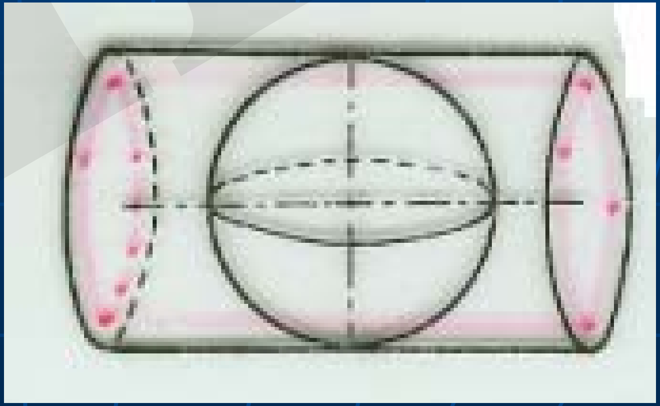
第四节 圆柱投影

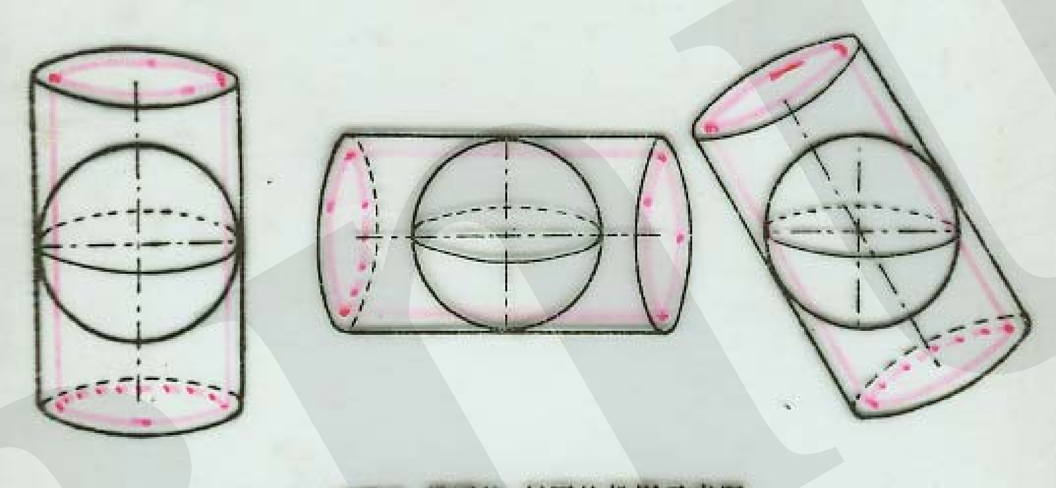
一. 构成

（一）方法：

以圆柱面作为投影面，地球模型为投影原面，使圆柱面与地球相切或相割，将球面上的经纬线投影到圆柱面上，然后把圆柱面沿一条母线剪开展为平面而成。当圆柱面与地球相切时，称为切圆柱投影，当圆柱面与地球相割时，称为割圆柱投影。



- 按圆柱与地球相对位置的不同，圆柱投影有正轴、横轴和斜轴三种。在一般情况下，横轴投影和斜轴投影中的经纬线投影为曲线，只有通过球面坐标极点的经线投影为直线，主要分析正轴圆柱投影。



