Compito del 05/12/2017

1. Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ -\beta & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$
con $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$. Dire per quali combinazioni dei parametri $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in$ il metodo di Gauss-Seidel applicato ad un sistema lineare avente A come matrice dei coefficienti, converge.
[9 punti]

2. Assegnati i nodi $x_0 = -1$, $x_1 = -0.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 1$ e la funzione $f(x) = e^{(x^2-1)}$. Determinare il polinomio $p(x)$ che interpola la funzione $f(x)$ nei nodi dati nella forma di Newton.
[7 punti]

3. Sia data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{x} - 1$$
nell'intervallo $[0.5, 1.5]$. Dopo aver verificato le condizioni di applicabilità del metodo di Newton, determinare:
   - (**per gli studenti fuori corso**) il numero k di iterazioni necessarie per determinare una approssimazione della soluzione $\alpha = 1$, affinchè $|x_k - \alpha| < 10^{-2}$.
   - (**per gli studenti in corso**) utilizzando Python, il numero k di iterazioni necessarie per determinare una approssimazione della soluzione $\alpha = 1$, affinchè: $|x_k - \alpha| < 10^{-6}$.

   [7 punti]

   - (**per gli studenti fuori corso**) Sia $f \in C^1([0,1])$. Determinare $b_0,\ b_1,\ b_2$ tale che la formula di quadratura
   $$I_2[f] = b_0 f'(0) + b_1 f(1) + b_2 f(0)$$
   per il calcolo dell'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$, abbia ordine polinomiale 2.
   [7 punti]
   - (**per gli studenti in corso**) Utilizzando l'algoritmo di Simpson composita per approssimare il seguente integrale:
   $$\int_0^1 xe^{-x} dx,$$
   determinare quanti sotto intervalli di uguale ampiezza $h = 1/N$ sono richiesti per approssimare l'integrale con un'errore minore di 10^{-4}