

Национальный технический университет “ХПИ”

Факультет информатики и управления

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Тема: Математическое моделирование движения небесных тел

ИФ - 57а

(прикладная математика)

Выполнил:

Шафеев Р.А.

Проверили:

Сердюк И.В.

ХАРЬКОВ

2010

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	7
2 АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ.....	8
2.1 Построение математической модели движения небесных тел	8
2.2 Вычисление элементов орбиты.....	12
2.2.1 Вывод уравнения кривой для эллипсоидной орбиты.....	12
2.2.2 Вычисление угла наклона орбиты к экваториальной плоскости	15
2.2.3 Вывод канонического уравнения эллипса	15
2.3 Нахождение физических характеристик эллипсоидального тела.....	21
2.3.1 Нахождение полуосей удлиненного эллипсоида	22
2.3.2 Нахождение полуосей укороченного эллипсоида	25
2.3.3 Вычисление объема эллипсоида.....	28
2.3.4 Вычисление площади поверхности эллипсоида.....	28
2.3.5 Определение объема внутреннего слоя тела.....	30
3 ПОСТРОЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ.....	33
3.1 Решения нелинейного уравнения	33
3.1.1 Формула деления отрезка пополам	33
3.2 Численное интегрирование функции	34
3.2.1 Формула Симпсона (парабол).....	34
3.3 Численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений.....	37
3.3.1 Метод Рунге-Кутты	37
3.3.2 Метод Эверхарта	39

4 РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ	46
4.1 Общие сведения о программе	46
4.2 Добавление космического объекта в систему	46
4.3 Проведение прогнозирования.....	48
4.4 Требования к ПК	51
5 ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ	53
5.1 Устойчивость алгоритмов	53
5.1.1 Устойчивость метода Эверхарта 23-го порядка	54
5.1.2 Устойчивость метода Рунге-Кутты 4-го порядка.....	55
5.2 Нахождение параметров орбит.....	56
5.2.1 Элементы орбиты Земли	56
5.2.2 Элементы орбиты Венеры	58
5.3 Исследование орбитальной эволюции астероида 99942 Apophis ..	59
5.4 Нахождение физических характеристик земного эллипсоида.....	60
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	62
СПИСОК ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ	64
6 ПРИЛОЖЕНИЯ	65
6.1 Узлы разбиения метода Эверхарта	65
6.2 Начальные положения, скорости и массы на 28.06.2009	66
6.3 Положения астероида Apophis с 2009-2100гг, полученные методом Эверхарта 23-го порядка.....	67
6.4 Положения астероида Apophis с 2009-2100гг, полученные методом Рунге-Кутты 4-го порядка	69

ВВЕДЕНИЕ

Во все времена, с глубокой древности и до наших дней, вид звездного неба будоражил воображение людей своей красотой и величием. Астрономия, древнейшая и в то же время вечно молодая наука, открывает перед человеком этот чарующий и прекрасный мир галактик и квазаров, звезд и туманностей, планет, окруженных спутниками и загадочными кольцами. Исторически одна из первых задач астрономии заключалась в разумном объяснении странного наблюдаемого движения планет. Над поиском истинных закономерностей планетных движений астрономы безуспешно бились на протяжении почти двух тысячелетий вплоть до Кеплера, открытия которого сыграли неоценимую роль в истории науки. Через некоторое время Исаак Ньютон открывает закон всемирного тяготения, который лег в основу молодой науки того времени: небесной механики. Основным содержанием небесной механики является задача n тел, то есть изучение движения n материальных точек, притягивающихся друг к другу по законам Ньютона. Эта задача полностью решена аналитически только в случае двух тел. Для большего количества тел точного аналитического решения не найдено. Задача трёх и более тел аналитическими методами решается путём разложения в степенные ряды по малым параметрам элементов орбит (эксцентриситет, наклонение). Однако это не позволяет моделировать движение с необходимой точностью на больших интервалах.

Из-за отсутствия аналитического решения и своей актуальности (решение задачи дает возможность прогнозировать столкновения тел, проверять устойчивость орбит, создавать банк данных положений тел, необходимого для проведения астрологических предсказаний и многое

другое) эта задача вызвала у нас большой интерес, после чего родилась идея построить модель для прогнозирования положений небесных тел.

Перед нами была поставлена цель, создать программный продукт, который позволяет численно решать задачу многих тел. Приложение должно отображать в трехмерном виде текущие положения планет, показывать их текущие характеристики и собранные данные (банк данных положений и скоростей, экстремумы скоростей и расстояний между телами).

После создания этого программного обеспечения нужно провести эксперимент, в котором будет выявлена устойчивость построенного численного математического аппарата. После практического доказательства состоятельности выбранных методов для решения данной задачи, провести прогнозирование движения планет, в котором будет выявлен уровень угрозы столкновения Земли с астероидом Апофис на интервале времени с 2009 по 2100 гг., а также вычисление максимальных (минимальных) расстояний, скоростей и параметров эллипсоидных орбит больших планет Солнечной системы.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Необходимо построить математическую модель движения n центров масс эллипсоидальных тел, зная их начальные скорости, положения и массы. Модель строится на основе законов классической механики.

Разработать программное обеспечение, в котором будет реализована математическая модель в двухмерном и трехмерном видах.

Функционал программы должен иметь следующие возможности:

- 1) Численно решать уравнения, описывающие движение небесных тел;
- 2) Графическое представление эволюции движения небесных тел в трехмерном пространстве;
- 3) Составление банка данных положений и скоростей наблюдаемого тела;
- 4) Построение орбит и нахождение их параметров на основе банка данных;
- 5) Нахождение полуосей эллипсоида вращения по известным длинам экватора L_e и меридиана L_m ;
- 6) Нахождение объемов внутренних слоев неоднородного тела;
- 7) Вычисление общего объема, массы и площади поверхности эллипсоидального тела.

2 АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

В данном разделе описываются аналитическое описание модели движения небесных тел, а также вывод уравнения орбиты.

2.1 Построение математической модели движения небесных тел

Поведение небесно-механических динамических систем во многих случаях изучается в рамках пространственной точечной задачи N -тел. Эволюционный оператор математической модели динамической системы N -тел представляет собой систему $6 \cdot N$ нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих взаимодействие гравитирующих тел. Такая система дифференциальных уравнений не имеет аналитического решения для задачи N -тел уже при $N > 2$.

Выведем эти уравнения, опираясь на законы Ньютона:

Согласно закону всемирного тяготения, сила гравитационного взаимодействия между точечными телами с массами m_j и m_i вычисляется по формуле:

$$F_{i,j} = G \frac{m_i m_j}{r^2} \quad (2.1)$$

Где: G – гравитационная постоянная, r – расстояние между телами.

При переходе к системе координат базисом (i, j, k) получим представление формулы (2.1) в пространстве (рис. 2.1):

$$F_{i,j} = G \frac{m_i m_j \vec{R}_{i,j}}{\Delta_{i,j}^3} \quad (2.2)$$

Где: $R_{i,j} = r_j - r_i$ – вектор-расстояние от i -го тела до j -го,

$$\Delta = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, i = 1 \dots (n-1)$$

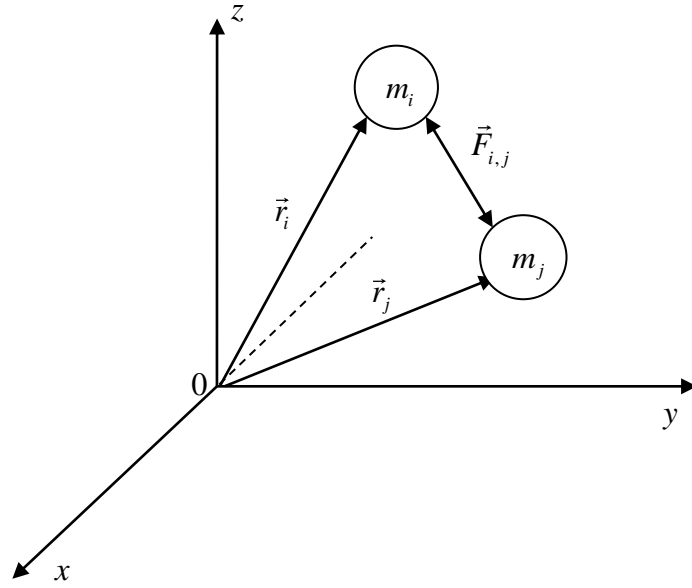


Рисунок 2.1(сила гравитационного взаимодействия двух тел)

Рассмотрим случай, когда на i -е тело действует сила воздействия всех тел системы:

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \vec{F}_{i,j} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} G \frac{m_i m_j \vec{R}_{i,j}}{\Delta_{i,j}^3}$$

Тогда ускорение i -го тела согласно второму закону механики запишется в виде:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} G \frac{m_i m_j \vec{R}_{i,j}}{\Delta_{i,j}^3} \Rightarrow \vec{a} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} G \frac{m_j \vec{R}_{i,j}}{\Delta_{i,j}^3} \quad (2.3)$$

Так как ускорение равняется второй производной от функции положения, зависящей от времени, а первая производная является скоростью в момент времени t , то из формулы (2.3) можно получить систему из $6N$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, построенных

по законам классической механики, которые описывают движение N материальных точек в прямоугольной системе координат[1]:

$$\begin{cases} \vec{V}_i'(t) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} G \frac{m_j \vec{R}_{i,j}}{\Delta_{i,j}^3}, \\ \vec{r}_i'(t) = \vec{V}_i(t). \end{cases} \quad (2.4)$$

Теперь поместим планету $\{x_0(t), V_0(t), m_0, \}$ в центр системы координат[1, с. 319]:

$$\begin{cases} \vec{V}_i'(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} G m_j \left(\frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\Delta_{i,j}^3} - \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right) - G(m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3}, \\ \vec{r}_i'(t) = \vec{V}_i(t). \end{cases}$$

Распишем уравнения для всех компонент векторов:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i, \\ \frac{dy_i}{dt} = \dot{y}_i, \\ \frac{dz_i}{dt} = \dot{z}_i, \\ \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} G m_j \left(\frac{(x_j - x_i)}{\Delta_{i,j}^3} - \frac{x_j}{|\vec{r}_j|^3} \right) - G(m_0 + m_i) \frac{x_i}{|\vec{r}_i|^3}, \\ \frac{d\dot{y}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} G m_j \left(\frac{(y_j - y_i)}{\Delta_{i,j}^3} - \frac{y_j}{|\vec{r}_j|^3} \right) - G(m_0 + m_i) \frac{y_i}{|\vec{r}_i|^3}, \\ \frac{d\dot{z}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} G m_j \left(\frac{(z_j - z_i)}{\Delta_{i,j}^3} - \frac{z_j}{|\vec{r}_j|^3} \right) - G(m_0 + m_i) \frac{z_i}{|\vec{r}_i|^3}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Тогда система уравнений (2.5) с начальными условиями:

$$\begin{cases} x_i(0) = x_i^0; \\ V_{x,i}(0) = V_{x,i}^0; \end{cases} \begin{cases} y_i(0) = y_i^0; \\ V_{y,i}(0) = V_{y,i}^0; \end{cases} \begin{cases} z_i(0) = z_i^0; \\ V_{z,i}(0) = V_{z,i}^0; \end{cases} \text{ формализует собой задачу}$$

Коши.

Компьютерное моделирование системы N тел(2.5) строится на основе численного методов Рунге-Кутты четвертого порядка или Эверхарта 19(23)-го порядка.

Для того чтобы не было больших погрешностей при округлении, мы выбрали наиболее оптимальные размерности для величин:

Таблица 2.1 (Новые размерности)

t	c
V	км/с
G	$10^{-11} \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2 \text{кг}}$
m	10^{24}кг
$r(t)$	тыс.км

Определим размерность для формулы (2.5):

$$\begin{aligned} [a] &= \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} G m_j \left(\frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\Delta_{i,j}^3} - \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right) - G(m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} \right] = \\ &= 10^{-11} \frac{10^{-9} \text{км}^3}{\text{с}^2 \text{кг}} \left(\frac{10^{24} \text{кг}}{10^6 \text{км}^2} - \frac{10^{24} \text{кг}}{10^6 \text{км}^2} \right) = 10^{-2} \frac{\text{км}^3 \text{кг}}{\text{с}^2 \text{кг} \cdot \text{км}^2} = 10^{-2} \frac{\text{км}}{\text{с}^2} \end{aligned}$$

Согласно новым размерностям:

$$\begin{cases} \vec{V}_i'(t) = 10^{-2} \cdot \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} Gm_j \left(\frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\Delta_{i,j}^3} - \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right) - G(m_0 + m_i) \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|^3} \right], \\ \vec{r}_i'(t) = 10^{-3} \cdot \vec{V}_i(t). \end{cases}$$

2.2 Вычисление элементов орбиты

2.2.1 Вывод уравнения кривой для эллипсоидной орбиты

Вспользуемся методом наименьших квадратов для вычисления эллипсоидной орбиты. Эллипс в пространстве является пересечением цилиндра и плоскости:

$$\begin{cases} z = Ax + By + D, \\ y = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x y + \theta_3 x^2 + \theta_4 y^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

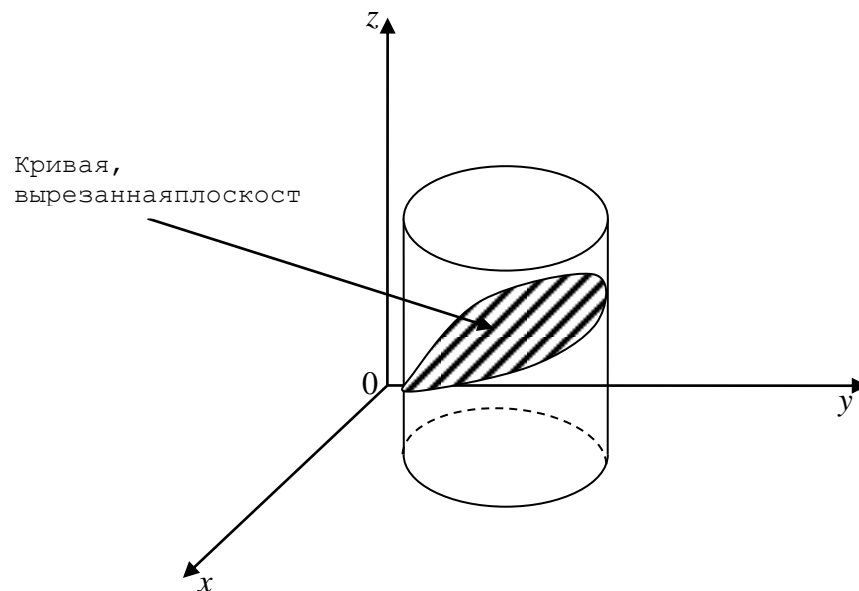


Рисунок 2.2(Кривая, описывающая орбиту планеты)

Следует отметить, что дискриминант полученной кривой второго порядка должен быть больше нуля. В противном случае мы не сможем получить элементы эллипсоидной орбиты.

Пусть имеется выборка n положений $P = \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ наблюдаемого тела. Найдем коэффициенты плоскости и кривой по отдельности:

1) Построим регрессию для уравнения плоскости. Будем считать величины, стоящие в правой части уравнения $\{x, y\}$ неслучайными (детерминированными). Тогда ошибка наблюдения будет складываться из собственных случайных ошибок величин Z_i из «ошибки сопоставления», возникающей из-за того, что с величиной Z сопоставляется не то значение $\{x, y\}$, которое имело место на самом деле. Подберем методом наименьших квадратов коэффициенты, чтобы функция $z \sim z(x, y)$ наилучшим образом описывала истинную зависимость между случайными величинами.

