\cdot\pi| = \left|\frac{40n+3}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{4} - 5\pi\right| =$$

$$= \left|\frac{(40n+3)\pi - 40n\pi - 40\pi}{4(2n+2)}\right| = \left|\frac{-37\pi}{4(2n+2)}\right| = \frac{37\pi}{8(n+1)}$$

$$\frac{37\pi}{8(n+1)} < \varepsilon$$

$$37\pi < 8\varepsilon(n+1)$$

$$n+1 > \frac{37\pi}{8\varepsilon}$$

$$n > \frac{37\pi}{8\varepsilon} - 1$$

$$n_0 = \left[\frac{37\pi}{8\varepsilon} - 1\right] + 1$$

Получили, что для $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\, n_0 = \left[\frac{37\pi}{8\varepsilon} - 1\right] + 1$, такой, что

для $\forall\, n \geq n_0$ выполнено

$$|x_n - 5 \cdot \pi| < \varepsilon \Rightarrow$$

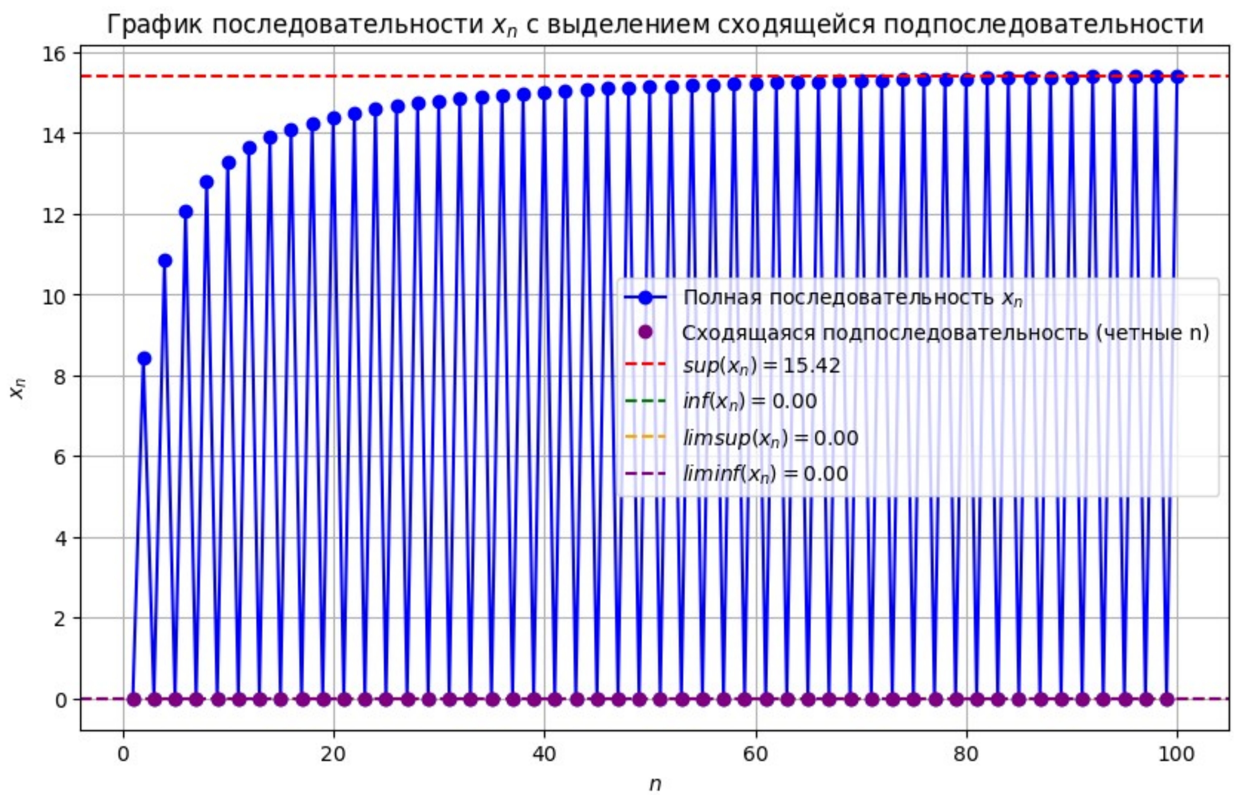
$$\lim_{n\to\infty} \frac{40n+3}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{4} = 5 \cdot \pi$$

Численный метод

1. Построим график последовательности

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Определим функцию для x_n
def x_n(n):
    return np.arctan((1 + (-1)**n) / 2) * ((20*n + 3) / (n + 2)) #
Формула для x_n

