

# Symbolic Analysis and Reordering of Nonlinear Circuit's equations in order to Accelerate Homotopic Simulation

Héctor Vázquez-Leal  
Universidad Veracruzana  
Facultad de Instrumentación Electrónica  
Xalapa, Veracruz, México  
Email: hvazquez@uv.mx

Luis Hernández-Martínez  
INAOE  
Departamento de Electrónica  
Email: luish@inaoe.mx

Arturo Sarmiento-Reyes  
INAOE  
Departamento de Electrónica  
Email: jarocho@inaoe.mx

Roberto Castañeda Sheissa  
Universidad Veracruzana  
Facultad de Instrumentación Electrónica  
Xalapa, Veracruz, México  
Email: rocastaneda@uv.mx

**Abstract**— En el presente artículo se realizará un estudio simbólico para detenerminar el grado de no linealidad de las ecuaciones nodales emanadas del análisis MNA de circuitos no lineales; Esto con el objetivo de establecer un criterio de reordenamiento de las ecuaciones nodales que acelere la simulación homotópica. Se establecerá un criterio de clasificacion de no linealidades, que permita de asignar de manera numérica un grado de no linealidad a las ecuaciones nodales para despues reordenar las ecuaciones en diversas simulaciones homotópicas de un circuito no lineal.

## I. INTRODUCCIÓN

Los métodos de homotopía han sido recientemente utilizados en la tarea de encontrar el punto de operación en circuitos resistivos no lineales, cuando la ecuación de equilibrio posee más de una solución.

Para analizar cualquier circuito se requiere establecer primeramente la ecuación de equilibrio del mismo. A lo largo de este trabajo de tesis, se utilizará el método de análisis nodal modificado (MNA, del inglés: Modified Nodal Analysis) para establecer esta ecuación.

En su forma más general, la ecuación de equilibrio de circuitos resistivos no lineales tiene la forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{f}$  es un sistema de  $n$  ecuaciones algebraicas no lineales y  $\mathbf{x}$  es el vector con las incógnitas del sistema. Cuando el método MNA es utilizado,  $\mathbf{x}$  es el vector conteniendo los voltajes nodales y las corrientes de los elementos no NA compatibles [?].

Una vez obtenida la ecuación (1), se procede a establecer la ecuación homotópica, la cual tiene la forma general:

$$\mathbf{H}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \lambda) = \mathbf{0} \quad (2)$$

donde  $\lambda$  representa al parámetro homotópico.

**Ejemplo:** Con el objeto de ilustrar el efecto que el ordenamiento de las ecuaciones tiene sobre la formulación

homotópica, se analiza a continuación un ejemplo circuital muy sencillo aplicando el esquema de homotopía de Chao, ya mencionado en el capítulo 2. En este método, la ecuación homotópica está dada por:

$$\frac{df_i[\mathbf{x}(p)]}{dp} + f_i[\mathbf{x}(p)] = 0 \quad (3)$$

con  $f_i(\mathbf{x}(0)) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . La  $n$ -ésima ecuación es:

$$\frac{df_n[\mathbf{x}(p)]}{dp} \pm f_n[\mathbf{x}(p)] = 0 \quad (4)$$

donde el cambio de signo de la  $n$ -ésima ecuación,  $f_n$ , debe ocurrir en los puntos donde el Jacobiano cambia de signo (con el objetivo de evitar alejarse del camino de las soluciones) y en las soluciones (con el objetivo de continuar el proceso de búsqueda de más soluciones).

Este método consiste en encontrar una trayectoria de soluciones, la cual coincide con la intersección de las  $(n-1)$  superficies definidas por  $\mathbf{f}_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . De tal manera que la trayectoria homotópica es trazada sobre el plano de la  $n$ -ésima ecuación.