Для этого необходимо составить матрицу X и вектор Y из данных наблюдений:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Тогда вектор коэффициентов $\vec{u} = \{A, B, D\}$ находится по формуле:

$$\vec{u} = (M^T M)^{-1} M^T Z.$$

2) Аналогичным образом находится регрессионная функция кривой второго порядка. Составим матрицу M и вектор Y .

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & y_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n y_n & x_n^2 & y_n^2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Тогда вектор $\vec{\theta} = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ находится по следующей формуле:

$$\vec{\theta} = (M^T M)^{-1} M^T Y$$

Оценим качество регрессии методами математической статистики. Для этого нужно вычислить дисперсию адекватности (стандартная ошибка уравнения регрессии):

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon} &= Y - X\hat{\theta}; \\ \hat{S}_a^2 &= \frac{1}{n-p} \hat{\varepsilon}^T \cdot \hat{\varepsilon};\end{aligned}$$

И дисперсию переменной Y :

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Проверим статистическую гипотезу H_0 : *модель адекватно описывает данные* на уровне значимости $\alpha = 0,05$. Для этого вычислим наблюдаемое значение критерия Фишера и критическое значение критерия по формулам:

$$F_H = \frac{\hat{S}_a^2}{S_y^2}, \quad F_{кр} = F(1-\alpha, n-p, n-1)$$

Гипотеза H_0 принимается, если наблюдаемое значение меньше критического. Качественная оценка силы связи определяется коэффициентом детерминации, который вычисляется по формуле:

$$R = 1 - \frac{\hat{S}_a^2}{S_y^2} = 1 - F_H$$

Чем ближе коэффициент детерминации к 1, тем выше качество регрессии.

2.2.2 Вычисление угла наклона орбиты к экваториальной плоскости

Один из самых важных Кеплеровых элементов орбиты является наклон плоскости орбиты базовой плоскости(плоскости отчета).

Так как базовой плоскостью была выбрана плоскость XOY, то угол наклона вычисляется по формуле:

$$i = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}\right)$$



Рисунок 2.3 (Кеплеровы элементы орбиты)

2.2.3 Вывод канонического уравнения эллипса

После получения уравнения эллипса в виде пересечения эллипсоидного цилиндра и плоскости произведем некоторые изменения в системе координат, чтобы вывести каноническое уравнение действительного эллипса, изображенного на рисунке 2.4.

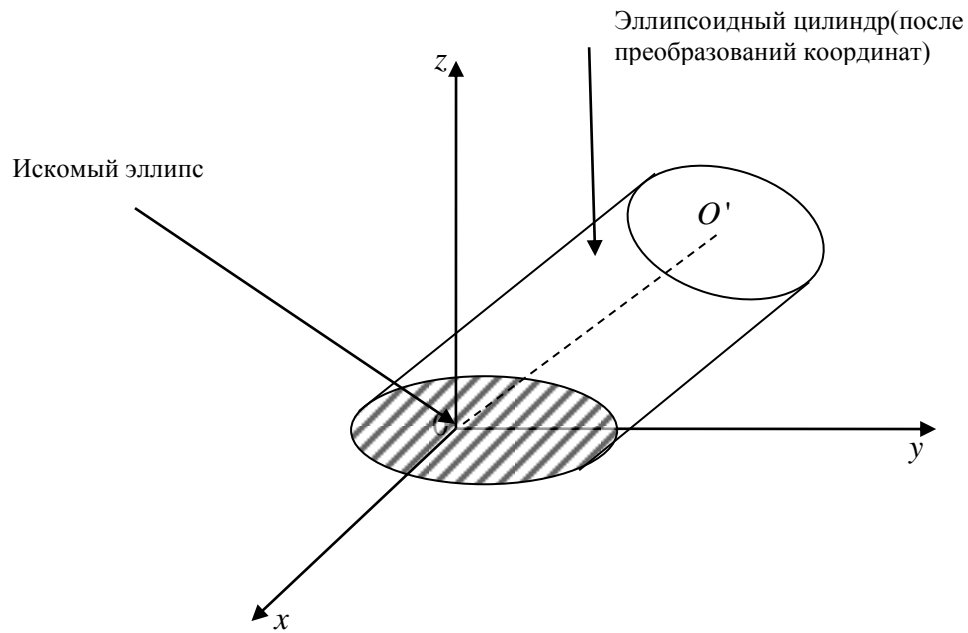


Рисунок 2.4 (Эллипс орбиты после преобразований)

Повернем систему координат так, чтобы нормаль плоскости \vec{n} совпадала с ортом $\vec{i} = \{1; 0; 0\}$. Тогда орбитальный эллипс будет лежать в плоскости XOY, что позволит нам легко найти его параметры.

Введем два оператора поворотов:

$$M_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

3) Применим оператор $M_z(\alpha)$ к плоскости. Тогда координаты плоскости \vec{x} перейдут в \vec{x}' по формулам:

$$\vec{p}' = M_z(\alpha) \vec{p} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \\ z' = z \end{cases}$$

Тогда уравнение плоскости примет вид:

$$A(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + B(x \sin \alpha + y \cos \alpha) - z + D = 0$$

Приведем к нормальному виду уравнение плоскости:

$$(A \cos \alpha + B \sin \alpha)x + (B \cos \alpha - A \sin \alpha)y - z + D = 0$$

Подберем такой угол α , чтобы вектор нормали был ортогонален орту при оси ОХ. Для этого нужно, чтобы коэффициент при x был равен нулю:

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{A}{B}\right), \text{ если } B = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Введем замену:

$$\begin{cases} B' = (B \cos \alpha_1 - A \sin \alpha_1), \\ D' = D \end{cases}$$

Тогда уравнение плоскости примет вид: $B'y - z + D' = 0$

Повернем на этот же угол эллипсоидный цилиндр:

$$\begin{cases} \theta_0 + \theta_1 x' + \theta_2 x' y' + \theta_3 x'^2 + \theta_4 y'^2 - y' = 0, \\ x' = x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1, \\ y' = x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1, \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\theta_0 + \theta_1 (x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1) + \theta_2 (x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1)(x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1) + \\ &+ \theta_3 (x \cos \alpha_1 - y \sin \alpha_1)^2 + \theta_4 (x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1)^2 - (x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1) = 0 \end{aligned}$$

Перейдем к новым коэффициентам при степенях:

$$x^0 y^0: \theta'_0 = \theta_0$$

$$x^1: \theta'_1 = \theta_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1$$

$$x^1 y^1: \theta'_2 = \theta_2 \cos(2\alpha_1) - (\theta_4 - \theta_3) \sin(2\alpha_1)$$

$$x^2: \theta'_3 = \frac{1}{2} \theta_2 \sin(2\alpha_1) + \theta_3 \cos^2 \alpha_1 + \theta_4 \sin^2 \alpha_1$$

$$y^2: \theta'_4 = -\frac{1}{2} \theta_2 \sin(2\alpha_1) + \theta_3 \sin^2 \alpha_1 + \theta_4 \cos^2 \alpha_1$$

$$y: \theta'_5 = -\theta_1 \sin \alpha_1 - \cos \alpha_1$$

После первого поворота на угол $\alpha_1 = \arctg\left(-\frac{A}{B}\right)$ кривая приняла вид:

$$\begin{cases} \theta'_0 + \theta'_1 x + \theta'_2 xy + \theta'_3 x^2 + \theta'_4 y^2 + \theta'_5 y = 0, \\ B' y - z + D' = 0 \end{cases}$$

4) Выполним теперь поворот на угол α_2 , такой, чтобы нормаль плоскости стала ортогональна плоскости XOY . Для этого применим к нашей системе координат оператор $M_x(\alpha)$. После чего координаты будут преобразованы по формулам:

$$\vec{p}' = M_x(\alpha) \vec{p} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x, \\ y' = y \cos \alpha - z \sin \alpha, \\ z' = y \sin \alpha + z \cos \alpha. \end{cases}$$

Уравнение плоскости примет вид:

$$B'(y \cos \alpha - z \sin \alpha) - (y \sin \alpha + z \cos \alpha) + D' = 0$$

Или:

$$(B' \cos \alpha - \sin \alpha) y - (B' \sin \alpha + \cos \alpha) z + D' = 0$$

Найдем угол поворота α_2 :

$$B' \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = \arctg(B')$$

Перейдем к другим коэффициентам:

$$\begin{cases} C'' = -(B' \sin \alpha_2 + \cos \alpha_2) \\ D'' = D' \end{cases} \Rightarrow C'' z = D'' \Rightarrow z = \frac{D''}{C''}$$

Повернем на угол α_2 цилиндр:

$$\begin{cases} \theta'_0 + \theta'_1 x + \theta'_2 xy + \theta'_3 x^2 + \theta'_4 y^2 + \theta'_5 y = 0, \\ x' = x, \\ y' = y \cos \alpha - z \sin \alpha. \end{cases}$$

Тогда уравнение цилиндра в новых координатах примет вид:

$$\begin{aligned} \theta'_0 + \theta'_1 x + \theta'_2 x (y \cos \alpha - z \sin \alpha) + \theta'_3 x^2 + \theta'_4 (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 + \\ + \theta'_5 (y \cos \alpha - z \sin \alpha) = 0 \end{aligned}$$

Переместим относительно оси OZ плоскость на XOY, тогда искомое уравнение эллипса примет вид:

$$\begin{aligned} \theta'_0 + \theta'_1 x + \theta'_2 x \left(y \cos \alpha_2 - \frac{D''}{C''} \sin \alpha_2 \right) + \theta'_3 x^2 + \theta'_4 \left(y \cos \alpha_2 - \frac{D''}{C''} \sin \alpha_2 \right)^2 + \\ + \theta'_5 \left(y \cos \alpha_2 - \frac{D''}{C''} \sin \alpha_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Соберем одинаковые степени:

$$x^0 y^0: \theta''_0 = \theta'_0 - \theta'_5 \frac{D''}{C''} \sin(\alpha_2) + \theta'_4 \left(\frac{D''}{C''} \sin(\alpha_2) \right)^2$$

$$x^1: \theta''_1 = \theta'_1 - \theta'_2 \frac{D''}{C''} \sin(\alpha_2)$$

$$x^1 y^1: \theta''_2 = \theta'_2 \cos(\alpha_2)$$

$$x^2: \theta''_3 = \theta'_3$$

$$y^2: \theta''_4 = \theta'_4 \cos^2 \alpha_2$$

$$y: \theta''_5 = -\theta'_4 \cdot \frac{D''}{C''} \sin(2\alpha_2) + \theta'_5 \cos(\alpha_2)$$

Окончательно, имеем:

$$\begin{cases} \theta_0'' + \theta_1''x + \theta_2''xy + \theta_3''x^2 + \theta_4''y^2 + \theta_5''y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

5) Достаточными условиями того, что кривую второго порядка можно привести к каноническому виду эллипса является выполнение неравенства:

$$D = \begin{vmatrix} \theta_3'' & \frac{\theta_2''}{2} \\ \frac{\theta_2''}{2} & \theta_4'' \end{vmatrix} = \theta_3''\theta_4'' - \frac{\theta_2''^2}{4} > 0$$

Перенесем начало координат в центр кривой.

Центр кривой определяется по формулам[2,с. 133]:

$$\begin{cases} 2\theta_3''x_0 + \theta_2''y_0 + \theta_1'' = 0, \\ \theta_2''x_0 + 2\theta_4''y_0 + \theta_5'' = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{2\theta_3''\theta_5'' - \theta_1''\theta_2''}{\theta_2''^2 - 4\theta_3''\theta_4''}, \\ x_0 = -\frac{4\theta_3''\theta_4''y_0 + 2\theta_3''\theta_5''}{2\theta_2''\theta_3''}. \end{cases}$$

Тогда при перемещении центра координат в точку (x_0, y_0) уравнение (2.5) примет вид:

$$\tilde{\theta}_0'' + \theta_2''xy + \theta_3''x^2 + \theta_4''y^2 = 0, \text{ где: } \tilde{\theta}_0'' = \frac{\theta_1''}{2}x_0 + \frac{\theta_5''}{2}y_0 + \theta_0''$$

Выполним замену коэффициентов:

$$U_0 + U_1xy + U_2x^2 + U_3y^2 = 0$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

И подберем такой α , при котором коэффициент при xy обратится в 0.

$$-2U_2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) + U_1 (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) + 2U_3 \sin(\alpha) \cos(\alpha) = 0$$

Решим это уравнение:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{U_1}{U_2 - U_3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{U_1}{U_2 - U_3} \right)$$

Тогда каноническое уравнение эллипса выглядит так:

$$\frac{\frac{x^2}{-U_0}}{U_2 \cos^2 \alpha + U_3 \sin^2 \alpha + 0.5U_1 \sin(2\alpha)} + \frac{\frac{y^2}{-U_0}}{U_2 \sin^2 \alpha + U_3 \cos^2 \alpha - 0.5U_1 \sin(2\alpha)} = 1$$

Полуоси и эксцентриситет равны:

$$a = \sqrt{\frac{-U_0}{U_2 \cos^2 \alpha + U_3 \sin^2 \alpha + 0.5U_1 \sin(2\alpha)}},$$

$$b = \sqrt{\frac{-U_0}{U_2 \sin^2 \alpha + U_3 \cos^2 \alpha - 0.5U_1 \sin(2\alpha)}},$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{\min(a^2, b^2)}{\max(a^2, b^2)}}.$$

2.3 Нахождение физических характеристик эллипсоидального тела

Если известно, что небесное тело приближено эллипсоидом вращения, а также известны длины экватора и меридиана, то можно численно найти его полуоси, массу и объем.

2.3.1 Нахождение полуосей удлиненного эллипсоида

Рассмотрим случай вытянутого эллипсоида вращения. Предположим, что a - большая полуось, а b - малая полуось эллипса, вращением которого вокруг большой оси получается эллипсоид вращения. Тогда длина экватора эллипсоида удовлетворяет равенству $L_e = 2\pi b$, следовательно, $b = \frac{L_e}{2\pi}$.