# Генерация первых 100 значений последовательности x_n
n_values = np.arange(1, 101)  # Массив n от 1 до 100
x_values = np.array([x_n(n) for n in n_values])  # Массив значений x_n
для каждого n

# Расчет sup, inf, limsup и liminf
sup_x = np.max(x_values)  # Верхняя граница (максимум всех значений)
inf_x = np.min(x_values)  # Нижняя граница (минимум всех значений)
limsup_x = np.max(x_values[::2])  # верхняя граница для четных
liminf_x = np.min(x_values[::2])  # нижняя граница для нечетных

# Выделение сходящейся подпоследовательности для четных n (например)
even_n_values = n_values[::2]  # Индексы для четных значений n
even_x_values = x_values[::2]  # Значения x_n для четных n

# Построение графика
plt.figure(figsize=(10, 6))  # Настройка размера графика

# Строим график всей последовательности
plt.plot(n_values, x_values, label='Полная последовательность $x_n$',
marker='o', color='b')  # График всей последовательности

# Добавление точек для сходящейся подпоследовательности (четные n)
другим цветом
plt.scatter(even_n_values, even_x_values, color='purple',
label='Сходящаяся подпоследовательность (четные n)', zorder=5)

# Добавление горизонтальных линий для sup, inf, limsup, liminf
plt.axhline(y=sup_x, color='r', linestyle='--', label=f'$sup(x_n) =
{sup_x:.2f}$')  # Линия для sup
plt.axhline(y=inf_x, color='g', linestyle='--', label=f'$inf(x_n) =
{inf_x:.2f}$')  # Линия для inf
plt.axhline(y=limsup_x, color='orange', linestyle='--',
label=f'$limsup(x_n) = {limsup_x:.2f}$')  # Линия для limsup
plt.axhline(y=liminf_x, color='purple', linestyle='--',
label=f'$liminf(x_n) = {liminf_x:.2f}$')  # Линия для liminf

# Настройки графика
plt.title('График последовательности $x_n$ с выделением сходящейся
```

```
подпоследовательности')
plt.xlabel('$n$')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.legend(loc='best')
plt.grid(True)