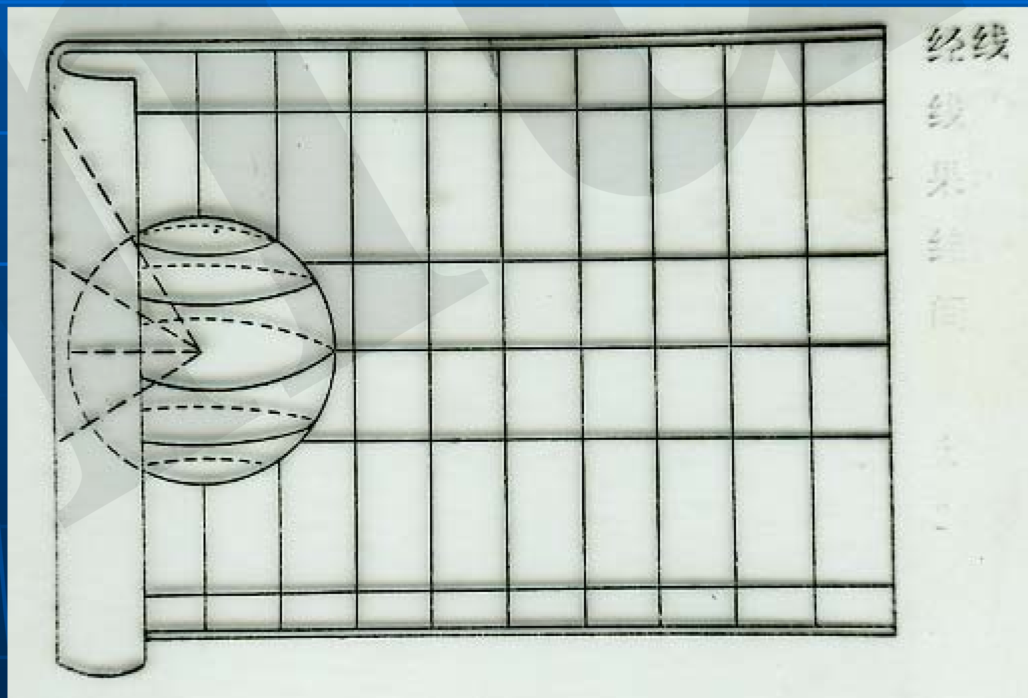
正圆柱、横圆柱、斜圆柱投影示意图

（二）条件：等角、等积、等距；相切、相割。

（三）一般公式

假定圆柱与地球模型相切，视点位于地球中心。纬线投影在圆柱面上仍为圆，不同的纬线投影为平行于赤道的圆；经线投影为垂直于赤道的平行直线，各经线间的间隔与赤道上相应的弧长相等。

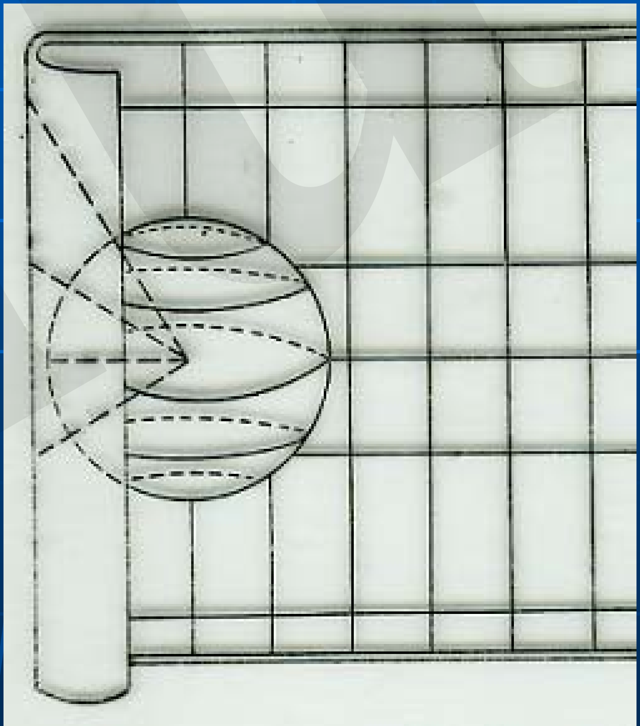
如果将圆柱面沿一条母线剪开展成平面，则纬线为平行直线；经线为与纬线正交，且间隔相等的平行直线。



正轴圆柱投影的纬线为平行直线，经线为与纬线垂直的平行直线，经线间的间隔与相应的经度差成正比。

设某一经线投影为X轴，赤道投影为Y轴。球面上的点A（φ，λ）投影在平面上为A’（x，y），由于纬线投影为平行于赤道的直线，故x坐标仅为纬度的函数，x=f（φ），f取决于投影性质，圆柱投影主要是决定x的函数形式。

