Matemáticas para Ciencias e Ingeniería I

Universidad Santo Tomás Facultad de Ingeniería

Departamento de Ingeniería

2025

Índice general

Presentación

Este apunte busca ser una guía esencial y concisa para el curso de primer año *Matemáticas para Ciencias e Ingeniería I* que comparten diversas carreras en la Universidad Santo Tomás.

Incluye el contenido en pocas palabras, incluyendo ejemplos y ejercicios propuestos. En versiones posteriores se pretende agregar:

i) Ejercicios resueltos, con mayor complejidad que los ejemplos básicos del contenido

ii) Agregar un solucionario para los ejercicios

iii) Añadir una sección o subsección en cada capitulo con ideas o problemas interesantes para profundizar

iv) Añadir una bibliografía

Unidad 1

Lógica y Polinomios

1.1. Lógica proposicional

Comencemos con una definición fundamental. Queremos formalizar el concepto de *proposición*, las cuales trabajaremos usualmente como incógnitas y operaremos con operaciones binarias (que requieren dos) semejantes a la suma o al producto usuales.

Definición 1.1 **Proposición**

Una proposición es una expresión que puede poseer solo uno de dos valores: **verdadero** ó **falso**.

Podemos comenzar pensando en qué no es una proposición, y hay muchísimos ejemplo: todas las preguntas no son proposiciones. Primero tenemos proposiciones en el lenguaje cotidiano, y también expresiones matemáticas.

Ejemplo 1.1

1. Todos los alumnos de la UST deben sacar 5,5 o más para eximirse.
2. El número 5 es par.
3. La ecuación $x^2 + x + 1$ no tiene solución en los números reales.
4. Todos los gatos son grises.

Tendremos tres operaciones:

- La conjunción, «y», que denotaremos por $\wedge$
- La disyunción, «ó», que denotaremos por $\vee$
- La negación, «no», que denotaremos por $\neg$

¡Cuidado!

Hay 3 notaciones para la negación, por ejemplo:

$$\neg p = \sim p = \overline{p}$$

1.2. Tablas de verdad

Como las proposiciones solo pueden tener dos valores: **verdadero** ó **falso**, podemos describir los resultados de las operaciones al usarlas en una tabla. Este tipo de tabla les llamaremos **tablas de verdad**. Las siguientes tablas son por definición:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

(a) Conjunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(b) Disyunción

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

(c) Negación

¡Cuidado!

Las disyunción no es exclusiva, es decir, si decimos «p ó q» pueden ocurrir ambas a la vez. Hay que prestar atención a esto al principio ya que en el lenguaje cotidiano suele ser exclusivo, o sea, solemos elegir solo uno de los dos.

Podemos utilizar las tablas de verdad para determinar los valores posibles de una proposición compuesta, es decir, una proposición construida con estos operadores usando otras proposiciones. Por ejemplo:

Ejemplo 1.2

Consideremos la proposición compuesta: $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$. Sería difícil desarrollarlo en solo un paso, por lo que agregaremos columnas a la tabla de manera que nos ayude a calcular el resultado, poniendo partes más simples que forman la proposición compuesta que nos interesa:

p	q	$p \vee q$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
V	V	V	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Ahora que ya hemos calculado estas proposiciones más simples, podemos calcular los valores posibles de la proposición compuesta inicial:

p	q	$p \vee q$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Además, tenemos otro operador que aparece usualmente en matemáticas, por ejemplo en cada resultado. Solemos tener una hipótesis que es aquello que suponemos como cierto y una consecuencia de esos resultados. Podemos pensar en el teorema de Pitágoras como ejemplo, partimos de un triángulo rectángulo en el plano, y como consecuencia obtenemos una ecuación que satisfacen sus lados.

Definición 1.2 **Implica**

Definimos el conectivo (u operador) **implica** (o **entonces**) como se indica en la siguiente tabla:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Notemos que si completamos la siguiente tabla de verdad: Las dos últimas columnas

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p} \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Cuadro 1.2: Primera equivalencia lógica

tienen los mismos valores de verdad pero no son la misma proposición. Por ejemplo, «dos es un número par» y «5 es un número primo» tienen el mismo valor de verdad pero no son la misma proposición. Por ello, son equivalentes de cierta forma pero no iguales. Esto motiva usar un símbolo diferente:

Definición 1.3 **Equivalencia lógica**

Cuando dos proposiciones (compuestas) R y T poseen los mismos valores (en el mismo orden) en la tabla de verdad, diremos que son **equivalentes** y lo denotaremos por:

$$R \equiv T$$

Esto es una relación como equivalencia al igual que la igualdad cuando trabajamos los números reales por dar un ejemplo.

1.3. Álgebra Booleana

Ahora que tenemos un sentido de «igualdad», quisieramos poder desarrollar expresiones como en el álgebra habitual. A esta operatoria y sus propieades les llamamos **Álgebra Booleana**.

Tenemos varias propiedades que nos serán de utilidad y enlistamos ahora:

Teorema 1.1 **Propiedades del álgebra booleana**

i. Conmutatividad
$$p \wedge q \equiv q \wedge p \qquad p \vee q \equiv q \vee q$$

ii. Identidad
$$p \wedge V \equiv p, \quad p \wedge F \equiv F, \quad p \vee V \equiv V, \quad p \vee F \equiv p$$

iii. Idempotencia
$$p \wedge p \equiv p, \qquad p \vee p \equiv p$$

iv. Involución
$$\overline{\overline{p}} \equiv p$$

v. Complemento
$$p \wedge \overline{p} \equiv F, \qquad p \vee \overline{p} \equiv V$$

vi. Asociatividad
$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r, \qquad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

vii. Distributividad
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

viii. Transitividad
$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow r$$

ix. Leyes de De Morgan
$$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \qquad \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$$

x. Absorción
$$[p \wedge (p \vee q)] \equiv p, \qquad [p \vee (p \wedge q)] \equiv p$$

Esto nos permite trabajar con proposiciones compuestas de una manera más convienente muchas veces.

Ejemplo 1.3

Se tienen 3 proposiciones: p, q, r. Sabemos que $p \vee q \equiv r \wedge q$, queremos desarrollar y simplificar la siguiente proposición compuesta: $[(p \wedge q) \vee r] \vee \overline{r}$. Procedemos a desarrollar utilizando las propiedades anteriores:

$$\begin{aligned}
[(p \vee q) \wedge r] \vee \overline{r} &\equiv [(r \wedge q) \wedge r] \vee \overline{r} \\
&\equiv [(q \wedge r) \wedge r] \vee \overline{r} \\
&\equiv [(q \wedge (r \wedge r)] \vee \overline{r} \\
&\equiv [q \wedge r] \vee \overline{r} \\
&\equiv (q \vee \overline{r}) \wedge (r \vee \overline{r}) \\
&\equiv (q \vee \overline{r}) \wedge V \\
&\equiv q \vee \overline{r}.
\end{aligned}$$

Aunque en general podríamos obtener un resultado solo en incógnitas, a veces podremos hallar el valor.

Ejemplo 1.4

Tenemos que

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow \overline{q}) &\equiv (p \wedge q) \vee (\overline{p} \vee \overline{q}) \\
&\equiv (p \wedge q) \vee \overline{(p \wedge q)} \\
&\equiv V
\end{aligned}$$

Ya sea con álgebra booleana o con las tablas de verdad, a veces ocurrirá que sin importar los casos una proposición compuesta sea verdadera, falsa o con un valor indeterminado. Esto tiene un nombre definido como sigue:

Definición 1.4 **Tautología - Contingencia - Contradicción**

Si una proposición compuesta da como resultado

- verdadero, le llamaremos **Tautología**
- falso, le llamaremos **Contradicción**
- indeterminado, le llamaremos **Contingencia**

¡Cuidado!

El que una contingencia tenga un valor indeterminado significa que depende de los valores de $p, q, r, \ldots$.

1.4. Funciones Proposicionales

Definición 1.5 **Función proposicional**

Una **función proposicional** es una función que toma como argumento un elemento de un universo definido y devuelve una proposición.

Ejemplo 1.5

Tenemos las siguientes funciones proposicionales:

I. $q(k) \equiv k$ es par y mayor que 5

II. $F(x) \equiv x^2 + x + 1 = 0$

III. $r(t) \equiv t$ es divisible por 3

En estos casos no hemos definido un universo, el cual es el dominio de la función. Sin embargo, si el contexto es claro podemos omitir esta información.

Observación 1.1

En general tendremos dos usos para las funciones proposicionales: Uno será con cuantificadores lógicos y el otro en la defición de conjuntos. En ambos casos estará escrito con claridad cuál es el universo en el que estaremos trabajando.

1.5. Cuantificadores Lógicos

Para describir qué tanto una función proposicional nos proporciona proposiciones verdaderas, utilizaremos cuantificadores lógicos.

Definición 1.6 **Cuantificador Lógico**

Un **cuantificador lógico** es un operador que se aplica a las funciones proposicionales para indicar qué tantas proposiciones resultan ser verdaderas. Tenemos tres cuantificadores:

- **Para todo / Para cada**: $\forall$
- **Existe alguno / Hay algún**: $\exists$
- **Existe un único**: $\exists!$

Ejemplo 1.6

1. «Todos los números enteros son pares ó impares» podemos escribirlo como:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par} \vee n \text{ es impar}$$

2. «Existe un número par» podemos escribirlo como:

$$\exists n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}$$

3. «Para cada número natural hay un número primo mayor que él» podemos escribirlo como:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N} : p \text{ es primo } \wedge\ p > n$$

Para determinar el valor de verdad de cada una de las proposiciones compuestas en las que está involucrado un cuantificador lógico, tenemos que seguir los siguientes razonamientos:

Observación 1.2

- Para que un **para todo** sea verdad, necesitamos que todos los elementos del universo nos dé verdadero al pasarlos por la función proposicional, por ello, si tan solo uno de los elementos nos da como resultado una proposición falsa, el para todo será falso.
- Para que un **existe** sea verdadero bastará con que uno de los elementos del universo nos de verdadero, sin importar si hay varios que nos sirvan para esto, con uno basta. Por otro lado, si todos nos dan como resultado una proposición falsa, el existe será falso.
- Para que un **existe un único** sea verdadero, necesitaremos que haya un elemento del universo que nos de verdadero, y además que todos los demás sean falsos. Por lo tanto, el existe un único será falso si hay dos *elementos diferentes* que nos dan una proposición verdadera, ó si todos los elementos del universo nos dan falso.

