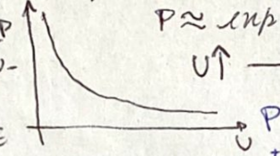
FOR A GIVEN NEIGHBORHOOD V_s OF A PIXEL. THE PROBABILITY THAT IT ASSUMES A VALUE x_s IS GIVEN BY $P(X_s = x_s | V_s) = \exp(-U_s(x_s, V_s)) / Z^s$. Z^s EST DONNÉ PAR LA RELATION: $Z^s = \sum \exp(-U_s(\xi, V_s))$ OÙ ξ SONT TOUS LES VALEURS QUI X_s PEUT ASSUMER. PAR EXEMPLE: $E = \{0, 1\}$, CLIQUE OF ORDER 2, $V_c(s, t) = \beta \mathbb{1}(x_s \neq x_t)$. $\Rightarrow U(x_s = 0, V_s = \{0, 0, 0, 1\}) = \beta$. $U(x_s = 1 | V_s) = 3\beta \Rightarrow P(x_s = 0 | V_s) = \exp(-\beta) / (\exp(-\beta) + \exp(-3\beta))$; $P(X_s = 1 | V_s) = \frac{\exp(-3\beta)}{\exp(-\beta) + \exp(-3\beta)}$
$\Rightarrow$ DONC, ON ASSUME $X_s = 0$. ON VOIR QUE:

Metropolis Sampler: CHOIX D'UNE RÉGION s ET CALCUL DE ~~...~~ L'ÉNERGIE EN UTILISANT DEUX ÉTATS POUR X_s: $U(x)$ ET $U(x')$. SI $\Delta U = U(x') - U(x) < 0$. ON ACCEPTE LE NOUVEAU ÉTAT. SINON, ~~REJECT~~ ACCEPTE (REJECT) LE NOUVEAU ÉTAT AVEC LA PROBABILITÉ $p = \exp(-\Delta U)$ $\to 1-p$



$P \approx \exp(-U)/Z$

$U \uparrow \to P \downarrow$

GIBBS SAMPLER: CHOIX D'UNE RÉGION s, FOR THE IMAGE $x^{(n-1)}$, ON CALCULE LA PROB. $P(X_s = x_s | V_s) = \exp(-U_s)/Z$. UPDATE THE SITE. ON FAIT ÇA POUR BEAUCOUP DE PIXELS. ON PEUT LES PRENDRE LIGNE PAR LIGNE.

EXEMPLES DE MODELES DE MARKOV: • ISING: $U(x) = \beta \sum \delta(x_s, x_t)$ OÙ $E = \{0, 1\}$ • POTTS MODEL: $U(x) = \beta \sum \delta(x_s \neq x_t)$ OÙ $E = \{0 .. q-1\}$ • GAUSSIAN MARKOV MODEL: $U(x) = \beta \sum (x_s - x_t)^2 + \alpha \sum (x_s - y_s)^2$ $E = \mathbb{R}$

SOME INTUITIONS: SI ON PREND β TROP GRAND POUR L'ISING MODEL, ON VA PÉNALISER PLUS LES DIFFÉRENCES ENTRE PIXELS $\Rightarrow$ ON AURA UNE IMAGE AVEC FORMES PLUS UNIFORMES (ALSO IN THE POTTS MODEL). PRENDRE UNE α TROP GRANDE POUR LE GAUSSIAN MARKOV MODEL ON VA PÉNALISER TROP LE DIFFÉRENCE ENTRE LA MOYENNE LOCAL ET LE PIXEL ET ON AURA UNE IMAGE UNIFORME. SAMPLING VERSUS OPTIMIZATION: OPTIMIZATION C'EST LE MÊME QUE CHERCHER LE MINIMUM GLOBAL DE L'ÉNERGIE. ICM: 1) CHOICE OF A SITE, 2) COMPUTATION OF PROBS, 3) CHOICE OF THE STATE MAXIMIZING THE PROB. EACH SITE IS UPDATED. DISCRETE LABELS, LOCAL MINIMUM, DEPENDS VERY MUCH ON INITIALIZATION, VERY FAST (SIMILAR TO GRADIENT DESCENT). GIBBS DISTRIBUTION AVEC TEMPERATURE: $P(X = x) = \frac{\exp(-\frac{U(x)}{T})}{\sum \exp(-U(y)/T)}$. SIMULATED ~~TEMPERATURE~~ ANNEALING: ~~BUILD A SEQ~~ BUILDING A SEQUENCE OF IMAGES WITH SAMPLING FOR $P_{T_n}(X)$, DECREASING TEMPERATURE. THE TEMPERATURE OBTAINED WHEN THE TEMPERATURE IS CLOSE TO 0 IS A GLOBAL MINIMUM OF THE ENERGY: TEMPERATURE SHOULD DECREASE REALLY SLOWLY AND INITIAL TEMPERATURE SHOULD BE HIGH ENOUGH. ~~BAYESIAN MARKOV RANDOM FIELDS~~. SOME OBSERVATIONS ON THE GIBBS SAMPLER: THE OVERALL ENERGY IS REDUCED ~~TO~~ WITH A HOMOGENEOUS IMAGE. ~~...~~ BAYESIAN MARKOV RANDOM FIELDS: WE MINIMIZE THE ENERGY