经线间的间隔与相应的经度差成正比，故y坐标与经差成正比，即y=cλ（c常数）。



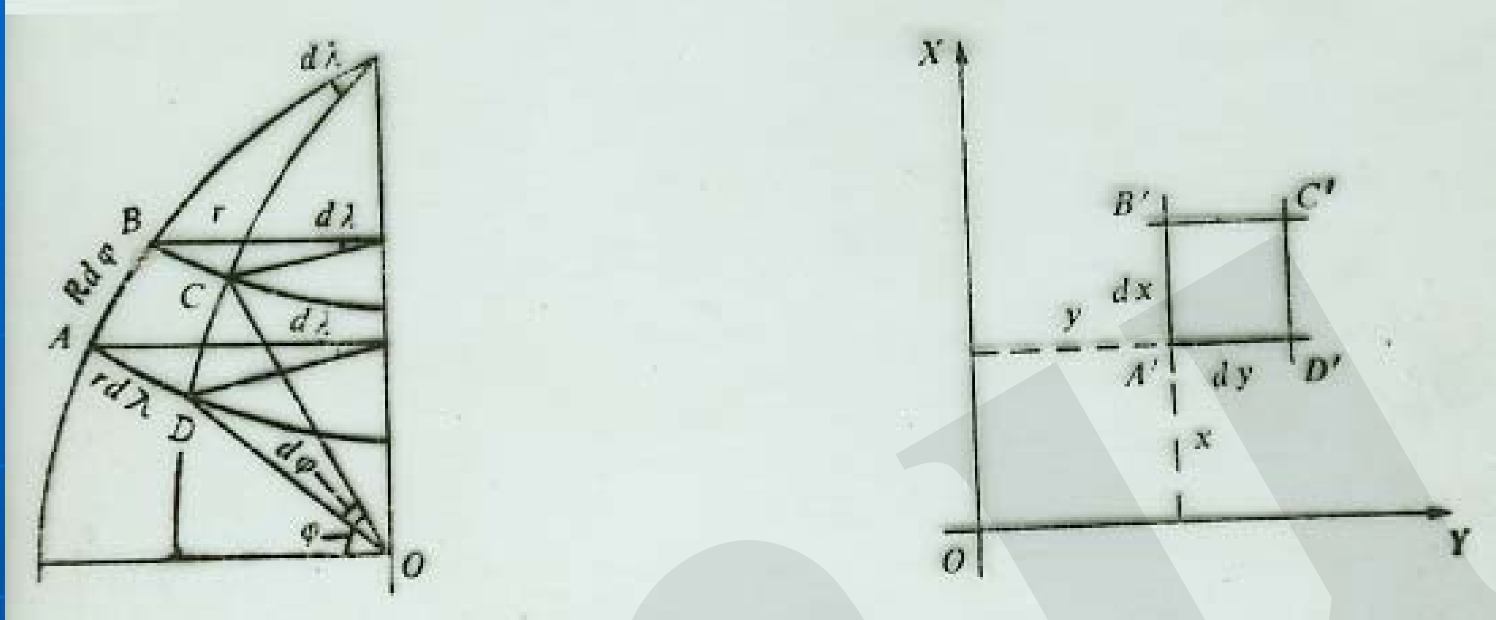
二. 经纬网形状：

两组相互平行的直线。

三. 变形内容及分布规律：

（一）变形内容：m、n、P、 ω

在正轴圆柱投影中，经纬线是正交的，故经纬线方向的长度比就是最大、最小长度比，即m（经线），n（纬线）为两个主方向，相当于a、b。



球面上经线微分弧长AB=Rdφ，纬线微分弧长AD=rdλ=Rcosφdλ；

在投影平面上相应的

经线微分线段A’B’=dx，

纬线微分线段A’D’=dy。

$$m=\frac{dx}{Rd\varphi}\ ;\ n=\frac{dy}{rd\lambda}=\frac{Cd\lambda}{R\cos\varphi d\lambda}=\frac{C}{R\cos\varphi}$$

系数 c 值：相切：$C = R$

相割：$C = R\cos\Phi_k$

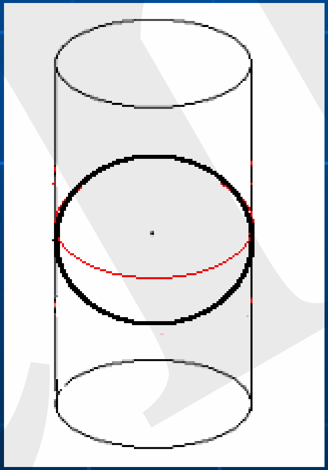
$$P = m \cdot n\,,\quad \cos\frac{\omega}{2} = \left|\frac{m-n}{m+n}\right|$$