Ejemplo 1.7

1. «Todos los números enteros son pares» podemos escribirlo como:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}$$

En este caso, esta proposición es **falsa**. Esto, debido a que existe un[a] número entero que no es par, particularmente $n = 3$.

2. «Existe un único número real que satisface $x^2 - 1 = 0$» podemos escribirlo como:

$$\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$$

En este caso, esta proposición es **falsa**. Esto, debido a que existen dos números reales que satisfacen la proposición, particularmente $x = 1$ y $x = -1$.

[a] si hay más no importa, solo nos interesa que haya al menos un elemento del universo que resulte en una proposición falsa para que el **para todo** sea falso.

Ahora quisieramos saber como resulta ser la negación de una de estas proposiciones compuestas en las que hay cuantificadores lógicos involucrados.

Aunque ya hemos hablado acerca de cómo saber una proposición de este tipo es verdadera o falsa, no hemos visto formalmente la negación de estas proposiciones:

Proposición 1.1 **Negación de Cuantificadores Lógicos**

Tenemos las siguientes maneras de negar una proposición compuesta con cuantificadores lógicos:

- La negación del **para todo**:

$$\neg\left(\forall u \in U : P(u)\right) \equiv \exists u \in U : \neg P(u)$$

- La negación del **existe**:

$$\neg\left(\exists u \in U : P(u)\right) \equiv \forall u \in U : \neg P(u)$$

- La negación del **existe un único**:

$$\begin{aligned}\neg\left(\exists!\ u \in U : P(u)\right) \equiv{} & \left(\forall u \in U : \neg P(u)\right) \\ & \vee \exists u_1, u_2 \in U : P(u_1) \wedge P(u_2) \wedge u_1 \neq u_2\end{aligned}$$

Ejemplo 1.8

Consideremos la proposición siguiente:

$$T : \text{«El cuadrado de cada número real es mayor que 1»}$$

La podemos escribir formamente como:

$$T : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 1$$

La negación de esta proposición es:

$$\neg T : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 1$$

Podemos observar que $\neg T$ es una proposición verdadera ya que por ejemplo $x = 0$ cumple que $x^2 \leqslant 1$. Por lo tanto, T es falsa.

1.6. Conjuntos

Debido a que puede resultar ser complicado definir un conjunto de una manera formal lo entenderemos como una colección de elementos. Tenemos varias maneras de representarlos:

Definición 1.7 **Conjunto**

Un **conjunto** es una colección de elementos de un universo dado. Podemos representarlo mediante:

- Definición intensiva (o por compresión): Especificamos un universo, y una propiedad (una proposición) que los elementos deben cumplir.
- Definición extensiva: Especificamos todos los elementos explícitamente.
- Definición ostensiva: Especificamos ejemplos que representan al conjunto.

¡Cuidado!

Solo la definición intensiva y la extensiva son formales. Esto debido a que la definición ostensiva puede llevar a errores dependiendo de la interpretación que le demos.

Ejemplo 1.9

1. Consideremos el conjunto:
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 0\}$$
Este conjunto está definido de manera intensiva ó por comprensión.
2. Consideremos el conjunto:
$$\{2, 3, 5, 7, 9, \pi\}$$
Este conjunto está definido de manera extensiva.
3. Consideremos el conjunto:
$$\{2, 3, 5, 7, \ldots\}$$
Este conjunto está definido de manera ostensiva.

Observación 1.3

En el ejemplo 1.9 notemos la manera en que está escrita el conjunto $x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 0$. La definición se lee como:

«Todos los reales x tales que $x^2 - 1 < 0$»

Aquí, los dos puntos «:» ó bien la barra vertical «|» se lee como «tal que».
Además, el símbolo $\in$ se lee como «pertenece a».

¡Cuidado!

La manera ostensiva es solamente una representación informal. Por ejemplo el conjunto $\{3, 5, 7, \ldots\}$ podemos interpretarlo de al menos dos maneras. ¿Se trata de números primos mayores que 2 o de números impares mayores que 2?

1.7. Operaciones entre Conjuntos y Diagrama de Venn

Tenemos tres operaciones elementales, la **unión**, la **intersección** y el **complemento**. Cada uno se obtendrá de las tres operaciones en lógica.

Denotaremos el universo por X a menos que se indique lo contrario.

Definición 1.8 **Operaciones entre Conjuntos**

- **Unión**:
$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$$
- **Intersección**:
$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$$
- **Complemento**:
$$U \setminus A = A^c = \{x \in X : x \notin A\}$$
- **Diferencia**[a]:
$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$$

[a] Notemos que el símbolo que utilizamos es como un menos pero inclinado. Así lo diferenciamos del menos usual

Para facilitar la compresión veamos unos ejemplos concretos sencillos:

Ejemplo 1.10

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$A = \{-1, 1, 3, 6, 8\}, \qquad B = \{1, 5, 8\}$$

$$\mathsf{U} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Y así, tenemos que:

a) La unión de A y B es contiene los elementos de ambos conjuntos:

$$\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{-1, 1, 3, 5, 6, 8\}$$

b) La intersección de A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen a ambos conjuntos a la vez:

$$\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{1, 8\}$$

c) El complemento de A es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a A:

$$\mathsf{U} \setminus \mathsf{A} = \{0, 2, 4, 5, 7\}$$

d) La diferencia de A y B es el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B:

$$\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{-1, 3, 6\}$$

¡Cuidado!

La diferencia de A y B solo quita elementos a el conjunto A. Si B tiene elementos que A no posee, son totalmente ignorados. Por ejemplo, si $\mathsf{A} = \{1, 2\}$ y $\mathsf{B} = \{2, 3, 4, 5\}$, obtendremos que $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{1\}$.
Notar además que $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \{3, 4, 5\}$.

Podemos representar los conjuntos de una manera gráfica, especialmente cuando se trata de conjuntos abstractos ó si son de finitos elementos (no son infinitos). En el caso de los conjuntos abstractos, estos diagramas nos ayudarán a comprender mejor las operaciones entre conjuntos ya que podremos visualizarlas fácilmente.

Definición 1.9 **Diagrama de Venn**

Un **diagrama de Venn** es una representación gráfica de conjuntos que utiliza figuras geométricas cerradas para representar conjuntos. Particularmente,

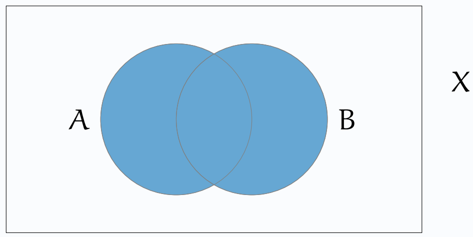


Figura 1.1: Unión de A con B

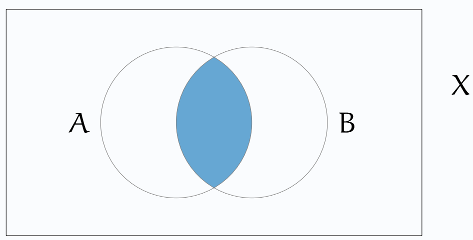


Figura 1.2: Intersección de A con B

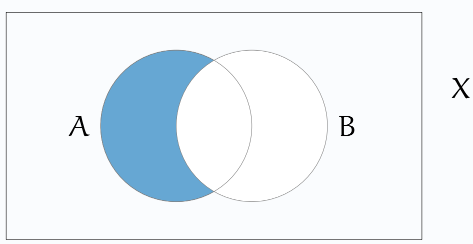


Figura 1.3: Diferencia de A con B

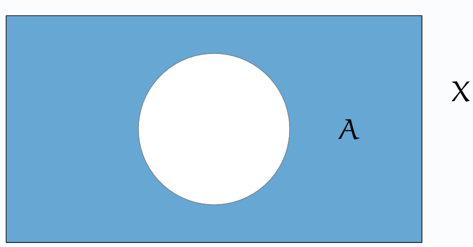


Figura 1.4: Complemento de A

Podemos representar diferentes operaciones entre conjuntos usando el diagrama de Venn.

Ejemplo 1.11

Consideremos el siguiente diagrama de Venn que representa una operación entre los conjuntos A y B:

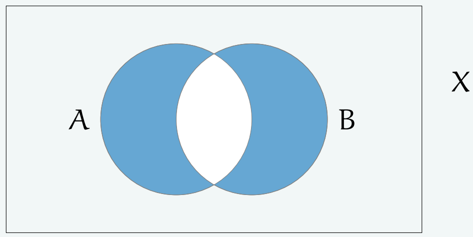


Figura 1.5: Diferencia Simétrica de A con B

En esta figura tenemos representado lo que es conocido como **diferencia simétrica**. Gracias a la figura, podemos deducir que:

$$A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1.8. Cardinalidad

Cuando tenemos un conjunto, sabemos si un elemento pertenece al conjunto o no. Considerando aquellos que sí pertenecen podemos asignarle un valor, y este valor será llamado cardinalidad.

Definición 1.10 **Cardinalidad**

La cardinalidad de un conjunto es el número de elementos que contiene. Sea el conjunto A, denotaremos su cardinalidad por: $|A|$.

¡Cuidado!

Es importante que solo contemos una vez cada elemento del conjunto, ya que por diversas circunstancias podría aparecer varias veces.

