Регрессия дз 1

№1 (1 балл)

По определению мы знаем: $R^2 = \frac{ESS}{TSS}$

А также, что: $Corr(y_i, \hat{y}_i) = \frac{Cov(y_i, \hat{y}_i)}{\sigma_y \sigma_{\hat{y}}}$

Докажите следующее свойство: $R^2 = Corr^2(y_i, \hat{y}_i)$

$$Corr(y_i; \hat{y}_i) = \frac{cov(\hat{y}_i + \hat{\varepsilon}_i; \hat{y}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}} = \frac{cov(\hat{y}_i, \hat{y}_i) + cov(\hat{y}_i, \hat{\varepsilon}_i)}{\sqrt{TSS}\sqrt{ESS}} = \frac{ESS + cov(\hat{y}_i, \hat{\varepsilon}_i)}{\sqrt{TSS}\sqrt{ESS}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ESS}}{\sqrt{TSS}} = \sqrt{R} \quad . \text{ чтд.}$$

№2 (1 балл)

На лекции мы показали, что оценки коэффициентов в матричной форме можно вычислить по следующей формуле: $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$

Также мы знаем, что оценки МНК несмещенные: $E[\hat{\beta}_j | x] = \beta_j$

2.1. Выразите оценки коэффициентов $\hat{\beta}$ через β в матричной форме (по аналогии с выводом Теоремы 1 из лекции)

2.2. Докажите свойство несмещенности коэффициентов $\hat{\beta}$ в матричной форме

2.1 $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y = (X^T X)^{-1} X^T \cdot (X\beta + \varepsilon) = \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$

2.2 $E[\hat{\beta} | X] = E[\beta | X] + E[(X^T X)^{-1} X^T \varepsilon | X] = \beta + 0 = \beta$

№3 (1 балл)

Докажите, что: $$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = RSS + ESS + 2\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i (\hat{y}_i - \bar{y})$$

$$RSS + ESS = \sum_{i=0}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=0}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=0}^n \left(\hat{\varepsilon}_i^2 + (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2\right)$$

$$\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=0}^n (\hat{y}_i + \hat{\varepsilon}_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=0}^n \left(\hat{y}_i^2 + \hat{\varepsilon}_i^2 - \bar{y}_i^2 + 2\hat{y}_i\hat{\varepsilon}_i - 2\hat{y}\bar{y}_i - 2\hat{\varepsilon}\bar{y}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^n \left(\underbrace{\boxed{(y_i^2 - \bar{y}_i)^2 + \hat{\varepsilon}_i^2}}_{RSS + ESS} + \boxed{2\hat{\varepsilon}_i(\hat{y}_i - \bar{y})}\right) = RSS + ESS + 2\sum_{i=0}^n \hat{\varepsilon}_i(\hat{y}_i - \bar{y})$$

ч.т.д.

№4 (2 балла)

Используя предпосылку Гаусса-Маркова №4 (Гомоскедастичность стандартного отклонения ошибки) в матричной форме: $Var(\varepsilon|X) = \sigma^2 I_n$, где I_n – единичная матрица.

Докажите, что: $Var(\hat{\beta}|X) = \sigma^2(X^T X)^{-1}$

100 × 10
10 × 100

$$Var(\hat{\beta}|X) = Var((X^T X)^{-1} X^T y|X) = (X^T X)^{-1} X^T \, Var(y|X) \cdot$$

$$\times ((X^T X)^{-1} X^T)^T = (X^T X)^{-1} X^T \, Var(y|X) \cdot X (X^T X)^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T \times$$

$$\times Var(X\beta + \varepsilon|X) \cdot X (X^T X)^{-1} = (X^T X)^{-1} X^T \sigma^2 I_n \cdot X (X^T X)^{-1} =$$

$$= \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

ч.т.д.