Sistemas de Controle II – 2022.4
Modelagem matemática da amostragem

Primeiro, um videozin...
https://www.youtube.com/watch?v=uENITui5_jU

O que aconteceu no vídeo?

Onda de 24 hz
Onda de 25 hz
Onda de 23 hz

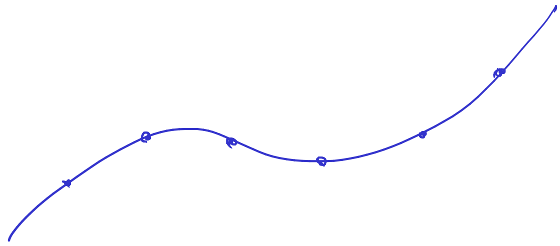
Camera 24 fps

Sinais contínuos e discretos

Sinal contínuo: x(t) -> domínio contínuo, amplitude contínua

Sinal discreto:
- "Fora" do computador: x(kT) - Domínio quase contínuo
- "Dentro" do computador: x[k] - Domínio discreto, quantizado

x(kT) -> ainda uma função
x[k] -> uma sequência, um vetor (programa)



$x(t)$
$y(t)$

$T \to$ fixo: período amostragem

$x(t) \to x(kT)$

$k \to$ nº inteiro
$0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$x(0), x(T), x(2T), x(3T) \ldots$

Discretiza o domínio.

$T = \sqrt{2} \to x(0), x(\sqrt{2}), x(2\sqrt{2})$

$x(kT) \to$ sinal do mundo real.

$x[k] \to$ sequência, "sinal discreto"
vetor

$x[1] \to x(1 \cdot T)$
$x[20] \to x(20T)$

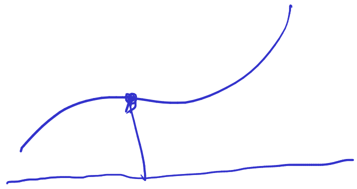
double x[100]

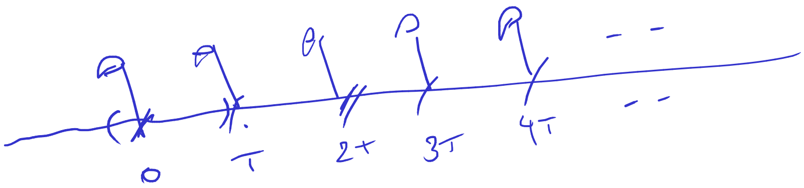
Trem de impulsos
Modulação por trem de impulsos

Análise de Fourier de um sinal amostrado
Recuperação de um sinal amostrado

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ ? \\ \infty & t = 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

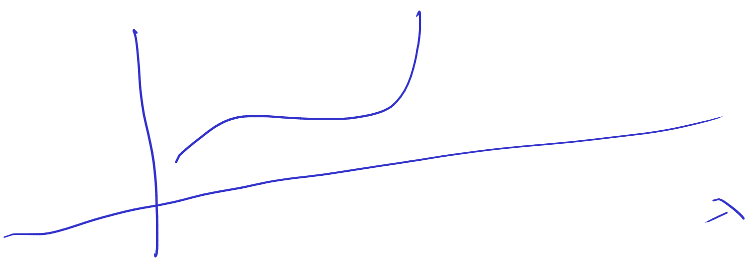


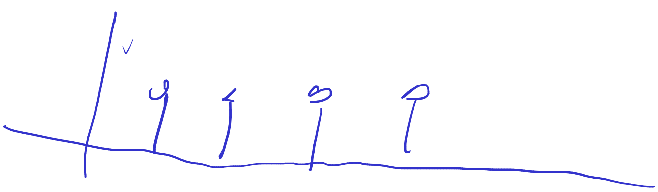


$\delta(t)$, $\delta(t-2T)$

$$\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \rightarrow \text{trem de impulsos.}$$

