САИТ 2010

Численное моделирование движения небесных тел

Шафеев Р. А.

Кафедра КМММ
НТУ «ХПИ»

СОДЕРЖАНИЕ

- ✓ Математическая модель движения небесных тел;
- ✓ Вывод уравнения эллипсоидной орбиты;
- ✓ Нахождение минимального расстояния между орбитами;
- ✓ Вычислительная схема разработанного программного обеспечения;
- ✓ Нахождение параметров орбит больших планет Солнечной системы и их физических характеристик;
- ✓ Зафиксированные сближения астероидов группы Атона с Землей.

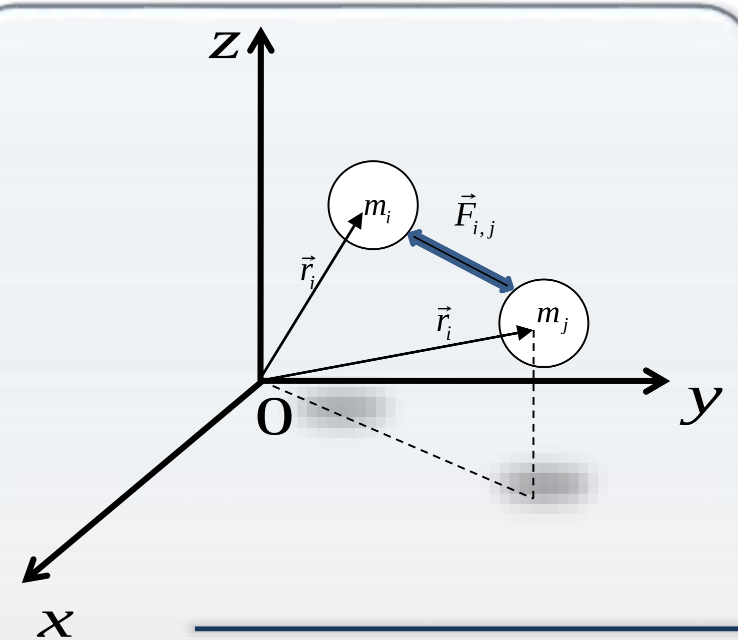
Математическая модель движения небесных тел

Модель в абсолютной прямоугольной системе координат:

$$\begin{cases} \vec{V}_i\,'(t) = \sum\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} G \dfrac{m_j \vec{R}_{i,j}}{\Delta_{i,j}^{\;3}}, \\ \vec{r}_i\,'(t) = \vec{V}_i(t). \end{cases}$$

Модель с учетом релятивистских эффектов в относительной прямоугольной системе координат :

$$\begin{cases} \vec{V}_i\,'(t) = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n-1} G m_j \left(\dfrac{\left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)}{\Delta_{i,j}^{\;3}} - \dfrac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right) - G\left(m_0 + m_i\right) \dfrac{\overline{r}_i}{|\overline{r}_i|^3} + R\left(r_i, V_i\right), \\ \vec{r}_i\,'(t) = \vec{V}_i(t). \end{cases}$$