El comportamiento de la homotopía antes mencionada, depende fuertemente de la ecuación (4), debido al cambio de signo, i.e. el procedimiento de continuación está ligado exclusivamente a la  $n$ -ésima ecuación. Aquí radica el *quid de la cuestión*: cuando se establece la ecuación de equilibrio mediante el método MNA, la  $n$ -ésima ecuación **siempre** corresponde a la relación de rama de cualquier elemento no NA compatible presente en el circuito.

Con la finalidad de mostrar como afecta el orden de las ecuaciones en la formulación de la ecuación de equilibrio, se usará el circuito mostrado en la Figura (1), el cual cuenta con una conductancia lineal ( $K_a$ ), un diodo ( $K_b$ ) con función de rama exponencial, y una conductancia no lineal ( $K_c$ ) con función de rama polinomial. Aplicando el

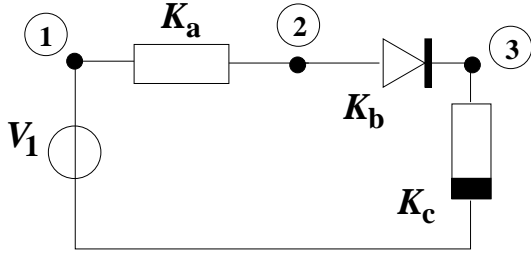


Fig. 1. Circuito con tres soluciones

método MNA se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} K_a & -K_a & 0 & +1 \\ -K_a & K_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_{V_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i_{K_b} \\ -i_{K_b} + i_{K_c} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

donde  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  son los voltajes nodales,  $i_{V_1}$  es la corriente de la fuente de voltaje independiente, y las corrientes  $i_{K_b}$  e  $i_{K_c}$  son las corrientes que fluyen por las conductancias no lineales,  $K_b$  y  $K_c$  respectivamente.

Es claro que la cuarta ecuación corresponde a la relación de rama de la fuente de voltaje independiente:

$$v_1 - V_1 = 0$$

Esta ecuación es una ecuación lineal, la cual es resuelta en la primera iteración independientemente del método numérico que se haya utilizado para trazar el camino homotópico, de tal forma que el voltaje nodal  $v_1$  se sujeta al valor de la fuente independiente de voltaje  $V_1$ . Por lo tanto, es poco útil asociar esta ecuación a la homotopía. Entonces, sería conveniente asociar el procedimiento de continuación a la  $n$ -ésima ecuación cuya relación de rama sea no lineal.

En la Figura (2) se muestra la solución geométrica del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales de la ecuación (5). Claramente se denotan tres planos:

- $S_1$  El plano exponencial con la característica del diodo  $K_b$
- $S_2$  El plano polinomial con la característica de la conductancia no lineal  $K_c$
- $S_3$  El plano “de carga”, el cual combina la ecuación de la fuente de voltaje  $V_1$  con la característica de la conductancia lineal  $K_a$

Las soluciones al sistema de ecuaciones son denotadas por los puntos blancos en las intersecciones de los planos y representan los puntos de operación en CD del circuito de la Figura (1).

Para el circuito anterior hay tres caminos homotópicos:

- $P_a$  Esta trayectoria se encuentra sobre el plano oblicuo
- $P_b$  Esta trayectoria se encuentra sobre el plano exponencial
- $P_c$  Esta trayectoria se encuentra sobre el plano polinomial

De hecho, cada trayectoria corresponde a la elección de una  $n$ -ésima ecuación diferente, lo cual representa diferentes caminos homotópicos.