$U(X|Y) = \sum -\ln(P(Y_s = y_s | X_s = x_s)) + \sum U_c(x_s, s \in C)$

$\to$ DATA ATTACHMENT TERM (LIKELIHOOD TERM)

$\to$ REGULARIZATION TERM (PRIOR TERM)

THIS IS THE POSTERIOR DISTRIBUTION. EXAMPLE ON CALCULATING THE DATA ATTACHMENT TERM FOR A IMAGE WITH GAUSSIAN NOISE: IN ORDER TO CLASSIFY A PIXEL Y_s AS WHITE WE NEED:

$P(Y_s = y_s | X_s = 1) > P(Y_s = y_s | X_s = 0)$

$\to$ DISTRIBUTION ON $X_s = 1$

$\to$ DISTRIBUTION ON $X_s = 0$

$\Rightarrow$ YIELDS: $\frac{e^{-(y_s - \mu_1)^2 / 2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} > \frac{(e)^{\frac{-(y_s - \mu_0)}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$

YIELDS: $y_s > \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$. IN THIS EXAMPLE WE ADD K TO THE GLOBAL ENERGY: $U_{tot} = \sum_s \frac{(y - \mu_{x_s})^2}{2\sigma_{x_s}^2} + K$. LOCAL ENERGY: $U_{tot} = (y_s - \mu_{x_s})^2 / 2\sigma^2$. CONSIDERING THE GLOBAL ENERGY OF THE FIELD IF $\beta \to +\infty$ THE IMAGE WOULD ASSUME ONE SINGLE VALUE, WHETHER BLACK WHETHER WHITE. A GOOD INITIALIZATION HERE WOULD BE THE LABEL IMAGE, IF WE DON'T HAVE IT, THE IMAGE THRESHOLDED (CLOSER TO THE FINAL IMAGE) IMAGE RESTORATION: WE TAKE A FUNCTION $\Phi(x_s - x_r)$ AS V_c. OBS. ON ADDITIVE WHITE GAUSSIAN NOISE: $y = x + \epsilon$ $y_s = x_s + \epsilon_s \; \forall s \in S$ $\epsilon_s \to N(0, \sigma^2)$ $P_r(Y = y | X = x) = \prod_{s \in S} P_r(Y_s = y_s | X_s = x_s) \propto \prod_{s \in S} \exp\left(-\frac{(y_s - x_s)^2}{2\sigma^2}\right)$. $\Phi(u) = u^2$ IS A CHOICE OF REGULARIZATION TERM, ALSO USE THE TRUNCATED QUADRATIC TERM IS AN OPTION TO SUPPRESS THE REGULARIZATION TERM ON DISCONTINUITIES. ALSO THE PRIOR FIELD ENERGY $U(x, b) = \sum_{s,t} (1 - b_{st})(x_s - x_t)^2 + \gamma b_{st}$. SOME NOTES ON IMPLICIT AND EXPLICIT ϕ-function

AN EXPLICIT WITH LINE PROCESS: $U(x, b | y) = \sum_s (y_s - x_s)^2 + \lambda \sum_{(r,s)} b_{rs}(x_s - x_r)^2 + \mu \sum_{(r,s)} \Psi(b_{rs})$

AN IMPLICIT: $U(x|y) = \sum (y_s - x_s)^2 + \lambda' \sum_{(r,s)} \phi(x_s - x_r)$ WHERE $b_{rs} = \phi'(x_s - x_r) / 2(x_s - x_r)$.