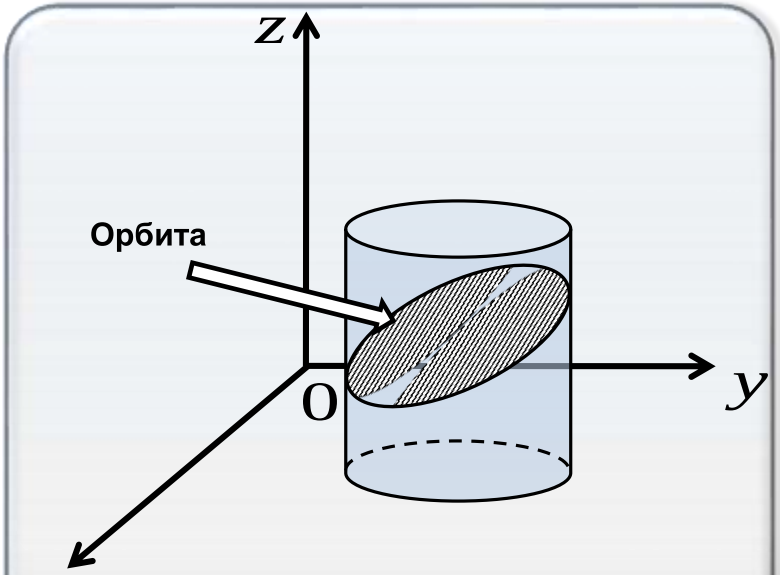
Гравитационное взаимодействие двух тел

Вывод уравнения эллипсоидной орбиты

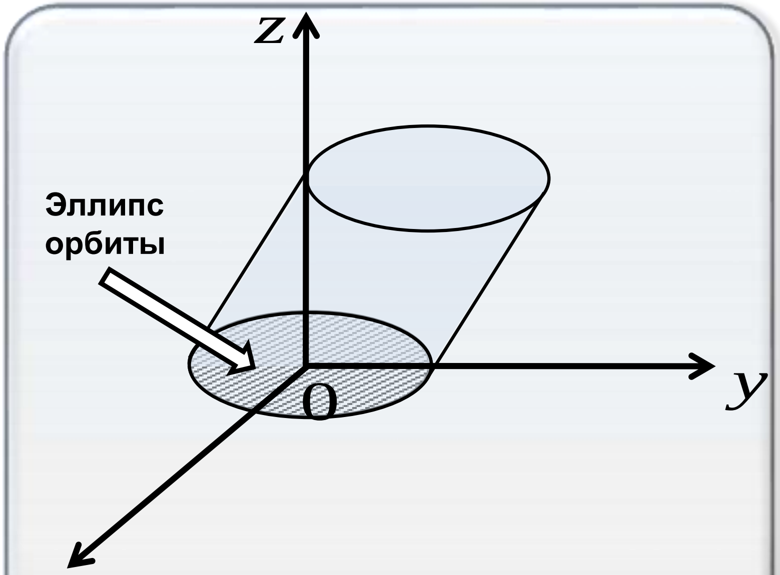
Эллипс в пространстве, полученный с помощью регрессионного анализа:

$$\begin{cases} z = a_1 x + a_2 y + a_3, \\ y = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 xy + \theta_3 x^2 + \theta_4 y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{A(\vec{a},\vec{\theta})} + \dfrac{y^2}{B(\vec{a},\vec{\theta})} = 1. \end{cases}$$

Уравнение эллипса после перенесения плоскости z(x,y) на плоскость XOY и помещения эллипса в центр координат принимает канонический вид:



Кривая орбиты до преобразования



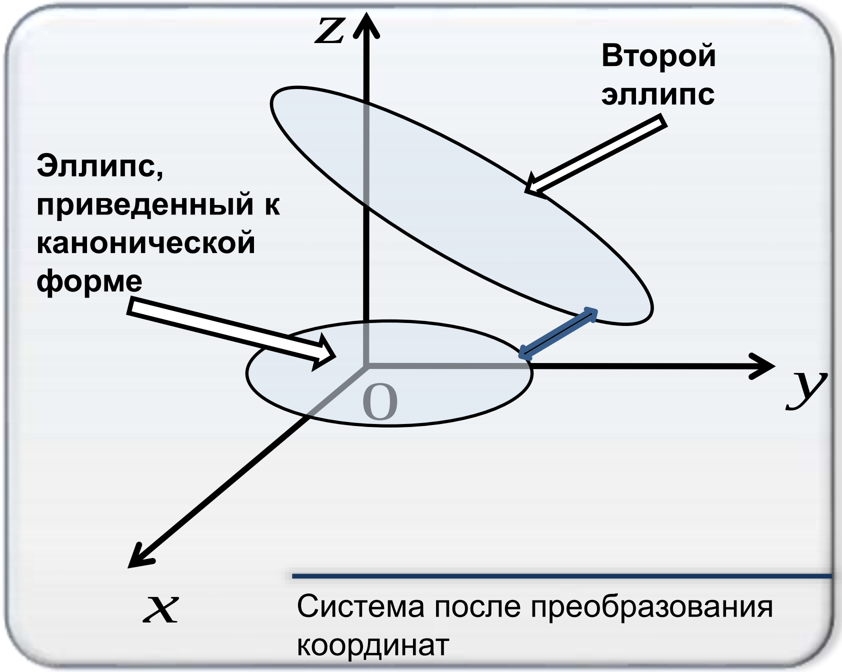
Кривая после аффинных преобразований

Вычисление минимального расстояния между орбитами

Алгоритм нахождения минимального расстояния между эллипсами в пространстве:

1. Выполняется перевод первого эллипса в каноническую форму путем аффинных преобразований системы координат;

2. Выбирается точка $x_i(a,b,c)$, принадлежащая второму эллипсу.



