复变函数与积分变换

rrrrrzy

2024 年 10 月 10 日

1　复数的基本运算

1.1　复数的表示

先定义一个复数为 $z = x + iy$, 在复平面上表示为 (x, y), 当 $z \neq 0$ 时, 称从正实轴到 z 的终边的角的弧度数 θ 为 z 的辐角, 记作 $Argz = \theta$, 此时有 $\tan(Argz) = \frac{y}{x}$, 因为一个不为零复数有无数个辐角, 如果 θ_1 时其中的一个, 则 $Argz = \theta_1 + 2k\pi(k \in N)$, 其中满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的角称为 $Argz$ 的主值, 记作 $\theta_0 = \arg z$.

我们规定, 当 $z = 0$ 时, 它的辐角不确定.

此外, 一个复数还可以表示为 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 这就是复数的三角表示式.

又由欧拉公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 有: $z = re^{i\theta}$, 这就是复数的指数表示式.

1.2　复数的幂与根

n 个相同复数 z 的乘积记作 z^n, 有: $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, 浅作证明如下:

已知一个复数的指数表示式为 $z = re^{i\theta}$, 则它的 n 次方为: $z^n = r^n e^{i\cdot n\theta}$, 认为 $n\theta$ 是一个整体, 展开为三角表示式: $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, 证毕.

特别有, 当复数的模 $r = 1$ 时, 有 De Moivre 公式: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

下面讨论复数的根:

记复数的 n 次根为 $w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})$, 简作证明如下

为了求出根 w, 我们令

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

由 De Moivre 公式有 $\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

于是有 $\rho^n = r, \cos n\varphi = \cos\theta, \sin n\varphi = \sin\varphi$, 显然, 后两式成立的充要条件是 $n\varphi = \theta + 2k\pi, (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$. 由此有, $\rho = r^{\frac{1}{n}}, \varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$, 证毕

1.3 其他重要的基本性质

曲线光滑的定义:

设曲线 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 可以表示为 $z = z(t)$, 那么, 如果在区间 $a \leq t \leq b$ 上, $x'(t), y'(t)$ 都是连续的, 且对 t 的每一个值都有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$, 则称该曲线是光滑的.

曲线简单和开闭的定义:

设一段曲线自身没有交叉点, 则称它为简单曲线. 如果起点与终点重合, 称它为简单闭曲线

单联通域和多联通域的定义:

复平面上有一区域 B, 如果在其中任作一条简单闭合曲线, 曲线的内部总属于 B, 就称为单联通域. 一个区域如果不是单联通域, 就称为多联通域.

2 复变函数的基本操作

2.1 复变函数的极限与导数

每个复变函数都可以表示为 $f(z) = u(x) + v(x) \cdot i$, 则对它求极限有以下几种定理

定理一 设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), A = u_0 + iv_0, z_0 = x_0 + iy_0$, 则 $\lim_{x\to x_0} f(z) = A$ 的充要条件是

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0, \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$