Equações de diferenças

$\frac{dy}{dt} + y = 0$

São análogas as equaçõs diferenciais

Utilizadas para representar sistemas discretos

$0{,}8^k$

Equações que relacionam uma ou mais sequências

A solução da equação é um sinal discreto ou sequência

Exemplo mais clássico: sequência de Fibonnacci

"Qualquer número da sequência é escrito como a soma dos dois anteriores"

$$y[k] = y[k-1] + y[k-2]$$ atraso

$k-2 \Rightarrow n \Rightarrow k-2 = n \Rightarrow k = n+2$

ou:

$$y[k+2] = y[k+1] + y[k]$$ avanço

Com: $y[0] = 0; \quad y[1] = 1$

$$k = 0 \rightarrow y[2] = y[1] + y[0] = 1 + 0 = 1$$
$$k = 1 \rightarrow y[3] = y[2] + y[1] = 1 + 1 = 2$$
$$k = 2 \rightarrow y[4] = y[3] + y[2] = 2 + 1 = 3$$
$$k = 3 \rightarrow y[5] = y[4] + y[3] = 3 + 2 = 5$$

$$y = [0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots]$$

Algumas coisas importantes sobre equações de diferenças

Operador base: atraso ou avanço

Obs: em contraponto à derivada

$V_c(t) = 1 - e^{-t/2}$

$$\frac{d}{dt} \qquad \frac{d^2}{dt^2} \qquad \frac{d^3}{dt^3}$$

$$[k+1] \qquad [k \pm 2] \qquad [k \pm 3]$$

$$[k-1]$$

$$y[k+10] = 0{,}8\, y[k+5] + 6\, y[k] + x[k-3]$$

$$k - 3 = n \Rightarrow k = n + 3$$

$$y[n+13] = 0{,}8\, y[n+8] + 6\, y[n+3] + x[n]$$

Forma geral de uma equação de diferenças

Sinal de entrada, de saída e condiçoes iniciais

$x[k]$ $\quad y[k]$ $\quad y[0] =$

$x[n]$ $\quad y[n]$ $\quad y[1]$

$y[t]$

ordem da equação : maior atraso/avanço

$$y[k] = F\left(\begin{array}{l} y[k-1],\ y[k-2],\ \dots \underset{\text{atraso}}{}\ y[k-L] \\ x(k)\ x[k-1],\ x[k-2],\ \dots\ x[k-L] \end{array}\right)$$

atraso

$$y[n+L] = F\left(\begin{array}{l} y[n+L-1],\ y[n+L-2],\ \dots \\ x[n+L-1],\ x[n+L-2],\ \dots \end{array}\right)$$

atraso.

Causalidade

$y[k]$ só pode depender no máximo do $x[k]$ (entrada no mesmo instante). Nunca de um instante futuro.

Linearidade

$F() \rightarrow$ linear

$$F(y[k-1], x[k-1]) = a_1 y[k-1] + a_2 x[k-1]$$

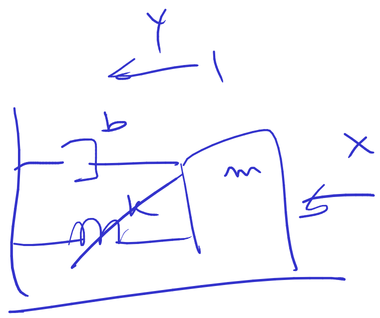
$$y[k] = a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + \dots + a_L y[k-L] + b_0 x[k] + b_1 x[k-1] + \dots + b_L x[k-L]$$

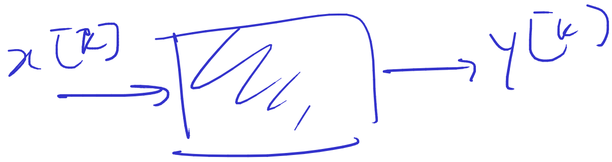
$$y[k] = y[k-1] + y[k-2]$$

De onde surgem?