3. Строится задача минимизации расстояния от точки x_i до канонической формы:

$$\begin{cases} f(x,y)=(x-a)^2+(y-b)^2+c^2 \to \min - \textit{целевая функция} \\ \dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1 - \textit{ограничение} \end{cases}$$

Интегратор Эверхарта

С помощью метода Эверхарта решалась следующая система ОДУ движения n небесных тел:

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i\left(\vec{r}_i\left(t\right)\right) \quad i = 0...(n-1)$$

Основная идея метода заключается разложении функции $\vec{F}_i\left(\vec{r}_i\left(t\right)\right)$ во временной ряд:

$$F_i\left(\vec{r}_i\left(t\right)\right) = \vec{F}_{i,1} + \vec{A}_{i,1}t + \vec{A}_{i,2}t^2 + ... + \vec{A}_{i,N}t^N$$

Положения и скорости тел, выраженные через коэффициенты $\vec{A}_{i,k}$:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_i\left(t\right) = \dot{\vec{r}}_{i,1}\left(t\right) + \vec{F}_{i,1} \cdot t + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+1} \vec{A}_{i,k} \cdot t^{k+1}, \\ \vec{r}_i\left(t\right) = \vec{r}_{i,1}\left(t\right) + \dot{\vec{r}}_{i,1}\left(t\right) \cdot t + \frac{1}{2}\vec{F}_{i,1} \cdot t^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \vec{A}_{i,k} \cdot t^{k+2}. \end{cases}$$

Интегратор Эверхарта

Представление коэффициентов A в виде суммы произведений чисел Стирлинга и разделенных разностей:

$$\begin{cases} \vec{A}_{i,1} = \vec{\alpha}_{i,1} + (-t_2)\vec{\alpha}_{i,2} + (t_2 t_3)\vec{\alpha}_{i,3} + \ldots = c_{11}\vec{\alpha}_{i,1} + c_{21}\vec{\alpha}_{i,2} + c_{31}\vec{\alpha}_{i,3} + \ldots \\ \vec{A}_{i,2} = \vec{\alpha}_{i,2} + (-t_2 - t_3)\vec{\alpha}_{i,3} + \ldots \qquad = c_{22}\vec{\alpha}_{i,2} + c_{32}\vec{\alpha}_{i,3} + \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Разделенные разности выражаются через узлы разбиения и вторые производные:

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_{i,1} = \left(\vec{F}_{i,2} - \vec{F}_{i,1}\right)/t_2, \\ \vec{\alpha}_{i,2} = \left(\left(\vec{F}_{i,3} - \vec{F}_{i,1}\right)/t_3 - \vec{\alpha}_{i,1}\right)/t_{32}, \\ \ldots \end{cases}$$

Предсказывающие уравнения:

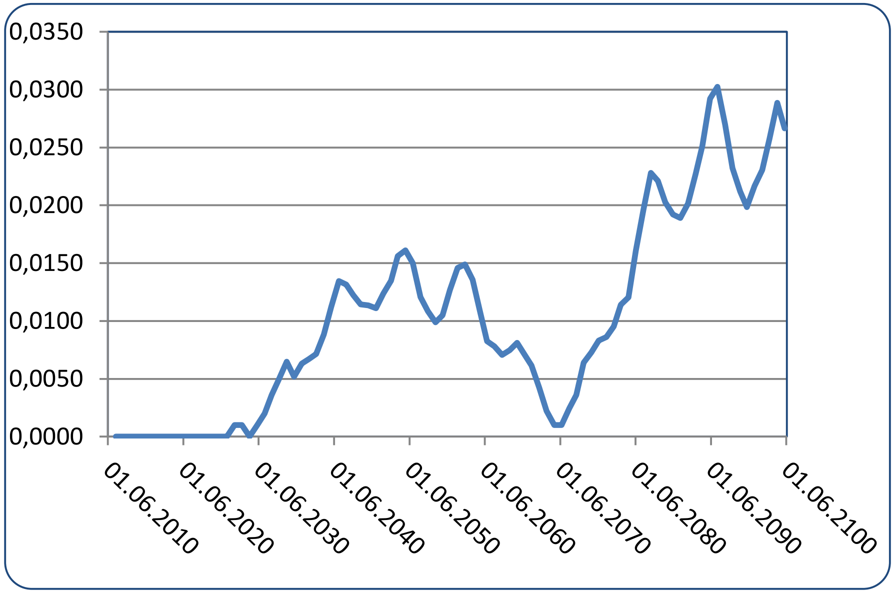
$$\begin{cases} \vec{r}_{i,2} = \vec{r}_{i,1} + \dot{\vec{r}}_{i,1} t_2 + \frac{1}{2}\vec{F}_{i,1}\cdot t_2^{\,2} + \left[\frac{1}{6}\vec{A}_{i,1}\cdot t_2^{\,3} + \frac{1}{12}\vec{A}_{i,2}\cdot t_2^{\,4} + \frac{1}{20}\vec{A}_{i,3}\cdot t_2^{\,5} + \ldots\right], \\ \vec{r}_{i,3} = \vec{r}_{i,1} + \dot{\vec{r}}_{i,1} t_3 + \frac{1}{2}\vec{F}_{i,1}\cdot t_3^{\,2} + \frac{1}{6}\vec{A}_{i,1}\cdot t_3^{\,3} + \left[\frac{1}{12}\vec{A}_{i,2}\cdot t_3^{\,4} + \frac{1}{20}\vec{A}_{i,3}\cdot t_3^{\,5} + \ldots\right], \\ \ldots \end{cases}$$

Устойчивость алгоритмов интегрирования

Расстояние между положениями при разных шагах интегрирования:

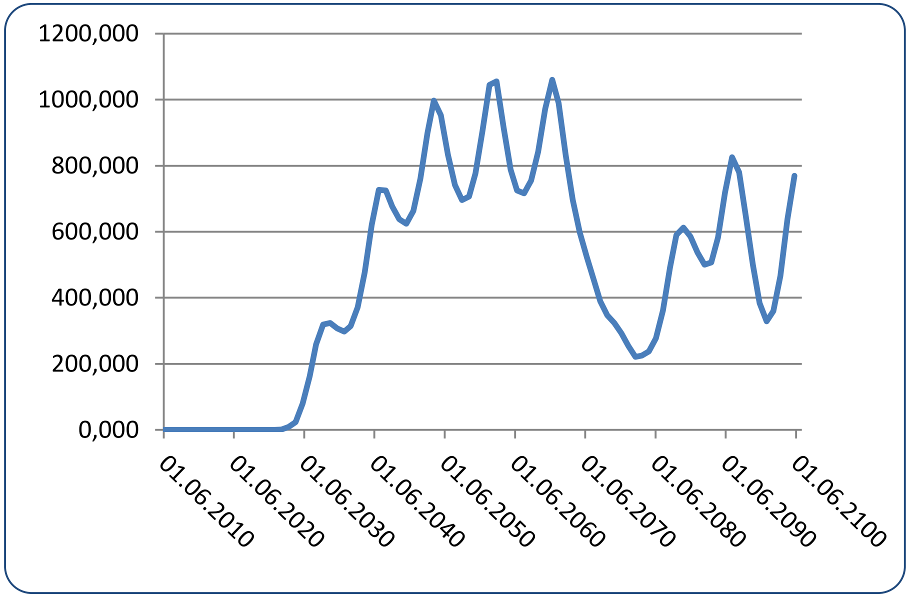
$$\rho_i\left[r_1(t_i), r_2(t_i)\right] = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Метод Эверхарта 23-го порядка