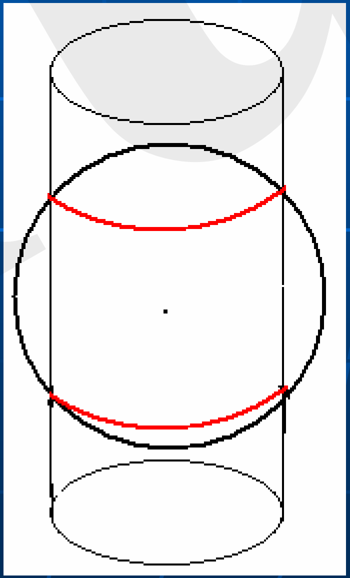
由以上公式可知：各种变形均是纬度φ的函数，与经度λ无关。

也就是说，圆柱投影的各种变形是随纬度的变化而变化，在同一条纬线上各种变形数值各自相等，因此等变形线与纬线平行，呈平行线状分布。

对于切圆柱投影上，赤道是一条没有变形的线，称为**标准纬线**，从赤道向南、北方向变形逐渐增大；

对于割圆柱投影，两条相割的纬线（$\pm\varphi_k$）是标准纬线。





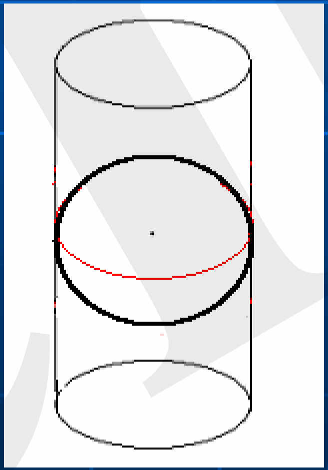
（二）变形分布规律

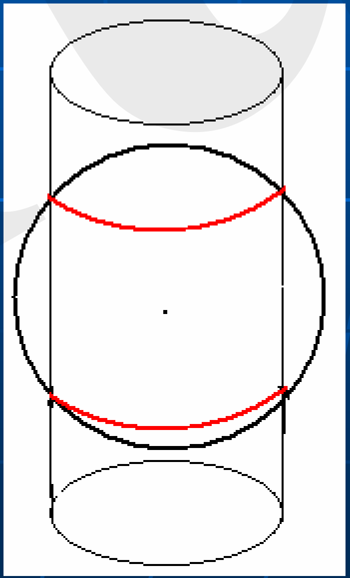
（1）标准纬线为没有任何变形的线;

（2）离标准纬线越远，各种变形的绝对值越大;

（3）离标准纬线等距处各种变形的数值各自相等;

（4）等变形线为平行于赤道的一组直线。





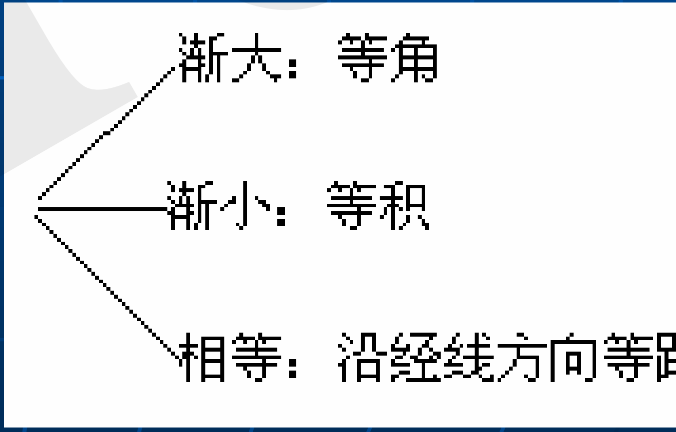
- 圆柱投影变形的变化特征是以赤道为对称轴，南北方向同名纬线上的变形数值相等。

四． 经纬网特征

1. 经纬线正交;

2. 在任意一条纬线上经线间隔相等;

3. 任意一条经线上，
 自赤道向南北，纬线间隔变化



◆ 分辩切、割方法：

- 在赤道上进行量算，得出比例尺：

  与主比例尺相等：切；

  小于：割。

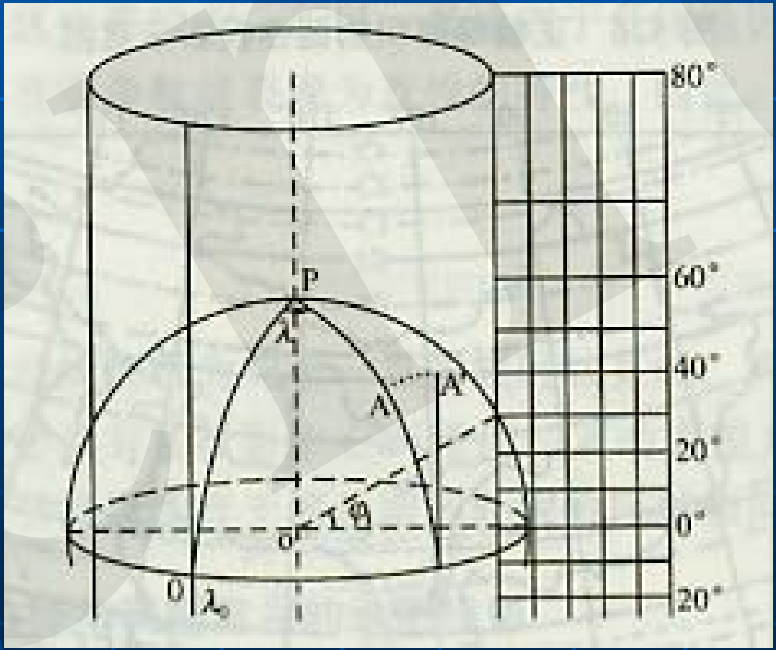
- 也可量算长度比：等1、小于1。

五. 适用

沿赤道方向延伸图、时区图、卫星轨迹图、世界交通图。

❖等角正轴圆柱投影——墨卡托投影

等角圆柱投影是按等角条件决定x=f（φ）函数形式的。等角正轴圆柱投影由荷兰制图学家墨卡托（Mercator）于1569年所创，故又名墨卡托投影。



根据等角条件和公式得:

$$m = n = \frac{dx}{R d\varphi} = \frac{c}{R\cos\varphi}$$，当是切圆柱时，c＝R，则

$$\frac{dx}{R d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad dx = R\sec\varphi d\varphi$$