$$x(t) \longrightarrow \tilde{x}(t) = x(t) \cdot \Delta(t)$$



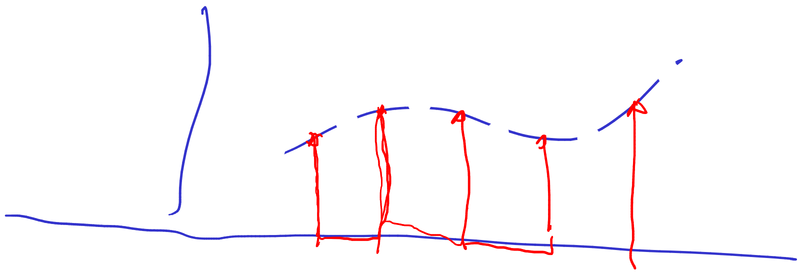


$$x(t)\cdot\delta(t-a) = x(a)\,\delta(t-a)$$

$$\tilde{x}(t) = x(t)\cdot\Delta(t)$$

$$= x(t)\sum_k \delta(t-kT)$$

$$= \sum_k x(t)\,\delta(t-kT) = \sum_k x(kT)\,\delta(t-kT)$$



$$\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_T \Delta(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{0^-}^{T} \delta(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0 \cdot 0}$$

$$= \frac{1}{T}$$

$$\Delta(t) = \sum_n \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 t}$$

$$\tilde{x}(t) = x(t)\cdot\Delta(t)$$

$$= x(t)\cdot\sum_n \frac{1}{T} e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_n x(t)\, e^{jn\omega_0 t}$$

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\sum_n x(t)e^{jn\omega_0 t}\right\}$$

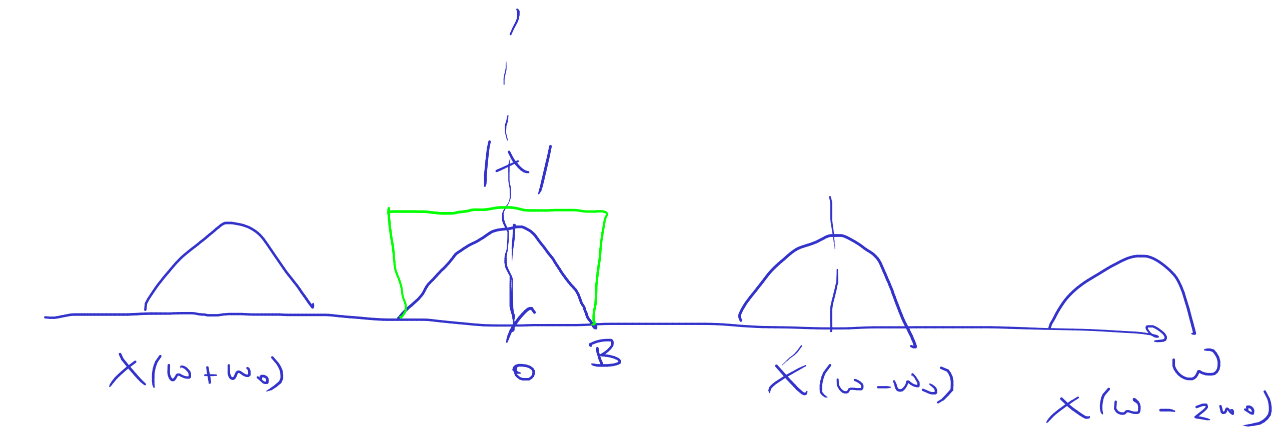
$$= \frac{1}{T}\sum_n \mathcal{F}\{x(t)e^{jn\omega_0 t}\}$$

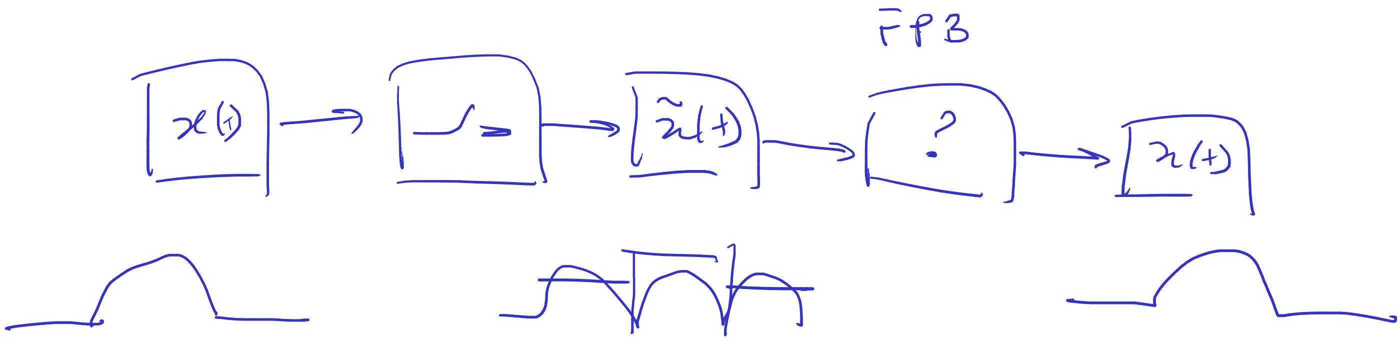
$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{jn\omega_0 t}\} = X(\omega - n\omega_0)$$