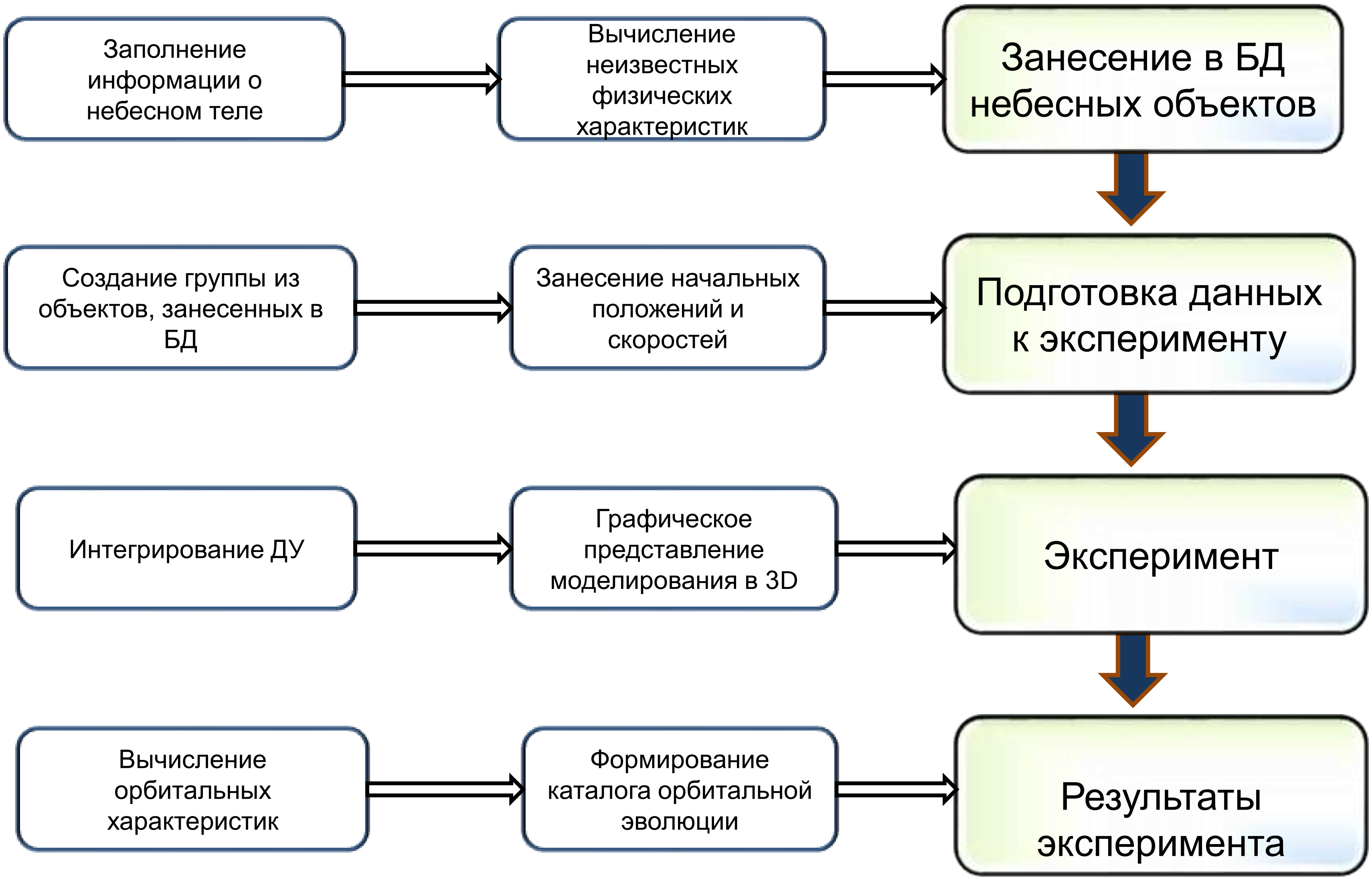
$h_1 = 43200,\ h_2 = 86400$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка



$h_1 = 3600,\ h_2 = 21600$

Схема проведения эксперимента в разработанном программном продукте



Нахождение параметров орбиты Земли

В процессе прогнозирования были получены следующие характеристики орбиты (метод Эеврхарта с шагом 43200 сек., РК – 3600с.):

Источник данных	Б. полуось (млн. км.)	Наклон	Афелий	Перигелий
Эверхарта 23	149,544979	7.251862	152,091086941	147,09293142
Рунге-Кутта 4	149,548128	7.251862	152,091086941	147,09293142
Наблюдения	149,5978875	7,251	152,097701	147,098074
$\Delta_{Эверхарта}$	0,0529085	0.000862	0,006614059	0,00514258
$\Delta_{РК}$	0,0497595	0.000862	0,006614059	0,00514258

Экстремумы скорости:

Минимальная скорость: 29.280354 км/с

Максимальная скорость: 30.293196 км/с

Экстремумы расстояния до Луны:

Перигей: 356.584192 тыс. км.

