

Fourier-Mukai Transformationen und die derivierte Kategorie abelscher Varietäten

Raphael Senghaas

1 Fourier-Mukai Transformationen

Im Folgenden seien stets X und Y glatte projective Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Wir verwenden die Notation

$$\begin{aligned}\pi_X : X \times_k Y &\rightarrow X \\ \pi_Y : X \times_k Y &\rightarrow Y\end{aligned}$$

für die Projektionen auf X bzw. Y . Ab sofort werden wir $X \times Y$ für das Produkt in der Kategorie der Varietäten über k .

Definition 1.1. Sei $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$. Die von \mathcal{P} induzierte Fourier-Mukai Transformation $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ wird durch

$$\mathcal{E}^\bullet \mapsto R\pi_{Y*}(L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{P}) \quad (1)$$

Wir nennen \mathcal{P} den Kern der Fourier-Mukai Transformation \mathcal{P} .

Im folgenden veranschaulichen die Definition: Zunächst betrachten wir die das relevante Diagramm auf Ebene der Varietäten:

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\ X & & Y\end{array}$$

Dies induziert folgendes Diagramm auf Ebene der (beschränkten) derivierten Kategorien:

$$\begin{array}{ccccc}
& & \overset{-\otimes^L \mathcal{P}}{\curvearrowright} & & \\
& & D^b(X \times Y) & & \\
R\pi_{X*} \swarrow \cdots & & & & \cdots \nwarrow L\pi_{Y*} \\
& \nearrow L\pi_X^* & & \searrow R\pi_{Y*} & \\
D^b(X) & \xrightarrow{\quad \Phi_{\mathcal{P}} \quad} & D^b(Y) & &
\end{array}$$

Da X und Y glatt sind, sind die Strukturabbildungen insbesondere flach und damit sind auch π_X und π_Y flach. Insbesondere ist $L\pi_X^* = \pi_X^*$. In vielen für uns interessanten Fällen wird \mathcal{P} ein Komplex lokal freier Garben sein. In diesem Fall ist \mathcal{P} flach und $-\otimes^L \mathcal{P} = -\otimes \mathcal{P}$.

Da $L\pi_X^*$, $-\otimes^L \mathcal{P}$ und $R\pi_{Y*}$ exakte Funktoren sind, ist auch $\Phi_{\mathcal{P}}$ als die Komposition exakter Funktoren exakt.

Im folgenden wollen wir zeigen, dass viele uns bereits bekannte Funktoren als Fourier-Mukai Transformationen dargestellt werden können.

Beispiele für Fourier-Mukai Transformationen

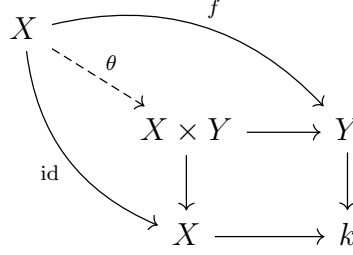
i) Die Identität

$$\text{id} : D^b(X) \rightarrow D^b(X) \quad (2)$$

ist natürlich isomorph zu der Fourier-Mukai Transformation $\Phi_{\mathcal{O}_{\Delta}}$ wobei Δ die Diagonale in $X \times X$ ist, die durch die (abgeschlossene) Einbettung $\iota : X \rightarrow X \times X$ definiert ist und $\mathcal{O}_{\Delta} = \iota_* \mathcal{O}_X$. Abgeschlossene Einbettungen sind affine Morphismen. Für affine Morphismen gilt Serre's Kriterium, aus welchem folgt, dass $R\iota_* = \iota_*$. Sei \mathcal{E}^\bullet :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{O}_{\Delta}}(\mathcal{E}^\bullet) &= R\pi_{Y*}(L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{O}_{\Delta}) \\
&= R\pi_{Y*}(L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \iota_* \mathcal{O}_X) \\
&\simeq R\pi_{Y*}(\iota_*(L\iota^* L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{O}_X)) && \text{(Projektionsformel)} \\
&\simeq R(\pi_Y \circ \iota)_* L(\pi_X \circ \iota)^* \mathcal{E}^\bullet \simeq \mathcal{E}^\bullet && \text{(Da } \pi_Y \circ \iota = \text{id} = \pi_X \circ \iota)
\end{aligned}$$

ii) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus. Betrachte das Folgende Diagramm:



