

Compito del 11/07/2017

Lo studente risolva tre a scelta tra gli esercizi sotto riportati. Nel caso vengano risolti tutti gli esercizi si terrà conto solo dei tre punteggi più alti.

1. Studiare la convergenza del metodo di Jacobi e di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aiuto: in presenza di radice immaginarie considerare il modulo della radice per il calcolo del raggio spettrale. [12 punti]

2. Sono assegnati i tre punti $(0, 2)$, $(1, 0)$ e $(3, k)$. Si calcoli la retta di miglior approssimazione nel senso dei minimi quadrati e dire, in seguito, per quali valor di k la retta di approssimazione diventa retta di interpolazione.

[12 punti]

3. Si consideri il problema di trovare l'intersezione $f(x) = g(x)$ fra le seguenti due curve definite rispettivamente da $y = f(x) \equiv \exp(x)$ e $y = g(x) \equiv x + 1$. La relazione $f(x) = g(x)$ si pu convertire in un problema di punto fisso della forma $x_{n+1} = \Phi_1(x_n)$, o $x_{n+1} = \Phi_2(x_n)$, dove $\Phi_1(x) = f^{-1}(g(x))$, mentre $\Phi_2(x) = g^{-1}(f(x))$. Si dimostra che una delle due iterazioni di punto fisso converge per certi valor di x_0 , mentre l'altra converge per altri valori di x_0 . Discutere la convergenza dei due metodi in dipendenza del valore della condizione iniziale x_0 .

[6 punti]

4. Dato l'integrale

$$\int_5^{10} \log x \, dx,$$

si dia una maggiorazione dell'errore in valore assoluto con la formula di Cavalieri-Simpson, suddividendo l'intervallo di integrazione in $N = 10$ sottointervalli. Stabilire se il valore ottenuto con la formula di quadratura è una approssimazione per eccesso o per difetto dell'integrale.

[Suggerimento. Si ricorda che l'errore per una formula di Simpson per una funzione f nell'intervallo $[a, b]$ ammette l'espressione $I[f] - S[f] = E[f]$, dove

$$E[f] = -(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)/2880,$$

con ξ opportuno punto interno all'intervallo.]

[6 punti]