两边积分 $x = R\int \sec\varphi d\varphi$

$$x = R\ln tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + k$$ (k为积分常数)

当 φ=0° 时，x=0，故 k=0 所以 $x = R\ln tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$

等角正轴切圆柱投影的直角坐标公式为：

$$\begin{cases} x = \dfrac{R}{0.43429} \lg tg\left(45^{\circ} + \dfrac{\varphi}{2}\right) \\ y = R\lambda \end{cases}$$

等角正轴切圆柱投影的变形公式为：

$$m = n = \sec\varphi$$

$$P = mn = \sec^2\varphi$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{m-n}{m+n} \qquad \omega = 0$$

可见，在等角正轴切圆柱投影中，赤道没有变形；随着纬度的增高，变形逐渐增大。

根据各项变形公式计算出的各种数值列于下表中：

等角正轴切圆柱投影 x 坐标值和各种变形数值表

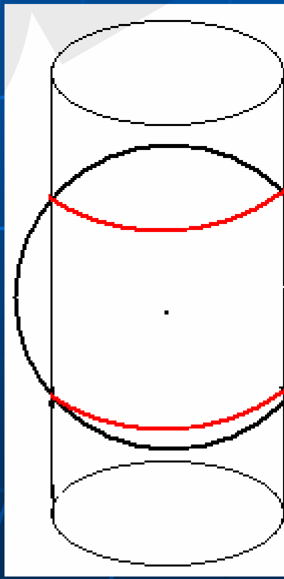
φ	x（公里）	m=n	P	ω
0°	0.000	1.000	1.000	0°
10°	1111.495	1.015	1.031	0°
20°	2258.464	1.064	1.132	0°
30°	3482.251	1.155	1.333	0°
40°	4837.557	1.304	1.699	0°
50°	6413.638	1.553	2.411	0°
60°	8362.846	2.000	4.000	0°
70°	11028.706	2.915	8.498	0°
80°	15496.839	5.740	32.948	0°
90°	—	∞	∞	—

$$n = \frac{C}{R\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

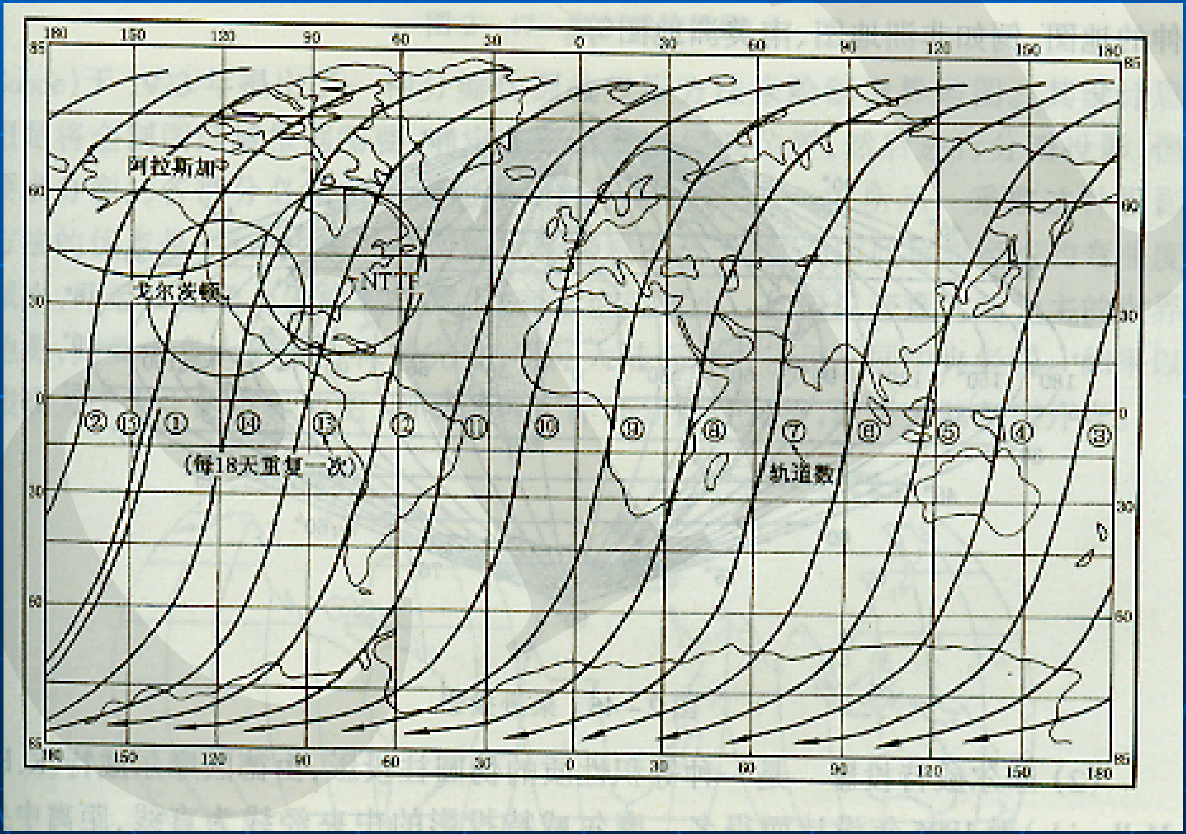
如果采用割圆柱，其变形性质与切圆柱相同，不过变形数值、变化规律不同。相割的两条纬线没有变形，是两条标准纬线。在两条标准纬线之间是负向变形，离开标准纬线愈远，变形愈大，赤道上负向变形最大。在两条标准纬线以外是正向变形，也是离开标准纬线愈远，变形愈大。