Ejemplo 1.12

Calculemos la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

a) $|\{-3, 4, 5, 6, 7\}| = 5$

b) $\left|\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{6}{12}, -\frac{1}{2}\right\}\right| = 2$

c) $|\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}| = 6$

Cuando se trata conjuntos con cardinalidad finita, podemos obtener la cardinalidad de un conjunto formado mediante operaciones de varios conjuntos vía dos propiedades principalmente:

Proposición 1.2 **Propiedades de la Cardinalidad**

Sean A y B dos conjuntos. Entonces:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B$$

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

Observación 1.4

Vale la pena notar que si dos conjuntos son disjuntos, es decir, que su interesección es vacía. Entonces, su cardinalidad es la suma de las cardinalidades de ambos conjuntos.

Ejemplo 1.13

Si $|A| = 3$ y $|B| = 4$ y además $|A \cup B| = 5$, y queremos determinar $|A \cap B|$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
5 &= 3 + 4 - |A \cap B| \\
-|A \cap B| &= 5 - 3 - 4 \\
|A \cap B| &= 2
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.14

En una clase, cada estudiante debe elegir algún taller para realizar. De los 40 estudiantes, 15 de ellos eligieron el taller de arduino, 20 de ellos el taller de ajedrez y 15 de ellos el taller de juego de mesa. Se sabe que:

- No hay estudiantes que tengan el taller de ajedrez y el de juegos de mesa.
- Hay 5 estudiantes que solo tienen el taller de arduino.
- Hay 7 estudiantes que tienen el taller de arduino y el de ajedrez.

¿Cuántos estudiantes tienen el taller de juegos de mesa y Arduino juntos? ¿Cuántos solo juegos de mesa?

1.9. Conjuntos numéricos

??

1.10. Polinomios

Definición 1.11 **Polinomio**

Un polinomio es una expresión algebraica de la forma siguiente:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

en donde a_j son coeficientes de algún conjunto en particular, y x es una variable. Denotaremos al conjunto de los polinomios de variable x y coeficientes en un conjunto A por $A[x]$.

En este caso los coeficientes pertenecerán a un conjunto numérico, por ejemplo $\mathbb{Z}$.

También tenemos que conocer los nombres usuales que utilizaremos para referirnos a ciertas características o partes de un polinomio.

Definición 1.12 **Grado, coeficiente libre y lider**

Sea $p(x) \in A[x]$, digamos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Entonces:

- El grado de $p(x)$ es el mayor exponente de x que aparece en $p(x)$.
- El coeficiente libre de $p(x)$ es el coeficiente libre de la variable x en $p(x)$.
- El lider de $p(x)$ es el coeficiente del término de mayor grado en $p(x)$.

Veamos algunos ejemplos para clarificar esta definición:

Ejemplo 1.15

1. Consideremos el polinomio: $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. Entonces,
   - El grado de $p(x)$ es 3.
   - El coeficiente libre de $p(x)$ es -1.
   - El lider de $p(x)$ es 1.
2. Consideremos el polinomio: $q(x) = 4x^3 + 2x$. Entonces,
   - El grado de $q(x)$ es 3.
   - El coeficiente libre de $q(x)$ es 2.
   - El lider de $q(x)$ es 4.
3. Consideremos el polinomio: $r(x) = -x^2 - x + 6$. Entonces,
   - El grado de $r(x)$ es 2.
   - El coeficiente libre de $r(x)$ es 6.
   - El lider de $r(x)$ es -1.

Observación 1.5

El grado de un polinomio $p(x)$ lo denotaremos por $\deg(p(x))$. Además, notemos que el grado del polinomio nulo no quedaría bien definido si le asignamos un número entero. Convendremos que $\deg(0) = -\infty$.

En los polinomios tenemos dos operaciones, que son la suma y el producto. Los cuales heredarán sus propiedades de la suma y producto que ya tenemos en el conjunto A.

Cuando se trata realizar operaciones entre polinomios, hay algunas expresiones que aparecen regularmente y por ello vale la pena conocer, e incluso memorizar ciertas reglas para poder trabajar de una manera más cómoda. Estas expresiones recurrentes son conocidas como **productos notables**, debido a que justamente se trata de ciertos productos entre polinomios.

Tendremos una herramienta simple para utilizaremos en algunas potencias de binomios (polinomios de dos términos).

Definición 1.13 **Triángulo de Pascal**

Sea $n \in \mathbb{N}$. El triángulo de Pascal de n filas es el siguiente arreglo de números:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \iddots & & & & \vdots & & & & \ddots \end{array}$$

En los extremos ponemos 1, y rellenamos con la suma de los números de la fila anterior.

Utilizaremos el triángulo de Pascal para poder determinar los coeficientes de las potencias de un binomio, es decir, la potencia de una suma de dos términos.

Ejemplo 1.16

Escribimos los desarrollos de las siguientes poencia de binomio utilizando los coeficientes del triángulo de Pascal:

- $(x+y)^0 = 1$
- $(x+y)^1 = x+y$
- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3xy^2 + 3xy + y^3$
- $(x+y)^4 = x^4 + 4xy^3 + 6xy^2 + y^4$

Podemos seguir escribiendolos ampliando el triángulo de Pascal.

Vale la pena igualmente conocer otros productos notables que no aparecen naturalmente de una potencia como las anteriores:

1.11. División de polinomios

Al igual que en la división de números enteros, podemos realizar una división de polinomios.

Primero que todo, esta división se corresponde con el siguiente resultado:

Teorema 1.2 **Algoritmo de Euclides**

Sean $f(x) \in A[x]$ y $g(x) \in A[x]$. Entonces, existen dos polinomios $h(x), r(x) \in A[x]$ tales que:

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x),$$

en donde $r(x) = 0$ ó $\deg(r(x)) < \deg(q(x))$.
A $r(x)$ se le llama el **resto** de la división de $f(x)$ por $g(x)$. Además, diremos que $f(x)$ es el dividendo, $g(x)$ es el divisor y $h(x)$ es el cuociente.

Este resultado puede resultar se puramente abstracto, y aún nos queda ver cómo se realiza la división de polinomios.

Observación 1.6

Utilizaremos los siguientes polinomios para ejemplificar el algoritmo de Euclides: $f(x) = 4x + x^2 + 1$ y $g(x) = x + 1$. Para dividir $f(x)$ por $g(x)$ aplicaremos los siguientes pasos:

- Paso 1: Primero ponemos los polinomios ordenando sus términos de mayor a menor grado, de izquierda a derecha:

$$x^2 + 4x + 1 : x + 1$$

- Paso 2: Buscamos un monomio que al multiplicarlo por $x + 1$ resulte en un polinomio cuyo término lider coincida con el de $x^2 + 4x + 1$. Ese monomio siempre es único. Este este caso, es x, ya que $x(x + 1) = x^2 + x$, que tiene el mismo término lider que $x^2 + 4x + 1$. Lo anotamos de la manera siguiente:

$$x^2 + 4x + 1 : x + 1 = x$$

- Paso 3: Anotamos el producto de x con $x + 1$ abajo de la división:

$$\begin{aligned} &x^2 + 4x + 1 : x + 1 = x \\ &-(x^2 + x) \end{aligned}$$

- Paso 4: Realizamos la resta del dividendo menos el producto recién mencionado:

$$\begin{aligned} &x^2 + 4x + 1 : x + 1 = x \\ &-(x^2 + x) \\ &= 3x + 1 \end{aligned}$$

- Paso 5: Repetimos el proceso con el nuevo dividendo $3x + 1$, y repetimos hasta que el resultado de la resta tenga grado menor que el divisor, o que sea cero. En este caso:

$$\begin{aligned} &x^2 + 4x + 1 : x + 1 = x + 3 \\ &-(x^2 + x) \\ &= 3x + 1 \\ &-(3x + 3) \\ &= \ -2 \end{aligned}$$

La conclusión de este algoritmo es que:

$$x^2 + 4x + 1 = (x + 1)(x + 3) - 2.$$

Ejemplo 1.17

Dividimos $f(x) = x^3 + 2x - 3$ por $g(x) = x - 1$, y resulta:

$$x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3).$$

En este caso el resto es cero.

Ejemplo 1.18

Dividimos $f(x) = x^3 + 1$ por $g(x) = x^2$, y resulta:

$$x^3 + 1 = x \cdot x^2 + 1.$$

Aquí el resto es 1.

1.12. Teorema del Resto

Definición 1.14 **Raíz de un polinomio**

Sea $p(x) \in A[x]$. Una raíz de $p(x)$ es el elemento $a \in A$ tal que $p(a) = 0$.

Ocurrirá que cada vez que un polinomio tenga una raíz, se podrá factorizar en un producto de polinomios en donde estará presente la raíz.

Teorema 1.3 **Teorema del Resto**

Sea $p(x) \in A[x]$ y $a \in A$. Entonces:

$$p(x) = (x - a)q(x) + p(a).$$

En otras palabras, si dividimos $p(x)$ por $(x - a)$ el resto resultará ser $p(a)$.

Notemos que en particular, si a es una raíz de $p(x)$, entonces $p(a) = 0$.

Teorema 1.4 **Teorema del factor**

Sea $p(x) \in A[x]$ y $a \in A$ es una raíz de $p(x)$. Entonces existe un polinomio $q(x) \in A[x]$ tal que

$$p(x) = (x - a)q(x).$$

1.13. Raíces Reales y Racionales

Cuando queremos hallar las raíces de un polinomio de grado 2, podremos encontrarlas utilizando la fórmula de Bhaskara. Sin embargo, cuando se trata de otros polinomios de mayor grado, la dificultad crece rápidamente. Hace siglos, la primera esperanza era hallar una solución por radicales, como en la fórmula de Bhaskara o la de Cardano, pero tomo varios siglos en descubrir que es imposible en general para polinomios de grado 5 o más.

