Guia de análise em tempo discreto

26 de outubro de 2022

1 Transformada Z

Transformadas fundamentais:

$$x[k] = \delta[k] \leftrightarrow X(z) = 1 \tag{1}$$

$$x[k] = a^k u[k] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-a} \tag{2}$$

Obs: quando a for complexo, use módulo-fase e procure pelos pares conjugados.

Propriedades fundamentais da transformada Z

Linearidade:

$$\mathcal{Z}\left\{a_1 x_1[k] + a_2 x_2[k]\right\} = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z) \tag{3}$$

Avanço temporal e condição inicial:

$$\mathcal{Z}\left\{x[k+1]\right\} = zX(z) - zx[0] \tag{4}$$

Convolução. Se:

$$x[k] * h[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]x[k-n] \tag{5}$$

então:

$$\mathcal{Z}\left\{x[k] * h[k]\right\} = X(z)H(z) \tag{6}$$

2 Escolha do período de amostragem

Sistema com polos reais: use período de amostragem 10x menor que a **menor constante de tempo**

Sistema com polos complexos: use frequência de amostragem 10x maior que a **maior frequência natural**.

Outra opção: use período de amostragem menor que 10x o tempo de acomodação mais rápido.

3 Fundamentos de análise discreta

Relação de mapeamento:

$$z = e^{sT} \tag{7}$$

Eixo imaginário: $s = j\omega \rightarrow$ Circunferência de raio 1: $|z| = 1$

Semi-plano esquerdo: $\Re\{s\} < 0 \rightarrow$ Interior do círculo unitário: $|z| < 1$

Infinito esquerdo: $\Re\{s\} = -\infty \rightarrow$ Origem: $z = 0$

Pólos:

- Real puro positivo, $|z| < 1$. Exponencial pura, estável (decrescente)
- Real puro positivo, $|z| > 1$. Exponencial pura, não-estável (crescente)
- Real puro negativo, $|z| < 1$. Exponencial com sinal alternante, estável (decrescente)
- Real puro positivo, $|z| > 1$. Exponencial com sinal alternante, não-estável (crescente)
- $z = 1$. Degrau
- $z = -1$. Impulsos alternantes
- Qualquer imaginário $|z| = 1$. Senóide pura. Frequência = fase do polo.
- Complexo $|z| < 1$. Senóide amortecida.

4 Teorma do valor final

Se o sinal no domínio do tempo converge para um valor constante (degrau), então o valor final é dado por:

$$y[\infty] = \lim_{z \to 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) Y(z) \tag{8}$$

Se o sinal tiver uma rampa, ao invés de um degrau, na sua transformada, aumente a potência do fator $\frac{z-1}{z}$ até a rampa sumir.

5 Equivalentes discretos

5.1 Tustin, bilinear ou trapezoidal

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \tag{9}$$

Em alguns casos também é bom saber a relação inversa:

$$z = \frac{T}{2}\frac{s+1}{s-1} \tag{10}$$

5.2 Mapeamento

Proponha uma função de transferência $\hat{G}(z)$ no domínio Z que tenha o mesmo número de polos e zeros explícitos da função contínua $G(s)$. Deixe o ganho na função em Z implícito, isto é, denotado por uma variável K, por exemplo.

Para cada polo e zero explícito na função contínua, obtenha um polo ou zero explícito na função discreta usando a relação:

$$z = e^{sT} \tag{11}$$

Se achar necessário, introduza zeros em $z = -1$ na função discreta. Lembre-se que só se pode introduzir zeros até o limite máximo em que o número de pólos se iguala ao número de zeros da nova função.

Equalize os ganhos DC das duas funções e resolva a equação para obter o ganho K da função discreta:

$$G(0) = \hat{G}(1) \tag{12}$$

5.3 Equivalente por holder

$$\hat{G}(z) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \tag{13}$$

Para achar a transformada $\mathcal{Z}$ de uma função de s:

1. Expanda $G(s)/s$ em frações parciais
2. Ache a transformada de Laplace inversa
3. Substitua $t = kT$
4. Calcule a transformada $\mathcal{Z}$ da função de tempo discreto resultante.

6 Projeto por emulação

Dada a função de transferência contínua da planta, projete um controlador também contínuo. Escolha um período de amostragem apropriado e discretize usando um método à sua escolha.

7 Diagramas de blocos equivalentes

Dados dois blocos $G(z)$ e $C(z)$ em série, paralelo ou loop, as regras de simplificação em bloco equivalente $M(z)$ seguem as mesmas do domínio contínuo

Paralelo = mesma entrada, saídas ligadas no somador

$$M(z) = G(z) + C(z) \tag{14}$$

Série = entrada de um é a saída do outro

$$M(z) = G(z)C(z) \tag{15}$$

Malha, loop: saída de um é realimentada para a própria entrada através do outro e um somador

$$M(z) = \frac{G(z)}{1 + C(z)G(z)} \tag{16}$$

8 LGR discreto

Segue as mesmas regras de construção do LGR contínuo. O projeto é feito apenas observando o círculo unitário como referência de estabilidade.

Lembre-se: equação fundamental (supõe controle proporcional)

$$1 + K\,G(z) = 0 \tag{17}$$

Condição de fase:

$$\angle G(z) = \pm 180^o \tag{18}$$

Condição de módulo

$$|KG(z)| = 1 \tag{19}$$

Pontos de destaque do LGR (revisão)

- Pontos de partida: pólos de malha aberta
- Pontos de chegada: zeros de malha aberta ou assíntotas
- Número de assíntotas: número de pólos menos o número de zeros
- Estabilidade crítica: cruzamento com o círculo unitário
- Pontos de ramificação