Wir definieren den Graph von f Γ_f als das Bild von θ und $\mathcal{O}_{\Gamma_f} := \theta_* \mathcal{O}_X$. Da Y separiert, folgt, dass θ eine abgeschlossene Einbettung und somit affin und wie oben folgt, dass $R\theta_* \mathcal{O}_X = \theta_* \mathcal{O}_X$. Sei wieder $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\mathcal{O}_{\Gamma_f}} &= R\pi_{Y*}(L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \theta_* \mathcal{O}_X) \\
 &= R\pi_{Y*} \theta_*(L\theta^* L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{O}_X) \\
 &\simeq R(\pi_Y \circ \theta)_*(L(\pi_X \circ \theta)^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{O}_X) \\
 &\simeq Rf_* \mathcal{E}^\bullet \quad (\text{Da } \pi_X \circ \theta = \text{id und } \pi_Y \circ \theta = f)
 \end{aligned}$$

Aus der Definition einer Fourier-Mukai Transformationen ist klar, dass jedes Element $\mathcal{P} \in D^{flat}(X \times Y)$ eine sowohl eine Transformation $\Phi_{\mathcal{P}}^{X \rightarrow Y} : D^{flat}(X) \rightarrow D^{flat}(Y)$ als auch eine Transformation $\Phi_{\mathcal{P}}^{Y \rightarrow X} : D^{flat}(Y) \rightarrow D^{flat}(X)$ definiert.

Wir haben soeben gesehen, dass $\Phi_{\mathcal{O}_{\Gamma_f}}^{X \rightarrow Y} = Rf_*$. Eine Rechnung analog zu der obigen zeigt, dass $\Phi_{\mathcal{O}_{\Gamma_f}}^{Y \rightarrow X} = Lf^*$.

- iii) Das Beispiel *i*) lässt sich auf beliebige Geradenbündel \mathcal{L} auf X verallgemeinern. Sei ι wie oben die Einbettung der Diagonale in X , dann ist $\iota_* \mathcal{L}$ ein Element in $D^b(X \times X)$. Analog zu obiger Rechnung ergibt sich

$$\Phi_{\iota_* \mathcal{L}} \mathcal{E}^\bullet = \mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{L} \quad (3)$$

Da \mathcal{L} lokal frei ist muss das Tensorprodukt hier nicht abgeleitet werden.

- iv) Der Verschiebungsfunktor $T : D^b(X) \rightarrow D^b(X)$ kann ebenfalls als Fourier-Mukai Transformation mit Kern $\mathcal{O}_\Delta[1]$ dargestellt werden.

- v) Sei nun $\mathcal{P} = \iota_* \omega_X^k \in D^b(X \times X)$, wobei ω_X das kanonische Bündel über X ist. Wir erinnern daran, dass der Serre-Funktor definiert ist durch $S_X(\mathcal{E}^\bullet) = (\mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X)[n]$. Dann ist für $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$

$$\begin{aligned} \Phi_{\iota_* \omega_X^k} \mathcal{E}^\bullet &= R\pi_{Y*}(L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \iota_* \omega_X^k) \\ &\simeq R\pi_{Y*} \iota_*(L\iota^* L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \omega_X^k) \\ &\simeq \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X^k = S_X^k(\mathcal{E}^\bullet)[-kn] \end{aligned}$$

Da X glatt ist, ist ω_X lokal frei. Somit müssen wir das Tensorprodukt nicht ableiten.

Adjungierte Fourier-Mukai Transformationen

Als erste Resultat über Fourier-Mukai Transformationen wollen wir zeigen, dass jede Fourier-Mukai Transformation ein Rechts- und Linksadjungiertes besitzt, die jeweils wieder Fourier-Mukai Transformationen sind.

Definition 1.2. Für jedes Objekt $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_L &:= \mathcal{P}^\vee \otimes \pi_Y^* \omega_Y[\dim(Y)] \\ \mathcal{P}_R &:= \mathcal{P}^\vee \otimes \pi_X^* \omega_X[\dim(X)] \end{aligned}$$

Die davon erzeugten Fourier-Mukai Transformationen $D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$ lassen sich wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{P}_L} &\simeq \Phi_{\mathcal{P}^\vee} \circ S_Y \\ \Phi_{\mathcal{P}_R} &\simeq S_X \circ \Phi_{\mathcal{P}^\vee} \end{aligned}$$

Proposition 1.3. Sei $F = \Phi_{\mathcal{P}} : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ die Fourier-Mukai Transformation mit Kern \mathcal{P} . Dann gilt, $G := \Phi_{\mathcal{P}_L}$ ($H := \Phi_{\mathcal{P}_R}$ ist linksadjungiert (rechtsadjungiert) zu F).