Hay dos maneras de enfrentar este problema: Hallar las soluciones más simples de encontrar en polinomios amigables, como los que tienen coeficientes enteros. Y la otra alternativa es aproximar esas soluciones. Nosotros aprenderemos la primera de estas maneras en esta sección.

Teorema 1.5 **Teorema de Gauss**

Sea $p(x) \in \mathbb{Z}$, digamos $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$. Entonces, las raíces racionales de $p(x)$ pertenecen al conjunto:

$$\left\{ \pm\frac{c}{d} \ : \ c \text{ es un divisor de } a_0 \wedge d \text{ es un divisor de } a_n \right\}$$

Primero tenemos que entender como se contruye este conjunto, a pesar de que en su defición se describe completamente, es buena idea aclarar los conceptos ante ideas nuevas.

Ejemplo 1.19

Consideremos el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 4$. Entonces, el conjunto de las posibles raíces racionales de $p(x)$ es:

$$\left\{ \pm\frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{4}{1} \right\}$$

Y probamos estos valores evaluando en $p(x)$ uno a uno:

$$\begin{aligned}
p(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 4 = -6 \\
p(2) &= 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 4 = -16 \\
p(4) &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 4 = -12 \\
p(-1) &= (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 4 = 8 \\
p(-2) &= (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) + 4 = 0 \\
p(-4) &= (-4)^3 - 3 \cdot (-4)^2 - 8 \cdot (-4) + 4 = -76
\end{aligned}$$

Y hemos encontrado una raíz racional de $p(x)$.

1.14. Números complejos

Los números complejos se documentaron por primera vez en el siglo XVI cuando Cardano encontró una solución en radicales para la cúbica. Desde entonces ha sido objeto de estudio debido a su utilización en Electromagnetismo, Mecánica cuántica, acústica, electroencefalografía, resonancias magnéticas, etc.

Ahora nos corresponde estudiar las bases de este interesante objeto matemático.

Definición 1.15 **Conjunto de números complejos**

El conjunto de los números complejos se define por:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

en donde $i^2 = -1$.
Además, se define la **parte real** y la **parte imaginaria** de un número complejo $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, como:

$$\mathfrak{R}(z) = a \quad \text{y} \quad \mathfrak{I}(z) = b.$$

Si la parte real es nula, diremos que el número es **imaginario puro**. Mientras que si la parte imaginaria es nula diremos que el número es **real puro**.

Las operaciones entre números complejos estás definidas polinomialmente. Aunque esto ya lo hemos visto, es importante nota que la adición de la unidad imaginaria i propocionará diferencias notables.

Proposición 1.3 **Operaciones en $\mathbb{C}$**

Las operaciones algebraicas en $\mathbb{C}$ son la suma, el producto, la conjugación y la inversión. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, luego se tiene que:

I) La suma:
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$$

II) El producto:
$$(a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

III) La conjugación:
$$\overline{(a + bi)} = (a - bi)$$

IV) El módulo:
$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

V) La inversión:
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

Ejemplo 1.20

Calculemos las siguientes operaciones en $\mathbb{C}$:

a) $(2 + 3i) + (4 + 5i) = (6 + 8i)$

b) $(2 - 3i)(1 + i) = 5 - i$

c) $\overline{(4+i)} = (4-i)$

d) $|4-3i| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

e) $\frac{1}{3+i} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

¡Cuidado!

Es importante que cuando describimos un número complejo z de la forma $z = a + bi$ indiquemos que $a, b \in \mathbb{R}$.

1.15. Ejercicios

Lógica

1. Calcule la tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$[p \vee (\overline{p} \wedge q)] \Rightarrow q$$

2. Usando tablas de verdad, pruebe que la siguiente proposición es una tautología:

$$(p \Rightarrow q) \iff (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$$

3. Usando tablas de verdad, pruebe que la siguiente proposición es una contingencia:

$$(p \vee q) \Rightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

4. Usando propiedades simplifique la siguiente expresión:

$$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$

5. Usando propiedades pruebe la siguiente equivalencia:

$$[p \Rightarrow (\overline{p} \vee q)] \wedge [q \Rightarrow (\overline{q} \vee p)] \equiv (p \iff q)$$

Conjuntos

1. Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 9\}$, $C = \{9\}$. Determine si son verdaderas o falsas las siguiente contenciones:

   a) $A \subset B$
   b) $B \subset A$
   c) $A \subset C$
   d) $B \subset C$
   e) $C \subset A$
   f) $C \subset B$

2. Determine la cardinalidad de los siguientes conjuntos:

   a) $\{-1, 1, 2\}$
   b) $\left\{\frac{3}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right\}$
   c) $\left\{2, 3, 5, 7, -\frac{4}{2}, \frac{9}{3}\right\}$

3. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\} \qquad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

   Calcule

a) $B \setminus C$

b) $(A \cup C) \setminus B$

c) $A \cup C) \setminus (A \cap B)$

d) $(A \cup B \cup C) \setminus (B \cup C)$

4. En una casa de estudios hay actividades deportivas en la mañana y en la tarde. De un total de 400 estudiantes, 150 de ellos solo hacen actividades deportivas en la mañana, y 225 de ellos solo hace actividades en la tarde. ¿Cuántos estudiantes realizan actividades deportivas en ambas jornadas?

5. En un gimnasio se realiza una encuesta en la que se pregunta qué suplementos alimenticios usan. Se sabe que

   - 80 usan pre-entreno
   - 140 usan creatina
   - 190 usan proteína en polvo
   - 75 usan pre-entreno y proteína en polvo
   - 135 usan proteína en polvo y creatina
   - 40 usan creatina y pre-entreno
   - ninguno usa solo pre-entreno y creatina

   ¿A cuántas personas se le realizó la encuesta?

Polinomios

1. Desarrolle las siguientes expresiones:

   a) $(x-y)^4$

   b) $(x+2)^4$

   c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$

   d) $(x^2-2)^5$

2. Factorice los siguientes polinomios usando productos notables:

   a) x^4-y^4

   b) x^6-1

   c) x^4-1

3. Usando división de polinomios, simplifique la expresión:

$$\frac{x^3+2x+1}{x+1}$$

4. Factorice y simplifique la siguiente expresión:

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2}$$

5. Se sabe que 2 y -4 son raíces del polinomio:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 46x + 120$$

Factorice $f(x)$ en factores lineales.

6. Factorice el polinomio $x^3 + 6x$

7. Considere el polinomio

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$$

Si se sabe que 1 es una raíz.Factorice el polinomio.

8. Encuentre el polinomio $f(x)$ de grado 2 tal que $f(0) = -11$, $f(-1) = -15$ y que $f(1) = -5$.

9. Considere el siguiente polinomio:

$$f(x) = 6x^3 - 17x^2 - 5x + 6$$

   a) Encuentre sus raíces racionales.
   b) Termine de factorizar completamente el polinomio $f(x)$.

10. Encuentre todas las raíces racionales del polinomio siguiente:

$$30x^4 + 89x^3 + 76x^2 + 11x - 6$$

Números complejos

1. Determine la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

   a) $z = 6 + 3i$
   b) $z = 1 - i$
   c) $z = i$
   d) $z = \frac{1}{1-i}$
   e) $z = \overline{4 + 5i}$
   f) $z = (1 + i)^2$

2. Desarrolle las siguientes expresiones:

   a) $(1 + i)^3$
   b) $(2 + i)(1 - i)$
   c) i^{13}
   d) $(1 - i)^4$
   e) $(2 - 3i)^2$
   f) $(-2 + 7i)(1 - i)$
   g) $i(3 - 2i)(2 + i)$
   h) $8i + 3i^2 + 5i^3 - 2i^4$

3. Escriba los siguientes números complejos en su forma binomial

   a) $\frac{1}{3+4i}$
   b) $\frac{2}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$
   c) $\frac{1+i}{1-i}$

4. Determine un número complejo cuyo módulo es 2 y cuya parte real es -1.

Unidad 2

Geometría Analítica

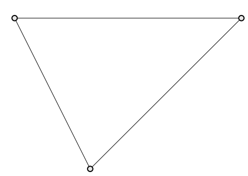
En este capítulo daremos por conocido lo básico de la geometría euclideana, y reforzaremos los conocimientos, particularemente sobre áreas, perímetros y volumenes.

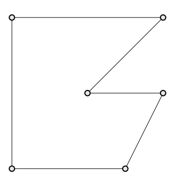
2.1. Poligonos regulares

Definición 2.1 **Polígono**

Un **polígono** es una figura geométrica formada por segmentos de recta (no colineales) unidos por los extremos de manera que forman una figura cerrada.
Usualmente los clasificamos por el números de segmentos que le forman, los cuales les llamaremos **lados** ó **aristas**. También, a los puntos de intersección de los segmentos los llamamos **vértices**.

Como ejemplo consideremos las siguientes figuras:





Además de la medida de los lados de un polígono, podemos asignar otra medida que es la de los ángulos interiores:

Definición 2.2 **Ángulo interior**

La medida del ángulo interior entre dos lados se define como el ángulo entre dos segmentos, uno hacia el anterior en sentido anti-horario.

Definición 2.3 **Polígono Regular**

Un **polígono regular** es un polígono cuyos lados tienen todos la misma medida y además, sus ángulos interiores tienen todos la misma medida.

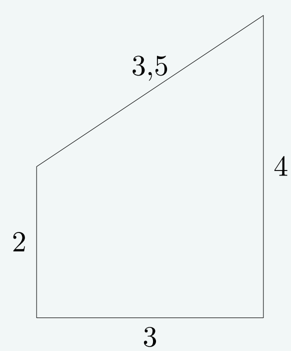
2.2. Perímetro

Definición 2.4 **Perímetro**

El perímetro de un un poligono es la suma de las medidas de sus lados.