等角割圆柱投影（割线纬度为± 30°）变形数值表

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
m=n	0.867	0.880	0.922	1.000	1.128	1.346	1.729	2.527	4.975	∞
P	0.751	0.774	0.850	1.000	1.272	1.811	2.990	6.384	24.753	∞
ω	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	—



根据上述变形分布情况，切圆柱等角投影适用于作赤道附近地区的地图，割圆柱投影适用于作和赤道对称的沿纬线方向延伸地区的地图。此外，也可用这种投影制作时区图、卫星轨迹图等。



等角圆柱投影在编制航海图中被广泛应用。

例如: 我国的航海地图采用这种投影; 苏联出版的大型海图集中绝大多数图幅都采用这种投影。此外，由于这种投影在低纬度地区变形小，而且经纬线网格形状简单，所以常用于编制赤道附近地区的地图。

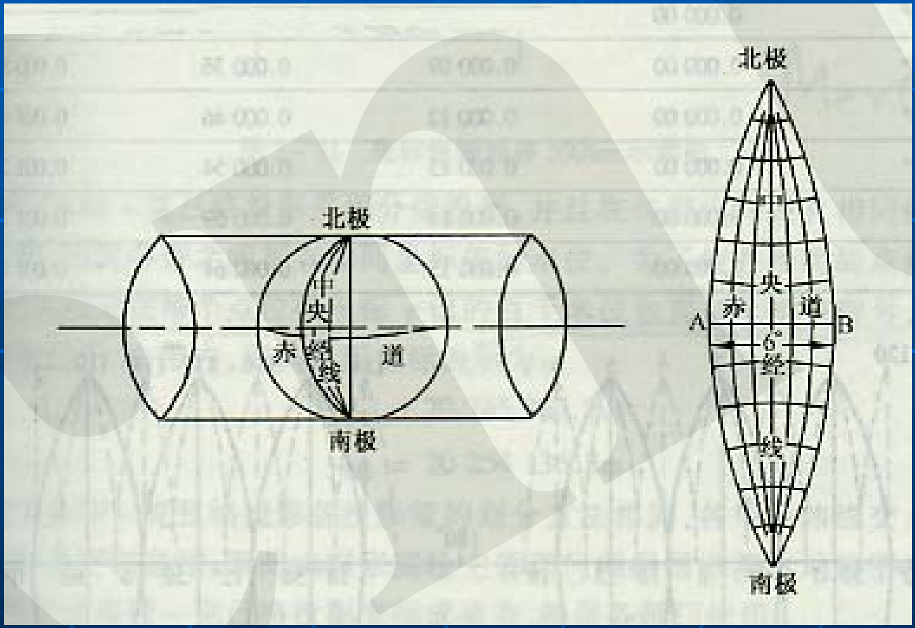
例如: 世界交通图在纬度±60°以内也采用的是这种投影。

❖等角横切椭圆柱投影——高斯-克吕格投影

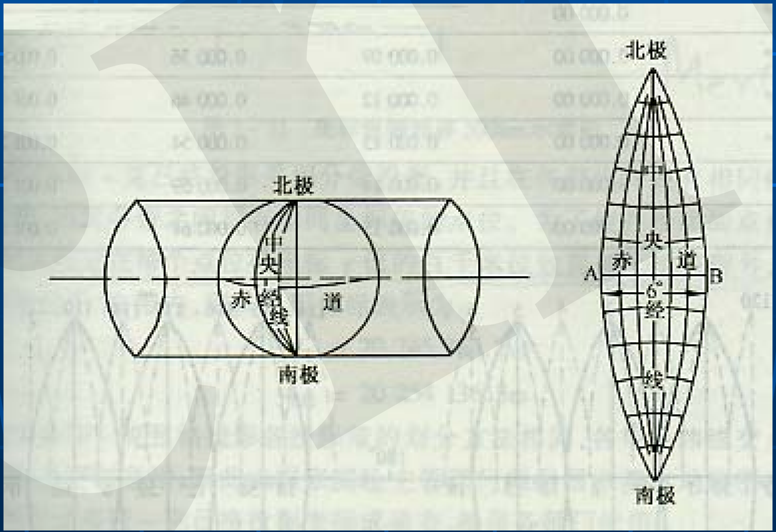
等角横切椭圆柱投影是以椭圆柱作为投影面，使地球椭球体的某一条经线与椭圆柱相切，然后按照等角条件，将中央经线东西两侧各一定范围内的地区投影到椭圆柱面上，再将其展成平面而得。

