Projeto por alocação de polos

25 de outubro de 2022

1 Problema

Projete um controlador com ação integral para o sistema

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{(z+1)(z-0.8)}{z(z-0.9)} \tag{1}$$

De modo que $\xi = 0.5$, $\omega_n = 2$. Utilize o período de amostragem $T = 0.1$.

2 Solução

Controlador:

$$C(z) = \frac{N(z)}{R(z)} \tag{2}$$

onde N e R são polinômios a se determinar.

Suponha que $n = \text{grau}(N)$ e $r = \text{grau}(R)$. Para o controlador ser causal devemos ter $r \geq n$.

Em malha fechada:

$$\begin{aligned}
s &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} && (3)\\
&= -1 \pm j2\sqrt{0.75} \approx -1 \pm j1.73 && (4)\\
z &= \exp(sT) \approx 0.81 \pm j0.15 && (5)\\
M(z) &= (z - 0.81 + j0.15)(z - 0.81 - j0.15)M'(z) && (6)\\
&= (z^2 - 1.78z + 0.82)M'(z) && (7)
\end{aligned}$$

Equação de malha:

$$\begin{aligned}
1 + C(z)G(z) &= 1 + C(z)\,\frac{B(z)}{A(z)} && (8)\\
&= 1 + C(z)\,\frac{(z+1)(z-0.8)}{z(z-0.9)} && (9)
\end{aligned}$$

Proposta:

$$C(z) = \frac{N(z)}{(z-0.8)(z-1)R'(z)} \tag{10}$$

Então:

$$1 + C(z)G(z) = 1 + \frac{N(z)}{\cancel{(z-0.8)}(z-1)R'(z)} \frac{(z+1)\cancel{(z-0.8)}}{z(z-0.9)} \tag{11}$$

$$= \frac{z(z-1)(z-0.9)R'(z) + (z+1)S(z)}{z(z-0.9)(z-1)R'(z)} \tag{12}$$

Polinômio de malha:

$$z(z-1)(z-0.9)R'(z) + (z+1)N(z) = M(z) \tag{13}$$

$$z(z-1)(z-0.9)R'(z) + (z+1)N(z) = (z^2 - 1.78z + 0.82)M'(z) \tag{14}$$

Supondo grau$(R') = r' \geq 0$ e grau$(M') = m' \geq 0$:

$$\underbrace{z(z-1)(z-0.9)R'(z)}_{3+r'} + \underbrace{(z+1)N(z)}_{1+n} = \underbrace{(z^2 - 1.78z + 0.82)M'(z)}_{2+m'} \tag{15}$$

Para o controlador ser causal, devemos ter $r' + 2 \geq n$. Na melhor hipótese $n = r' + 2$. Então:

$$r' + 3 = m' + 2 \tag{16}$$

$$r' = m' - 1 \geq 0 \tag{17}$$

Logo $m' \geq 1$. A situação mais simples (menores graus possíveis) é $m' = 1$ e $r' = 0$.

$m' = 1 \Rightarrow$ mais um pólo em malha fechada. Escolhe-se $z = 0$. Assim:

$$M'(z) = z \tag{18}$$

$$M(z) = (z^2 - 1.78z + 0.82)z \tag{19}$$

$r' = 0 \Rightarrow n = r' + 2 = 2$. Então:

$$R'(z) = k_1 \tag{20}$$

$$N(z) = k_2 z^2 + k_3 z + k_4 \tag{21}$$

Voltando à equação de malha:

$$z(z-1)(z-0.9)R'(z)+(z+1)N(z)=(z^2-1.78z+0.82)M'(z) \tag{22}$$

$$z(z-1)(z-0.9)k_1+(z+1)(k_2z^2+k_3z+k_4)=(z^2-1.78z+0.82)z \tag{23}$$

Então:

$$k_1+k_2=1 \tag{24}$$

$$-1.9k1+k_2+k_3=-1.78 \tag{25}$$

$$0.9k_1+k_3+k_4=0.82 \tag{26}$$

$$k_4=0 \tag{27}$$

Resolvendo obtém-se: $k_1=0.95$, $k_2=0.05$, $k_3=-0.03$, $k_4=0$. Logo:

$$C(z)=\frac{0.05z^2-0.03z}{0.95(z-1)(z-0.8)} \tag{28}$$

$$=\frac{0.055z^2-0.034z}{(z-1)(z-0.8)}. \tag{29}$$

Implementação:

$$C(z)=\frac{0.055z^2-0.034z}{(z-1)(z-0.8)} \tag{30}$$

$$=\frac{0.055-0.034z^{-1}}{1-1.8z^{-1}+0.8z^{-2}} \tag{31}$$

$$\Rightarrow u[k]=1.8u[k-1]-0.8u[k-2]+0.55e[k]-0.034e[k-1] \tag{32}$$