Апогей: 406.498308 тыс. км.

Нахождение параметров орбиты Земли

Уравнение орбиты:

$$\begin{cases} y = 4461.690337 - 0.026420x + 0.002744xy - 0.201972x^2 - 0.200195y^2, \\ z = \ 0.000009x + 0.111392y - 0.61516 \end{cases}$$

Прогнозирование сближения астероида Apophis

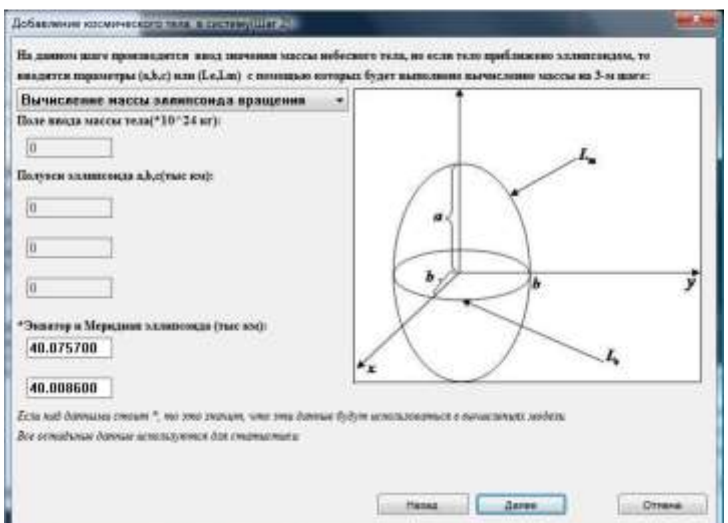
Получены следующие орбитальные характеристики:
Большая полуось : 137.996649 млн. км.;
Угол наклона : 9.687312 град.;
Перигелий : 164.378658173 млн. км.;
Афелий : 111.596218173 млн. км.;
Минимальная скорость : 25.553833 км/с (13.08.2009 : 4.0.0);
Максимальная скорость: 37.639826 км/с (21.01.2010 : 23.0.0);
Сближение: : 0.011 а.е.

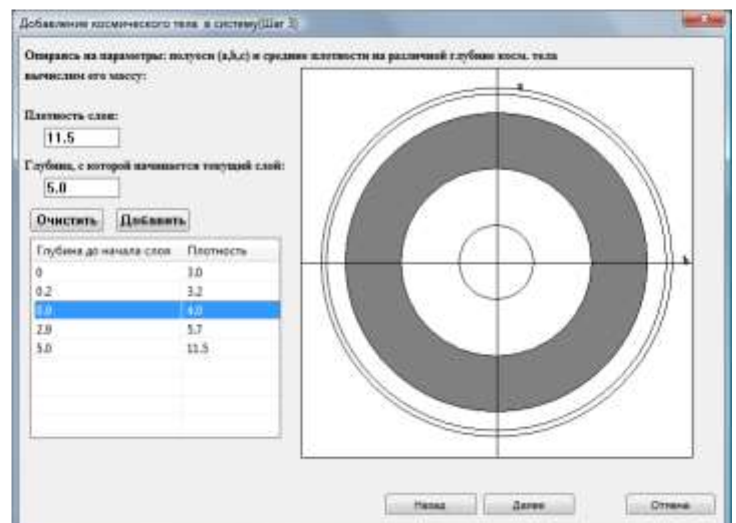
Нахождение физических характеристик замного эллипсоида

Получены следующие физические характеристики:

Большая полуось : 6.378246 тыс. км.;
Малая полуось : 6.356879 тыс.км.;
Эксцентриситет : 0.081784;
Средняя плотность : 5.514460 г/см3;
Масса : 5.973699 $\cdot 10^{24}$ кг;
Площадь поверхности : 510.083992 м2;
Объем : 1083.265846 тыс.км3.

Нахождение характеристик эллипсоида в программе:





ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- ✓ Построена математическая модель движения небесных тел;
- ✓ Разработанное программное средство позволяет прогнозировать столкновения небесных тел, строить непрерывные эфемериды, находить экстремальные точки траекторий;
- ✓ Создан каталог орбитальной эволюции для 230 небесных тел на промежутке времени с 2009-го по 2300гг;
- ✓ Проведено исследование, в котором были выявлены потенциально опасные для Земли астероиды из группы Атона.