Ejemplo 2.1

En la figura siguiente:

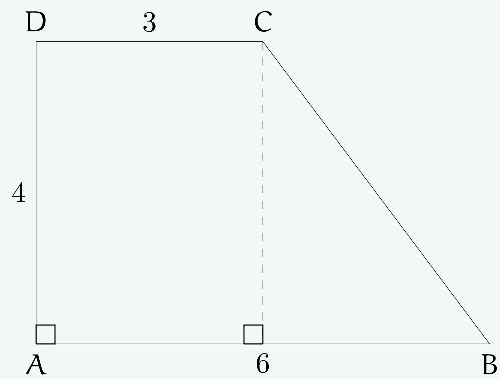


Luego, su perímetro es:

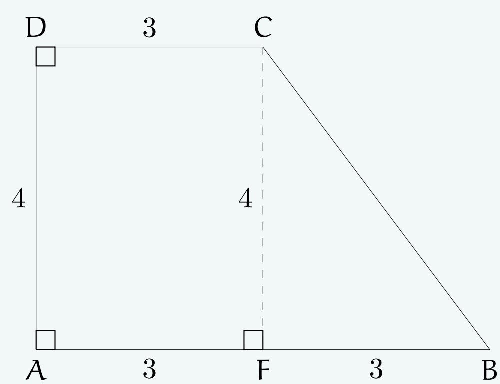
$$P = 2 + 4 + 3{,}5 + 2 = 11{,}5$$

Ejemplo 2.2

En el poligono A, B, C, D que sigue, hay ciertos segmentos que se utilizan para describir mejor la figura, pero esos segmentos no forman parte de la figura, por lo que sus medidas no se deben sumar al perímetro.



En este caso, podemos usar el triángulo rectángulo que se encuentra allí, y usar el Teorema de Pitágoras para determinar la medida del segmento $\overline{BC}$. Antes de eso, podemos deducir los siguientes datos:



Ahora en el triángulo rectángulo CFB tenemos que:

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= 3^2 + 4^2\\ &= 9 + 16\\ &= 25\\ \overline{BC} &= 5\end{aligned}$$

Finalmente el perímetro es:

$$P = 3 + 3 + 5 + 3 + 4 = 18.$$

¡Cuidado!

Es importante omitir los segmentos que no son parte de la figura, y solo ayudan a describirla.

2.3. Área

Si deseamos calcular medidas como el área, es buena idea comenzar con figuras más simples y predecibles. En este caso, conviene estudiar triángulos (poligono de 3 lados) ó rectángulos (poligono de 4 lados con ángulos rectos como ángulos interiores).

Definición 2.5 **Área de un rectángulo**

El área de un rectángulo cuyos lados miden a, b es:

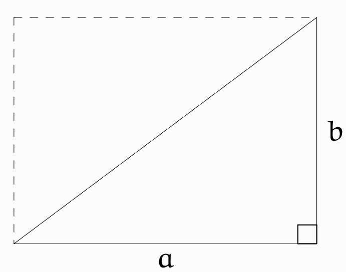
$$A = ab$$

Con esto podemos deducir otras áreas como la de un triángulo. Particularmente, podemos deducir el área de un triángulo rectángulo:

Definición 2.6 **Área de un triángulo rectángulo**

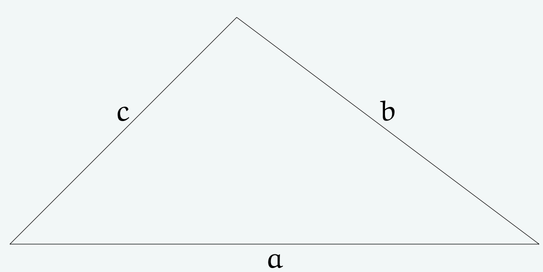
Tenemos que el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a, b es de:

$$A = \frac{ab}{2}$$

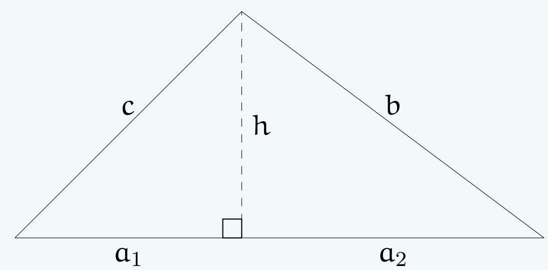


Ejemplo 2.3

Ahora podremos calcular el área de un triángulo cualquiera. Si tenemos un triángulo como el siguiente:



Si es posible hallar una altura en el triángulo, que es un segmento trazado desde un vértice hasta el lado opuesto al vértices formando un ángulo recto, podemos calcular el área de la manera siguiente:



en donde $a_1 + a_2 = a$. Tenemos que el área del triángulo inicial es la suma de las áreas de los triángulos más pequeños:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2} \\ A &= \frac{(a_1 + a_2)h}{2} \\ A &= \frac{ah}{2}. \end{aligned}$$

Aquí hemos obtenido la fórmula conocida de base por altura dividido dos.

Por ejemplo en los triángulos rectángulos tenemos la base y la altura, que son los catetos. Sin embargo, en general no poseemos esa información. Cuando tenemos un triángulo cualquiera, en donde no conocemos la altura, podemos utilizar lo siguiente:

Proposición 2.1 **Fórmula de Herón**

En un triángulo de lados a, b, c se calcula el área como sigue:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

en donde s es el semi-perímetro del triángulo, es decir, la mitad del perímetro del triángulo.

Ejemplo 2.4

Consideremos un triángulo cuya medida de sus lados es de $4, 5$ y 7. Debido a que desconocemos si es un triángulo rectángulo, y tampoco conocemos su altura, procedemos a utilizar la fórmula de Herón.
Primero calculamos el semi-perímetro:

$$s = \frac{1}{2}(4+5+7) = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

Luego, aplicamos la fórmula de Herón:

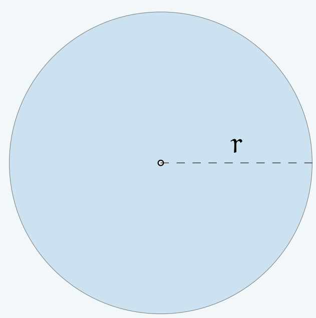
$$A = \sqrt{8 \cdot (8-4)(8-5)(8-7)}$$
$$A = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1}$$
$$A = 4\sqrt{6}$$

2.4. Sectores circulares y arcos

Además de segmentos de rectas quisieramos calcular área y perímetro de figuras curvas. Las figuras curvas por excelencia son aquellas circulares. Por este motivo, estudiaremos área y perímetro de partes de estas figuras.

Proposición 2.2 **Área y perímetro de un círculo**

Consideremos un círculo de radio r como sigue:



El área de un círculo de radio r es de:

$$A = \pi r^2.$$

Mientras que el perímetro (la medida de la circunferencia) es de:

$$P = 2\pi r.$$

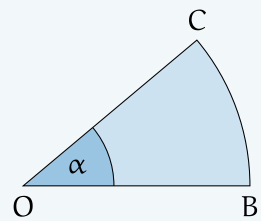
Observación 2.1

El número π aquí presente, realmente está definido por el número de veces en la que la medida del diámetro (el doble del radio) cabe en la circunferencia. En general, no reemplazaremos su valor numérico. Aproximadamente resulta ser $\pi \approx 3{,}1415$

Ahora, si queremos solo partes de un círculo, tenemos lo siguiente:

Proposición 2.3 **Área de un sector circular**

Consideremos el sector circular de radio r siguiente



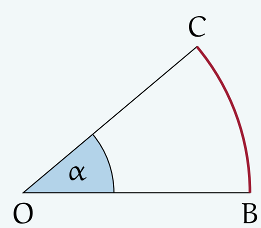
Su área es de:

$$A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r^2.$$

Mientras que si queremos la longitud del arco, tenemos que

Proposición 2.4 **Longitud de un arco circular**

La medida del arco circular $\widehat{BC}$ siguiente



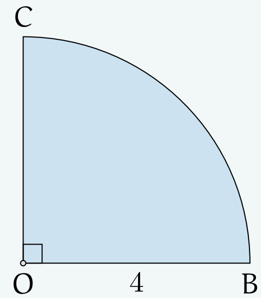
es de

$$l\left(\widehat{BC}\right) = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r.$$

Veamos algunos ejemplos sencillos para después trabajar con figuras más interesantes.

Ejemplo 2.5

Calcularemos el área de un cuarto de circunferencia como se puede observar en la figura que sigue:



siguiendo la fórmula queda que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 4^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 16 \\ A &= 4\pi. \end{aligned}$$

2.5. Volumenes

??

2.6. El plano Euclideano

Definición 2.7 **Plano Euclideano**

El **plano Euclideano**, o el plano Cartesiano. Como conjunto se define como los pares ordenados con coeficientes reales. Formalmente:

$$\mathbb{R} = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Podemos representar el plano Euclideano gráficamente, con dos ejes perpendiculares entre si. El **eje horizontal** se orienta hacia la derecha, y se corresponde con la primera coordenada de un par ordenado. El eje **eje vertical** se orienta hacia arriba, y se corresponde con la segunda coordenada del par ordenado.
Graficamos el plano Euclideano marcando los ejes correspondientes e indicando la variable que representan. Usualmente usaremos X para el eje horizontal e Y para el eje vertical. Por ejemplo:

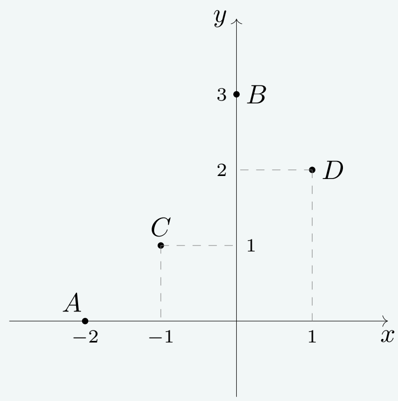
¡Cuidado!