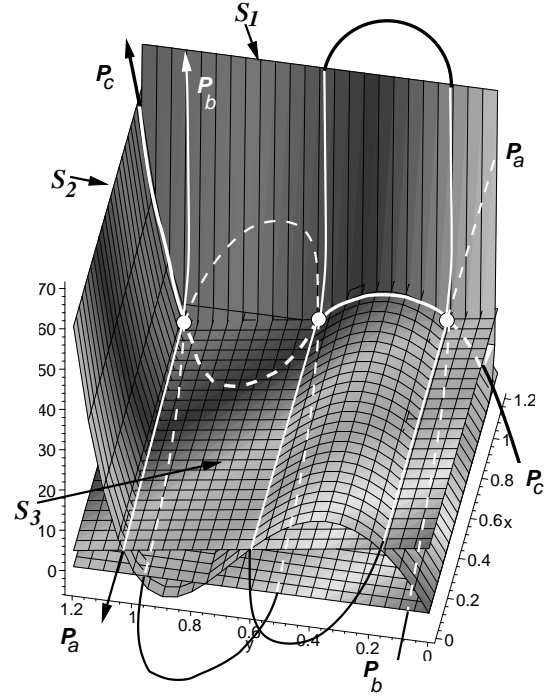


Fig. 2. Trayectorias homotópicas asociadas a la ecuación de equilibrio del circuito de la figura (1)

Resulta claro que la  $n$ -ésima función ( $f_n(x)$ ) debe ser seleccionada utilizando un criterio apropiado para calcular el grado de no linealidad de cada  $f_i(x)$ .

## II. CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES DE RAMA

Para poder llevar a cabo la clasificación de las ecuaciones nodales por su grado de no linealidad, es necesario primero clasificar las funciones de rama de los elementos no lineales por su grado de no linealidad, ya que estos elementos aportan las corrientes que fluyen hacia los nodos y por lo tanto determinan el grado de no linealidad de la ecuación nodal relacionada con el nodo.

Dado que el análisis nodal modificado lleva a cabo la formulación de la ecuación de equilibrio basado en la ley de Kirchhoff de corrientes, que establece:

**Definición 1:** La suma de todas las corrientes que entran y salen de un nodo es igual a cero.

entonces, se requiere saber cuales de esas corrientes provienen de elementos no lineales, así como determinar el tipo de no linealidad de la función de rama de esos elementos no lineales.

Con el objeto de llevar a cabo el análisis de los tipos de funciones de rama, estas se clasifican en:

### • Lineales

Son aquellas en las que se cumplen los principios de homogeneidad y superposición. Los elementos estáticos que cumplen con esto son los resistores y las conductancias lineales [?], que tienen la característica de rama dada por:

$$u = Ri \quad y \quad i = Gu$$

respectivamente, donde  $R$  y  $G$  son los valores de resistencia y conductancia.

- **No lineales**

Son aquellas que en contraposición a las lineales, **no** cumplen el principio de homogeneidad y superposición. Con el objetivo de clasificar a las funciones de rama no lineales, en este trabajo se recurre a la clasificación dada en [?]. En este trabajo, las funciones de rama no lineales se clasifican inicialmente en:

- Funciones no lineales débiles
- Funciones no lineales fuertes

- a) *Funciones débilmente no lineales*

: Las funciones no lineales débiles se clasifican como a continuación se muestra:

- **No acotadas**

Esta clasificación se divide a su vez en:

- Tipo  $U^+$   
si  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , y  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$
- Tipo  $U^-$   
si  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ , y  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$

En la Figura (3) se muestran las dos clases de funciones no acotadas.

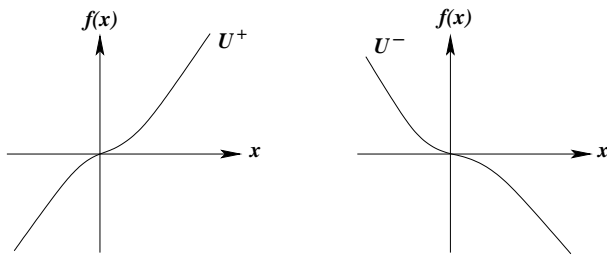


Fig. 3. Funciones no acotadas

- **Semi-acotadas**

Esta clasificación se divide a su vez en:

- Tipo  $H^+$   
si  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , y  $|f(x)|$  permanece acotada conforme  $x \rightarrow -\infty$
- Tipo  $H^-$   
si  $f(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow -\infty$ , y  $|f(x)|$  permanece acotada conforme  $x \rightarrow \infty$

En la Figura (4) se muestran las dos clases de funciones semi-acotadas.