Proof. Das zentrale Resultat für den Beweis ist die Grothendieck-Verdier Dualität (GV), die wir in Vortrag 10 gesehen haben. Das Resultat lässt sich kurz zusammenfassen als:

$$Lf^* \dashv Rf_* \dashv f^! \tag{4}$$

Sei $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$ und $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(Y)$. Wir wollen zeigen, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$Hom_{D^b(X)}(G(\mathcal{F}^\bullet), \mathcal{E}^\bullet) \simeq Hom_{D^b(Y)}(\mathcal{F}^\bullet, F(\mathcal{E}^\bullet)) \quad (5)$$

gibt. Mit den Resultaten aus Vortrag 9 und 10 folgt, sofort, dass wir die folgende Kette von natürlichen Isomorphismen haben:

$$\begin{aligned} Hom_{D^b(X)}(G(\mathcal{F}^\bullet), \mathcal{E}^\bullet) &\stackrel{def}{=} Hom_{D^b(X)}(R\pi_{X*}(L\pi_Y^* \mathcal{F}^\bullet \otimes^L \mathcal{P}_L), \mathcal{E}^\bullet) \\ &\stackrel{GV}{\simeq} Hom_{D^b(X \times Y)}(L\pi_Y^* \mathcal{F}^\bullet \otimes^L \mathcal{P}_L, L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L L\pi_Y^* \omega_Y [\dim(Y)]) \\ &\stackrel{(*)}{\simeq} Hom_{D^b(X \times Y)}(L\pi_Y^* \mathcal{F}^\bullet \otimes^L \mathcal{P}^\vee, L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet) \\ &\simeq Hom_{D^b(Y)}(L\pi_X^* \mathcal{F}^\bullet, L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{P}) \\ &\stackrel{L\pi_Y^* \dashv R\pi_Y^*}{\simeq} Hom_{D^b(X \times Y)}(\mathcal{F}^\bullet, R\pi_{Y*}(L\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{P})) \\ &= Hom_{D^b(Y)}(\mathcal{F}^\bullet, F(\mathcal{E}^\bullet)) \end{aligned}$$

Für die natürliche Isomorphie $(*)$ verwenden wir, dass $L\pi_Y^* \omega_Y$ ist [Stacks, Tag 0B8L] und der Shift-Funktor eine Autoäquivalenz der derivierten Kategorie ist. Dies zeigt, $G \dashv F$. Der Beweis für $F \dashv H$ verläuft analog. \square

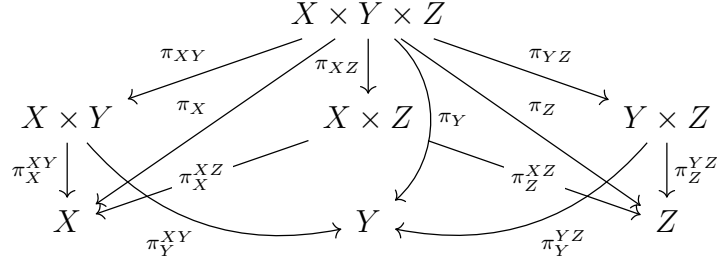
Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Komposition zweier Fourier-Mukai Transformationen wieder eine Fourier-Mukai Transformation gibt. Wir führen die folgende Notation für Projektionen von mehrfachen Produkten ein. Sei $\{X_i\}_{i \in I = \{i_1, \dots, i_k\}}$ eine endliche Familie glatter, projektiver Varietäten und sei $\{X_j\}_{j \in J = \{j_1, \dots, j_l\}} \subset \{X_i\}_{i \in I}$. Dann bezeichnen wir die Projektion

$$\pi_{X_{j_1} \dots X_{j_l}}^{X_{i_1} \dots X_{i_k}} : \Pi_{i \in I} X_i \rightarrow \Pi_{j \in J} X_j \quad (6)$$

Seien X, Y, Z glatt projektiv. Dann haben wir zum Beispiel

$$\pi_{XZ}^{XYZ} : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Z \quad (7)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit lassen wir im Folgenden die obere Indizierung weg, falls die Quelle der Projektion $X \times Y \times Z$ ist, also z.B. $\pi_{XZ}^{XYZ} = \pi_{XZ}$. Um eine Verkettung zweier Fourier-Mukai Transformationen zu definieren müssen wir zunächst aus $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ und $\mathcal{Q} \in D^b(Y \times Z)$ ein Element in $D^b(X \times Z)$ konstruieren. Das folgende kommutative Diagramm verdeutlicht die Situation.



Aus dem Diagramm lässt sich unmittelbar einsehen, wie sich ein möglicher Kandidat für den Kern der Komposition $\Phi_Q \circ \Phi_P$: Wir ziehen \mathcal{P} und \mathcal{Q} zurück auf $X \times Y \times Z$, tensorieren dort die und schicken das Ergebnis per Pushforward auf $X \times Z$. Konkret definieren wir

$$\mathcal{R} := R\pi_{XZ*}(L\pi_{XY}^*\mathcal{P} \otimes^L L\pi_{YZ}^*\mathcal{Q}) \quad (8)$$

Proposition 1.4. *Es gilt $\Phi_{\mathcal{R}} \simeq \Phi_Q \circ \Phi_P$. Insbesondere ist die Komposition zweier Fourier-Mukai Transformationen wieder eine Fourier-Mukai Transformation.*

Proof. Der Beweis benutzt hauptsächlich die Projektionsformel (PF) und die Kommutativität des Diagramms oben (insbesondere gilt $\pi_A^{AB} \circ \pi_{AB} = \pi_A$ für $A \neq B \in \{X, Y, Z\}$).

