Sistemas de Controle II — 22.4
Espaço de estados

EXEMPLO 7.3 *Descrição de um circuito em espaço de estados*

Determine as equações de espaço de estados para o circuito mostrado na Fig. 2.25.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_2}\right) \\ -\frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{C_2R_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \\ \frac{1}{C_2R_2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}, J = 1.$$

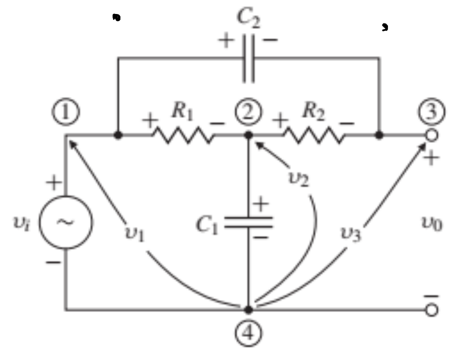


Figura 2.25 Circuito em ponte-T.

$$v_1 = v_i. = u \quad (2.33)$$

$$-\frac{v_1 - v_2}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1\frac{dv_2}{dt} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{v_3 - v_2}{R_2} + C_2\frac{d(v_3 - v_1)}{dt} = 0. \quad (2.35)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{C_1}\left(\frac{v_1 - v_2}{R_1} - \frac{v_2 - v_3}{R_2}\right)$$

$$x_1 = v_2$$

$$\rightarrow x_2 = v_1 - v_3$$

$$y = v_3$$

$$\frac{d(v_1 - v_3)}{dt} = \frac{v_3 - v_2}{C_2R_2}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{v}_2 = ?$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{dt}(v_1 - v_3) = \dot{v}_1 - \dot{v}_3$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_1}\left(\frac{\overset{u}{v_1} - \overset{x_1}{v_2}}{R_1} - \frac{\overset{x_1}{v_2 - v_3}}{R_2}\right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{v_3 - \overset{x_1}{v_2}}{C_2 R_2}$$

$$x_2 = v_1 - v_3 \Rightarrow v_3 = v_1 - x_2 = u - x_2$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_1}\left(\frac{u - x_1}{R_1} - \frac{x_1 - (u - x_2)}{R_2}\right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{(u - x_2) - x_1}{R_2 C_2}$$

$$y = u - x_2$$

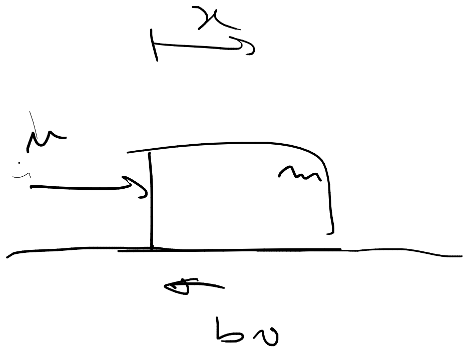
$$\dot{x}_1 = \frac{u}{R_1C_1} - \frac{x_1}{R_1C_1} - \frac{x_1}{R_2C_1} + \frac{u}{R_2C_1} - \frac{x_2}{R_2C_1}$$

$$= -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right)x_1 - \frac{x_2}{R_2C_1} + \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right)u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_1}{R_2C_2} - \frac{x_2}{R_2C_2} + \frac{u}{R_2C_2}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_1} \\ -\frac{1}{R_2C_1} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{pmatrix}_F x + \begin{pmatrix} 1/R_2C_1 + 1/R_1C_1 \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{pmatrix}_G u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}_H x + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}_J u$$



$$F = ma$$

$$m\dot{v} = u - bv$$

$$\boxed{\dot{v} = \frac{1}{m}u - \frac{b}{m}v}$$

$$[x, v] \qquad \dot{x} = ? = v$$

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}u - \frac{b}{m}v \qquad \boxed{y = x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{m}u - \frac{b}{m}v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

EXEMPLO 7.4 *Alto-falante e circuito na forma de espaço de estados*

Para o alto-falante na Fig. 2.29 e o circuito para conduzi-lo na Fig. 2.30, encontre as equações de espaço de estado relativas à tensão V_a de entrada para a saída de deslocamento no cone x. Suponha que a resistência do circuito é R e a indutância é L.