- **Doblemente acotadas**

- Tipo  $B$   
si  $|f(x)|$  permanece acotada conforme  $|x| \rightarrow \infty$

En la Figura (5) se muestra una función doblemente acotada.

- b) *Funciones fuertemente no lineales*

: Las funciones de rama no lineales **fuertes** se pesan por el número de máximos y mínimos locales. De tal forma,

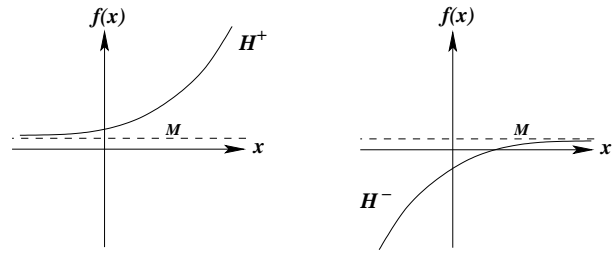


Fig. 4. Funciones semi-acotadas

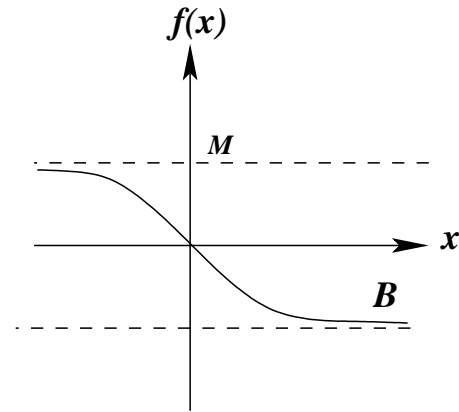


Fig. 5. Función doblemente acotada

que a mayor número de máximos y mínimos mayor grado de no linealidad.

En la Figura (6) se muestra un ejemplo de función no lineal fuerte.

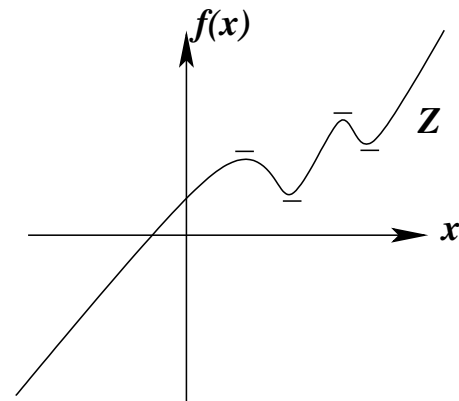


Fig. 6. Función no lineal fuerte

#### A. Asignación de Pesos a las Ramas no Lineales

Se ha mostrado una clasificación de funciones de rama no lineales, de tal forma que ahora ya es posible asignar pesos a cada tipo de función no lineal.

En la Tabla (I) se muestra los pesos asignados a las funciones de rama no lineales débiles.

En esta tabla se le ha asignado el menor peso a las funciones de rama del tipo no acotadas ( $U^\pm$ ) debido a

Tipos	Peso $W$
$U^\pm$	1
$H^\pm$	2
$B$	3

TABLE I

PESOS DE FUNCIONES DE RAMA DÉBILMENTE NO LINEALES

que estas no tienen asíntotas y son las que tienen un comportamiento más parecido al de una resistencia o conductancia lineal. A las funciones de rama del tipo semi-acotadas ( $H^\pm$ ) se les ha asignado un peso mayor debido a que tienen una asíntota. Por último, la función de rama de mayor peso ha resultado ser la del tipo  $B$  ya que cuenta con dos asíntotas.

El cálculo del peso de las funciones fuertemente no lineales se logra mediante la aplicación de la siguiente fórmula simple:

$$\beta = Z + 3$$

donde  $Z$  es el número de máximos y mínimos locales.