Sei $\mathcal{E}^\bullet \in D^b(X)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{R}}(\mathcal{E}^\bullet) &\stackrel{def}{=} R\pi_Z^{XZ*}(\pi_X^{XZ*}\mathcal{E}^\bullet \otimes^L R\pi_{XZ*}(\pi_{XY}^*\mathcal{P} \otimes^L \pi_{YZ}^*\mathcal{Q})) \\ &\stackrel{PF}{\simeq} R\pi_Z^{XZ*}(R\pi_{XZ*}(\pi_X^{XZ*}\pi_X^{XZ*}\mathcal{E}^\bullet \otimes^L \pi_{XY}^*\mathcal{P} \otimes^L \pi_{YZ}^*\mathcal{Q})) \\ &\simeq R\pi_Z^*(\pi_X^*\mathcal{E}^\bullet \otimes^L \pi_{XY}^*\mathcal{P} \otimes^L \pi_{YZ}^*\mathcal{Q}) \\ &\simeq R\pi_Z^{YZ*}R\pi_{YZ*}(\pi_{XY}^*(\pi_X^{XY*}\mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{P}) \otimes^L \pi_{YZ}^*\mathcal{Q}) \\ &\stackrel{PF}{\simeq} R\pi_Z^{YZ*}(R\pi_{YZ*}\pi_{XY}^*(\pi_X^{XY*}\mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{P}) \otimes^L \mathcal{Q}) \\ &\stackrel{FB}{\simeq} R\pi_Z^{YZ*}(\pi_Y^{YZ*}R\pi_Y^{XY*}(\pi_X^{XY*}\mathcal{E}^\bullet \otimes^L \mathcal{P}) \otimes^L \mathcal{Q}) \\ &= R\pi_Z^{YZ*}(\pi_Y^{YZ*}\Phi_P(\mathcal{E}^\bullet) \otimes^L \mathcal{Q}) = \Phi_Q(\Phi_P(\mathcal{E}^\bullet)). \end{aligned}$$

Der Beweis verwendet ein Resultat über Basiswechsel entlang flacher Basiswechsel, das wir im folgenden Besprechen. \square

Lemma 1.5. *(Flacher Basiswechsel) Betrachte ein kartesisches Quadrat*

$$\begin{array}{ccc}
X \times_Z Y & \xrightarrow{v} & Y \\
\downarrow g & & \downarrow f \\
X & \xrightarrow{u} & Z
\end{array}$$

mit $f : Y \rightarrow Z$ und $u : Y \rightarrow Z$ flach. Dann existiert ein funktorieller Isomorphismus

$$u^* Rf^* \mathcal{F}^\bullet \rightarrow Rg^* v^* \mathcal{F}^\bullet. \quad (9)$$

Da u und v flach sind, müssen wir die assoziierten Pullbackfunktoren nicht ableiten, da gilt $Lu^* = u^*$ und die analoge Aussage für v .

Proof. Die Konstruktion der kanonischen Abbildung wird in [Stacks, Tag 07A7] gezeigt. Die kanonische Abbildung existiert für beliebiges u . Wenn u flach ist, ist die kanonische Abbildung ein Isomorphismus. Dies folgt aus [Har, Ch. III, 9.3] \square

Falls die Komposition $\Phi_Q \circ \Phi_{\mathcal{P}}$ kein Isomorphismus ist, ist der Kern \mathcal{R} nicht eindeutig. Allerdings ist die gewählte Definition kanonisch in dem Sinne, dass gilt $\mathcal{R}_L \simeq R\pi_{XY*}(\pi_{XY}^* shP_L \otimes \pi_{YZ}^* \mathcal{Q}_L)$.

Orlov's Theorem

In diesem Abschnitt wollen wir die Beziehung zwischen beliebigen Funktoren zwischen derivierten Kategorien und Fourier-Mukai Transformationen erklären. Die Antwort liefert das folgende Theorem:

Theorem 1.6. (Orlov) Seien X und Y zwei glatte projektive Varietäten und sei $F : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ ein volltreuer exakter Funktor. Falls F einen rechts- und linksadjungierte Funktoren besitzt, dann existiert ein bis auf Isomorphie eindeutiges Objekt $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$, sodass gilt

$$F \simeq \Phi_{\mathcal{P}} \quad (10)$$

Die Bedingung der Existenz von adjungierten Funktoren ist schon automatisch erfüllt, denn es gilt

Theorem 1.7. Bondal-van den Bergh Seien X, Y glatte projektive Varietäten und sei $F : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ exakt. Dann besitzt F einen rechts- und linksadjungierten Funktor.