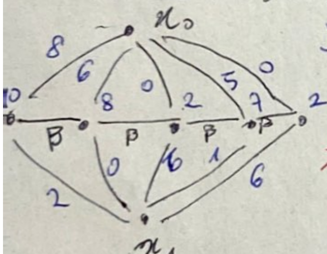
MÉTHODES VARIATIONELLES: $v = u + b$ ON CHERCHE À RETROUVER u COMME MINIMISEUR DE L'ÉNERGIE $E_1(u) = \|u - v\|^2 + \lambda \|\nabla u\|^2$, LE SECOND TERME EST $\iint \|\nabla u(x, y)\|^2 dx\,dy$
$E_2(u) = \|u - v\|^2 + \lambda \|\nabla u\|_1 \to \iint \|\nabla u\| dx\,dy$ " SECOND TERM. $\nabla TV(f) = -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right)$

LE GRADIENT DE LA FONCTIONELLE E_2 EST DONNÉ PAR $\nabla E_2(u) = 2(u - v) - \lambda \,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right)$

$TV(f) = \sum_{i,j} \sqrt{(f(i+1, j) - f(i, j))^2 + (f(i, j+1) - f(i, j))^2}$

NEXAMEN DERNIERE: [redacted] EXPLIQUEZ QUELLES SONT LES CONFIGURATIONS DE CLIQUES
1) ~~ANALYSE DE TEXTURE~~ LES PLUS FRÉQUENTES. EN LE JUSTIFIANT DÉFINISSEZ LE VOISI-
~~EXPLIQUEZ LES~~ NAGE ET LES POTENTIELS DE CLIQUES ASSOCIÉS À CE MODÈLE: In THE VERTICAL WE HAVE MANY CLIQUES BETWEEN PIXELS OF SAME VALUE IN THE VERTICAL AND BETWEEN DIF. VALUES IN HORIZONTAL, WE CAN SEE THAT$ AN ISING MODEL WITH $\beta >> 0$ AND $V(0,0) = V(1,1) = -\beta$ IN THE VERTICAL ET $V(0,1) = V(1,0) = -\beta$ ~~POUR~~ IN THE HORIZONTAL