En caso de  $Z = 0$ , se determina que la rama no es del tipo no lineal fuerte y por lo tanto es del tipo débil. Entonces, el valor mínimo de  $Z$  es 1, por lo que el peso mínimo de una rama no lineal fuerte es 4, así que siempre resultará más pesada que la función no lineal doblemente acotada ( $B$ ).

### III. CRITERIO DE PESADO DE LAS ECUACIONES NODALES

En la sección 3.1 se ha explicado como el orden de las ecuaciones emanadas del método MNA de circuitos no lineales afecta a las trayectorias homotópicas, debido a que el grado de no linealidad es diferente para cada ecuación. Por lo tanto es importante el pesado de las ecuaciones nodales por su grado de no linealidad.

En la sección anterior se ha dado el primer paso para el pesado de las ecuaciones nodales al presentar una clasificación de funciones de rama no lineales. Partiendo de esta clasificación es posible determinar un criterio de pesado de las ecuaciones nodales.

Se han elaborado dos criterios básicos [?], [?] en el pesado de las ecuaciones nodales, éstos son el criterio de grado de incidencia no lineal y el criterio de tipos de no linealidades incidentes.

A continuación se describen ambos criterios:

#### Criterio de Grado de Incidencia NO lineal

Este criterio se basa en determinar el número de componentes no lineales *incidentes* a cada nodo, considerando este número como el peso de la ecuación nodal asociada al nodo. Aplicando este criterio, resulta que en la Figura (7) el nodo con mayor no linealidad es el nodo (b) ya que tiene más ramas no lineales incidentes a él.

Este criterio de pesado se puede resumir con la siguiente fórmula:

$$\tilde{\delta}_i = \# \text{ de elementos no lineales incidentes } (6)$$

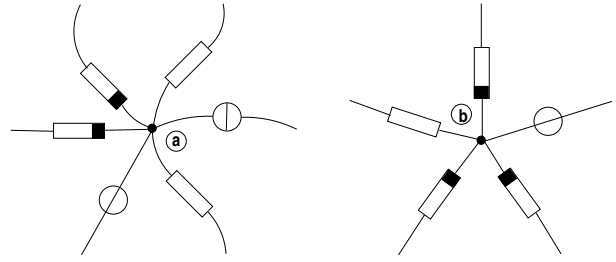


Fig. 7. No linealidades conectadas a los nodos

donde  $\tilde{\delta}_i$  es el grado de incidencia no lineal del nodo  $i$ -ésimo.

#### Criterio de Tipo de No Linealidades Incidentes

El criterio anterior puede llevar a consideraciones erróneas, ya que no toma en cuenta los tipos de no linealidades incidentes en los nodos. De hecho podría resultar que el nodo con mayor grado de incidencia no lineal resulte no ser el nodo que tenga asociada la función nodal más no lineal. En el caso opuesto, un nodo podría tener el menor número de elementos no lineales incidentes a él, pero aun así tener asociada la función nodal más no lineal.

Por lo tanto, se ha creado un segundo criterio, el cual está basado en asignar un peso específico a cada nodo (ecuación nodal) dependiendo del tipo de no linealidades incidentes a él, utilizando la clasificación de funciones no lineales que se ha presentado en la sección 3.2. De tal forma que el peso del nodo es igual a la suma de los pesos de las funciones de rama de todos los elementos no lineales incidentes al nodo. Este criterio de pesado se puede resumir con la siguiente fórmula:

$$\tilde{\zeta}_i = \sum \text{ pesos de las no linealidades incidentes } (7)$$

donde  $\tilde{\zeta}_i$  es la suma de los pesos de las no linealidades incidentes al nodo  $i$ -ésimo.