Der Beweis dieser Resultate ist höchst nicht-trivial. Wir verweisen deswegen auf [Orl] und verzichten darauf einen Beweis zu geben. Orlov's Theorem wird meistens auf Äquivalenzen angewandt.

Korollar 1.8. *Sei $F : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ eine Äquivalenz. Dann ist F Isomorph zu einer Fourier-Mukai Transformation $\Phi_{\mathcal{P}}$, wobei $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.*

Damit lässt sich sofort entscheiden, wann eine Fourier-Mukai Transformation eine Äquivalenz ist

Korollar 1.9. *Sei $\Phi_{\mathcal{P}}$ ist eine Äquivalenz genau dann, wenn gilt*

$$\begin{aligned} R\pi_{13*}(\pi_{12}^* \mathcal{P} \otimes \pi_{23}^* \mathcal{P}_L) &\simeq \mathcal{O}_{\Delta_X} \\ R\pi_{13*}(\pi_{12}^* \mathcal{P}_L \otimes \pi_{23}^* \mathcal{P}) &\simeq \mathcal{O}_{\Delta_Y} \end{aligned}$$

Wir wollen nun eine Anwendung von Orlov's Theorem präsentieren

Korollar 1.10. *Sei $\Phi : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ eine Äquivalenz, sodass für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt $f(x) \in Y$ existiert, für den gilt*

$$\Phi(k(x)) \simeq k(f(x)). \quad (11)$$

Dann definiert $f : X \rightarrow Y$ einen Isomorphismus und Φ ist äquivalent zu

$$\Phi \simeq (M \otimes (-)) \circ f_* \quad (12)$$

wobei $M \in \text{Pic}(Y)$.

Proof. Wir geben nur eine Beweisidee. Da Φ eine Äquivalenz ist, finden wir $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$, sodass $\Phi \simeq \Phi_{\mathcal{P}}$. Zunächst verwenden wir, dass wegen [Huy, Lemma 3.31] \mathcal{P} flach über X . Durch Wahl von lokalen Schnitten von \mathcal{P} lässt sich so ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ konstruieren, der sich auf f auf abgeschlossenen Punkten einschränkt.

Das Φ eine Äquivalenz ist, impliziert, dass f ein Isomorphismus ist.

Nun beachte, dass der Träger von \mathcal{P} isomorph zu Y ist und das \mathcal{P} in den Fasern konstante Dimension 1 hat und somit ein Geradenbündel ist. Eingeschränkt auf den Träger ergibt dies das Geradenbündel $M \in \text{Pic}(Y)$. \square

Mit diesem Ergebnis können wir das folgende Resultat beweisen, dass besagt, dass die Kategorie der Kohärenten Garben auf einem Schema das Schema schon festlegt.

Korollar 1.11. *Seien X und Y glatt, projektiv Varietäten und sei $\text{Coh}(X) \simeq \text{Coh}(Y)$, dann sind X und Y Isomorph.*

Proof. Wir geben erneut nur die Idee des Beweises: Es ist klar, dass $\text{Coh}(X) \simeq \text{Coh}(Y)$ eine Äquivalenz $\Phi : D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$ induziert.

Man zeigt nun, dass $\Phi(k(x)) \simeq k(y)$, da dies schon auf dem Level von Kohärenten Garben gilt. Damit lässt sich das vorangegangene Korollar anwenden und wir sehen, dass $\Phi(\mathcal{F}) = M \otimes f_*(\mathcal{F})$. Beachte, dass dies schon auf dem Level der abelschen Kategorie der Kohärenten Garben gilt. Wir sehen also, dass jeder Isomorphismus zwischen glatten projektiven Varietäten von der Form ist. \square

2 Derivierte Kategorie Elliptischer Kurven und Abelscher Varietäten

Dieser Abschnitt dient zur Übersicht und Motivation, wie der Formalismus der derivierten Kategorien und der Fourier-Mukai Transformationen in der Geometrie verwendet werden kann.