2) CLASSIFICATION BAYESIENNE ? IMAGE, NIVEAU DE GRIS, 3 CLASSES. CLASSE 1 ~ $N(20,25)$ CLASSE 2 ~ ~~N(50,25)~~ $N(50,25)$. CLASSE 3 ~ $N(100,25)$. 2.1) EXPLIQUEZ LE CRITÈRE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE EN CHAQUE PIXEL, EXPLIQUEZ À QUOI CORRESPOND CETTE OPÉRATION ~~IT'S THE SAME AS COMPA LE C~~ LE CRITÈRE DE MAXIMUM VRAISEMBLANCE IS TO SEARCH THE ~~VALUE OF THE CL~~ LABEL THAT MAXIMIZES ~~A~~ THE PROBABILITY OF THE PIXEL ASSUME THIS VALUE, IN THIS CASE WOULD BE ~~EQUIVALENT~~ SIMILAR TO A THRESHOLDING
EXPLIQUEZ À QUELLE ~~NIVEAU~~ CLASSE SERA CLASSÉ UN PIXEL DE NIVEAU DE GRIS 75 SI LES PROBABILITÉS A PRIORI DES CLASSES SONT 0.4 POUR LA CLASSE 1 ET 2 ET 0.2 POUR 3 $P(y_s = 75 | x_1 \in C_1)$
$0{,}4 \cdot (1/\sqrt{2\pi\sigma^2}) \cdot e^{-(75-20)/(2\cdot 25)}$. $D(y_1 = 75 | X_1 \in C_1) = -\ln(P(y_1 = 75 | x_1 \in C_1)) \propto -\ln(0.4) + 55^2$
CLASSE 2 (THE SAME JUST CHANGE 20 BY 50 AND 55 BY 25. DO THE SAME TO CLASS 3.
AS WE WOULD LIKE TO REDUCE THE TERM D'ATTACHE AUX DONNÉES WE CHOOSE CLASS 2
2.2) AFIN D'AMÉLIORER LA COHÉRENCE SPACIALE ON UTILISE UN A PRIORI GLOBAL DANS LE CRITÈRE MAP SOUS FORME D'UN MODÈLE DE RÉGULARISATION, PROPOSEZ UN MODÈLE PERMETTANT DES ZONES COMPACTES DANS LA CLASSIFICATION: POTTS, 4-CONEX, BETA IF DIF. PIXELS, 0 OTHERWISE $\beta > 0$. COMBINING THE MODELS FROM THE 2 QUESTIONS BEFORE THIS ONE, DONNEZ L'ÉNERGIE GLOBALE DU CHAMP A POSTERIORI ET L'ÉNERGIE CONDITIONNELLE LOCALE DU CHAMP A POSTERIORI POUR UN PIXEL. GLOBALE $U_{x|y} = \sum_{1} \frac{(y_1 - m_{x_1})^2}{2\sigma^2} + K + \sum_{c \in C} \beta * \Delta(x_c, x_r)$
CONDITIONNELLE LOCALE $U_{x_1|y_1} = \frac{(y_1 - m_{x_1})^2}{2\sigma^2} + \sum \beta * \Delta(x_1, x_t)$, PRENEZ UN PIXEL DE VALEUR 50, ENTOURÉ PAR VOISINS 1, 3, 3, 3. CALCULATE THE CEC, ~~+ ENPPV~~ LOCAL CONDITIONAL ENERGY. CLASSE 1: $30^2/2\sigma^2 + 3\beta$ CLASSE 2: 4 BETA. CLASSE 3: $U = 50^2/2\sigma^2 + \beta$ 3) OPTIMISATION PAR GRAPH-CUT $\boxed{10 \mid 8 \mid 2 \mid 4 \mid 2}$ WHERE $P(y_1|x_1) \propto \exp(-(y_1 - \mu_{x_1})^2)$. CLASSEZ CETTE LIGNE CLASSIFICATION BAYÉSIENNE PONCTUELLE AU SENS DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE $P \propto \exp(-(y_1 - \mu_{x_1})^2) \Rightarrow D \propto -\ln(\exp(-(y_1 - \mu_{x_1})^2)) \Rightarrow D(y_1|x_1) \propto (y_1 - \mu_{x_1})^2 \Rightarrow$
$x_1^* \in \arg\min(D(y_1|x_1)) \Rightarrow$ C1|C1|C0|C1|C0. DESSINER LE GRAPH À CONSTRUIRE (EN PRÉCISANT LES NOEUDS ET LES POIDS DES ARCS) POUR TROUVER LA SOLUTION PAR COUPURE MINIMALE.



$D(y_1, x_0) = |y_1 - \mu_{x_1}|$

Na prova antiga pediu pra fazer ~~um~~ cortes e discuti-los em relação a β, trivial

4) Restauration

$E_\lambda(u) = \|u - v\|^2 + \lambda \|\nabla u\|_2^2$ $\qquad F_\lambda(u) = \|u - v\|^2 + \lambda \|\nabla u\|_1$

→ Débruitage, la minimisation de E fait l'image plus flou mais plus débruité et F ~~mais~~ ne floute pas

OBS.: α et β swap: V_c est une métrique ou une ~~sous~~ semi-métrique
α-expansion

Semi-métrique: $\forall \alpha, \beta \in E^2$: $V_c(\alpha, \beta) = V_c(\beta, \alpha) \geq 0$; $V_c(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Métrique, si en plus $V_c(\alpha, \beta) \leq V_c(\alpha, \gamma) + V_c(\gamma, \beta)$

α-β swap: → Semi-métrique put only the pixels α e β on the graph. Link with source

$w(p, \alpha) = D(\alpha, y_p) + \sum V_c(\alpha, x_q)$ → ~~pixel~~ neighbour pixels not included in the graph

$w(p, \beta) = D(\beta, y_p) + \sum V_c(\beta, x_q)$ $\quad w(p, q) = V_c(\alpha, \beta)$

α-expansion
Métric