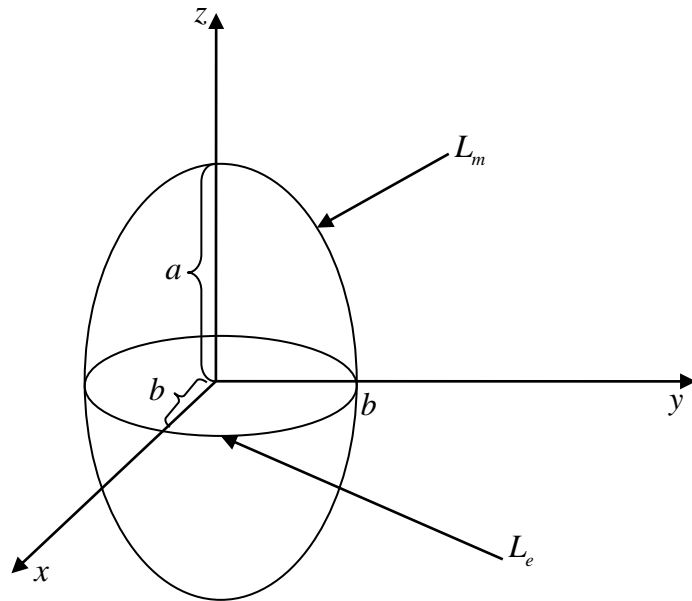


Рисунок 2.5 (эллипсоид вращения)

Длина меридиана эллипса имеют вид:
$$\begin{cases} x = a \cos(\phi), \\ y = b \sin(\phi). \end{cases}$$

Симметрия подынтегральной функции позволяет уменьшить промежуток интегрирования вдвое:
$$L_m = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2(\phi) + b^2 \cos^2(\phi)} d\phi.$$
 В этом равенстве неизвестным является значение параметра a . Пусть:

$$f(a) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} d\phi - L_m.$$

Найдем производную и исследуем поведение функции на концах:

$$f'(a) = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{a \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} d\phi > 0, \quad \text{следовательно,} \quad \text{функция}$$

возрастающая и принимает наименьшее, наибольшее значения на концах промежутка $\left[b, \frac{L_m}{4} \right]$. Определим знаки на концах промежутка:

$$f(b) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} d\phi - L_m = 2\pi b - L_m = L_e - L_m < 0$$

$$f\left(\frac{L_m}{4}\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{L_m^2 \sin^2 \phi + 16b^2 \cos^2 \phi} d\phi - L_m > \int_0^{\pi/2} \sqrt{L_m^2 \sin^2 \phi} d\phi - L_m = 0$$

Таким образом, функция $f(a)$ на промежутке $\left[b, \frac{L_m}{4} \right]$ непрерывна,

возрастает и принимает на концах промежутка значения разных знаков. Следовательно, выполняется условие существования единственного корня уравнения.

Для вычисления интеграла нам понадобится значение верхней границы второй производной. Определим значение параметра M . Для этого продифференцируем функцию $f(x)$ два раза:

$$g(x) = \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x},$$

$$g'(x) = \frac{(a^2 - b^2) \sin(2x)}{2\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} = \frac{(a^2 - b^2) \sin(2x)}{2g(x)},$$

Оценим вторую производную:

$$g''(x) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{2 \cos 2x}{g(x)} - \frac{g'(x) \sin 2x}{g^2(x)} \right) \leq \frac{a^2}{2} \left(\frac{2}{b} + \left| \frac{\max[g'(x)]}{\min[g^2(x)]} \right| \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{2}{b} + \frac{a^2}{2b^3} \right) = M$$

Тогда на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ можно положить $M = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{2}{b} + \frac{a^2}{2b^3} \right)$.

Теперь можно воспользоваться численным методом парабол для вычисления интеграла.

Построим итерационный процесс вычисления корня функции $f(a)$:

$$\begin{cases} a_0 \in \left(b, \frac{L_m}{4}\right), \\ a_n = a_{n-1} - \lambda f(a_{n-1}) \end{cases}, \text{ где: } \lambda = \frac{2}{m_1 + m_2}.$$

m_1 – нижняя граница первой производной функции $f(a)$;

m_2 – верхняя границы первой производной функции $f(a)$.

Найдем m_1, m_2 :

$$f'(a) > 4 \int_0^{\pi/2} \frac{a \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi}} d\phi = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2\phi)) d\phi = \pi = m_1,$$

$$f'(a) < 4 \int_0^{\pi/2} \frac{a \sin^2 \phi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} d\phi = 2 \frac{a}{b} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2\phi)) d\phi = 2 \frac{a}{b} \pi <$$

$$< 2\pi \cdot \frac{L_m}{2} \cdot \frac{2\pi}{L_e} = 2\pi^2 \frac{L_m}{L_e} = m_2$$

После нахождения корня(большой полуоси эллипса)методамиделения отрезка пополам и итераций, выбирается из двух полученных корней, наиболее точный. То есть, если метод деления отрезка пополам дал корень

x_1 , а метод итераций x_2 , то при выполнении неравенства $|f(x_1)| < |f(x_2)|$ окончательным результатом является x_1 . В противном случае решением уравнения будет выбран корень x_2 .

2.3.2 Нахождение полуосей укороченного эллипсоида

Рассмотрим случай, когда a - малая полуось, а b - большая полуось эллипса, тогда при вращении вокруг меньшей полуоси мы получим укороченный эллипсоид. Параметр b находится также, как и в случае удлиненного эллипсоида: $b = \frac{L_e}{2\pi}$. А параметр a является нулем функции $f(a)$:

$$f(a) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} d\phi - L_m.$$

Переменная a лежит в промежутке $[0, b]$, но так как необходимыми условиями метода деления отрезка пополам является невырожденность (то есть принятие разных знаков на концах промежутка и строгое возрастание(убывание) функции), то нужно сжать промежуток.

Для определения новых границ промежутка, введем дополнительные кривые, длины которых будут равны длине меридиана: прямоугольник со сторонами $\{2b, 2a_1\}$ и окружность с радиусом a_2 . Для того, чтобы их длины были равны меридиану, неизвестные параметры должны удовлетворять равенствам:

$$\begin{cases} P_{\text{пря}} = 2(2b + 2a_1) = L_m, \\ P_{\text{окружн}} = 2\pi a_2 = L_m. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{L_m}{4} - \frac{L_e}{2\pi}, \\ a_2 = \frac{L_m}{2\pi}. \end{cases}$$

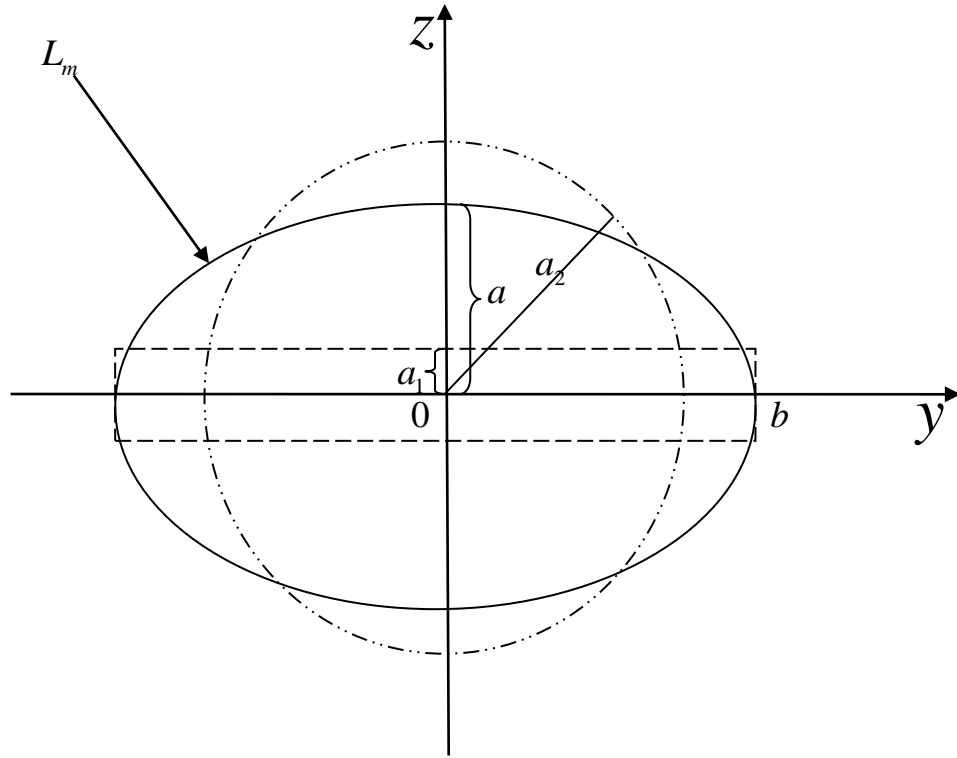


Рисунок 2.6 (Нахождение промежутка для a)

При таких параметрах кривых, новым промежутком, в котором лежит искомая полуось, будет $a \in (a_1, a_2)$ или $a \in \left(\frac{L_m}{4} - \frac{L_e}{2\pi}, \frac{L_m}{2\pi} \right)$.

Докажем, что на этом промежутке лежит единственный корень.

Определим знаки функции на концах промежутка:

$$\begin{aligned}
 f(a_1) &= f\left(\frac{L_m}{4} - \frac{L_e}{2\pi}\right) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{L_m}{4} - \frac{L_e}{2\pi}\right)^2 \sin^2(\phi) + b^2 \cos^2 \phi} d\phi - L_m < \\
 &< 4 \cdot \left(\frac{L_m}{4} - \frac{L_e}{2\pi}\right) \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \phi d\phi - L_m = 4 \cdot \left(\frac{L_e}{2\pi} - \frac{L_m}{4}\right)(-1) - L_m = \\
 &= L_m - \frac{2L_e}{\pi} - L_m = -\frac{2L_e}{\pi} < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a_2) &= f\left(\frac{L_m}{2\pi}\right) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{L_m}{2\pi}\right)^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} d\phi - L_m > \\
&> 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{L_m}{2\pi}\right)^2 \sin^2 \phi + \left(\frac{L_m}{2\pi}\right)^2 \cos^2 \phi} d\phi - L_m = \\
&= 4 \left(\frac{L_m}{2\pi}\right) \frac{\pi}{2} - L_m = 0
\end{aligned}$$

Как и для удлиненного эллипсоида, функция $f(a)$ строго возрастает. Следовательно, на промежутке $a \in \left(\frac{L_m}{4} - \frac{L_e}{2\pi}, \frac{L_m}{2\pi}\right)$ лежит единственный корень.

Для вычисления интеграла методом парабол, нам понадобится верхняя граница второй производной подинтегральной функции $g(x)$. Найдем первую и вторую производные и оценим их:

$$a < g(x) < b,$$

$$g'(x) = \frac{(a^2 - b^2) \sin(2x)}{2g(x)} < \frac{a^2 - b^2}{2a},$$

Найдем верхнюю границу второй производной:

$$\begin{aligned}
g''(x) &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{2 \cos 2x}{g(x)} - \frac{g'(x) \sin 2x}{g^2(x)} \right) \leq \frac{a^2}{2} \left(\frac{2}{a} + \left| \frac{\max[g'(x)]}{\min[g^2(x)]} \right| \right) = \\
&= \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{2}{a} + \frac{b^2 - a^2}{2a^3} \right) = M
\end{aligned}$$

Найдем верхнюю и нижнюю границу первой производной для определения коэффициента $\lambda = \frac{2}{m_1 + m_2}$:

Найдем m_1, m_2 :

$$f'(a) > 4 \int_0^{\pi/2} \frac{a \sin^2 \phi}{\sqrt{b^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} d\phi = 2 \frac{a}{b} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2\phi)) d\phi = \pi \frac{a}{b} > \\ > \left(\frac{L_m}{4} - \frac{L_e}{2\pi} \right) \cdot \frac{2\pi^2}{L_e} = m_1,$$

$$f'(a) < 4 \int_0^{\pi/2} \frac{a \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi}} d\phi = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2\phi)) d\phi = \pi = m_2$$

2.3.3 Вычисление объема эллипсоида

Выведем формулу объема эллипсоида:

Разобьем тело на диски, высотой в приращение по x , тогда объем одного диска равен:

$$dV = \pi y^2 dx = \pi b^2 \cdot \sin^2 \phi \cdot a \sin \phi d\phi$$

Тогда объем всего тела, равен:

$$V = \pi ab^2 \int_0^{\pi} \sin^3 \phi d\phi = -\pi ab^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \phi) d(\cos \phi) = \pi ab^2 \left(\cos \phi - \frac{\cos^3 \phi}{3} \right) \Big|_{\pi}^0 = \\ = \frac{4\pi ab^2}{3}$$

2.3.4 Вычисление площади поверхности эллипсоида

Для определения площади поверхности эллипсоида воспользуемся теоремой Гульдена:

Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой ее центром масс.

1) Воспользовавшись этой теоремой, найдем площадь вытянутого эллипсоида:

$$S = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} y(\phi) d[l(\phi)] = 4\pi b \int_0^{\pi/2} \sin \phi \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} d\phi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \cos \phi, dt = -\sin \phi d\phi \\ 0 \rightarrow 1, \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \end{array} \right| = 4\pi b \int_0^1 \sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2} dt;$$

Пусть:

$$I = \int_0^1 \sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2} dt = (b^2 - a^2) \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2}} dt + a^2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2}} dt =$$

$$= I_1 + I_2$$

Вычислим по отдельности I_1, I_2 :

$$I_1 = (b^2 - a^2) \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2}} dt = \left| \begin{array}{l} U = t \quad dU = dt \\ dV = \frac{(b^2 - a^2)t dt}{\sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2}} \\ V = \sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2} \end{array} \right| =$$

$$= t \sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2} \Big|_0^1 - I = b - I;$$

$$I_2 = a^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2}} = a^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)t^2}} =$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left[\frac{t}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2}}} \right] \Big|_0^1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right);$$

Тогда:

$$2I = b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)$$

Вернемся к замене:

$$S = 4\pi b \cdot \frac{1}{2} \left(b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) \right) = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon$$

$$\text{Где: } \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

2) Аналогично выводится формула площади поверхности для укороченного эллипсоида. Отличие заключается в вычислении интеграла I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= a^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(b^2 - a^2)t^2 + a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{a^2}{(b^2 - a^2)}}} = \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left(t + \sqrt{t^2 + \frac{a^2}{(b^2 - a^2)}} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \right); \end{aligned}$$

Результирующие формулы:

$$\begin{aligned} S_{\text{удлин}} &= 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \\ S_{\text{укор}} &= 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \ln \left(\frac{b}{a} (1 + \varepsilon) \right), \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \end{aligned}$$

2.3.5 Определение объема внутреннего слоя тела

Если эллипсоидальное тело имеет разную плотность в зависимости от углубления, то для определения массы всего тела необходимо найти объемы с одинаковыми плотностями.

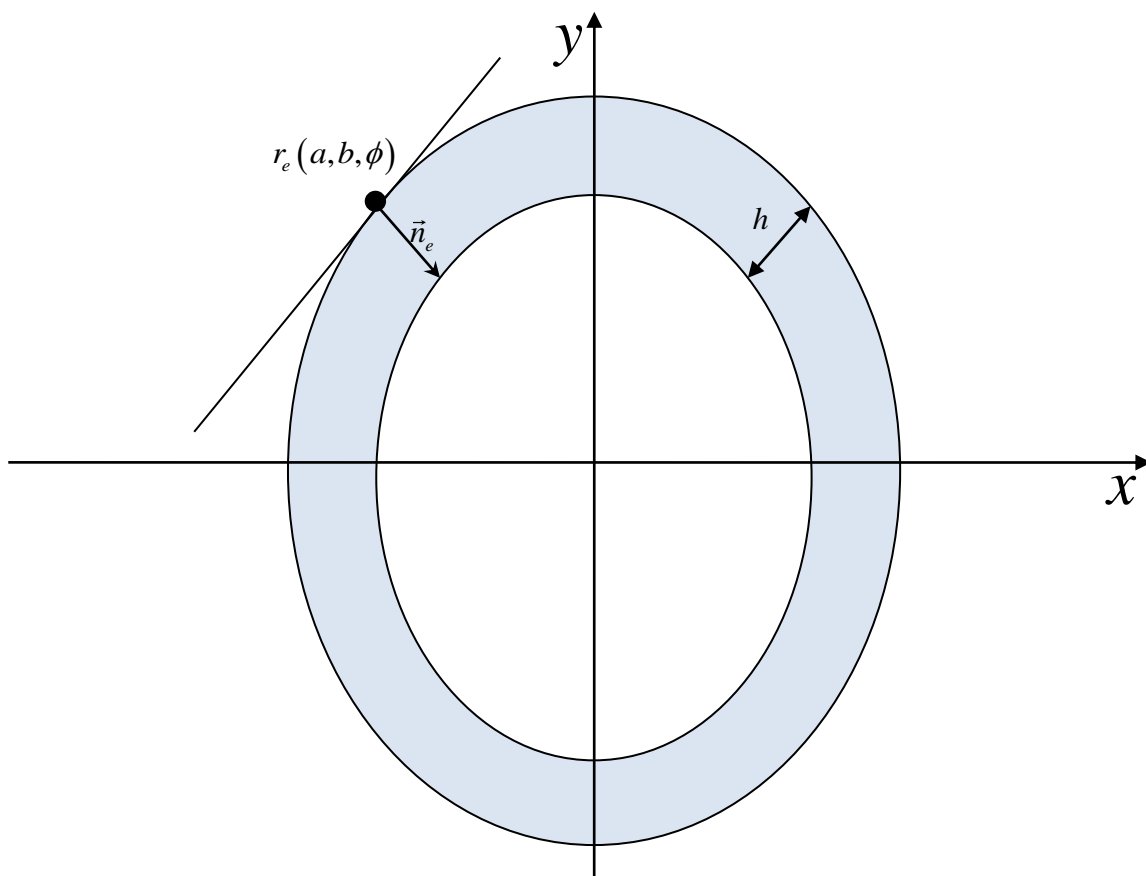


Рисунок 2.7 (Внутренний слой тела)

Пусть $r_e = \{a \cos \phi, b \sin \phi\}$ - радиус вектор произвольной точки эллипса. Нормаль в этой точке, направленная внутрь эллипса, определяется равенством $n_e = m \left\{ -\frac{\cos \phi}{a}, -\frac{\sin \phi}{b} \right\}$, где m - скалярный множитель, определяющий длину нормали. В нашем случае, $|n_e| = m \sqrt{\frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2}} = h$.