Solução. Lembre-se das duas equações acopladas (2.44) e (2.48), que constituem o modelo dinâmico para o alto-falante:

$x = z_1$
$\dot{x} = z_2$
$i = z_3$

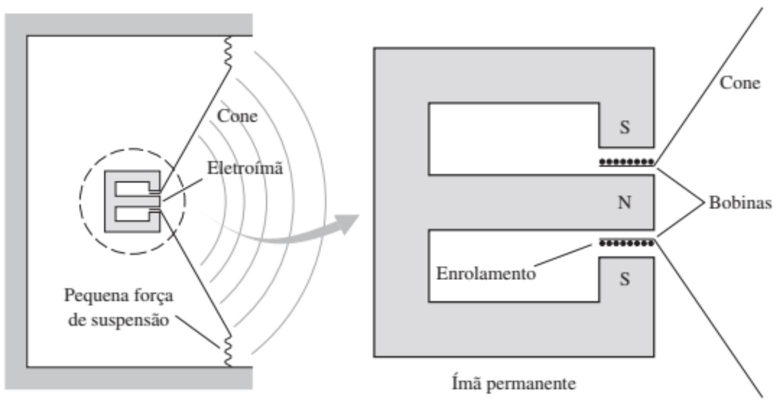
$$M\ddot{x} + b\dot{x} = 0{,}63i,$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v_a - 0{,}63\dot{x}.$$

Um vetor de estados lógico para este sistema de terceira ordem pode ser $\mathbf{x} \triangleq [x\ \dot{x}\ i]^T$, o que fornece as matrizes na forma padrão

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/M & 0{,}63/M \\ 0 & -0{,}63/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = 0,$$

sendo a entrada agora $u \triangleq v_a$.



(a) (b)

Figura 2.29 Geometria de um alto-falante: (a) configuração geral; (b) bobina eletromagnética.

$z_1 = x$

$z_2 = \dot{x}$

$z_3 = I$

$y = x = z_1$

$\dot{z}_1 = ? = \dot{x} = z_2 \quad (1)$

$\dot{z}_2 = ? = \ddot{x} = \dfrac{0{,}63 I - b\dot{x}}{M}$

$= \dfrac{0{,}63 z_3 - b z_2}{M} \quad (2)$

$\dot{z}_3 = ? = \dot{I} =$

$\dfrac{v_a - 0{,}63\dot{x} - RI}{L} = \dfrac{u - 0{,}63 z_2 - R z_3}{L} \quad (3)$

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b/M & 0{,}63/M \\ 0 & -\frac{0{,}63}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} z$$

EXEMPLO 7.5 *Modelando um motor CC na forma de espaço de estados*

Encontre as equações em espaço de estados para o motor CC com o circuito elétrico equivalente mostrado na Fig. 2.32(a).

Solução. Lembre-se das equações de movimento [Eqs. (2.52) e (2.53)] do Capítulo 2:

$$J_m\ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m = K_t i_a,$$
$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - K_e\dot{\theta}_m.$$

Um vetor de estado para este sistema de terceira ordem é $\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix}\theta_m & \dot{\theta}_m & i_a\end{bmatrix}^T$, o que fornece as matrizes na forma padrão

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J_m} & \frac{K_t}{J_m} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = 0,$$

sendo a entrada $u \triangleq v_a$.

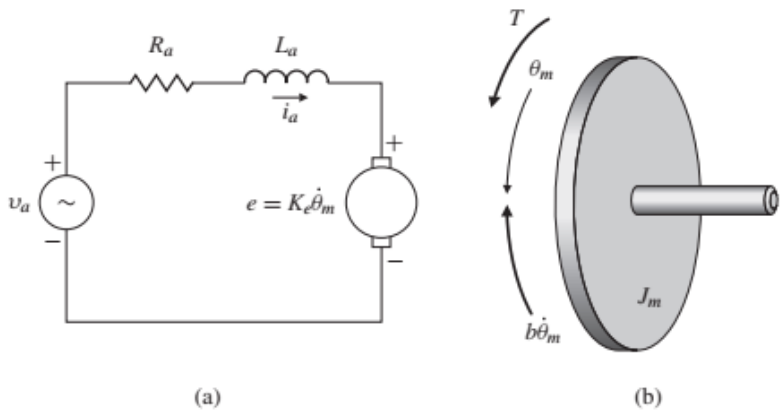


Figura 2.32 Motor de corrente contínua: (a) circuito elétrico da armadura, (b) diagrama de corpo livre do rotor.

[8] A força eletromotriz age contra a tensão aplicada na armadura.