# Показать график
plt.show()
```



3 пункт.ϵ

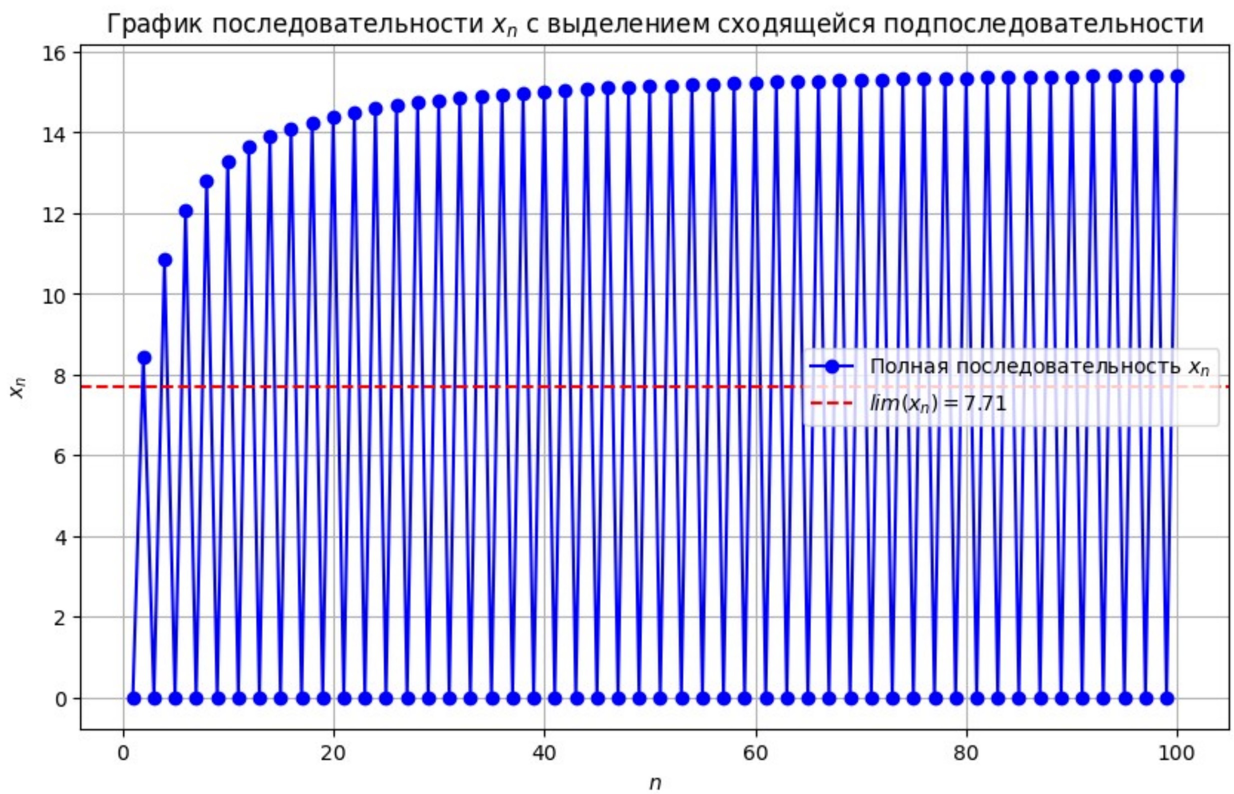
По данному $\epsilon > 0$ найдем n_0. Построим график последовательности начиная с n_0.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Определим функцию для x_n
def x_n(n):
    return np.arctan((1 + (-1)**n) / 2) * ((20*n + 3) / (n + 2)) #
Формула для x_n

# Генерация первых 100 значений последовательности x_n
n_values = np.arange(1, 101)  # Массив n от 1 до 100
x_values = np.array([x_n(n) for n in n_values])  # Массив значений x_n
для каждого n
```

```python
# Рассчитываем предел для последовательности
# Предполагаем, что предел существует, и ищем его как лимит для больших n
lim_x = np.mean(x_values[90:])  # Среднее значение для больших n, как приближенный предел

# Настроим точность для окрестности предела
epsilon = 0.01  # Погрешность, например, 0.01

# Ищем номер n0, начиная с которого члены подпоследовательности попадают в ε-окрестность
indices = np.where(np.abs(x_values - lim_x) < epsilon)[0]  # Получаем индексы, где условие выполняется

if indices.size > 0:
    n0 = indices[0] + 1  # n0 - это первое значение, соответствующее условию, +1 для учёта индексации с 1
else:
    n0 = None  # Если нет элементов, попадающих в окрестность, устанавливаем n0 в None

# Построение графика
plt.figure(figsize=(10, 6))  # Настройка размера графика

# Строим график всей последовательности
plt.plot(n_values, x_values, label='Полная последовательность $x_n$', marker='o', color='b')  # График всей последовательности

# Добавление точек для подпоследовательности, начиная с найденного n0
if n0 is not None:
    subseq_n_values = n_values[n0-1:]  # Индексы с n0
    subseq_x_values = x_values[n0-1:]  # Значения x_n с n0
    plt.scatter(subseq_n_values, subseq_x_values, color='purple', label=f'Подпоследовательность (с $n_0 = {n0}$)', zorder=5)
else:
    print("Нет значений, попадающих в ε-окрестность предела.")

# Добавление горизонтальной линии для предела
plt.axhline(y=lim_x, color='r', linestyle='--', label=f'$lim(x_n) = {lim_x:.2f}$')

# Настройки графика
plt.title('График последовательности $x_n$ с выделением сходящейся подпоследовательности')
plt.xlabel('$n$')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.legend(loc='best')  # Легенда
plt.grid(True)  # Включаем сетку
```

```python
# Показать график
plt.show()  # Это обязательно для отображения графика

# Выводим номер n0 и найденный предел
if n0 is not None:
    print(f"Номер n0: {n0}")
    print(f"Приближенный предел: {lim_x:.4f}")
else:
    print("Не удалось найти номер n0, так как последовательность не попадает в ε-окрестность.")
```

```
Нет значений, попадающих в ε-окрестность предела.
```