Que sean pares ordenados significa que el orden en que se escriban los números sí importa. Por ejemplo, $(2, 3) \neq (3, 2)$

Veamos la representación gráfica de algunos puntos en el plano:

Ejemplo 2.6

Consideremos los puntos $A = (-2, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (-1, 1)$, $D = (1, 2)$. Luego, su representación gráfica es:



Podemos además calcular la distancia entre dos puntos, de la manera siguiente:

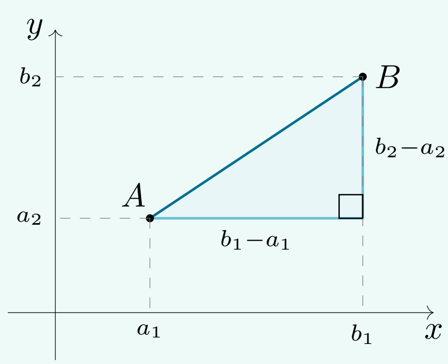
Definición 2.8 — Distancia entre dos puntos del plano

Consideremos dos puntos del plano, digamos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$. Luego, la distancia entre A y B está dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Observación 2.2

El motivo de por qué la distancia se define así es para ser consistentes con la manera de medir que hemos usado hasta ahora. Podemos observar en la figura que sigue cómo aparece un triángulo rectángulo en el cual podremos usar el Teorema de Pitágoras:



Ejemplo 2.7

Calculemos la distancia entre algunos puntos:

i) $\mathsf{P} = (-1, 3)$ y $\mathsf{Q} = (2, -1)$.

En este caso, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathsf{d}(\mathsf{P}, \mathsf{Q}) &= \sqrt{(-1-2)^2 + (3-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= 5. \end{aligned}$$

ii) $\mathsf{P} = (2, 0)$ y $\mathsf{Q} = (4, 3)$.

Aquí tenemos:

$$\begin{aligned} \mathsf{d}(\mathsf{P}, \mathsf{Q}) &= \sqrt{(4-2)^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{4+9} \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

iii) $\mathsf{P} = (6, 2)$ y $\mathsf{Q} = (1, 5)$.

En este caso, es similar:

$$\begin{aligned} \mathsf{d}(\mathsf{P}, \mathsf{Q}) &= \sqrt{(6-1)^2 + (2-5)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{25+9} \\ &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$

2.7. Rectas

Además de puntos en el plano, podemos representar las soluciones de una ecuación en dos variables. Esto puede ser realmente complicado, por lo que comenzaremos con lo más amigable y útil a la vez.

Definición 2.9 **Ecuación general de la recta**

La ecuación (general) de la recta está dada por:

$$Ax + By + C = 0,$$

en donde, $A, B, C \in \mathbb{R}$, con A, B siendo no ambos nulos a la vez.

Observación 2.3

Lo que graficaremos realmente es un conjunto enorme:

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, Ax + By + C = 0\right\}.$$

Sin embargo, resultará más sencillo hablar solo de la ecuación y no del conjunto completo.

Dependiendo si $B = 0$ o si $B \neq 0$ obtendremos dos familias de rectas.

Definición 2.10 **Ecuación de la recta vertical**

Una ecuacón de la recta de la forma

$$x = \alpha$$

es llamada una **recta vertical**. La podemos representar gráficamente como sigue:

Definición 2.11 **Ecuación principal de la recta**

Una ecuación de la forma:

$$y = mx + n$$

es llamada
Aquí, m es llamada **pendiente** de la recta. Mientras que n es llamada **coeficiente de posición**.

Veamos algunos ejemplos de cómo obtener la ecuación de la recta.

Ejemplo 2.8

Queremos hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (0, -1)$ y $Q = (2, 5)$.

Primero calculamos la pendiente:

$$\begin{aligned} m &= \frac{5-(-1)}{2-0} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ahora, para obtener la ecuación de la recta, reemplazamos con cualquiera de los dos puntos, preferiremos el que sea más simple, en este caso usaremos el punto P.

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ -1 &= 3 \cdot 0 + n \\ n &= -1. \end{aligned}$$

Finalmente, con esto tenemos que la ecuación de la recta es:

$$y = 3x - 1.$$

En el caso de que queramos la ecuación general de la recta bastará que desarrollemos para igualar a cero en la ecuación. En este caso, la ecuación general de la recta resulta en:

$$3x - y - 1 = 0.$$

Proposición 2.5 **Distancia de un punto a una recta**

Consideremos la ecuación general de la recta

$$L: \ Ax + By + C = 0$$

y un punto del plano $P = (x_0, y_0)$.
La distancia entre la recta L y el punto P es:

$$d(L, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ejemplo 2.9

Consideremos la ecuacón de la recta:

$$L: \ 3x + 4y - 1 = 0$$

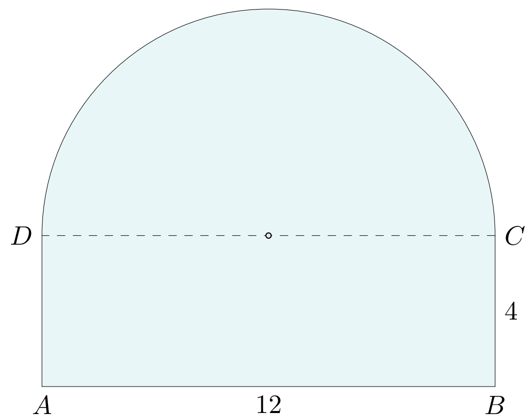
y el punto $\mathsf{P} = (-1, 6)$. Entonces la distancia del punto a la recta queda:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}(\mathsf{L}, \mathsf{P}) &= \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 6 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\
&= \frac{|-3 + 24 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} \\
&= \frac{|20|}{\sqrt{25}} \\
&= \frac{20}{5} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

2.8. Ejercicios

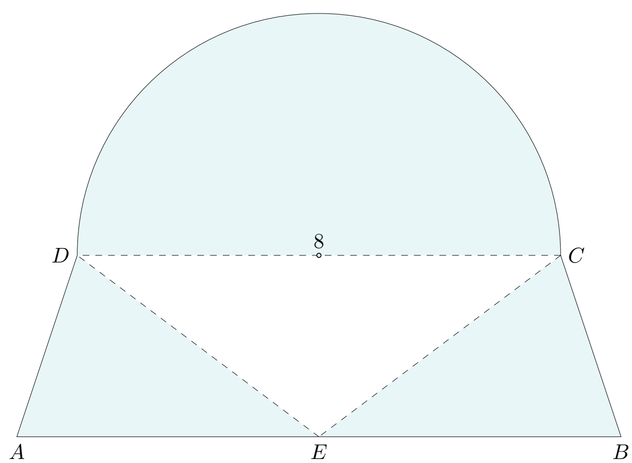
Área y perímetro

1. Considere la siguiente figura en donde $ABCD$ es un rectángulo, y $\overline{DC}$ es el diámetro de la semi-circunferencia.



Calcule el área y perímetro de la figura descrita.

2. En la figura que sigue:

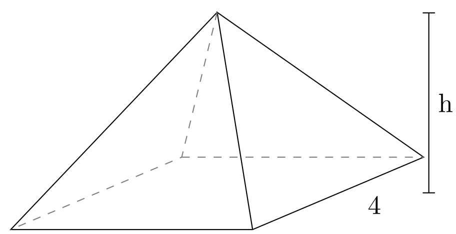


Se tiene que $ABCD$ es un trapecio isósceles de bases 8 y 12, cuya altura es de 6; el triángulo CDE es isósceles con base CD; y CD es un diámetro para la semi-circunferencia. Calcule el área de la región que está pintada.

3. Si un triángulo rectángulo tiene área 42 y un cateto mide 24. Determine el perímetro del triángulo rectángulo.

Volumenes

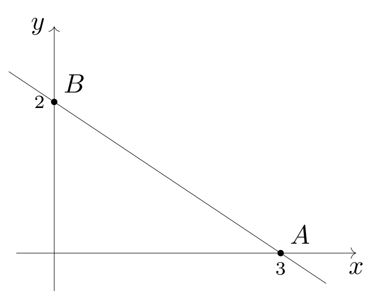
1. Dibuje un cilindro de radio 4 y altura 2. Luego, calcule su volumen.
2. Se tiene una pirámide de base triángular, con un triángulo equilátero. Si la medida del lado es de 3, y la altura es $3\sqrt{3}$. Calcule su volumen.
3. Considere la siguiente pirámide de base cuadrada:



   Si su volumen es 48. Encuentre el valor de su altura.

Puntos y Rectas

1. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el par de puntos:
   a) $P = (-1, 2)$ y $Q = (3, 6)$
   b) $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 8)$
   c) $P = (-1, 2)$ y $Q = (-1, 4)$
   d) $P = (-3, 6)$ y $Q = (3, 6)$
2. Encuentre la ecuación de la recta con pendiente $m = 3$ y que pasa por el punto $T = (1, 6)$.
3. Encuentre la ecuación de la recta descrita en el siguiente gráfico:



4. Considere la ecuación de la recta L dada por $3x - 2y + 4 = 0$.
   a) Encuentre la pendiente de una recta perpendicular a L.
   b) Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a L que pasa por el origen.
   c) Grafique la recta del enunciado y la recta obtenida.
5. La ecuación (general) de la recta L está dada por $2x + 3y - 12 = 0$. Escriba la ecuación de la recta L en su forma principal.

Distancias e intersección

1. Calcule la distancia entre los puntos siguientes:

   a) $P = (5, 1)$ y $Q = (1, 4)$
   b) $P = (3, 2)$ y $Q = (3, -4)$
   c) $P = (4, -1)$ y $Q = (1, 6)$
   d) $P = (0, 0)$ y $Q = (-2, 4)$
   e) $P = (1, -2)$ y $Q = (1, 3)$
   f) $P = (0, 2)$ y $Q = (1, 2)$

2. Considere la ecuación de la recta L dada por $y = -3x + 10$. Determine la distancia de L al punto $Q = (0, 1)$.

3. Un triángulo tiene como vértices los puntos $A = (2, 3)$, $B = (2, -1)$ y $C = (-1, 2)$. Calcule el perimetro y el área del triángulo.