Um die Diskussion anschaulich zu halten, werden wir ab sofort explizit über den komplexen Zahlen arbeiten. Serre's GAGA Theoreme sagen uns, dass eine projektive Varietät und kohärente Garben darauf äquivalent zur assoziierten komplexen Mannigfaltigkeit mit analytischen kohärenten Garben sind. Diesen Fakt werden wir verwenden um die Diskussion an einigen Stellen abzukürzen. Für eine ausführliche Diskussion verweisen wir auf [Huy, Ch. 5.2]

Unser erstes Ziel ist es, folgendes Resultat zu motivieren

Proposition 2.1. *Seien E und E' elliptische Kurven. Dann gilt*

$$D^b(E) \simeq D^b(E') \Leftrightarrow E \simeq E' \quad (13)$$

Wir wissen, dass jede Äquivalenz $\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(E) \rightarrow D^b(E')$ durch eine Fourier-Mukai Transformation gegeben ist.

Fourier-Mukai Transformationen steigen auf rationale Kohomologie ab. Für $\alpha \in H^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ definieren wir

$$\Phi_{\alpha}^H : H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y, \mathbb{Q}), \quad \beta \mapsto \pi_{Y*}(\alpha \cdot \pi_X^*(\beta)) \quad (14)$$

Wir wollen einem Objekt in $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ eine Klasse in $H^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ zuordnen. Um dies in voller Allgemeinheit zu schaffen, benötigen wir K-Theorie. Um dies zu vermeiden, ziehen wir uns hier auf den Fall zurück, dass \mathcal{P} konzentriert im Grad 0 ist, also bereits eine kohärente Garbe auf $X \times Y$. Dann ordnen wir \mathcal{P} die Klasse

$$\alpha := v(\mathcal{P}) := ch(\mathcal{P}) \cdot \sqrt{td(X)}. \quad (15)$$

Wir können die Objekte in obiger Formel nicht in voller Allgemeinheit definieren, aber wir wollen eine Motivation geben. Für eine ausführliche Behandlung siehe [Har, Appendix A, 3]

Sowohl bei der Chern-Klasse $ch(\mathcal{P})$ als auch bei der Todd-Klasse $td(\mathcal{P})$ handelt es sich um sogenannte Charakteristische Klassen. Wir ziehen uns zunächst auf den Fall eines Geradenbündels L zurück. In diesem Fall gilt:

$$ch(L) := c_1(L) + c_2(L) + \dots = exp(c_1(L)) = \sum c_1(L)^i / i!. \quad (16)$$

Die erste Chern-Klasse $c_1(L)$ ist gegeben als das Bild von $L \in Pic(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ unter der Randabbildung $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ induziert von der Exponentialfolge

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0 \quad (17)$$

Der Fall von Vektorbündeln von höherem Rang lässt sich dann auf den Fall für Geradenbündel zurückführen. Für ein Vektorbündel \mathcal{E} vom Rang r ist die totale Chern-Klasse gegeben durch

$$ch(\mathcal{E}) = r + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3 + \dots \quad (18)$$

Die Todd-Klasse ist auf Geradenbündeln gegeben als

$$td(L) = \frac{c_1(L)}{1 - exp(-c_1(L))}. \quad (19)$$

Die Todd-Klasse ist multiplikativ, dass heißt

$$td(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2) = td(\mathcal{E}_1) \cdot td(\mathcal{E}_2) \quad (20)$$

Im Allgemeinen gilt

$$td(\mathcal{E}) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 + \dots \quad (21)$$

Für eine glatte projektive Varietät setzen wir $td(X) := td(\mathcal{T}_X)$. Mit der Definition für $\Phi_{\mathcal{P}}^H := \Phi_{v(\mathcal{P})}^H$ erhält man eine kohomologische Fourier-Mukai Transformation für die gilt

Proposition 2.2. 1. Sei $\Phi_{\mathcal{R}} = \Phi_{\mathcal{Q}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}$. Dann gilt $\Phi_{\mathcal{R}}^H = \Phi_{\mathcal{Q}}^H \circ \Phi_{\mathcal{P}}^H$

2. Sei

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X) \quad (22)$$

die Hodge-Zerlegung von $H^*(X)$ mit $H^{p,q}(X) \simeq H^q(X, \Omega^p)$. Dann respektiert $\Phi_{\mathcal{P}}^H$ die Hodge-Zerlegung. Das heißt, falls $\Phi_{\mathcal{P}}$ eine Äquivalenz ist, dann ist $\Phi_{\mathcal{P}}^H : H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y, \mathbb{Q})$ ein Isomorphismus. Dieser induziert Isomorphismen

$$\bigoplus_{p-q=i} H^{p,q}(X) \simeq \bigoplus_{p-q=i} H^{p,q}(Y) \quad (23)$$

für alle $i = -\dim(X), \dots, 0, \dots, \dim(X)$.

