

Compito del 10/09/2019

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO DA SVOLGERE A SCELTA CON PYTHON O CON LA CALCOLATRICE

1. Utilizzando i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ con:

$$A = \begin{pmatrix} 4.0 & 3.0 & -1.0 \\ -2.0 & -4.0 & 5.0 \\ 1.0 & 2.0 & 6.0 \end{pmatrix}$$

$x_0 = (0.0, 0.0, 0.0)^T$ e $b = (1.0, 2.0, 3.0)^T$, calcolare x_k e valutare il residuo $\|b - Ax_k\|_2$ per $k = 0, \dots, 9$. Dire se e quale metodo appare essere convergente. Confrontare la soluzione ottenuta con la soluzione esatta $x = [41/85, -13/85, 8/17]$.

[8 punti]

2. Dati i punti: $(x_i, y_i) = (0, 2), (1, 0), (2, 1), (3, 6)$, determinare il polinomio interpolante tali punti con il metodo di Newton. Verificare che il polinomio effettivamente interpola i punti dati. Disegnare i punti dati e il polinomio interpolante nell'intervallo $[0, 3]$. (aiuto: per chi usa python importare il modulo **matplotlib.pyplot**).

[4 punti]

3. Sia data la funzione $f(x) = \log(1/x) - \exp(-x)\cos(x)$. Mostrare che tale funzione contiene uno zero nell'intervallo $[a, b] = [0.5, 1]$. Dopo averne verificato le condizioni di applicabilità, stabilire da quale estremo sia più conveniente partire (cioè se scegliere $x_0 = a$ o $x_0 = b$), applicare il metodo di Newton per trovare una approssimazione dello zero di f e dire per quale valore di k si ha

$$|x_{k+1} - x_k| \leq 10^{-4}.$$

[8 punti]

4. Utilizzando il metodo dei trapezi composito, approssimare il seguente integrale

$$I(f) = \int_0^{2\pi} x^2 \sin(x) dx,$$

e dire in quanti intervallini di uguale ampiezza bisogna suddividere l'intervallo $[0, 2\pi]$ per approssimare l'integrale con un errore assoluto in modulo minore di 10^{-3} .

Suggerimento: confrontare il risultato approssimato con il risultato esatto calcolato analiticamente, oppure usare una stima basata sulla formula dell'errore del metodo di Simpson.

[9 punti]