该投影是由德国数学家高斯（Gauss）于19世纪20年代拟定，后经德国大地测量学家克吕格（Krüger）于1912年对投影公式加以补充，故称为高斯-克吕格投影。

高斯-克吕格投影的中央经线和赤道为互相垂直的直线，经纬线正交。其它经线均为凹向并对称于中央经线的曲线，其它纬线均为以赤道为对称轴的向两极弯曲的曲线。在这个投影上，没有角度变形。



在高斯-克吕格投影中，中央经线长度比等于1，没有长度变形。其余经线长度比均大于1，长度变形为正，距中央经线愈远变形愈大，最大变形在边缘经线与赤道的交点上；面积变形也是距中央经线愈远，变形愈大。为了保证地图的精度，采用分带投影方法，使其变形不超过一定的限度。



高斯-克吕格投影6°带内长度变形表

纬　度	长　度　变　形			
	经　　差			
	0°	1°	2°	3°
90°	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
80°	0.00000	0.00000	0.00002	0.00004
70°	0.00000	0.00002	0.00007	0.00016
60°	0.00000	0.00004	0.00015	0.00034
50°	0.00000	0.00006	0.00025	0.00057
40°	0.00000	0.00009	0.00036	0.00081
30°	0.00000	0.00012	0.00046	0.00103
20°	0.00000	0.00013	0.00054	0.00121
10°	0.00000	0.00014	0.00059	0.00134
0°	0.00000	0.00015	0.00061	0.00138

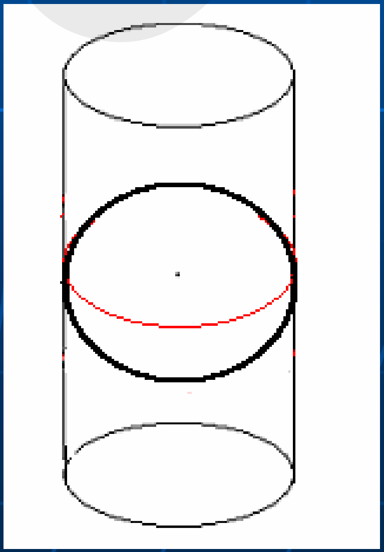
高斯-克吕格投影在英美国家称为**横轴墨卡托投影**。美国编制世界各地军用地图和地球资源卫星象片所采用的全球横轴墨卡托投影（UTM）是横轴墨卡托投影的一种变型。高斯-克吕格投影的中央经线长度比等于1，UTM投影规定中央经线长度比为0.9996。在6°带内最大长度变形不超过0.04％。

圆柱投影变形性质的分析

凡是正轴圆柱投影，其经纬线形式具有共同的特征：经线为间隔相等的平行直线，纬线为与经线垂直的平行直线。

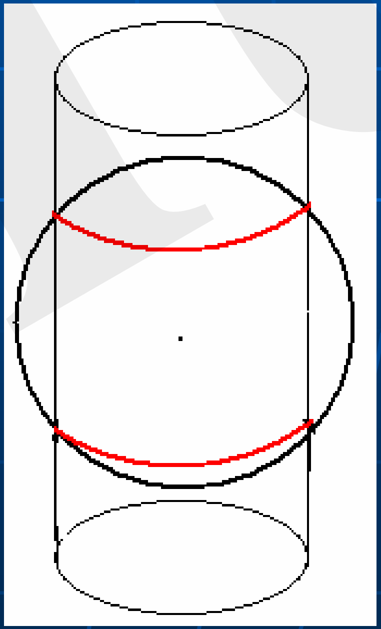
不论其变形性质（等角、等积、等距或任意）如何，只要是切圆柱，其赤道就是标准纬线，即赤道的长度比等于1，其它纬线长度比均大于1，离开赤道愈远，纬线长度比愈大。

$$n = \frac{C}{R\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$



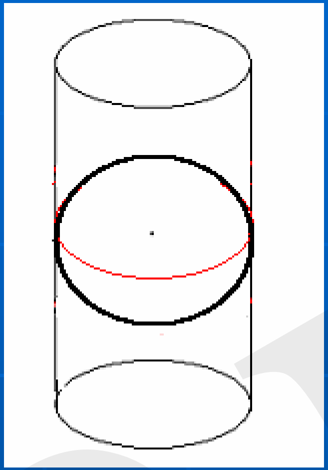
只要是割圆柱，相割的两条纬线（$\pm\varphi_k$）为标准纬线，其长度比为1;