4. Encuentre el punto de intersección de las rectas dadas por

$$L_1 : y = 2x + 5$$
$$L_2 : y = -x + 1$$

5. Un viajero recorre un sendero recto, hasta que finalmente llega a un punto en el que intersecta con otro camino recto. Suponiendo que el primer camino está dado por $y = x + 3$ y que el segundo camino está dado por $2x + 3y - 1 = 0$.

   a) Dibuje la trayectoria del viajero si comenzo en $(0, 3)$ y terminó en $(5, -3)$.
   b) Calcule cuánto caminó el viajero con la trayectoria anterior.

Unidad 3

Trigonometría y Relación de Orden

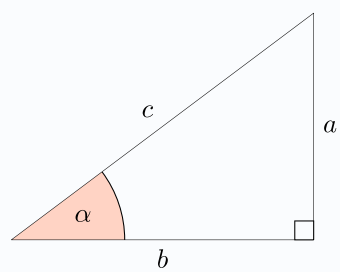
3.1. Trigonometría en el Triángulo

Cuando tenemos un triángulo, siempre lo podemos descomponer en triángulos rectángulos; debido a que son más simples de entender es una descomposición usual. Además, podemos calcular su área con facilidad, ya que disponemos del Teorema de Pitágoras.

Ahora, queremos estudiar las proporciones que existen en estos triángulos.

Definición 3.1 Funciones Trigonométricas en el Triángulo Rectágulo

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo:



Definimos las expresiones siguientes:

- seno de α
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$$
- coseno de α
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$
- tangente de α
$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

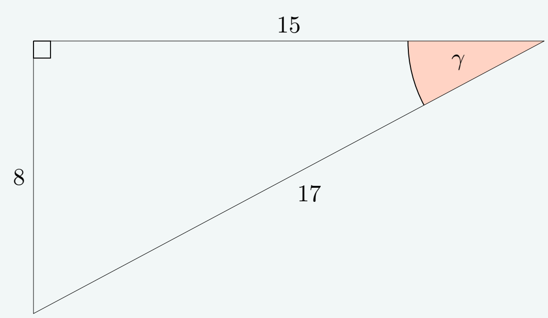
Podemos usar estas expresiones para tratar de mejor manera las semejanzas entre los triángulos.

Observación 3.1

Los lados del triángulo que son adyacentes con el ángulo recto, en este caso a y b son llamados **catetos**. Diremos que a es el **cateto opuesto a** α y que b es el **cateto adyacente a** α. Por otro lado, el lado opuesto al ángulo recto, en este caso c es llamado **hipotenusa**.

Ejemplo 3.1

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo:



Tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\gamma) &= \frac{8}{17}, \\ \cos(\gamma) &= \frac{15}{17}, \\ \tan(\gamma) &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Observación 3.2

En general, la idea es saber los valores de las proporciones trigonométricas para los ángulos que aparezcan. Aunque en general esto puede ser complicado. Vamos a considerar algunos ángulos que pueden ser conocidos y proporciones útiles.

Ejemplo 3.2

Quisieramos aproximar la altura de un edificios mediante la observación y mediciones sencillas. Si nos alejamos del edificio, unos 100 metros desde el suelo a la parte superior del edficio se ha medido un ángulo de 20°. Utilizando un triángulo más pequeño, hemos descubierto que $\tan(20°) \approx 0{,}364$.

Tenemos que

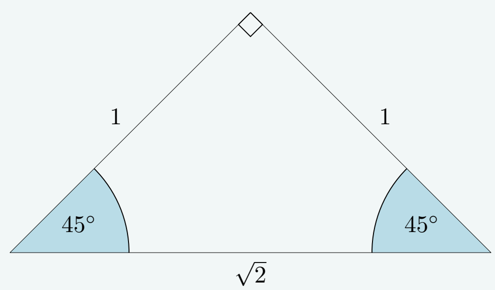
$$\begin{aligned} \tan(20°) &= \frac{h}{100} \\ h &= 100 \cdot \tan(20°) \\ &= 100 \cdot 0{,}364 \\ &= 36{,}4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la altura del edificio es de aproximadamente 36,4 metros.

Hay algunos ángulos que podemos conocer con exactitud. Para ello, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3.3

Consideremos el siguiente triángulo rectángulo isósceles de cateto 1:



Luego, tenemos que:

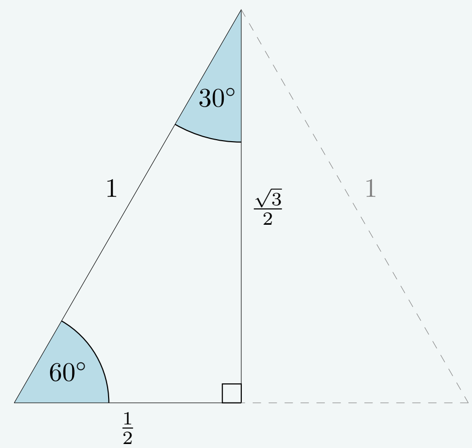
$$\text{sen}(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan(45°) = \frac{1}{1} = 1.$$

Ejemplo 3.4

Consideremos un triángulo equilátero con la medida del lado igual a 1. Para obtener un triángulo rectángulo,



De esta manera, podemos identificar las proporciones trigonométricas para 30° y para 60°. En efecto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(30^\circ) &= \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \\
\cos(30^\circ) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\tan(30^\circ) &= \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
\operatorname{sen}(60^\circ) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
\cos(60^\circ) &= \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \\
\tan(60^\circ) &= \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

3.2. Trigonometría en el plano

Ya hemos definido las funciones Trigonométricas en triángulos rectángulos, pero esto resulta bastante limitado, ya que las funciones trigonométricas son extremadamente útiles en muchos problemas de moleación matemáticas en el mundo moderno.

Necesitamos definir las funciones trigonométricas para cualquier ángulo, para ello primero tenemos que definir una unidad de medida más conveniente para este fin.

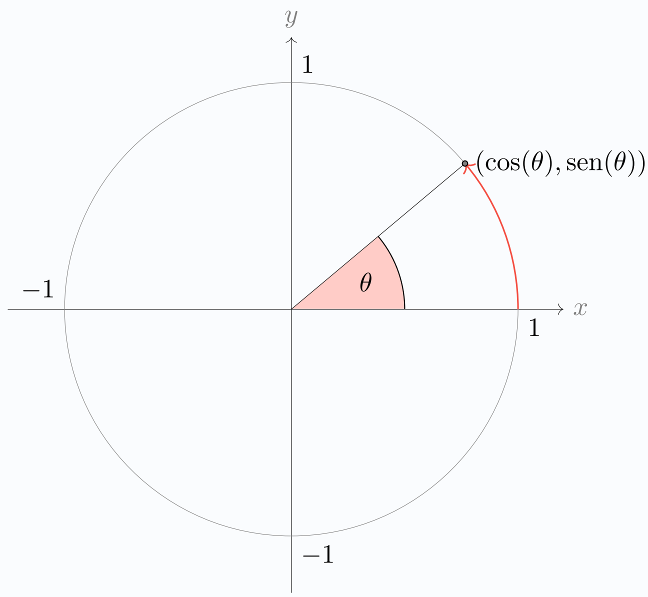
Definición 3.2 **Radianes**

Un ángulo medido en radianes se corresponde a la medida del arco de una circunferencia unitaria en sentido antihorario comenzando por el eje X positivo.

En la definición que sigue podemos visualizar esta definición y dar lugar a las definiciones generalizadas de seno y de coseno.

Definición 3.3 **Seno y Coseno**

Podemos observar en la siguiente figura:



El punto de la circunferencia que se obtiene al movernos en un ángulo θ define el valor de coseno y de seno.

Observación 3.3

Ejemplo 3.5

Ejemplo 3.6

3.3. Identidades de suma y diferencia de ángulos

Ahora que podemos permitirnos trabajar con ángulos mayores que 90° o con ángulos negativos, conviene estudiar cómo podemos obtener el valor de las proporciones trigonométricas de otros ángulos a partir de los ya conocidos.

Proposición 3.1 **Suma de ángulos**

Tenemos que:

- Para seno
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha).$$
- Para coseno
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).$$

Proposición 3.2 **Diferencia de ángulos**

Tenemos que:

- Para seno
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha).$$
- Para coseno
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).$$

Ejemplo 3.7

Podemos desarrollar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(75^\circ)&=\operatorname{sen}(30^\circ+45^\circ)\\&=\operatorname{sen}(30^\circ)\cos(45^\circ)+\operatorname{sen}(45^\circ)\cos(30^\circ)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.8

Calculemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(15^\circ)&=\operatorname{sen}(45^\circ-30^\circ)\\&=\operatorname{sen}(45^\circ)\cos(30^\circ)-\operatorname{sen}(30^\circ)\cos(45^\circ)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.9

También podemos usarlo para valores más grandes:

$$\begin{aligned} \cos(120°) &= \cos(30° + 90°) \\ &= \cos(30°)\cos(90°) - \operatorname{sen}(30°)\operatorname{sen}(90°) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.4. Identidades Trigonometricas

Tenemos algunas funciones trigonométricas que podemos definir a partir de las funciones seno y coseno, como sigue:

Definición 3.4 **Funciones trigonométricas**

Tenemos que siempre que estén definidas (que no haya una división por cero) se definen:

- Tangente

$$\tan(\theta) := \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$$

- Secante

$$\sec(\theta) := \frac{1}{\cos(\theta)}$$

- Cosecante

$$\csc(\theta) := \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

- Cotangente

$$\cot(\theta) := \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$$

Observación 3.4

La primera identidad trigonomética que podemos identificar es la identidad pitagórica, que se origina de la definición misma de la función seno y coseno como hemos visto previamente. Debido a que tenemos una circunferencia unitaria centrada en el origen, en donde $x = \cos(\theta)$ e $y = \operatorname{sen}(\theta)$ obtenemos que

$$x^2 + y^2 = 1$$

se reescribe como

$$\cos(\theta)^2 + \operatorname{sen}(\theta)^2 = 1$$

Esta última identidad de conocida como **identidad pitagórica**.