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_n X(\omega - n\omega_0)$$

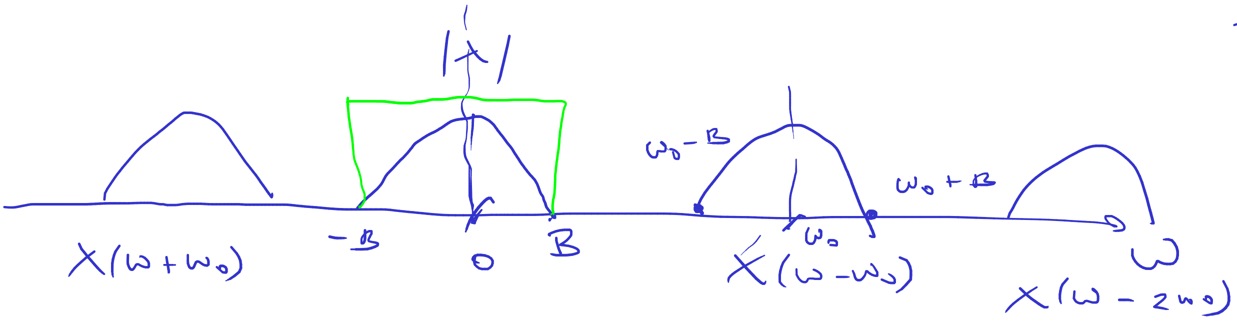
$\sum \delta(t-kT)$





$\omega_0 >> B$

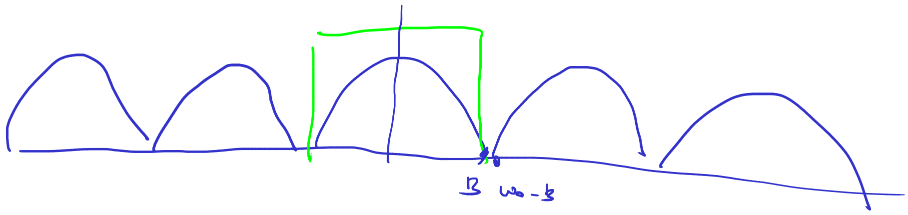
$\frac{2\pi}{T}$



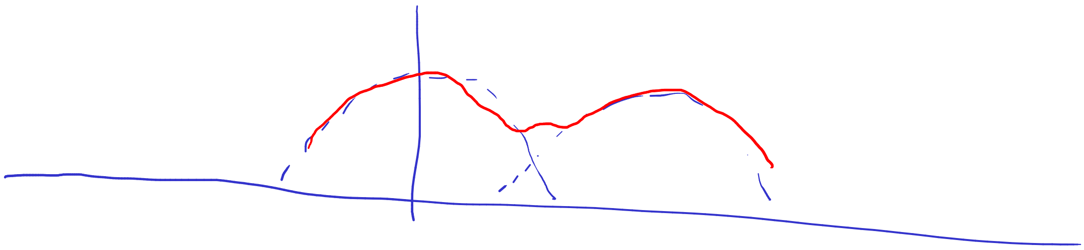
$\omega_0 \approx 2B$

$B = \omega_0 - B$

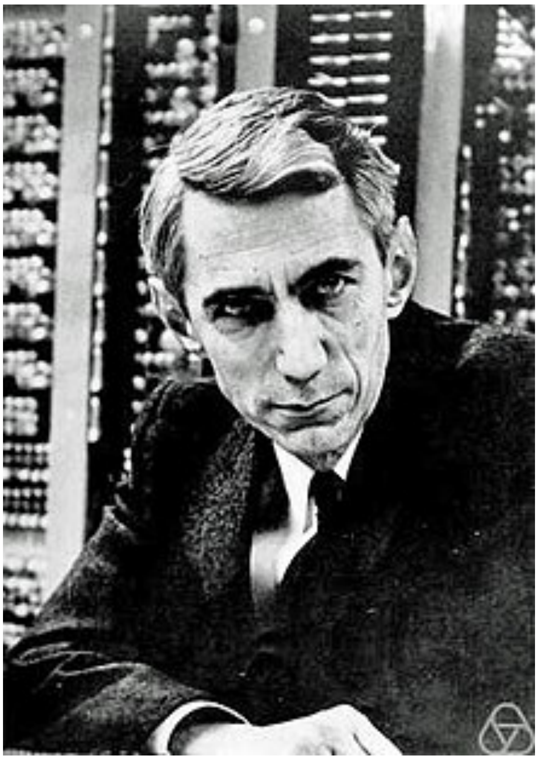