Таким образом, $m = \frac{hab}{\sqrt{(a \sin \phi)^2 + (b \cos \phi)^2}}$. Радиус вектор, эквидистантой к эллипсу внутренней линии, будет равен $r_e = r_e - n_e = \left\{ a \left(1 - \frac{m}{a^2} \right) \cos \phi, b \left(1 - \frac{m}{b^2} \right) \sin \phi \right\}$. Внутренний объем, как тела вращения, выразится интегралом:

$$\begin{cases} x = a \cos \phi \left(1 - \frac{m}{a^2}\right), \\ y = b \sin \phi \left(1 - \frac{m}{b^2}\right). \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} V_0 &= 2\pi \int_0^{a-h} y^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2 \left(1 - \frac{m}{b^2}\right)^2 \sin^2 \phi \cdot d \left(b \sin \phi \left(1 - \frac{m}{b^2}\right) \right) = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2 \left(1 - \frac{m}{b^2}\right)^2 \sin^2 \phi \cdot \left(a \left(1 - \frac{m}{a^2}\right) \sin \phi + \frac{1}{a} \cos \phi \cdot m'(\phi) \right) d\phi, \text{ где:} \\ m'(\phi) &= - \frac{hab(a^2 - b^2) \sin(2\phi)}{2 \left((a \sin \phi)^2 + (b \cos \phi)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Тогда можно найти объем внутреннего слоя, который равен:

$$V_{sl} = V - V_0$$

3 ПОСТРОЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В данном разделе описываются используемые методы для решения поставленной задачи. Для решения системы дифференциальных уравнений, описывающих движений небесных тел, был выбран метод Рунге-Кутты четвертого порядка, который дает возможность с приемлемой точностью прогнозировать положение планет с небольших шагом интегрирования.

В уравнении, в котором корнем является полуось эллипса, находится одномерный интеграл, который вычисляется по формуле парабол. Для решения самого уравнения неизвестной полуоси был выбран метод дихотомии. Этот метод дает возможность, не затрачивая больших ресурсов, найти значение полуоси с заданной точностью.

3.1 Решения нелинейного уравнения

3.1.1 Формула деления отрезка пополам

Если функция $f(x)$ непрерывна и на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то для приближенного определения корня R можно применить метод деления отрезка пополам (метод Больцано). Этот метод основывается на последовательном уменьшении длины отрезка, локализирующего корень уравнения, в два раза путем изменения его границ. Задача определения корня считается решенной, когда, либо длина отрезка локализации становится меньше удвоенной допустимой погрешности, либо очередная граница отрезка попадает на корень уравнения.

Рассмотрим выполнение одного итерационного шага метода. Пусть a и b - границы текущего отрезка, в которых функция принимает значения разных знаков. В нашем случае $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Определим среднюю точку

$c = (a + b)/2$ и значение функции в этой точке $f_c = f(c)$. В зависимости от этого значения необходимо выполнить один из следующих трех пунктов:

- 1) Если $f_c = 0$, то мы получаем точное значение корня. Полагаем $R = c$ и завершаем итерационный процесс. Погрешность $d_d = 0$.
- 2) Если $f_c > 0$, то $a < R < c$. Следует передвинуть правую границу отрезка в точку c ($c \mapsto b$) и перейти к проверке критерия окончания итераций.
- 3) Если $f_c < 0$, то $c < R < b$. Передвигаем левую границу промежутка ($c \mapsto a$) и переходим к проверке критерия окончания итераций. После выполнения п.2 или п.3 новый отрезок $[a, b]$ будет обладать теми же свойствами, что и исходный отрезок $[0, 1]$, т.е. функция $f(x)$ непрерывна в нем и на концах принимает значения разных знаков. Длина отрезка будет в два раза меньше, чем длина предыдущего отрезка. Длина отрезка изоляции корня, получаемого на n -м шаге, будет составлять 2^{-n} часть длины исходного отрезка. Текущая погрешность d_n определяется равенством $d_n = \frac{(b-a)}{2}$.

Критерием окончания итерационного процесса служит неравенство $d_n \leq d$. Выполнение этого неравенства означает, что точка c является требуемым приближением корня.

3.2 Численное интегрирование функции

3.2.1 Формула Симпсона(парабол)

Если для каждой пары отрезков $[x_i, x_{i+2}]$ построить многочлен второй степени, затем проинтегрировать его и воспользоваться свойством аддитивности интеграла, то получим формулу Симпсона.

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_0 + 2h]$.
 Заменяем эту подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, совпадающим с $f(x)$ в точках $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h$:

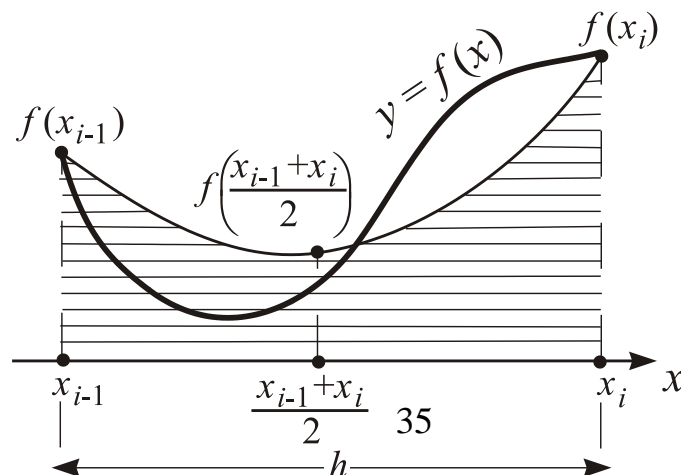
$$\varphi(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad (3.1)$$

Проинтегрируем (3.1):

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &\cong \int_{x_0}^{x_2} \varphi(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{f(x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{2h^2} dx - \int_{x_0}^{x_2} \frac{f(x_1)((x-x_0)(x-x_2))}{h^2} dx + \\ &+ \int_{x_0}^{x_2} \frac{f(x_2)(x-x_0)(x-x_1)}{2h^2} dx = \frac{f(x_0)}{2h^2} \left[\frac{(x-x_1)^3}{3} \Big|_{x_0}^{x_0+2h} - \frac{h(x-x_1)^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_0+2h} \right] - \\ &- \frac{f(x_1)}{h^2} \left[\frac{(x-x_0)^3}{3} \Big|_{x_0}^{x_0+2h} - \frac{2h(x-x_0)^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_0+2h} \right] + \\ &+ \frac{f(x_2)}{2h^2} \left[\frac{(x-x_0)^3}{3} \Big|_{x_0}^{x_0+2h} - \frac{h(x-x_0)^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_0+2h} \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\frac{h^3 f(x_0)}{3} + \frac{4h^3 f(x_1)}{3} + \frac{h^3 f(x_2)}{3} \right] = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \end{aligned}$$

Тогда формула Симпсона принимает вид [3, с.590]:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)] \quad (3.2)$$



Полученное для интеграла $\int_{x_0}^{x_2} \varphi(x) dx$ значение совпадает с площадью криволинейной трапеции, ограниченной осью x , прямыми $x = x_0$, $x = x_2$ и параболой, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

Если отрезок $[a, b]$ интегрирования слишком велик, то его разбивают на $N = 2n$ равных частей (полагая $h = \frac{b-a}{2n}$), после чего к каждой паре соседних отрезков $[a, a+2h]$, $[a+2h, a+4h]$, ..., $[b-h, b]$ применяют формулу Симпсона.

Запишем формулу Симпсона в общем виде:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[\frac{1}{2} f(x_0) + \sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + 2 \sum_{i=1}^N f\left(a+ih - \frac{h}{2}\right) + f(x_N) \right], \quad (3.3)$$

$$\text{где: } h = \frac{b-a}{N}$$

Погрешность при интегрировании по отрезку $[a, b]$ с шагом h определяется по формуле [3, с.591]:

$$d \geq \frac{(b-a)}{2880} h^4 \max_{x \in [a, b]} |f^{(IV)}(x)|$$

Так же, при невозможности оценить погрешность с помощью максимума четвертой производной (например, на заданном отрезке она не существует, либо стремится к бесконечности), можно использовать более грубую оценку:

$$d \geq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in [a, b]} |f^{(IV)}(x)| = \frac{(b-a)^3 M}{12N^2} \quad (3.4)$$

При заданной погрешности d и известной верхней границе второй производной M можно найти количество разбиений N из неравенства (3.4):

$$N = \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12d}} + 1$$

3.3 Численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений

3.3.1 Метод Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты является одношаговым методом численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \vec{u}' = \vec{f}(t, \vec{u}), \\ \vec{u}(t_0) = (x_0, y_0), \end{cases} \quad (3.5)$$

Основная идея метода была предложена К.Рунге в 1895 г. и развита затем В.Кутта в 1901 г. и др. Получение приближенного решения на промежутке $[t_n, t_k]$, где $t_k = t_n + m \cdot h$, h - шаг интегрирования, состоит из последовательного применения метода m раз. Результаты, полученные на первом и любом другом промежуточном шаге, используются в качестве начального условия для следующего шага. Выполнение одного шага состоит из приближенного определения вектора $\vec{u}(t+h)$ по заданному вектору $\vec{u}(t)$. Для этого используется многочлен Тейлора n -го порядка.

$$\vec{u}(t+h) = \vec{u}(t) + \frac{\vec{u}'(t)}{1!} \cdot h + \frac{\vec{u}''(t)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{\vec{u}^{(n)}(t)}{n!} \cdot h^n. \quad (3.6)$$

Производные $\vec{u}'(t), \vec{u}''(t), \dots, \vec{u}^{(n)}(t)$ можно определить из уравнения (3.6), однако методы Рунге-Кутты не предполагают явного вычисления производных и подстановки их в указанное соотношение. Многочлен

Тейлора строится достаточно точно за счет вычисления вектор - функции $\vec{f}(t, \vec{u})$ в дополнительных точках, расположение которых определяется схемой метода. Порядок метода Рунге-Кутта равен порядку получаемого многочлена Тейлора.

Рассмотрим многочлен Тейлора 4-го порядка

$$\vec{u}(t+h) = \vec{u}(t) + \frac{\vec{u}'(t)}{1!} \cdot h + \frac{\vec{u}''(t)}{2!} \cdot h^2 + \frac{\vec{u}'''(t)}{3!} \cdot h^3 + \frac{\vec{u}^{(IV)}(t)}{4!} \cdot h^4$$

Используя этот многочлен, получим приращение $\Delta \vec{u}$ вектор – функции $\vec{u} = \vec{u}(t)$ с точностью $o(h^4)$:

$$\Delta \vec{u} = h \cdot \vec{u}'(t) + \frac{h^2}{2} \cdot \vec{u}''(t) + \frac{h^3}{6} \cdot \vec{u}'''(t) + \frac{h^4}{24} \cdot \vec{u}^{(IV)}(t) \quad (3.7)$$

Методы Рунге-Кутта позволяют исключить непосредственное вычисление производных. Положим приращение функции $\Delta \vec{u}$ на данном шаге равным:

$$\Delta \vec{u} = \alpha \cdot \vec{k}_1 + \beta \cdot \vec{k}_2 + \gamma \cdot \vec{k}_3 + \chi \vec{k}_4 \quad (3.8)$$

где $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4$ - дифференциалы функции $\vec{u}(t)$, вычисленные в некоторых трех точках, а $\alpha, \beta, \gamma, \chi$ - весовые коэффициенты, определяемые этими точками. Выбор точек определяет один из трех точечных методов Рунге-Кутта 4-го порядка. Весовые коэффициенты выбираются так, чтобы соотношения (3.7) и (3.8) совпадали с точностью $o(h^3)$.

Мы приняли следующий порядок вычисления приращения:

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= h \cdot \vec{f}(t, \vec{u}), \\
\vec{k}_2 &= h \cdot \vec{f}\left(t + \frac{3}{4}h, \vec{u} + \frac{3}{4}\vec{k}_1\right), \\
\vec{k}_3 &= h \cdot \vec{f}\left(t + \frac{1}{2}h, \vec{u} + \frac{1}{3}\vec{k}_1 + \frac{1}{6}\vec{k}_2\right), \\
\vec{k}_4 &= h \cdot \vec{f}\left(t + h, \vec{u} - \frac{1}{3}\vec{k}_1 - \frac{2}{3}\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3\right), \\
\Delta\vec{u} &= \frac{1}{6}\vec{k}_1 + \frac{2}{3}\vec{k}_3 + \frac{1}{6}\vec{k}_4
\end{aligned}$$

3.3.2 Метод Эверхарта

В 1973 году Э. Эверхарт предложил интегратор, разработанный им специально для численного исследования орбит, и продемонстрировал его высокую эффективность в задачах кометной динамики. По-видимому, обнаружив в дальнейшем принадлежность своего интегратора к семейству интеграторов типа Бутчера[6], Эверхарт акцентировал внимание на оригинально реализованном им алгоритме интегрирования и обобщил его для численного решения любых обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Тем самым ему удалось расширить область применения своего метода, который остается одним из самых популярных именно в решении задач небесной механики.

3.3.2.1 Принципы построения

Рассмотрим принципы построения алгоритма Эверхарта на примере решения системы уравнений, описывающих движение n небесных тел:

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i(\vec{r}_i(t)), \quad i = 0 \dots (n-1) \quad (3.9)$$

Примем начальный момент времени t_1 шага интегрирования h равным нулю, $h = [0, T]$ - основной шаг интегрирования, положение $\vec{r}_{i,1}$, скорость $\dot{\vec{r}}_{i,1}$ и

значение вектор-функции $\vec{F}_{i,1}(t_1, \vec{r}_{i,1}, \dot{\vec{r}}_{i,1})$ - известные величины начального момента времени.