### IV. TRATAMIENTO DE LOS TRANSACTORES

Hasta ahora se han considerado funciones constitutivas de rama que involucran variables (voltaje y corriente) de la misma rama, i.e. no se han considerado elementos en los que una variable depende de la variable de otra rama, como es el caso de las funciones de rama de los transactores lineales o fuentes controladas. Los transactores lineales forman parte de los modelos de varios dispositivos entre los que se encuentran transistores bipolares, transistores de efecto de campo, amplificadores operacionales, etc. por lo que tienen importancia práctica.

Si bien los transactores son lineales, puede darse el caso de que la variable controladora provenga de un elemento no lineal, lo cual provoca que la no linealidad sea *heredada* [?], [?] por el transactor y que la rama de

salida del mismo esté manejando una variable no lineal. Tal es el caso del modelo de señal grande de Ebers-Moll del transistor bipolar [?] donde el transactor lineal es controlado por la corriente que fluye por una conductancia no lineal, de tal forma que el transactor maneja a su salida una corriente no lineal.

Como resultado de esta situación, se deben tomar en cuenta los efectos de los transactores lineales en los criterios de pesado cuando la variable controladora proviene de un elemento no lineal, como se muestra esquemáticamente en la Figura (8).

Dependiendo si la variable de salida del transactor es corriente o voltaje, la ecuación de equilibrio se verá afectada; ya sea en la ecuación nodal correspondiente o en la relación de rama no NA compatible, tal y como se muestra en la Figura (9). En los transactores con corriente como variable de salida, ésta es vista como una corriente no lineal que fluye hacia el nodo, mientras que para los transactores con voltaje como variable de salida, éstos involucran una ecuación no NA compatible.

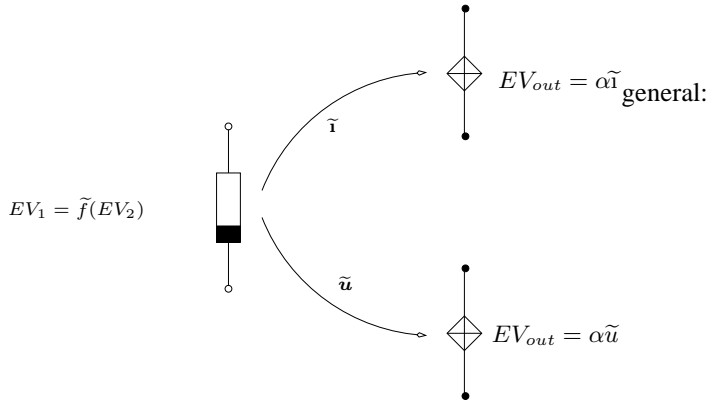


Fig. 8. Transactores lineales involucrando variables no lineales

Desde el punto de vista de los criterios de asignación de peso, el peso de los elementos no lineales es trasladado hacia los transactores, sólo que el peso se multiplica por el factor de acoplamiento  $\alpha$  del transactor.

## V. ESTUDIO DE LOS ELEMENTOS NO NA COMPATIBLES

Cuando se utiliza el método MNA para establecer la ecuación de equilibrio, dada en (1), ésta tiene la forma

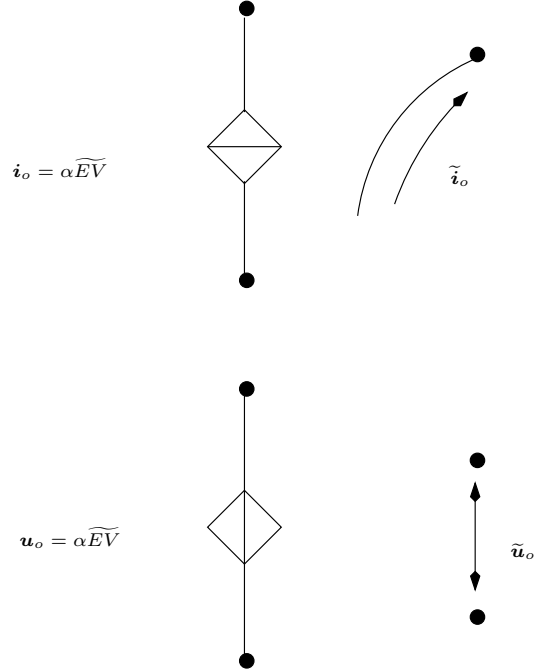


Fig. 9. Variables de salida de los transactores afectando la ecuación de equilibrio