$\omega_0 = 2B$



$\omega_0 < 2B$



Teorema da amostragem de Shannon–Nyquist



Um sinal só pode ser perfeitamente recuperado a partir de suas amostras se a frequencia angular de amostragem for superior a duas vezes a banda do sinal

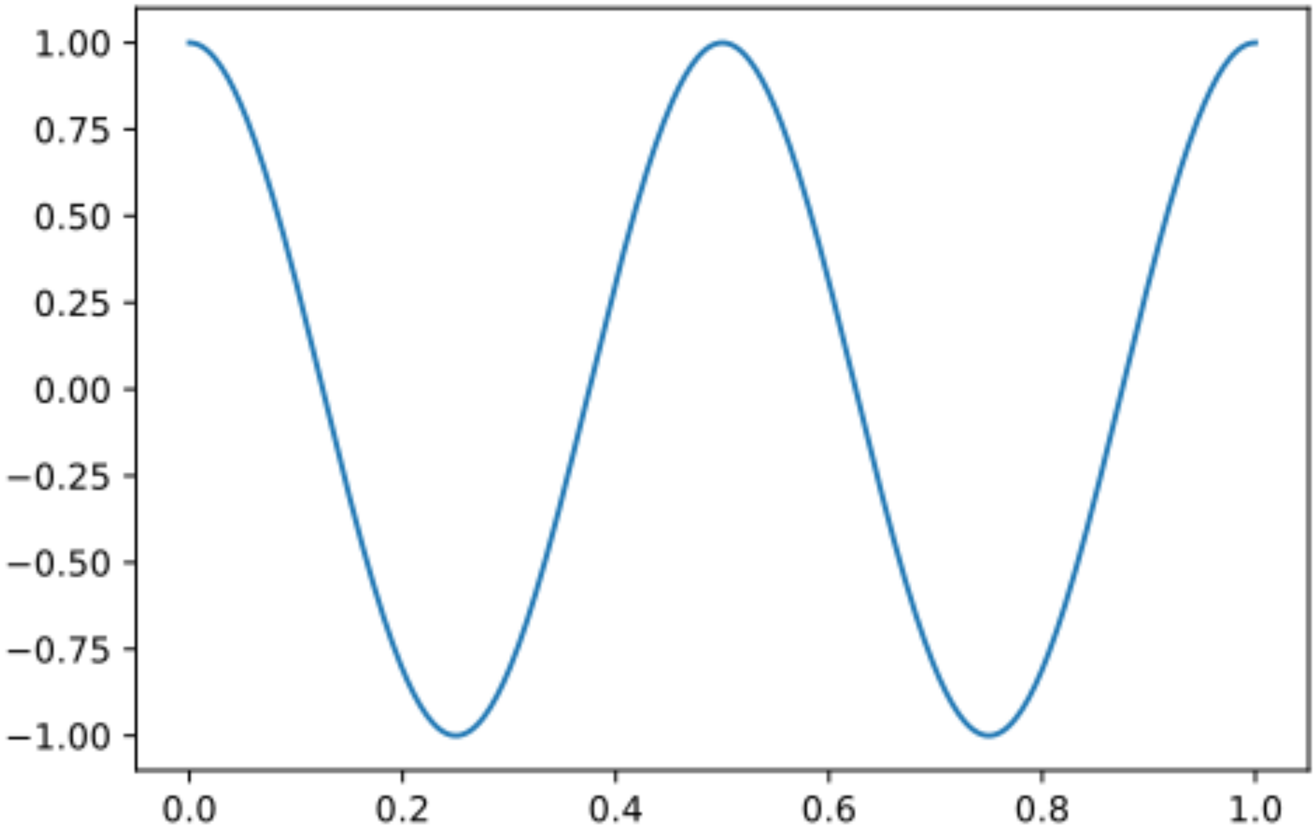
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} > 2B \qquad \frac{K}{\tau s + 1}$$