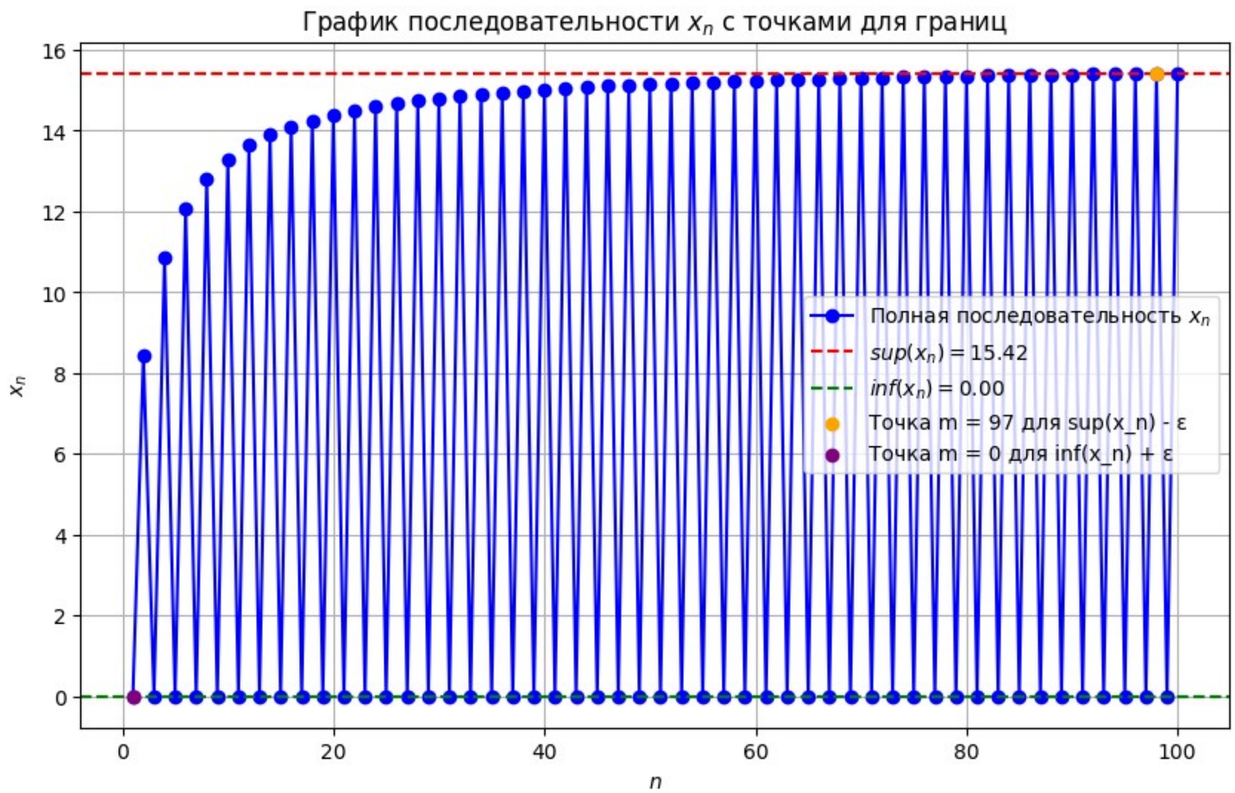



```
Не удалось найти номер n0, так как последовательность не попадает в ε-окрестность.
```

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Определим функцию для x_n
def x_n(n):
    return np.arctan((1 + (-1)**n) / 2) * ((20*n + 3) / (n + 2))  # Формула для x_n

# Генерация первых 100 значений последовательности x_n
```

```python
n_values = np.arange(1, 101)  # Массив n от 1 до 100
x_values = np.array([x_n(n) for n in n_values])  # Массив значений x_n для каждого n

# Расчет sup и inf
sup_x = np.max(x_values)  # Верхняя граница
inf_x = np.min(x_values)  # Нижняя граница

# Параметр ε
epsilon = 0.01  # Например, ε = 0.01

# Нахождение номера m, такого что x_m > sup(x_n) - ε
m_sup = np.min(np.where(x_values > sup_x - epsilon))  # Первый индекс, где x_m > sup_x - ε

# Нахождение номера m, такого что x_m < inf(x_n) + ε
m_inf = np.min(np.where(x_values < inf_x + epsilon))  # Первый индекс, где x_m < inf_x + ε

# Построение графика
plt.figure(figsize=(10, 6))  # Настройка размера графика

# Строим график всей последовательности
plt.plot(n_values, x_values, label='Полная последовательность $x_n$', marker='o', color='b')  # График всей последовательности

# Добавление горизонтальных линий для sup и inf
plt.axhline(y=sup_x, color='r', linestyle='--', label=f'$sup(x_n) = {sup_x:.2f}$')  # Линия для sup
plt.axhline(y=inf_x, color='g', linestyle='--', label=f'$inf(x_n) = {inf_x:.2f}$')  # Линия для inf

# Отметим найденные точки на графике
plt.scatter(n_values[m_sup], x_values[m_sup], color='orange', label=f'Точка m = {m_sup} для sup(x_n) - ε', zorder=5)
plt.scatter(n_values[m_inf], x_values[m_inf], color='purple', label=f'Точка m = {m_inf} для inf(x_n) + ε', zorder=5)

# Настройки графика
plt.title('График последовательности $x_n$ с точками для границ')
plt.xlabel('$n$')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.legend(loc='best')
plt.grid(True)

# Показать график
plt.show()

# Выводим номера m для sup и inf
```

```python
print(f"Номер m для sup(x_n) - ε: {m_sup}")
print(f"Номер m для inf(x_n) + ε: {m_inf}")
```




```
Номер m для sup(x_n) - ε: 97
Номер m для inf(x_n) + ε: 0
```