Gehen wir zurück zu unserer Ausgangssituation mit E, E' zwei elliptische Kurven mit $D^b(E) \simeq D^b(E')$. Wir bekommen eine induzierte Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{P}}^H : H^1(E, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(E', \mathbb{Q})$. Dieser respektiert insbesondere die Hodgezerlegung $H^1 = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$. Für elliptische Kurven gilt aber schon, dass $E \simeq H^{0,1}(E)/H^1(E, \mathbb{Z})$, d.h. eine elliptische Kurve ist schon durch ihre Hodge-Zerlegung von $H^1(E)$ bestimmt.

Falls wir also zeigen können, dass $\Phi_{\mathcal{P}}^H$ schon über \mathbb{Z} definiert ist, folgt sofort, dass $E \simeq E'$. Dies folgt aus der Tatsache, dass $td(E \times E') = 1$ (da das Tangentialbündel elliptischer Kurve trivial ist) und $ch(\mathcal{P}) = r + c_1(\mathcal{P}) + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2)(\mathcal{P})$. Der Term $\frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2)(\mathcal{P})$ muss a priori nicht integral sein, aber dieser Term trägt nicht zu $H^1(E) \rightarrow H^1(E')$. Damit bekommen wir folgendes Resultat

Korollar 2.3. Sei C eine glatte projektive Kurve über \mathbb{C} und sei Y eine glatte projektive Varietät über \mathbb{C} . Dann gilt

$$D^b(C) \simeq D^b(Y) \Leftrightarrow C \simeq Y. \quad (24)$$

Abelsche Varietäten

Eine Elliptische Kurve ist eine glatte projektive Kurve von Genus 1 mit einem ausgezeichneten Punkt O . Diese Definition lässt sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern:

Definition 2.4. Eine abelsche Varietät über \mathbb{C} ist ein zusammenhängendes projective Gruppenschema über \mathbb{C} .

Bemerkung:

- i) Man beachte, dass man für elliptische Kurven E nicht voraussetzen muss, dass E bereits eine algebraische Gruppe ist (allerdings muss man dann fordern, dass E glatt ist).
- ii) Jede abelsche Varietät ist bereits glatt und das unterliegende Gruppengesetz ist kommutativ.
- iii) Für eine abelsche Varietät über \mathbb{C} ist die assoziierte komplexe Mannigfaltigkeit eine Lie Gruppe. Damit ist A als komplexe Mannigfaltigkeit isomorph zu einem komplexen Torus also $A \simeq \mathbb{C}^g/\Gamma$ für ein Gitter vom Rang $2g$. Wir erhalten dies wie im Fall von elliptischen kurven als

$$A \simeq H^0(A, \Omega^1)^*/H_1(A, \mathbb{Z}) \quad (25)$$

gegeben durch $a \mapsto \int_e^a$.

Die duale abelsche Varietät ist gegeben durch

$$\hat{A} := H^1(A, \mathcal{O})/H^1(A, \mathbb{Z}) \quad (26)$$

Insbesondere ist \hat{A} selbst wieder ein komplexer Torus und damit eine abelsche Varietät. Die Exponentialfolge gibt eine Abbildung

$$\hat{A} \longrightarrow \text{Pic}(A) \xrightarrow{c_1} H^2(A, \mathbb{Z}) \quad (27)$$

Man kann zeigen, dass diese Abbildung \hat{A} mit $\text{Pic}^0(A)$, dem Kern von c_1 identifiziert. Für elliptische Kurven gilt bereits, dass $E \simeq \hat{E}$.

Als nächstes wollen wir das Poincaré Bündel \mathcal{P} auf $A \times \hat{A}$ diskutieren. Dies soll folgende Eigenschaften haben:

- i) Für $\alpha \in \hat{A}$ mit zugehörigem Geradenbündel $L \in \text{Pic}(A)$ auf A , dann ist $\mathcal{P}|_{\{\alpha\} \times A}$ isomorph zu L .
- ii) Die Einschränkung $\mathcal{P}|_{\hat{A} \times \{e\}}$ ist trivial.

Das Poincaré Bündel existiert und ist eindeutig. Alternativ lässt es sich auch wie folgt beschreiben:

Die duale abelsche Varietät stellt den Funktor Pic_A^0 dar. Dieser Funktor weist einer Varietät S die folgende Menge zu:

$$Pic_A^0(S) := \{M \in Pic(S \times A) \mid M_s \in Pic^0(A) \text{ für alle } s \in S\} / \sim \quad (28)$$

wobei $M \sim M'$ falls es ein Geradenbündel auf S gibt, sodass $M \otimes \pi_S^* L \simeq M'$. Das Poincaré Bündel $\mathcal{P} \in Pic_A^0(\hat{A})$ korrespondiert dann zu $\text{id}_{\hat{A}}$.

Das Poincaré Bündel auf dem Produkt $A \times \hat{A}$ war der historische Startpunkt für das Studium von Fourier-Mukai Transformationen.