Discretização de EDO/Sistemas
Regressão linear

Exemplo: aproximação de Euler





$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

$$\frac{1}{ms^2 + bs}$$

$$\dot{y} + y = 0$$

$$\dot{y}(t) + y(t) = 0$$

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} \cong \frac{y(t+T) - y(t)}{T}$$

$T \rightarrow$ amostragem.

$$\frac{y(t+T) - y(t)}{T} + y(t) = 0$$

$t \rightarrow k$
$t+T \rightarrow k+1$

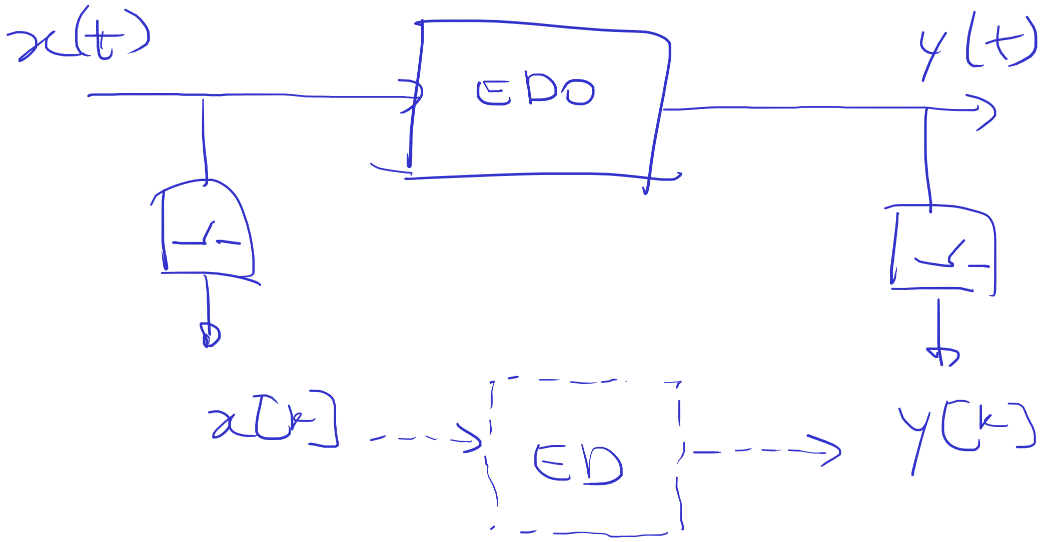
$$\Downarrow$$

$$\frac{y[k+1] - y[k]}{T} + y[k] = 0$$

$$y[k+1] - y[k] + T \cdot y[k] = 0$$

$$y[k+1] + (T-1)\, y[k] = 0$$

Uma equação de diferenças é um artifício usado para imitar a amostragem de um sistema contínuo



Linearidade

Função geral linear
Ordem da equação/sistema

Função solução

É a função discreta (sequência) que satisfaz
a equação

Tal como as equações diferenciais, a solução nunca é única, mas conseguimos particularizar ao restringir as condições iniciais

Exemplo

$$y[k+1] = 2\,y[k] \qquad y[0] = 0.5$$

$$y[k] = 0,5 \cdot 2^k$$

Como se resolve? $\mathcal{Z}\{a^k u[k]\} = \dfrac{z}{z-a}$

$$2y[k+1] - y[k] = 3u[k]$$

$$y[0] = 0$$

$$\mathcal{Z}\{2y[k+1] - y[k]\} = \mathcal{Z}\{3u[k]\}$$

$$\mathcal{Z}\{2y[k+1]\} - \mathcal{Z}\{y[k]\} = 3\mathcal{Z}\{u[k]\}$$

$$2\mathcal{Z}\{y[k+1]\} - \mathcal{Z}\{y[k]\} = 3\mathcal{Z}\{u[k]\}$$

$$\mathcal{Z}\{y[k]\} = Y(z)$$

$$\mathcal{Z}\{y[k+1]\} = zY(z)$$

$$\mathcal{Z}\{u[k]\} = \frac{z}{z-1}$$

$$2zY(z) - Y(z) = \frac{3z}{z-1}$$

$$(2z-1)Y(z) = \frac{3z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{3z}{(2z-1)(z-1)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3}{(2z-1)(z-1)} = \frac{3/2}{(z-1/2)(z-1)}$$

$$Y'(z) = \frac{A_1}{z-1/2} + \frac{A_2}{z-1}$$

$$A_1 = Y'(z)(z-1/2)\Big|_{z=1/2}$$

$$= \frac{3/2}{z-1}\Big|_{z=1/2} = -3$$

$$A_2 = Y'(z)(z-1)\Big|_{z=1} =$$

$$= \frac{3/2}{z-1/2}\Big|_{z=1} = \frac{3/2}{1-1/2} = 3$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{3}{z-1} - \frac{3}{z-1/2}$$

$$Y(z) = \frac{3z}{z-1} - \frac{3z}{z-1/2}$$

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$$

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{3z}{z-1} - \frac{3z}{z-1/2}\right\}$$

$$y[k] = 3\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} - 3\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1/2}\right\}$$

$$= 3\,u[k] - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k} u[k]$$