Представим правую часть функции \vec{F} в виде временного ряда:

$$F_i(\vec{r}_i(t)) = \vec{F}_{i,1} + \vec{A}_{i,1}t + \vec{A}_{i,2}t^2 + \dots + \vec{A}_{i,N}t^N \quad (3.10)$$

Интегрируя дважды уравнение (3.10) с подстановкой (3.9), получим:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i(t) &= \dot{\vec{r}}_{i,1}(t) + \vec{F}_{i,1} \cdot t + \frac{1}{2} \vec{A}_{i,1} \cdot t^2 + \frac{1}{3} \vec{A}_{i,2} \cdot t^3 + \dots + \frac{1}{N+1} \vec{A}_{i,N} \cdot t^{N+1}, \\ \vec{r}_i(t) &= \vec{r}_{i,1}(t) + \dot{\vec{r}}_{i,1}(t) \cdot t + \frac{1}{2} \vec{F}_{i,1} \cdot t^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \vec{A}_{i,1} \cdot t^3 + \frac{1}{3 \cdot 4} \vec{A}_{i,2} \cdot t^4 + \dots + \frac{1}{(N+1)(N+2)} \vec{A}_{i,N} \cdot t^{N+2}. \end{aligned}$$

Или:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i(t) &= \dot{\vec{r}}_{i,1}(t) + \vec{F}_{i,1} \cdot t + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+1} \vec{A}_{i,k} \cdot t^{k+1}, \\ \vec{r}_i(t) &= \vec{r}_{i,1}(t) + \dot{\vec{r}}_{i,1}(t) \cdot t + \frac{1}{2} \vec{F}_{i,1} \cdot t^2 + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k+1)(k+2)} \vec{A}_{i,k} \cdot t^{k+2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Разобьем шаг интегрирования на N частей, тогда выразим коэффициенты $\vec{A}_{i,k}$ через разделенные разности. Для этого представим функцию f в виде[5,с.37]:

$$F_i(\vec{r}_i(t)) = \vec{F}_{i,1} + \vec{\alpha}_{i,1}t + \vec{\alpha}_{i,2}t(t-t_2) + \vec{\alpha}_{i,3}t(t-t_2)(t-t_3) + \dots \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) усечено по времени t_k . В каждый фиксированный момент времени t_k имеем:

$$\begin{cases} \vec{F}_{i,2} = \vec{F}_{i,1} + \vec{\alpha}_{i,1}, \\ \vec{F}_{i,3} = \vec{F}_{i,2} + \vec{\alpha}_{i,1}t_3 + \vec{\alpha}_{i,2}(t_3 - t_2), \\ \dots \end{cases}$$

Принимая $t_{s,r} = t_s - t_r$, найдем $\vec{\alpha}_{i,k}$ через разделенные разности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\alpha}_{i,1} = (\vec{F}_{i,2} - \vec{F}_{i,1})/t_2, \\ \vec{\alpha}_{i,2} = \left((\vec{F}_{i,3} - \vec{F}_{i,1})/t_3 - \vec{\alpha}_{i,1} \right)/t_{32}, \\ \vec{\alpha}_{i,3} = \left(\left((\vec{F}_{i,4} - \vec{F}_{i,1})/t_4 - \vec{\alpha}_{i,1} \right)/t_{42} - \vec{\alpha}_{i,2} \right)/t_{43}, \\ \vec{\alpha}_{i,4} = \left(\left(\left((\vec{F}_{i,5} - \vec{F}_{i,1})/t_5 - \vec{\alpha}_{i,1} \right)/t_{52} - \vec{\alpha}_{i,2} \right)/t_{53} - \vec{\alpha}_{i,3} \right)/t_{54}, \\ \dots \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Приравнявая коэффициенты при равных степенях t в уравнениях (3.10) и (3.12) выразим коэффициенты $\vec{A}_{i,1}$ через $\vec{\alpha}_{i,1}$:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{i,1} &= \vec{\alpha}_{i,1} + (-t_2)\vec{\alpha}_{i,2} + (t_2 t_3)\vec{\alpha}_{i,3} + \dots = c_{11}\vec{\alpha}_{i,1} + c_{21}\vec{\alpha}_{i,2} + c_{31}\vec{\alpha}_{i,3} + \dots \\ \vec{A}_{i,2} &= \vec{\alpha}_{i,2} + (-t_2 - t_3)\vec{\alpha}_{i,3} + \dots = c_{22}\vec{\alpha}_{i,2} + c_{32}\vec{\alpha}_{i,3} + \dots \\ \vec{A}_{i,3} &= \vec{\alpha}_{i,3} + \dots = c_{33}\vec{\alpha}_{i,3} + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Коэффициенты c_{ij} являются числами Стирлинга и определяются из следующих рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= 1, & i &= j \\ c_{i1} &= -t_i c_{i-1,1}, & i &> 1 \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j}, & 1 < j < i \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, нахождение коэффициентов $\vec{A}_{i,k}$ прежде всего сводится к нахождению узлов разбиения t_k шага h .

3.3.2.2 Нахождение узлов разбиения

Нахождение узлов разбиения рассмотрим на примере алгоритма интегрирования пятого порядка.

В начальный момент времени $t_1 = 0$ известны положение $\vec{r}_{i,1}$, скорость $\dot{\vec{r}}_{i,1}$ и значение вектор-функции $\vec{F}_{i,1}(t_1, \vec{r}_{i,1}, \dot{\vec{r}}_{i,1})$. Значения \vec{r}_i в моменты времени t_2, t_3, t_4 определяются с помощью трех предсказывающих уравнений:

$$\vec{r}_{i,2} = \vec{r}_{i,1} + \dot{\vec{r}}_{i,1}t_2 + \frac{1}{2}\vec{F}_{i,1} \cdot t_2^2 + \left[\frac{1}{6}\vec{A}_{i,1} \cdot t_2^3 + \frac{1}{12}\vec{A}_{i,2} \cdot t_2^4 + \frac{1}{20}\vec{A}_{i,3} \cdot t_2^5 \right] \quad (3.16)$$

$$\vec{r}_{i,3} = \vec{r}_{i,1} + \dot{\vec{r}}_{i,1}t_3 + \frac{1}{2}\vec{F}_{i,1} \cdot t_3^2 + \frac{1}{6}\vec{A}_{i,1} \cdot t_3^3 + \left[\frac{1}{12}\vec{A}_{i,2} \cdot t_3^4 + \frac{1}{20}\vec{A}_{i,3} \cdot t_3^5 \right] \quad (3.17)$$

$$\vec{r}_{i,4} = \vec{r}_{i,1} + \dot{\vec{r}}_{i,1}t_4 + \frac{1}{2}\vec{F}_{i,1} \cdot t_4^2 + \frac{1}{6}\vec{A}_{i,1} \cdot t_4^3 + \frac{1}{12}\vec{A}_{i,2} \cdot t_4^4 + \left[\frac{1}{20}\vec{A}_{i,3} \cdot t_4^5 \right] \quad (3.18)$$

И двух исправляющих уравнений для нахождения положения и скорости на конце шага h :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{i,2} &= \vec{r}_{i,1} + \dot{\vec{r}}_{i,1}T + \frac{1}{2}\vec{F}_{i,1} \cdot T^2 + \frac{1}{6}\vec{A}_{i,1} \cdot T^3 + \frac{1}{12}\vec{A}_{i,2} \cdot T^4 + \frac{1}{20}\vec{A}_{i,3} \cdot T^5, \\ \dot{\vec{r}}_{i,2} &= \dot{\vec{r}}_{i,1} + \vec{F}_{i,1} \cdot T + \frac{1}{2}\vec{A}_{i,1} \cdot T^2 + \frac{1}{3}\vec{A}_{i,2} \cdot T^3 + \frac{1}{4}\vec{A}_{i,3} \cdot T^4 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Формулы (3.16)-(3.18) представляют собой неявные уравнения, так как коэффициенты, стоящие в квадратных скобках неизвестны при первой итерации.

Значения t_2, t_3, t_4 определяются из следующих условий. Будем искать такие значения t_2, t_3, t_4 , которые позволили бы, не добавляя членов в разложение (3.10), получать решения $\vec{r}_{i,1}$ и $\dot{\vec{r}}_{i,1}$ с точностью до седьмого порядка. С этой целью увеличим количество разбиений интервала интегрирования, добавив два дополнительных времени t_5, t_6 . Затем вычислим для t_5, t_6 коэффициенты $\vec{\alpha}_{i,4}, \vec{\alpha}_{i,5}$. Тогда мы получим новые коэффициенты

$c'_{41}, c'_{42}, c'_{43}$. Следовательно, будут получены новые коэффициенты $\vec{A}'_{i,1}, \vec{A}'_{i,2}, \vec{A}'_{i,3}, \vec{A}'_{i,4}, \vec{A}'_{i,5}$.

Из уравнений (3.19) можно найти поправки Δr_i , улучшающие значения координат:

$$\Delta r_i = (\vec{A}'_{i,1} - \vec{A}_{i,1})T^3/6 + (\vec{A}'_{i,2} - \vec{A}_{i,2})T^4/12 + (\vec{A}'_{i,3} - \vec{A}_{i,3})T^5/20 + \vec{A}_{i,4}T^6/30 + \vec{A}_{i,5}T^7/42 \quad (3.20)$$

Введем безразмерные величины $q_i = \frac{t_i}{T}$ и выразим в рекуррентном выражении (3.15) c_{51}, \dots, c_{54} через c_{41}, c_{42}, c_{43} , тогда формула (3.20) может быть записана в виде:

$$\Delta \vec{r}_i = (\vec{\alpha}_{i,4} - t_5 \vec{\alpha}_{i,5})T^6 [c'_{41}/6 + c'_{42}/12 + c'_{43}/20 + 1/30] + \vec{\alpha}_5 T^7 [c'_{41}/12 + c'_{42}/30 + 1/42] \quad (3.21)$$

Где:

$$\begin{cases} c_{41} = -t_2 t_3 t_4, \\ c_{42} = t_2 t_3 + t_3 t_4, \\ c_{43} = -t_2 - t_3 - t_4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c'_{41} = -q_2 q_3 q_4, \\ c'_{42} = q_2 q_3 + q_3 q_4, \\ c'_{43} = -q_2 - q_3 - q_4. \end{cases}$$

Значения $\Delta \vec{r}_i$ в выражении можно обратить в ноль при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} c'_{41}/6 + c'_{42}/12 + c'_{43}/20 + 1/30 = 0, \\ c'_{41}/12 + c'_{42}/20 + c'_{43}/30 + 1/42 = 0. \end{cases}$$

Проводя подобные рассуждения для скорости, приравнявая к нулю $\Delta \dot{\vec{r}}_i$, получим третье условие для определения $c'_{41}, c'_{42}, c'_{43}$. Тогда

соответствующие данным разбиениям коэффициенты c_{ij} будут определяться из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c'_{41}/2 + c'_{42}/3 + c'_{43}/4 + 1/5 = 0, \\ c'_{41}/3 + c'_{42}/4 + c'_{43}/5 + 1/6 = 0, \\ c'_{41}/4 + c'_{42}/5 + c'_{43}/6 + 1/7 = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Тогда из решения этой системы следует:

$$\begin{cases} c'_{41} = -4/35 = -q_2 q_3 q_4, \\ c'_{42} = 6/7 = q_2 q_3 + q_3 q_4, \\ c'_{43} = -12/7 = -q_2 - q_3 - q_4. \end{cases} \quad (3.23)$$

Тогда из системы (3.23) следует, что значения q_2, q_3, q_4 являются корнями следующего полинома третьей степени:

$$q^3 + (-12/7)h^2 + (6/7)h - 4/35 = 0, \quad (3.24)$$

которые имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{t_2}{T} = 0.212340538239... \\ q_3 &= \frac{t_3}{T} = 0.590533135559... \\ q_4 &= \frac{t_4}{T} = 0.911412404881... \end{aligned} \quad (3.25)$$

Использование этих узлов позволяет получить решение уравнения (3.9) с точностью до седьмого порядка как для компоненты положения, так и для скорости. Полученные по формуле (3.24) узлы разбиения q_k совпадают с узлами квадратурной формулы Гаусса-Радона. Область изменения q заключена в пределах $0 \leq q_i \leq 1$.

В Повышение точности метода можно осуществлять двумя способами: путем увеличения порядка аппроксимирующей формулы или путем уменьшения шага интегрирования. Порядок метода определяется по формуле $N = 2s + 1$, где s – количество разбиений основного шага. К решению этой задачи необходимо относиться с большой осторожностью, так как значительное повышение порядка может привести к потере точности, вследствие того, что производные высокого порядка, вычисленные с помощью разностной схемы, теряют всякий физический смысл. С другой стороны, уменьшение шага вдвое, как правило, удваивает время вычислений, в то время как повышение порядка метода увеличивает работу в 1.3 раза. Из этих соображений и практических наблюдений мы решили выбрать метод Эверхарта 19(23) порядка, узлы разбиения которого приведены в приложении 6.1.

4 РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

4.1 Общие сведения о программе

Разработанная программа предназначена для сбора информации о движении небесных тел в процессе эксперимента на заданном промежутке времени, а также предоставляет визуализацию пространственных данных в трехмерном пространстве.

После запуска программы, на экране компьютера появляется главное окно. С помощью этого окна пользователь имеет связь со всеми остальными окнами и опциями программы. Приложение завершит свою работу только после закрытия главного окна.

Через верхнее меню можно загрузить ранее сохраненные данные о небесных телах, выполнить добавление новых тел в систему. Для создания нового проекта, нужно выбрать в верхнем меню «Файл\Создать проект» и в появившемся диалоговом окне выбрать дату, которой будут соответствовать начальные данные для будущей системы небесных тел.

4.2 Добавление космического объекта в систему

После создания нового проекта, через мастер, открыть который можно с помощью команды «Данные\Добавить космический объект» добавить в систему новое небесное тело.

На первом шаге (рис. 4.1) нужно ввести уникальное имя тела, его начальные положение и скорость. Также нужно выбрать тип тела: звезда, планета, спутник, астероид, комета. Если тело является спутником, то в выпадающем списке нужно выбрать тело, вокруг которого он вращается. Если известно, что тело имеет эллипсоидальную форму и известны

некоторые его параметры(полуоси или длины экватора и меридиана), то в списке нужно выбрать соответствующую фигуру приближения.