Proposition 2.5. (*Mukai*) Sei \mathcal{P} das Poincaré Bündel auf $A \times \hat{A}$, dann ist

$$\Phi_{\mathcal{P}} : D^b(\hat{A}) \rightarrow D^b(A) \quad (29)$$

eine Äquivalenz. Weiter ist die Komposition

$$D^b(\hat{A}) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}} D^b(A) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}}} D^b(\hat{A})$$

isomorph zu $\hat{\iota}^* \circ [-\dim(A)]$, wobei $\hat{\iota} : \hat{A} \rightarrow \hat{A}$ die Inversion auf \hat{A} bezeichnet.

Da für eine elliptische Kurven E gilt $E \simeq \hat{E}$, sind die derivierten Kategorien trivialerweise Isomorph, jedoch ist $\Phi_{\mathcal{P}}$ eine nichttriviale Autoäquivalenz. Beispielsweise gilt $\Phi_{\mathcal{P}}(k(\alpha)) \simeq \mathcal{P}_{\alpha}$, wobei \mathcal{P}_{α} das zu $\alpha \in \hat{A}$ korrespondierende Geradenbündel ist.

Die derivierte Kategorie abelscher Varietäten

Wir wollen nun verstehen, inwiefern die derivierte Kategorie einer abelschen Varietät die Varietät schon festlegt.

Proposition 2.6. Sei $\Phi_{\mathcal{E}} : D^b(A) \rightarrow D^b(B)$ eine Äquivalenz. Dann ist die assoziierte Äquivalenz $F_{\mathcal{E}} : D^b(A \times \hat{A}) \rightarrow D^b(B \times \hat{B})$ von der Form

$$F_{\mathcal{E}} \simeq ((N_{\mathcal{E}} \otimes (-)) \circ f_{\mathcal{E}*}) \quad (30)$$

mit $N_{\mathcal{E}} \in Pic(B \times \hat{B})$ und $f_{\mathcal{E}} : A \times \hat{A} \rightarrow B \times \hat{B}$ ein Isomorphismus abelscher Varietäten.

Proof. [Huy, Proposition 9.39] □

Daraus folgt unmittelbar

Korollar 2.7. *Sei A eine abelsche Varietät. Dann existieren bis auf Isomorphie nur endliche viele abelsche Varietäten B , sodass gilt*

$$D^b(A) \simeq D^b(B) \quad (31)$$

Proof. Sei $D^b(A) \simeq D^b(B)$. Dann gilt $A \times \hat{A} \simeq B \times \hat{B}$. Insbesondere ist B ein direkter Faktor von $A \times \hat{A}$ (von Dimension $\dim(A)$). Aber eine abelsche Varietät besitzt nur endlich viele direkte Faktoren. \square

Wie für elliptische Kurven induziert für abelsche Varietäten eine Äquivalenz der derivierten Kategorien einen Isomorphismus auf integraler Kohomologie.

Korollar 2.8. *Sei $\Phi_{\mathcal{E}} : D^b(A) \rightarrow D^b(B)$ eine derivierte Äquivalenz abelscher Varietäten. Dann ist die induzierte Fourier-Mukai Transformation*

$$\Phi_{\mathcal{E}}^H : H^*(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(B, \mathbb{Z}) \quad (32)$$

bereits auf integraler Kohomologie wohldefiniert und ein Isomorphismus.

Genau wie bei elliptischen Kurven ist eine abelsche Varietät bereits durch ihre Hodge-Struktur auf $H^1(A, \mathbb{Z})$ definiert. Dies gilt genauso für $H^1(A \times \hat{A}, \mathbb{Z}) = H^1(A, \mathbb{Z}) \oplus H^1(A, \mathbb{Z})^*$.

Das Gitter $H^1(A, \mathbb{Z}) \oplus H^1(A, \mathbb{Z})^*$ trägt eine kanonische quadratische Form gegeben durch

$$q_A((a, \alpha)) := 2\alpha(a). \quad (33)$$

Proposition 2.9. *Zwei abelsche Varietäten A und B sind deriviert äquivalent, genau dann, wenn es eine Hodge Isometrie*

$$f : H^1(A \times \hat{A}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(B \times \hat{B}, \mathbb{Z}) \quad (34)$$

gibt.

Proof. [Huy, Corollary 9.50] \square

References

- [Har] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Vol. 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Huy] Daniel Huybrechts et al. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford University Press on Demand, 2006.
- [Orl] Dmitri Olegovich Orlov. “Derived categories of coherent sheaves and equivalences between them”. In: *Russian Mathematical Surveys* 58.3 (2003), p. 511.
- [Stacks] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>. 2018.