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_j(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \\ \frac{f_n(\mathbf{x})}{r_1(\mathbf{x})} \\ \vdots \\ r_k(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ r_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

donde  $f_j(\mathbf{x}) = 0$  es la ecuación nodal del  $j$ -ésimo nodo y  $r_k(\mathbf{x}) = 0$  es la ecuación de rama del  $k$ -ésimo elemento no NA compatible. Hay  $n$  nodos y  $m$  funciones de rama provenientes de los elementos no NA compatibles. Por lo tanto, la tarea de asignación de pesos a las ecuaciones emanadas del método MNA aún no está terminada ya que hasta el momento sólo se han pesado las  $n$  ecuaciones nodales, faltando por asignar pesos a las  $m$  ecuaciones introducidas por los elementos NA no compatibles.

La tarea es simple, pues dado que los elementos no NA compatibles contribuyen con funciones adicionales, solamente se tiene que asignar el peso de la función de rama del  $m$ -ésimo elemento de acuerdo a la clasificación de las funciones  $u-i$  constitutivas de rama desarrollada en la sección II.

## VI. PROCEDIMIENTO DE ASIGNACIÓN DE PESO

En esta sección se resumen los conceptos de las secciones anteriores y se genera el procedimiento para llevar a cabo la asignación sistemática de los pesos a las ecuaciones nodales.

El procedimiento de pesado puede resumirse en los siguientes pasos:

- 1) Identificar todos los elementos no lineales del circuito.
- 2) Pesar todas las funciones de rama de los elementos no lineales.
- 3) Identificar todos los transactores controlados por elementos no lineales y asignarles el peso de esa rama calculado en el paso anterior multiplicado por el factor de acoplamiento ( $\alpha$ ) del transactor.
- 4) Sumar los pesos de todas las funciones de rama no lineales de elementos incidentes al nodo.

El procedimiento de pesado del nodo se puede resumir con la expresión siguiente [?], [?]:

$$\omega_a = \underbrace{\sum_{j=1}^M |\alpha_j| \rho_j}_{\text{Transactores}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N \beta_k + \sum_{i=1}^Q W_i}_{\text{Tipos}} \quad (8)$$

donde  $W$  es el peso de los elementos no lineales débiles,  $\beta$  es el peso de los elementos no lineales fuertes,  $\rho$  es el peso de las ramas controladoras no lineales,  $M$  es el número de transactores que dependen de elementos no lineales,  $\alpha$  es el factor de acoplamiento de los transactores,  $N$  es el número de elementos no lineales fuertes, y  $Q$  es el número de elementos no lineales débiles.

### A. Criterios de Desempate

La aplicación de los criterios de pesado puede dar como resultado que algunas ecuaciones tengan el mismo peso. En estos casos es necesario utilizar algún criterio de desempate, el cual tome en cuenta los efectos de componentes que hasta el momento se han considerado como lineales.

Las fuentes de voltaje ( $V$ ) y de corriente ( $I$ ) no cumplen con el principio de linealidad, por lo tanto se pueden tomar en cuenta en los criterios de pesado como elementos no lineales, y de esa forma tratar de desempatar los casos que den como resultado nodos de igual peso. Las funciones de rama de estos elementos se pueden clasificar como no lineales débiles y caen en la categoría de doblemente acotadas.

Por lo tanto, sólo en el caso de que existan empates en el grado de no linealidad de las ecuaciones, el peso de las fuentes de voltaje y de corriente es 3.