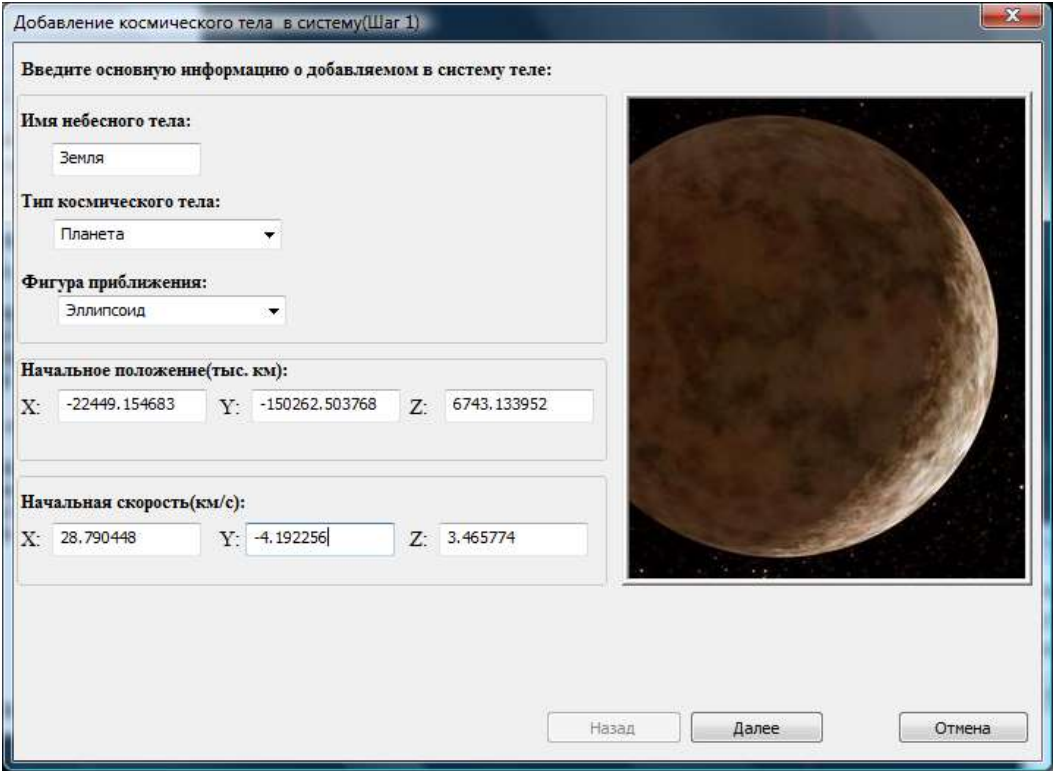


Рисунок 4.1(Окно добавления небесного тела. Шаг1)

На втором шаге нужно ввести массу тела (рис. 4.2.). Если масса тела неизвестна, но известно, что тело имеет эллипсоидную форму и известны его плотность, длины меридиана и экватора, то выбрав опцию «вычисления массы эллипсоида вращения» программа вычислит полуоси эллипсоида.

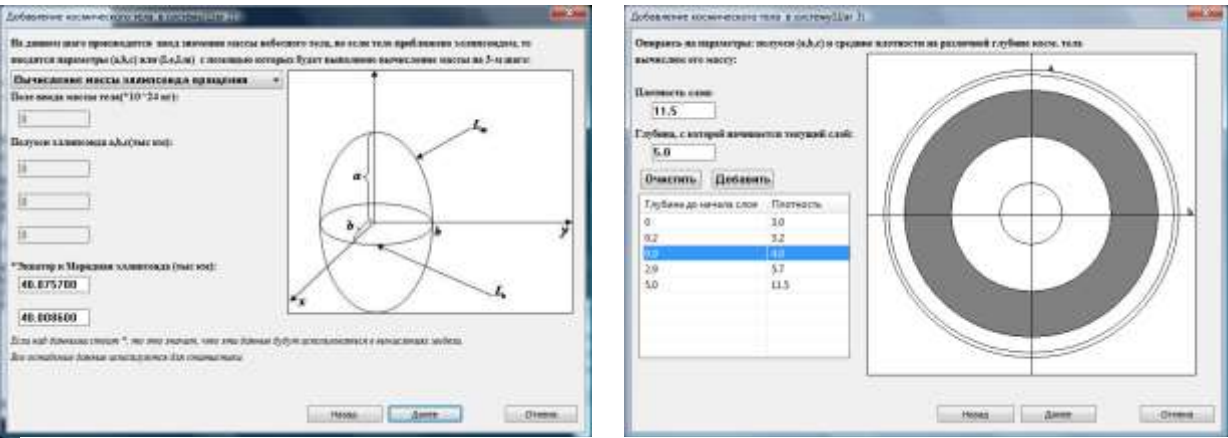


Рисунок 4.2 (Окно добавления небесного тела. Шаг2,3)

Если на втором шаге была введена масса тела, то третий шаг пропускается, в противном случае, на следующем этапе станет возможно вычислить массу неоднородного тела (имеющего разную плотность в зависимости от углубления от поверхности к центру). Для этого нужно ввести плотность слоя и глубину, с которой слой начинается.

Четвертый шаг является последним и на нем пользователю выводится вся собранная информация. Если при вводе значений допущена ошибка и на четвертом шаге она была выявлена, то можно вернуться на предыдущие шаги с помощью кнопки «Назад» и изменить данные.

Чтобы посмотреть информацию обо всех добавленных объектах, нужно вызвать специальное диалоговое окно с помощью команды верхнего меню «Данные\БД космических тел».

4.3 Проведение прогнозирования

После того, как была сформирована система космических объектов, можно выполнить прогнозирование на заданное время. Для этого нужно вызвать диалоговое окно, расположенного по пути «Эксперимент\Начать эксперимент».

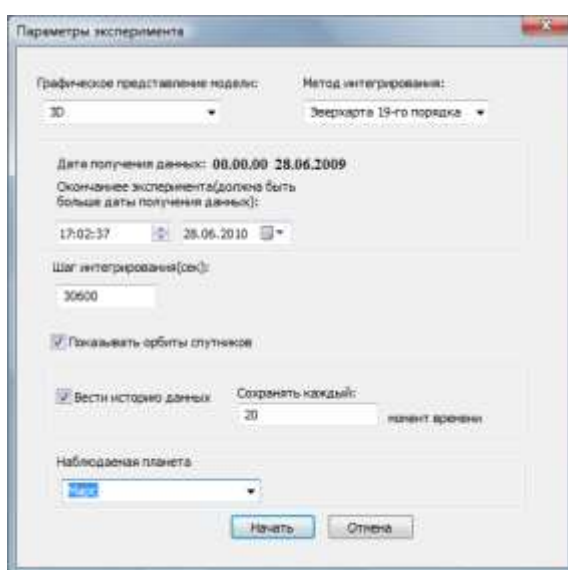


Рисунок 4.3(Диалоговое окно настроек нового эксперимента)

В появившемся диалоговом окне (рис. 4.3) необходимо выполнить следующие действия:

- 1) Выбрать тип графического представления модели (двухмерное или трехмерное);
- 2) Выбрать метод решения системы дифференциальных уравнений (метод Рунге-Кутты 4-го порядка или Эверхарта 19(23)-го порядка);
- 3) Задать время окончания эксперимента;
- 4) Задать шаг интегрирования в секундах;
- 5) Выставить шаг сохранения положений и скоростей во время интегрирования для наблюдаемой планеты;
- 6) Выбрать планету, для которой будут вычисляться параметры орбиты, экстремумы расстояний и вестись банк данных положений и скоростей.

После проделанных действий нужно нажать на кнопку «Начать», после чего диалоговое окно закроется и начнется процесс вычисления и графического вывода в области главного окна.

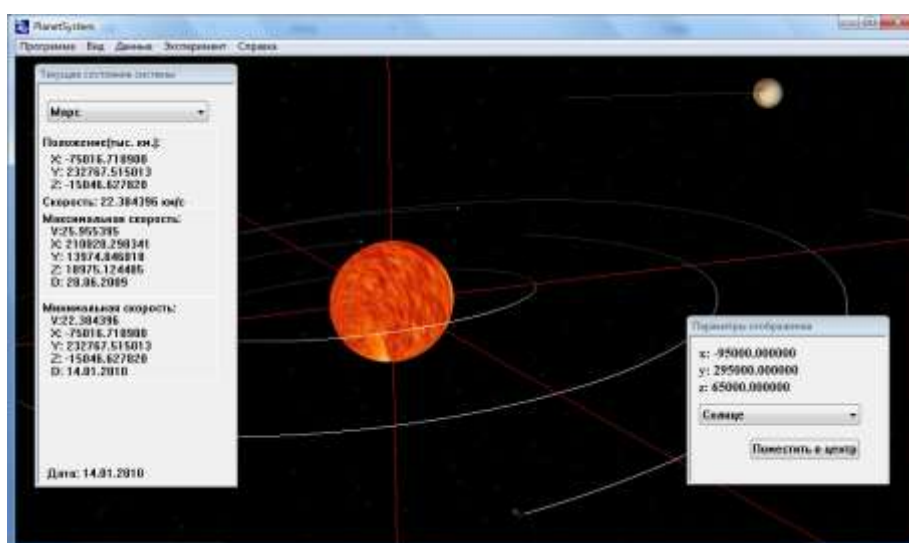


Рисунок 4.4(Главное окно во время проведения прогнозирования)

С помощью мыши и клавиатуры пользователь может перемещаться в пространстве. Также, возможно изменить центральное тело с помощью панели «Параметры изображения». Для наблюдения за текущей скоростью и положением выбранного тела нужно открыть панель «Текущее состояние системы».

Когда будет окончен эксперимент, на экран автоматически выведется диалоговое окно с собранной информацией данного прогнозирования.

В окне выводится следующая информация:

- 1) Параметры орбиты (только для наблюдаемого тела);
- 2) Экстремумы скорости;
- 3) База данных положений и скоростей (только для наблюдаемого тела);
- 4) Граничные скорости и положения;
- 5) Экстремумы расстояний относительно других объектов (только для наблюдаемого тела).

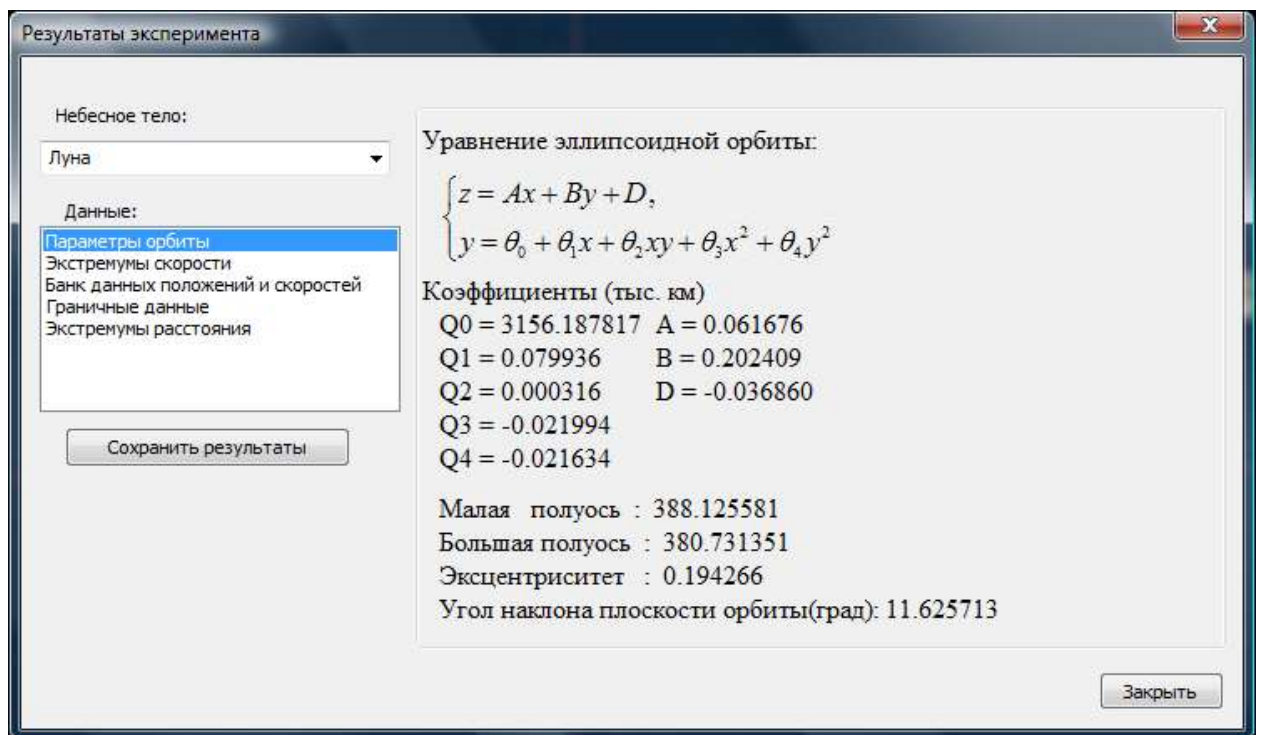


Рисунок 4.5 (Диалоговое окно результатов эксперимента)

На вкладке «Параметры орбиты» представлены коэффициенты цилиндра и плоскости, пересечение которых в пространстве образует кривую, которая является орбитой тела. Также программа вычисляет полуоси, эксцентриситет и угол наклона плоскости орбиты к плоскости отчета.

На вкладке «Экстремумы скорости» представлена информация о минимальной и максимальной скоростях, которые были замечены на данном промежутке времени. Выводится время и положения, в которых были достигнуты эти скорости.

Всю информацию можно сохранить в файл с расширением *.result. Банк данных сохраняется в файл с расширением *.dbrslt.

4.4 Требования к ПК

Требования к ПК зависят от количества небесных тел в процессе эксперимента. Минимальные требования:

- 1) Объем оперативной памяти, необходимый для выделения под программу во время ее запуска равен 10 Мб;
- 2) 6Мб свободного места на жестком диске для пакета программы.

Программа прошла тестирование под операционной системой WindowsVista и продемонстрировала безошибочную работу всех реализованных опций.

Следует предупредить, что потребность в оперативной памяти и быстродействии процессора зависит от поставленного эксперимента. Например, прогнозирование поведения астероидного кольца будет иметь множество объектов и учитывая, что метод Эверхарта имеет кубическую зависимость от количества уравнений, то требования к компьютеру резко возрастают.

5 ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Основная задача данной работы заключалась в создании математического аппарата для построения эффективных алгоритмов численного прогнозирования движения небесных тел. Понятие эффективности численного алгоритма складывается из его точности и быстродействия. Поэтому в данном разделе будут показаны преимущества и недостатки выбранных методов Рунге-Кутты и Эверхарта для решения СОДУ. Во второй части будут представлены результаты экспериментов, в которых были получены элементы орбит, экстремумы скоростей и положений, прогнозирование движения малых планет, а также вычисление физических параметров эллипсоидного тела по известным длинам меридиана и экватора.

5.1 Устойчивость алгоритмов

Сначала выполним одну из проверок на устойчивость алгоритмов. Способ проверки заключается в сравнении в одинаковых точках значений, полученных при разных шагах интегрирования. Произведем вначале численное интегрирование с шагом h_1 . В результате вычислялись координаты $r_1(t)$ выбранного тела для некоторых моментов t . Затем интегрирование проводилось заново с другим начальным шагом h_2 . В результате определялись координаты $r_2(t)$ для тех же моментов времени. Для сравнения полученных координат вычислялись расстояния между положениями тела, соответствующих координатам $r_1(t)$ и $r_2(t)$, то есть определялись величины:

$$\rho_i[r_1(t_i), r_2(t_i)] = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

по которым можно судить о точности вычислений.