Teorema da amostragem na prática

- Dado um sinal
- Dado um sistema em malha aberta
- Dado um sistema em malha fechada

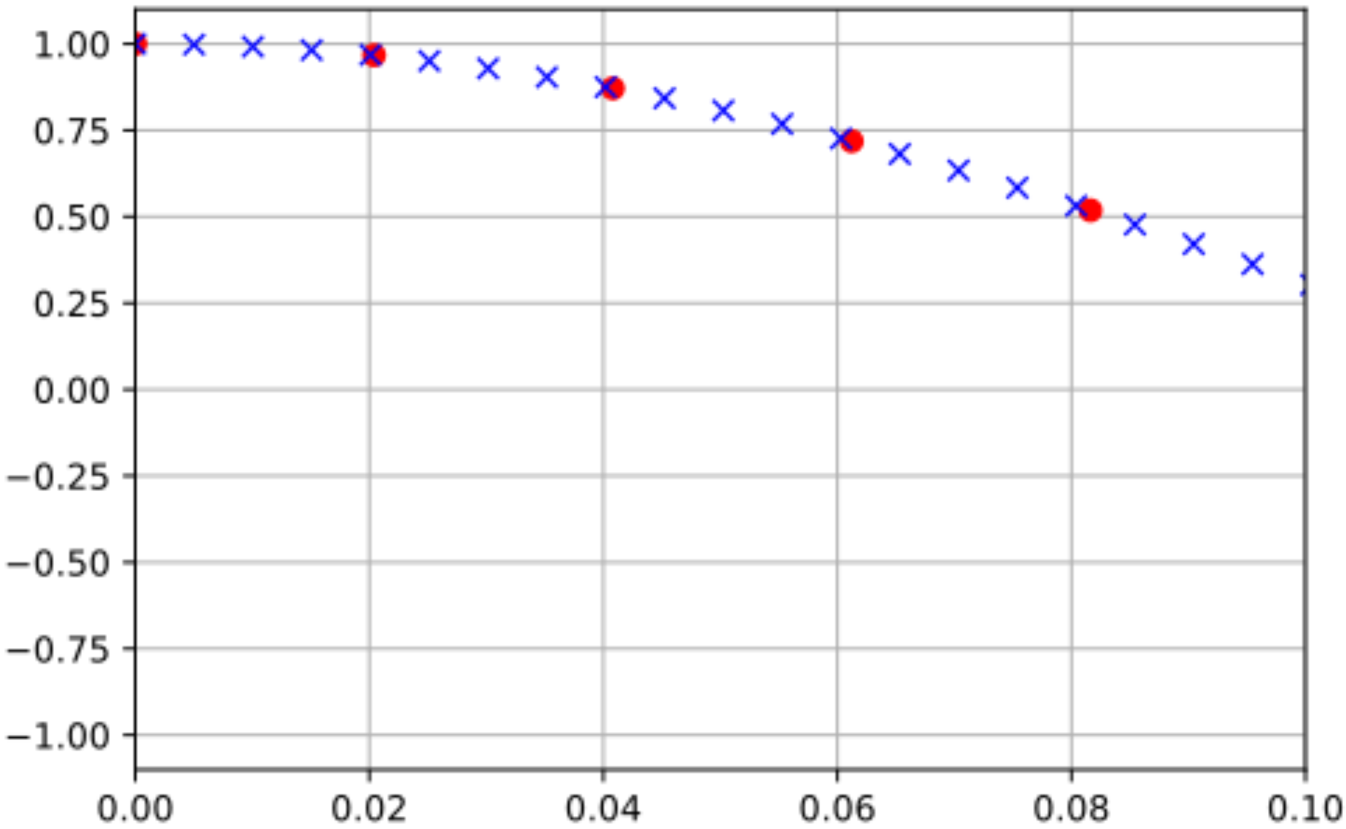
Superamostragem: prós e contras

$$\cos(2\pi \times 2t)$$



50 amostras em 1 segundo

200 amostras em 1 segundo



Subamostragem: aliasing

No Spyder...