Compito del 26/06/2018

1. Dati i seguenti sette punti del piano:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2 & -1.0 & -0.5 & 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.8 & 1.0 & 1.2 & 1.35 & 1.4 \end{pmatrix}$$

   Determinare i coefficienti del polinomio di primo grado $L(x) = \alpha x + \beta$ e di secondo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ che approssimano i dati nel senso dei minimi quadrati, secondo il seguente schema:

   (a) si scrivano i due sistemi di equazioni normali per la determinazione dei coefficienti dei due polinomi L a P.

   (b) nel caso del polinomio di secondo grado, dopo aver verificato le condizioni di applicabilità, si risolva il sistema lineare delle equazioni normali utilizzando la fattorizzazione di Choleski della matrice dei coefficienti delle equazioni normali.

   [Suggerimenti:
   (a) si ricordi che i coefficienti si ottengono minimizzano, nel caso della parabola, la funzione

$$\Phi(a, b, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - P(x_i; a, b, c))^2.$$

   (b) per agevolare i calcoli è possibile utilizzare Python] [12 punti]

2. Siano assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.6$ e $x_3 = 1.0$, e la funzione $f(x) = xe^{-x}$. Determinare (**avvalendosi di una calcolatrice oppure di python**) il polinomio $p_2(x)$ che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi dati nella forma di Newton. Valutare tale polinomio in $\bar{x} = 0.8$ e confrontarlo con il valore della funzione in $\bar{x}$. [6 punti]

3. Siano date le funzioni:

$$f(x) = \sin^2(x), \quad g(x) = \exp(-x)$$

   (a) Stabilire il numero n dei punti di intersezione dei grafici delle due funzioni f e g nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Si denotino le ascisse di tali punti con $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

   (b) Calcolare l'ascissa del punto di intersezione x_n con un errore minore di 10^{-6}. (**avvalendosi di una calcolatrice oppure di python**)

   [Suggerimento: si consiglia di usare il metodo delle tangenti di Newton, stando molto attenti a scegliere bene il punto di partenza in modo da trovare la soluzione corretta] [8 punti]

4. Sia $f(x) = \exp(-x)$. Si consideri la formula dei trapezi composita T_N per l'approssimazione dell'integrale $\int_0^1 f(x)dx$. **Avvalendosi di una calcolatrice oppure di python** stimare, eventualmente utilizzando la formula del resto, il numero minimo N di sottointervalli necessari per ottenere un errore inferiore a 0.0005.

   [6 punti]