5.1.1 Устойчивость метода Эверхарта 23-го порядка

Проведем данный эксперимент с астероидом Апофис для двух методов интегрирования. Положения, вычисленные методом Эверхарта 23-го порядка с $h_1 = 43200$ и $h_2 = 86400$ приведены в приложении 6.3. Найдем $\rho_i[r_1(t_i), r_2(t_i)]$ и построим график отклонений в зависимости от шага и даты интегрирования:

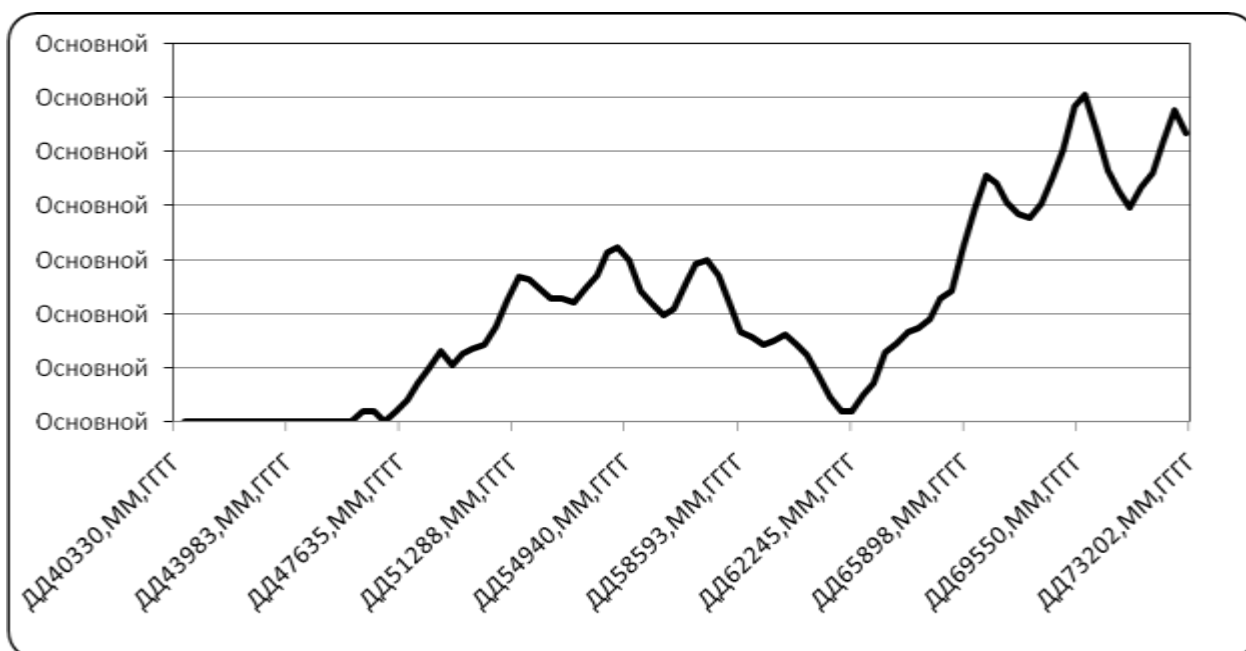


Рисунок 5.1(Отклонения $\rho_{12}(t)$ на интервале времени с 2009 по 2100 гг.)

Из рисунка 5.1 видно, что расхождение $\rho_{12}(t)$ в положении астероида 99942 Apophis при вычислении с шагом $h_1 = 43200$ и $h_2 = 86400$ не превосходит 1-го километра на всем промежутке времени. Таким образом, метод Эверхарта 23-го порядка может успешно применяться для исследования эволюции орбит не только больших, но и малых тел Солнечной системы, а данная модель может использоваться для выявления потенциально опасных астероидов, имеющих шанс столкновения с нашей планетой.

5.1.2 Устойчивость метода Рунге-Кутты 4-го порядка

Проведем те же самые действия методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагами интегрирования $h_1 = 3600, h_1 = 22600$. По данным положений, приведенные в приложении 6.4 был построен график отклонений (рис. 5.2).



Рисунок 5.2(Отклонения $\rho_{12}(t)$ на интервале времени с 2009 по 2100 гг. для РК)

При значительном увеличении шага на большом интервале времени погрешность метода резко возрастает, но при сравнении значений при разных шагах выяснилось, что с уменьшением шага точность возрастает, что говорит о сходимости метода для данной СОДУ.

Из проведенных наблюдений можно сделать вывод, что для больших промежутков времени и шага интегрирования метод Эверхарта более устойчив. На небольших промежутках и шаге целесообразней использовать метод Рунге-Кутты для экономии процессорного времени.

5.2 Нахождение параметров орбит

В данном эксперименте мы выбрали две большие планеты: Венеру и Землю для определения таких параметров орбит, как полуоси, эксцентриситет, угол наклона орбиты, афелий(наибольшее расстояние до Солнца) и перигелий(наименьшее расстояние до Солнца). Начальные данные были взяты на период 28 июня 2009 года из базы данных DE405[7,8], приведенные в приложении 6.2.

Вычислялись элементы орбиты на интервале времени с 28.06.2009 по 28.06.2014 . Выполнение интегрирования выполнялось методами Эверхарта и Рунге-Кутты с шагом $h = 3600 \text{ сек}$.

5.2.1 Элементы орбиты Земли

Для Земли был выбран промежуток времени, равный одному году, что связано с периодом полного обращения вокруг Солнца и замыканием орбиты, что уменьшает погрешность определения коэффициентов эллипса, описывающего орбиту.

Таблица 5.1(Элементы орбиты Земли)

	$a, \text{млн.км.}$	$i, \text{град}$	Афелий, млн.км.	Перигелий, млн.км.
Эверхарта 23	149,548128	7.251862	152,091086941	147,082931428
Рунге-Кутта 4	149,548128	7,251	152,091086941	147,082931428
Наблюдения	149,597 8875	7,251	152,097701	147,098074
Δ Эверхарта	0,0497595	0.000862	0,006614059	0,015142572
Δ Рунге-Кутта	0,0497595	0.000862	0,006614059	0,015142572

На данном промежутке времени максимальная погрешность при определении элементов орбиты составила $3.32 \cdot 10^{-4} \text{ а.е.}$ Погрешность связана с

качеством регрессионной модели и несферичностью Земли, которая влияет на гравитационное взаимодействие с Луной.

Получено следующее уравнение кривой, описывающего орбиту Земли:

$$\begin{cases} y = 4461.690337 - 0.026420x + 0.002744xy - 0.201972x^2 - 0.200195y^2, \\ z = 0.000009x + 0.111392y - 0.61516 \end{cases}$$

Максимальная скорость Земли равна 30.293196 км/с, определенная 12-го января 2010 года. Минимальная - 29.280354, определенная 6-го июля 2009-го года.

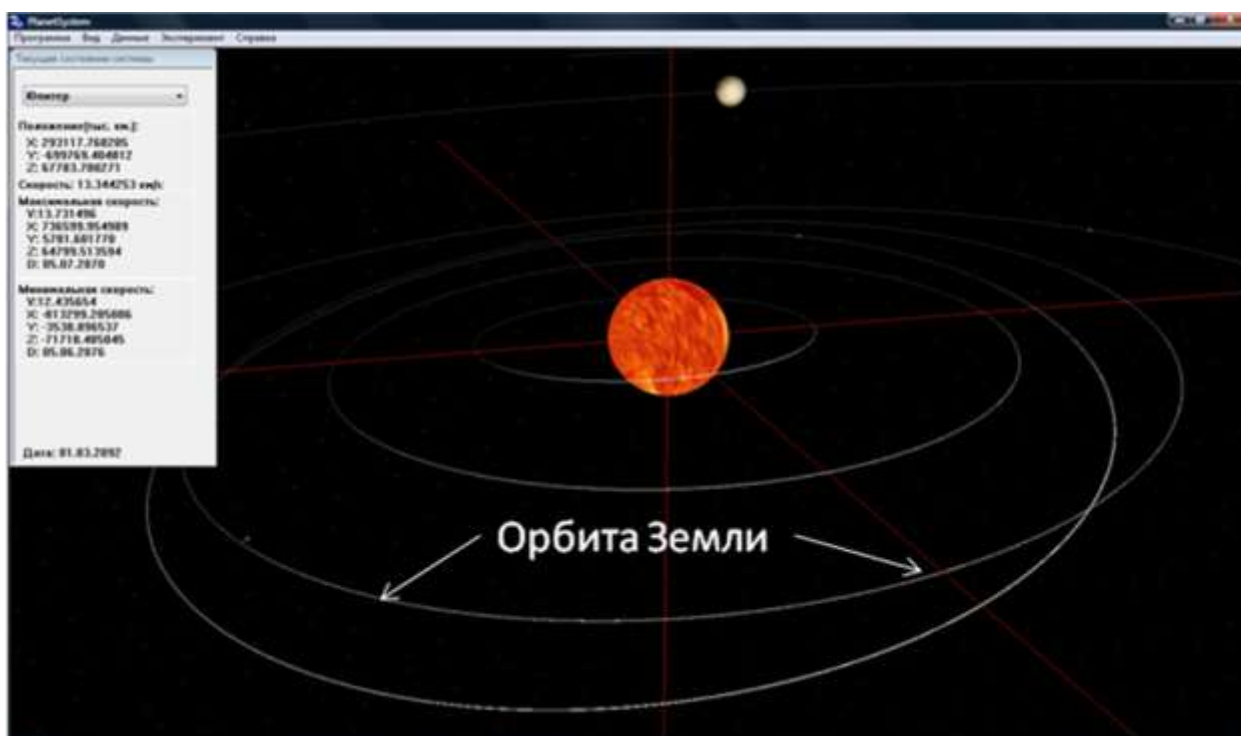


Рисунок 5.3 (Орбита Земли в программе PlanetSystem)

Минимальное расстояние от Луны до Земли было вычислено на 30 января 2010 года и составило 358.584192 тыс. км. Максимальное расстояние составило 406.498308 тыс. км. Эти данные очень близки к реальным значениям Перигея и Апогея, которые равны 363,104 тыс. км. и 405,696 тыс. км. Следовательно, погрешность при вычислении Перигея и Апогея не превысила малой полуоси земного эллипсоида.

5.2.2 Элементы орбиты Венеры

Сидерический период Венеры равен 224,70069дней, поэтому годового промежутка интегрирования вполне достаточно для определения параметров орбиты Венеры.

Таблица 5.2(Элементы орбиты Венеры)

	<i>a, млн.км.</i>	<i>i, град</i>	Афелий, <i>млн.км.</i>	Перигелий, <i>млн.км.</i>
Эверхарта 23	108,207336	3,857992	108,945.21113	107,45955556
Рунге-Кутта 4	108,207336	3,857992	108,945.21113	107,45955556
Наблюдения	108,208930	3,856000	108,9421090	107,4762590
Δ Эверхарта	0,001594	0,001992	0,002891	0,016703435
Δ Рунге- Кутта	0,001594	0,001992	0,002891	0,016703435

На данном промежутке времени погрешность при определении полуосей орбиты Венеры составила $1.06 \cdot 10^{-5} a.e.$ Погрешность более, чем в 30 раз меньше, чем при вычислении полуоси Земли, что связано с отсутствием у Венеры естественных спутников.

Получено следующее уравнение кривой, описывающего орбиту Марса:

$$\begin{cases} y = 8832.454334 + 0.510001x + 0.002930xy - 0.757065x^2 - 0.755292y^2, \\ z = 0.000005x + 0.058590y - 0.033390 \end{cases}$$

Максимальная скорость Венеры составила 35.264094 км/с, определенная 4-го октября 2009 года. Минимальная 34.783261, определенная 24-го января 20010-го года.

5.3 Исследование орбитальной эволюции астероида 99942 Apophis

Апофис(ранее 2004 MN4) — астероид, сближающийся с Землёй, открытый в 2004 году в обсерватории Китт-Пик в Аризоне, собственное название получил 19 июля 2005.

Было проведено наблюдение за данным астероидом на промежутке времени с 2009-го по 2100 годы, в котором получены следующие орбитальные характеристики:

- *Большая полуось:* 137.996649млн. км;
- *Угол наклона (относительно плоскости отчета):*9.687312;
- *Перигелий:* 164.378658173 млн. км;
- *Афелий:* 111.596218173 млн. км;
- *Минимальная скорость:* 25.553833 км/с (13.08.2009:4.0.0);
- *Максимальная скорость:* 37.639826 км/с (21.01.2010:23.0.0);

Уравнение кривой, описывающего орбиту Апофиса:

$$\begin{cases} y = -493.250124 + 1.035807x + 0.000237xy + 0.027779x^2 + 0.027803y^2, \\ z = -0.000059x + 0.121669y - 0.119737 \end{cases}$$

Астероид прошел на наименьшем расстоянии 13 апреля 2029 года. Эти данные были получены при исследовании его положения на интервале времени до 2100 года методом Эверхарта 23-го порядка с шагом 86400сек(1 сутки), после чего выяснился приблизительный промежуток наименьшего сближения. Исходный промежуток интегрирования был сужен до одного года и на новом промежутке было проведено повторное прогнозирование методом Рунге-Кутты с шагов 800сек.

Астероиды, которые зачисляются к околоземным, имеют приближенные в астрономической единице большую полуось орбиты (высокая вероятность

пересечения орбиты астероида и Земли). Потенциально опасными считаются астероиды, достигающие расстояние с Землей менее $0.05 a.e.$



Рисунок 5.4 (Сближение астероида в программе PlanetSystemс Землей в центре координат)

Наименьшее зафиксированное расстояние от Апофиса до Земли равно $0.011 a.e.$, что подтверждает принадлежность данного астероида к потенциально опасным.

5.4 Нахождение физических характеристик земного эллипсоида

Программа позволяет найти физические характеристики эллипсоида по известной средней плотности и длинам меридиана и экватора.

В начале вычисляются полуоси эллипсоида. На основе полученных полуосей можно вычислить объем и площадь поверхности. Зная среднюю плотность тела можно найти его массу.

Форма Земли хорошо приближается укороченным эллипсоидом вращения, поэтому с довольно высокой точностью можно определить ее физические характеристики.

Для длины меридиана в 40.008600 тыс. км, длины экватора в 40.075700 тыс. км.и плотности равной 5.514460 г/см^3 были получены следующие данные:

Большая полуось :6,378246 тыс.км.;

Малая полуось :6,356879 тыс.км.;

Эксцентриситет:0,081784;

Объем:1083,265846 тыс. км³;

Площадь поверхности :510,083992 тыс. км³;

Масса :5,973626·10²⁴ кг .

Погрешность в нахождении малой полуоси составила $4 \cdot 10^{-6}$ тыс.км.

Физический объем Земли равен 1083,2073 тыс. км³, следовательно расхождения с объемом приближенной фигуры равняется $\Delta V = 0,058546 \text{ тыс. км}^3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опираясь на законы классической небесной механики, была построена математическая модель, которая описывает движение небесных тел. На основе этой модели было разработано программное обеспечение, которое дает возможность проводить прогнозирование положения космических объектов.

Для прогнозирования были реализованы два численных метода: Эверхарта и Рунге-Кутта. На основе метода Эверхарта можно строить банк данных эфемерид, так как данный метод раскладывает искомую функцию во временной ряд на промежутке, что дает возможность перейти от дискретных данных о положениях и скоростях к непрерывным. В экспериментальных задачах выяснилось, что методы являются сходящимися и с уменьшением шага интегрирования точность решения возрастает.

Был построен алгоритм, основанный на регрессионном анализе, для вывода уравнения эллипсоидной орбиты. Также разработанный нами программный продукт позволяет вычислять массу, площадь поверхности, объем эллипсоидального тела по известным его параметрам.

Проведены эксперименты, в которых были вычислены элементы орбит больших планет с погрешностью, не превышающую $3.2 \cdot 10^{-4} a.e.$ Также выполнено наблюдение за траекторией движения астероида Апофис на интервале времени с 2009 года по 2100 год и был сделан вывод, что данный астероид является потенциально опасным, так как были выявлены сближения с Землей, меньшие, чем $0.05 a.e.$ Согласно полученным данным, минимальное расстояние между Землей и астероидом должно быть достигнуто 13 апреля 2029 года.

Во время прогнозирования движения естественных спутников(в частности Луны) были выявлены слабые стороны нашей математической модели. Это связано с увеличением погрешности при взаимодействии тел на небольших космических расстояниях, потому что данная модель не учитывает возмущения, обусловленные несферичностью тел. Поэтому данный проект остается перспективным и требует доработки математической модели, которая будет учитывать такие частные случаи.