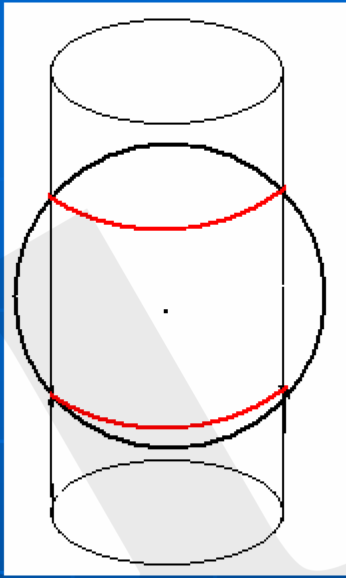
在两条割线以外，纬线长度比大于1，离开标准纬线愈远，其长度比愈大；在两条割线之内，纬线长度比小于1，离开标准纬线愈远，其长度比愈小，赤道长度比最小。

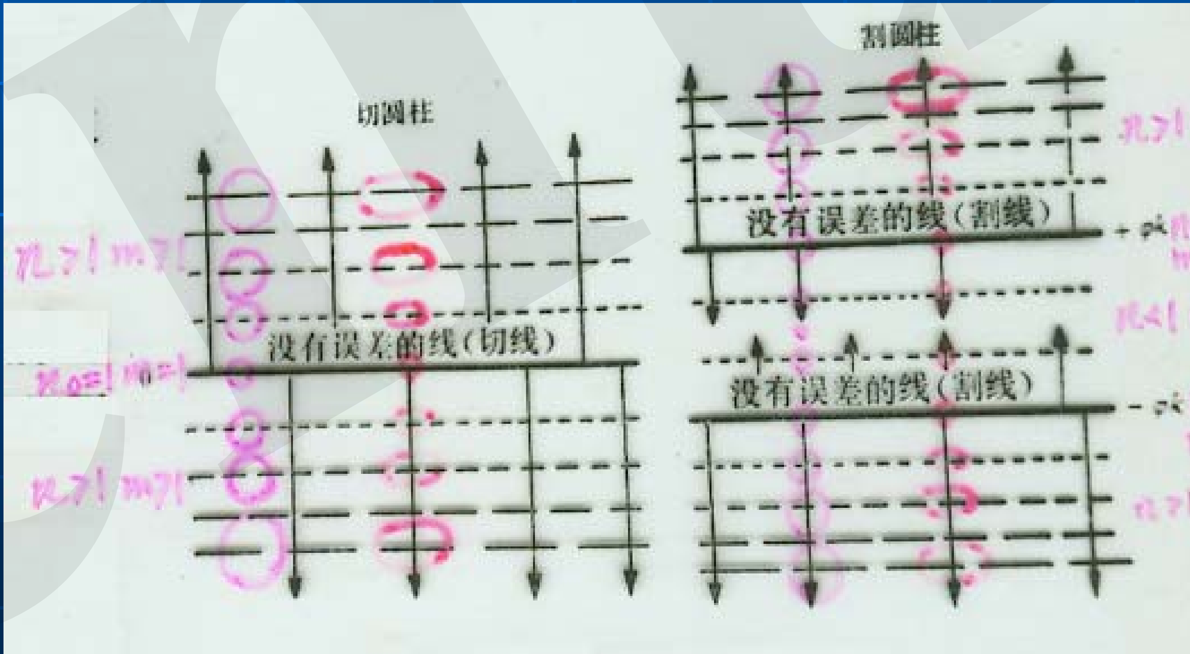


在两条割线之间的纬线长度比小于1，两条割线以外的纬线长度比大于1，离开标准纬线愈远，变形愈大。

如图中箭头表示变形增加的方向。







等角圆柱投影等变形线

不管投影性质如何，只要切、割关系确定，在某一条纬线上，长度比的变化是固定的，因此为了使圆柱投影具有不同的变形性质，就只能改变经线长度比来满足所要求的条件。

$$m=\frac{dx}{Rd\varphi};\ n=\frac{dy}{rd\lambda}=\frac{Cd\lambda}{R\cos\varphi d\lambda}=\frac{C}{R\cos\varphi}$$

例如，等角圆柱投影，为了保持等角条件，必须使经线长度比等于纬线长度比，即m=n。

等积圆柱投影，为了保持等积条件，必须使经线长度比与纬线长度比互为倒数，即m=1/n。等距圆柱投影，为了保持等距条件，必须使经线长度比等于1，即m=1。其它任意投影，也只能是经线长度比发生变化。