Ejemplo 3.10

A partir de la identidad pitagórica anterior podemos obtener otras dos identidades igualmente útiles:

- Dividiendo por $\cos(\theta)^2$:

$$\begin{aligned}
\left(\cos(\theta)^2 + \operatorname{sen}(\theta)^2\right) \cdot \frac{1}{\cos(\theta)^2} &= \frac{1}{\cos(\theta)^2} \\
\frac{\cos(\theta)^2}{\cos(\theta)^2} + \frac{\operatorname{sen}(\theta)^2}{\cos(\theta)^2} &= \left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right)^2 \\
1 + \left(\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 &= \sec(\theta)^2 \\
1 + \tan(\theta)^2 &= \sec(\theta)^2.
\end{aligned}$$

- Dividiendo por $\operatorname{sen}(\theta)^2$:

$$\begin{aligned}
\left(\cos(\theta)^2 + \operatorname{sen}(\theta)^2\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)^2} &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)^2} \\
\frac{\cos(\theta)^2}{\operatorname{sen}(\theta)^2} + \frac{\operatorname{sen}(\theta)^2}{\operatorname{sen}(\theta)^2} &= \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}\right)^2 \\
1 + \left(\frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}\right)^2 &= \csc(\theta)^2 \\
1 + \cot(\theta)^2 &= \csc(\theta)^2.
\end{aligned}$$

Observación 3.5

Junto a la primera identidad pitagórica, estas dos últimas son llamadas **identidades pitagóricas.**

Ejemplo 3.11

Ahora probaremos la siguiente identidad:

$$\cot(\theta)\sec(\theta) = \csc(\theta).$$

Para probarla comenzaremos por el lado izquierdo:

$$\begin{aligned}\cot(\theta)\sec(\theta) &= \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \\ &= \csc(\theta).\end{aligned}$$

Ejemplo 3.12

Queremos probar que se tiene la siguiente identidad:

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\tan(\theta) + \sec(\theta)}{\sec(\theta)}.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\tan(\theta) + \sec(\theta)}{\sec(\theta)} &= \frac{\tan(\theta) + \sec(\theta)}{\sec(\theta)} \cdot \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &= \frac{\tan(\theta)\cos(\theta) + \sec(\theta)\cos(\theta)}{\sec(\theta)\cos(\theta)} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} \cdot \cos(\theta) + 1}{1} \\ &= \operatorname{sen}(\theta) + 1.\end{aligned}$$

¡Cuidado!

Es recomendable comenzar solo desde un lado de la identidad y usando propiedades conocidas, llegar a la otra. En este proceso, usualmente conviene comenzar desde la que tenga más términos.

3.5. Teorema de Seno y Teorema de Coseno

Usando las funciones trigonométricas anteriores quisieramos también tratar con triángulos que no sean necesariamente rectángulos. Para esto dispondremos del Teorema de Coseno, que generaliza al Teorema de Pitágoras y el Teorema de Seno que es una formalización Trigonométricas de la semejanza de triángulos.

Teorema 3.1 **Teorema de Coseno**

Consideremos el siguiente triángulo:
Entonces, tenemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma).$$

Ejemplo 3.13

Teorema 3.2 **Teorema de Seno**

Se tiene el siguiente triángulo:
Entonces se cumplen las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\text{sen}(\beta)}{b} = \frac{\text{sen}(\gamma)}{c}.$$

Ejemplo 3.14

¡Cuidado!

Una distición entre el uso de uno o el otro, es que el Teorema de Coseno requiere al menos un ángulo y dos lados. Mientras que el Teorema de Seno requiere al menos dos ángulos y un lado.

3.6. Inecuaciones

3.7. Inecuaciones con gráficos

3.8. Ejercicios

Trigonometría en el triángulo

1. Considere el siguiente triángulo:
2. Si se sabe que $\cos(\alpha) = \frac{3}{4}$. Si un triángulo rectángulo posee el ángulo α, determine la medida de los catetos.

Trigonometría en el plano

1. Convierta de grados a radianes, o de radianes a grados según corresponda:

a) $150°$
b) 3π
c) $\frac{2\pi}{3}$
d) $\pi/3$
e) $15°$
f) $\pi/2$
g) $315°$
h) $-\pi/6$
i) $\frac{2\pi}{5}$
j) $120°$
k) $-75°$
l) $-\pi/4$

Identidades trigonométricas

1. Pruebe las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\cos(x) = \sec(x) - \operatorname{sen}(x)\tan(x)$
b) $\cot(x)\cos(x) = \cot(x)\sec(x) - \operatorname{sen}(x)$
c) $\tan(x) = \frac{\sec(x)}{\csc(x)}$
d) $4\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \operatorname{sen}^2(2x)$
e) $\sec(x) + \csc(x) = \frac{2\operatorname{sen}(x)+2\cos(x)}{\operatorname{sen}(2x)}$
f) $\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x)$
g) $\frac{\tan(2x)}{2\tan(x)} = \frac{1}{1-\tan^2(x)}$

2. Recordando que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$, pruebe la identidad siguiente:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

3. Similar al ítem anterior, pruebe que:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

4. Pruebe la identidad trigonométrica

$$\cot^2(\theta) - \cos^2(\theta) = \frac{\cot^2(\theta)}{\sec^2(\theta)}$$

5. Pruebe o refute la identidad siguiente:

$$\operatorname{sen}^4(x) = \operatorname{sen}^2(x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2x).$$

6. Pruebe o refute la identidad siguiente:

$$\cos(4x) = \operatorname{sen}^2(x) + 1.$$

Teorema de seno y coseno

1.

Inecuaciones

1. Encuentre el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

   a) $2x - 4 \geqslant 6 - x$
   b) $1 - x \leqslant 0$
   c) $x - 4(1 - x) < 2 - x$
   d) $x + 1 \geqslant 1 - x$
   e) $5x - 1 < 9 - 5(x + 10)$
   f) $\frac{1}{3}(4 - x) > x$

Unidad 4

Funciones y Límites

4.1. Funciones reales

Definición 4.1 **Función**

Una *función* f está formada por un triple de datos, que son conjuntos:

† Un dominio $\mathrm{Dom}(f)$.

† Un codominio $\mathrm{Cod}(f)$.

† Una gráfica $\Gamma(f) \subseteq \mathrm{Dom}(f) \times \mathrm{Cod}(f)$.

Debe cumplir con la condición siguiente:

$$\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \exists ! y \in \mathrm{Cod}(f) : (x, y) \in \Gamma(f).$$

Esta información se suele escribir como:

$$f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathrm{Cod}(f) : x \mapsto f(x)$$

Observación 4.1

Una función requiere de un conjunto los cuales serán convertidos a través de la regla que indique la gráfica, y deben poder llegar al conjunto llamado codominio. Además, cada elemento del dominio solo debe ser asignado una única vez.

Cuando describamos una función, debemos indicar esta información, y se puede hacer de varias formas. Esto se verá en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.1

Tenemos que $g : \{1, 3, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ en donde la gráfica es:

$$\Gamma(g) = \{(1, 4), (3, 7), (6, 8)\},$$

en otras palabras, decimos que $g(1) = 4$, $g(3) = 7$ y $g(6) = 8$.

Ejemplo 4.2

También podemos tener gráficas dadas por una regla más general, como por ejemplo,

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : n \mapsto n^2 - 5.$$

Esto quiere decir, que tanto el dominio como el codominio son los números enteros. Y que vamos a hacer la asignación $h(n) = n^2 - 5$. Por ejemplo, $h(-2) = (-2)^2 - 5 = 4 - 5 = -1$.

Definición 4.2 **Función real**

Una *función real* es una función cuyo dominio y codominio son subconjuntos de los números reales $\mathbb{R}$.

Ejemplo 4.3

Tenemos que la siguiente es una función real

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

dada por $G(t) = \dfrac{t}{t^2 + 1}$.

Ejemplo 4.4

La siguiente es también una función real:

$$u : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} : t \mapsto \frac{2t - 1}{t + 2}.$$

Ejemplo 4.5

También se pueden definir a trozos ó por casos:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \\ x^3 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$$

Podemos aprovechar el plano euclideano para podamos comprender mejor el comportamiento de una función real, graficando la gráfica de la función.

Ejemplo 4.6

Ejemplo 4.7

Observación 4.2

Una de las primeras cosas que podemos hacer para comprender el comportamiento de una función es estudiar una relación básica entre el dominio y el codominio de esta. Si a cada elemento del dominio se envía a un elemento diferente del codominio, le llamaremos inyectividad; si cada elemento del codominio vino desde algún elemento del dominio, le diremos epiyectividad; y si cumple las dos condiciones anteriores, le llamaremos biyectividad.

Definición 4.3 **Inyectividad**

Una función f se dice *inyectiva* si cumple que:

$$\forall a, b \in \mathrm{Dom}(f), f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Ejemplo 4.8

Definición 4.4 **Epiyectividad**

Una función f se dice *epiyectiva* (ó *sobreyectiva*) si cumple que:

$$\forall y \in \mathrm{Cod}(f), \exists x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) = y.$$

Ejemplo 4.9

Definición 4.5 **Biyectividad**

Ejemplo 4.10

4.2. Funciones polinomiales, racionales y raíces

4.3. Funciones Trigonométricas y sus inversas

4.4. Función exponencial y logaritmos

4.5. Límites y Continuidad

4.6. Álgebra de Límites

4.7. Cambios de variable

4.8. Ejercicios

Funciones - Dominio maximal

Funciones - Inyectividad, epiyectividad y biyectividad

Álgebra de límites

Límites

Índice alfabético