В ожидании уменьшения погрешности, в дифференциальные уравнения был добавлен релятивистский член, но в процессе исследования, обнаружилось, что релятивистские эффекты начинают существенно влиять на результат при прогнозировании более, чем на 100 лет, что не входило в нашу цель, к тому же релятивистский член более чем в два раза увеличивает вычислительный процесс.

Данные эксперименты несли в большей мере тестирующий характер, благодаря которым были выявлены возможности построенного нами математического аппарата. Разработанный программный продукт может использоваться как в познавательных целях, в обучении, так и для реального прогнозирования движения небесных тел при минимальном наборе известной информации о них.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ

- 1) Дубошин Г.Н., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. - М.: Наука, 1976, 800 с;
- 2) Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии. -, М.: Наука, 1967, 240с;
- 3) Демидович Б.П., Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966, 665с;
- 4) Бордовицына Т.В., Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984, 136с;
- 5) Everhart E., Implicit single methods for integrating orbits, 1974, p.35-55;
- 6) Авдюшев В.А., Численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (курс лекций), 2009, 52с.
- 7) Standish E.M., JPL Planetary and Lunar Ephemerides of DE405/LE405, 1998, p. 302;
- 8) GPL Web interface system: <http://ssd.jpl.nasa.gov>;
- 9) Ричард С. Райт., OpenGL Суперкнига – третье издание, 2006, 1039с.
- 10) Брумберг В.А., Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984, 385с.

6 ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1 Узлы разбиения метода Эверхарта

Таблица 6.1(Метод Эверхарта 19-го порядка)

n	q_n
2	0.03625781288320946094
3	0.11807897878999870019
4	0.23717698481496038531
5	0.38188276530470597536
6	0.53802959891898906511
7	0.69033242007236218294
8	0.82388334383700471814
9	0.92561261029080395536
10	0.98558759035112345137

Таблица 6.1 (Метод Эверхарта 23-го порядка)

n	q_n
2	0.025273620397520349419925
3	0.083041613447405145741918
4	0.169175100377181424343219
5	0.277796715109032072344951
6	0.401502720232860814519170
7	0.531862386910415955804065
8	0.659991842085334810022770
9	0.777159392956162143241701
10	0.875380774855556925520646
11	0.947964548872819447093136
12	0.989981719538319594093396

6.2 Начальные положения, скорости и массы на 28.06.2009

Таблица 6.2(Массы и начальные положения)

Название	Масса, 10^{24} кг	X, <i>тыс. км.</i>	Y, <i>тыс. км.</i>	Z, <i>тыс. км.</i>
Меркурий	0.330200	50625.242016	279.251663	2185.165816
Венера	0.486850	82212.104933	-71035.87506	7188.714237
Земля	5.973699	-22449.15468	-150262.5037	6743.133952
Марс	0.641850	210020.29834	13974.846018	18975.124485
Юпитер	1898.23420	408901.28947	-631816.4016	73914.247431
Сатурн	568.319	-1295972.835	538872.845	124963.2862
Уран	86.8103	2789542.0549	-1070324.268	336313.956
Нептун	102.41	2859279.6032	-3428914.351	498277.230227
Луна	0.073477	-22775.89333	-150096.0451	6671.076402
Апофис	$2.6 \cdot 10^{-10}$	-24206.10512	153679.6030	-21345.94097
Ганимед	0.14825	409867.51966	-632201.9373	74055.67524
Солнце	1988919.489768	0.0	0.0	0.0

Таблица 6.3(Начальные скорости)

Название	$V_x, \text{км/с}$	$V_y, \text{км/с}$	$V_z, \text{км/с}$
Меркурий	-9.313569	53.444976	1.770576
Венера	82212.104933	-71035.875065	7188.714237
Земля	28.790448	26.409557	0.445808
Марс	-0.111469	25.939112	-0.912446
Юпитер	10.945064	7.782457	0.502751
Сатурн	-4.241256	-8.783761	0.309924
Уран	2.329868	6.064622	-0.098686
Нептун	4.154291	3.533754	0.079815
Луна	28.270255	-5.100174	3.394002
Апофис	-26.790336	-0.969651	-3.143525
Ганимед	14.698248	18.012186	0.716219

6.3 Положения астероида Apophis с 2009-2100гг, полученные методом Эверхарта 23-го порядка

Таблица 6.4(Положения вычислены с шагом 86400 сек.)

Дата	X	Y	Z
12.06.2012	-148644,2118	-20715,77594	-15604,43722
02.06.2014	8416,791208	-114934,0161	14785,09252
22.05.2016	109773,7519	61410,48088	5973,310782
12.05.2018	-35799,25372	152783,4499	-22644,95337
01.05.2020	-150492,4098	51016,38344	-24380,63121
21.04.2022	-81321,07894	-101916,9767	2345,653223
10.04.2024	107534,1356	-32517,91694	16942,38739
31.03.2026	37501,67258	141498,0144	-12405,71033
19.03.2028	-116863,3667	112236,1226	-27624,32226
27.02.2032	52017,11476	-97492,32445	17988,71292
16.02.2034	83829,14759	105409,2431	-2472,911906
06.02.2036	-82917,55306	137378,9044	-26502,02612
26.01.2038	-151671,4433	-7387,213917	-17467,22861
16.01.2040	1369,735829	-115751,0044	14041,82972
05.01.2042	107685,5167	65101,66099	5224,637401
10.12.2046	-131591,1885	-56329,96222	-9162,026388
29.11.2048	65105,77912	-88306,33926	18461,99032
08.11.2052	-93977,69515	130768,3063	-27043,4267
29.10.2054	-148068,5269	-21460,61566	-15316,538
19.10.2056	20724,41154	-111397,3764	15868,14289
28.09.2060	-60651,07901	146795,0815	-24923,35503
18.09.2062	-154274,4103	18485,0491	-20824,88928
28.08.2066	115895,1197	31136,14786	10231,73946
17.08.2068	-18252,16303	153356,4011	-20606,00785
07.08.2070	-147148,7538	61837,78078	-25156,26087
27.07.2072	-87240,96884	-98410,73437	1298,496022
17.07.2074	106910,0757	-32925,53396	16788,36134
06.07.2076	31927,46567	143279,5828	-13351,08466
15.06.2080	-130758,7333	-57846,88046	-8759,281158
05.06.2082	62390,94426	-90755,4222	18378,37476
15.05.2086	-83720,49113	137223,2995	-26513,90508
04.05.2088	-152424,6741	-4357,727046	-17754,3167
24.04.2090	-8564,227108	-117075,8127	13025,11961
13.04.2092	112577,5562	50693,20016	7412,265918
03.04.2094	-31472,13257	152913,3859	-22127,77103
22.03.2096	-150270,3602	51465,57486	-24179,74811
12.03.2098	-77628,28336	-103660,8895	3150,541131
02.03.2100	110766,4891	-22379,27454	15952,06939

Таблица 6.5(Положения вычислены с шагом 43200 сек.)

Дата	X	Y	Z
23.06.2010	-100439,4757	126767,6484	-27399,19011
12.06.2012	-148644,2118	-20715,77594	-15604,43722
02.06.2014	8416,791208	-114934,0161	14785,09252
22.05.2016	109773,7519	61410,48088	5973,310782
01.05.2020	-150492,4098	51016,38344	-24380,63121
21.04.2022	-81321,07894	-101916,9767	2345,653223
10.04.2024	107534,1356	-32517,91694	16942,38739
31.03.2026	37501,67258	141498,0144	-12405,71033
19.03.2028	-116863,3667	112236,1226	-27624,32226
27.02.2032	52017,11476	-97492,32446	17988,71292
16.02.2034	83829,14759	105409,2431	-2472,911905
06.02.2036	-82917,55305	137378,9044	-26502,02612
26.01.2038	-151671,4433	-7387,21391	-17467,22861
16.01.2040	1369,735818	-115751,0044	14041,82972
05.01.2042	107685,5167	65101,66097	5224,637403
31.12.2042	40540,98005	139161,1482	-11777,49874
20.12.2044	-120065,8057	108184,8507	-27492,80579
10.12.2046	-131591,1885	-56329,96221	-9162,02639
19.11.2050	73867,62212	115856,4301	-4960,610347
08.11.2052	-93977,69515	130768,3063	-27043,4267
29.10.2054	-148068,5269	-21460,61565	-15316,538
19.10.2056	20724,41153	-111397,3764	15868,14289
09.10.2058	100405,0287	81277,45771	2363,186313
28.09.2060	-60651,07901	146795,0815	-24923,35503
18.09.2062	-154274,4103	18485,0491	-20824,88928
07.09.2064	-33534,78469	-116397,7098	9917,967059
17.08.2068	-18252,16302	153356,4011	-20606,00785
07.08.2070	-147148,7538	61837,78077	-25156,26087
27.07.2072	-87240,96884	-98410,73437	1298,496022
17.07.2074	106910,0757	-32925,53395	16788,36134
06.07.2076	31927,46567	143279,5828	-13351,08466
15.06.2080	-130758,7333	-57846,88048	-8759,281155
05.06.2082	62390,94428	-90755,42219	18378,37476
25.05.2084	80434,31298	109858,6852	-3535,011323
15.05.2086	-83720,49115	137223,2995	-26513,90508
04.05.2088	-152424,6741	-4357,727068	-17754,3167
24.04.2090	-8564,227079	-117075,8127	13025,11962
13.04.2092	112577,5562	50693,20018	7412,265914
03.04.2094	-31472,13259	152913,3859	-22127,77103
22.03.2096	-150270,3602	51465,57484	-24179,74811
12.03.2098	-77628,28334	-103660,8895	3150,541135
02.03.2100	110766,4891	-22379,27452	15952,06938

6.4 Положения астероида Apophisc 2009-2100гг, полученные методом Рунге-Кутта 4-го порядка

Таблица 6.6 (Положения вычислены с шагом 3600 сек)

Дата	X	Y	Z
23.06.2010	-100439,475660	126767,648397	-27399,190107
12.06.2012	-148644,211815	-20715,775940	-15604,437222
02.06.2014	8416,791208	-114934,016143	14785,092520
22.05.2016	109773,751854	61410,480878	5973,310782
12.05.2018	-35799,253724	152783,449947	-22644,953371
21.04.2022	-81321,078941	-101916,976749	2345,653223
10.04.2024	107534,135606	-32517,916942	16942,387386
31.03.2026	37501,672577	141498,014431	-12405,710334
19.03.2028	-116863,366749	112236,122587	-27624,322255
09.03.2030	-137444,615001	-46814,219713	-11049,908105
16.02.2034	83829,147596	105409,243075	-2472,911903
06.02.2036	-82917,553045	137378,904426	-26502,026114
26.01.2038	-151671,443258	-7387,213899	-17467,228616
16.01.2040	1369,735799	-115751,004407	14041,829719
05.01.2042	107685,516720	65101,660954	5224,637407
20.12.2044	-120065,805729	108184,850703	-27492,805789
29.11.2048	65105,77909	-88306,33928	18461,99032
19.11.2050	73867,62214	115856,4301	-4960,610343
08.11.2052	-93977,69513	130768,3063	-27043,4267
19.10.2056	20724,41151	-111397,3764	15868,14288
09.10.2058	100405,0287	81277,4577	2363,186316
28.09.2060	-60651,079	146795,0815	-24923,35503
18.09.2062	-154274,4103	18485,04911	-20824,88928
28.08.2066	115895,1197	31136,14786	10231,73946
17.08.2068	-18252,16303	153356,4011	-20606,00785
07.08.2070	-147148,7538	61837,78076	-25156,26087
27.07.2072	-87240,96882	-98410,73438	1298,496026
17.07.2074	106910,0757	-32925,53393	16788,36134
06.07.2076	31927,46564	143279,5828	-13351,08467
15.06.2080	-130758,7333	-57846,88051	-8759,281149
25.05.2084	80434,31294	109858,6852	-3535,011331
15.05.2086	-83720,49119	137223,2994	-26513,90508
04.05.2088	-152424,6741	-4357,727118	-17754,31669
24.04.2090	-8564,227016	-117075,8127	13025,11962
03.04.2094	-31472,13263	152913,3858	-22127,77103
22.03.2096	-150270,3602	51465,57479	-24179,7481
12.03.2098	-77628,28329	-103660,8896	3150,541144
02.03.2100	110766,4891	-22379,27447	15952,06938

Таблица 6.7 (Положения вычислены с шагом 21600 сек)

Дата	X	Y	Z
23.06.2010	-100439,4757	126767,6484	-27399,19011
12.06.2012	-148644,2118	-20715,77602	-15604,43721
02.06.2014	8416,791268	-114934,0162	14785,09253
22.05.2016	109773,7518	61410,48098	5973,310758
12.05.2018	-35799,25405	152783,4498	-22644,9534
01.05.2020	-150492,4099	51016,38303	-24380,63118
21.04.2022	-81321,07868	-101916,977	2345,653285
10.04.2024	107534,1357	-32517,91663	16942,38736
31.03.2026	37501,67193	141498,0145	-12405,71043
19.03.2028	-116863,3733	112236,1167	-27624,32215
09.03.2030	-137444,5811	-46814,2912	-11049,89558
27.02.2032	52017,34141	-97492,1996	17988,72519
16.02.2034	83828,94018	105409,4865	-2472,965036
06.02.2036	-82917,81367	137378,7606	-26502,03998
26.01.2038	-151671,3888	-7387,577213	-17467,17476
16.01.2040	1370,34789	-115750,9237	14041,89502
05.01.2042	107685,2611	65102,32986	5224,525934
20.12.2044	-120066,2269	108184,3898	-27492,80055
10.12.2046	-131590,7726	-56330,58652	-9161,899815
29.11.2048	65106,53711	-88305,6915	18462,00237
19.11.2050	73866,99465	115856,9591	-4960,755478
08.11.2052	-93978,26772	130767,9106	-27043,44932
29.10.2054	-148068,292	-21461,34658	-15316,42037
19.10.2056	20725,40297	-111397,058	15868,22501
09.10.2058	100404,603	81278,25424	2363,035409
28.09.2060	-60651,78078	146794,9112	-24923,41515
18.09.2062	-154274,4666	18484,3019	-20824,79645
07.09.2064	-33533,82981	-116397,8332	9918,100312
28.08.2066	115895,027	31137,12433	10231,60676
17.08.2068	-18252,85439	153356,4217	-20606,09632
07.08.2070	-147148,9051	61837,28154	-25156,21727
27.07.2072	-87240,60746	-98410,86456	1298,561441
17.07.2074	106910,1271	-32925,21682	16788,32143
06.07.2076	31927,22888	143279,6626	-13351,1295
26.06.2078	-123566,9413	104396,4448	-27360,11436
15.06.2080	-130758,6107	-57847,12346	-8759,226295
25.05.2084	80433,94221	109859,1613	-3535,117974
15.05.2086	-83720,97323	137223,065	-26513,93552
04.05.2088	-152424,5618	-4358,215248	-17754,24023
24.04.2090	-8563,524067	-117075,6788	13025,18829
13.04.2092	112577,2904	50693,92216	7412,135959
03.04.2094	-31472,625	152913,3179	-22127,82922
22.03.2096	-150270,5001	51465,27908	-24179,71399
12.03.2098	-77627,91717	-103661,1618	3150,637891

02.03.2100	110766,7721	-22378,56139	15952,01453
------------	-------------	--------------	-------------