### B. Variantes de Asignación de Pesos

Una vez pesadas todas las ecuaciones del sistema, se plantearon tres variantes en los reordenamientos:

- Reordenar las  $n + m$  ecuaciones en forma ascendente de peso
- Reordenar las  $n + m$  ecuaciones en forma descendente de peso
- Intercambiar sólo la última ecuación por la más no lineal.

La implementación del procedimiento de asignación de pesos y sus variantes ha sido realizada en Maple V debido a que varias de las operaciones necesarias para llevar a cabo la clasificación de las ramas y la asignación de pesos se pueden ejecutar de manera más eficiente por medio de técnicas de análisis simbólico. Algunas de esas operaciones son [?], [?]:

- ✳ Diferenciación.
- ✳ Determinar el número de máximos y mínimos.
- ✳ Simple sustitución numérica de las variables controladoras (voltaje o corriente) en la función de rama dentro de un intervalo dado.
- ✳ Determinación del rango de variación para las variables controladoras.
- ✳ Cálculo del valor límite cuando la variable independiente tiende a  $\pm\infty$ .

## VII. APLICACIÓN AL MÉTODO DE CHAO

En esta sección se aplica el procedimiento de pesado de las ecuaciones al método homotópico de Chao. Repetimos aquí la ecuación homotópica, para facilitar la lectura:

$$\frac{df_i[\mathbf{x}(p)]}{dp} + f_i[\mathbf{x}(p)] = 0 \quad (9)$$

donde  $f_i(\mathbf{x}(0)) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Las funciones  $f_i$  representan las ecuaciones emanadas del método MNA. La  $n$ -ésima ecuación está dada por:

$$\frac{df_n[\mathbf{x}(p)]}{dp} \pm f_n[\mathbf{x}(p)] = 0 \quad (10)$$

Debido a que ésta homotopía depende fuertemente de la  $n$ -ésima ecuación, el cambiar la última ecuación por otra más no lineal afecta las trayectorias homotópicas. En la práctica, sólo basta con intercambiar la última ecuación con alguna otra, ya que el orden de las primeras  $(n - 1)$  ecuaciones no tiene relevancia dado que no tiene efectos en las trayectorias homotópicas. Por lo tanto se ha elegido el segundo criterio de reordenamiento.

## VIII. APLICACIÓN AL MÉTODO DE CHUA

El método de Chua es también conocido como método de intercambio de parámetros y consiste de hecho, en un método para trazar la trayectoria homotópica, a una homotopía muy específica — que aquí se repite por comodidad:

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + (\mu - 1)\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad (11)$$

donde  $\mathbf{f}$  es la ecuación de equilibrio,  $\mathbf{x}$  representa las variables del circuito tales como voltajes nodales y corrientes de elementos NA no compatibles,  $\mu$  es el parámetro homotópico, y  $\mathbf{x}_0$  es el punto de inicio de la homotopía.

Este método está fundamentado en la parametrización de las variables  $(x, \mu)$  con respecto a la longitud del arco  $s$ , pero, debido a que el cálculo de  $s$  requiere de un tiempo excesivo de cómputo cuando el número de variables es grande, se decidió usar una aproximación en la que se sustituyera  $s$  por alguna de las variables  $(x, \mu)$ , la cual se elige bajo la consideración de que sea la variable que cambie más rápido. Se establece el sistema de ecuaciones diferenciales parciales para determinar el cambio que sufren las variables  $(x, \mu)$  con respecto a  $s$  y se agrega una ecuación relacionada con la longitud del arco  $s$ , de tal forma que queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial x_n} & \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial \mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial x_k} & \dots & \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial x_n} & \frac{\partial \hat{f}_n}{\partial \mu} \\ 0 & 0 & \dots & sgn\left(\frac{dx_k}{dp}\right) & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dp} \\ \frac{dx_2}{dp} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dp} \\ \frac{d\mu}{dp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cf_1(x, \mu) \\ -cf_2(x, \mu) \\ \vdots \\ -cf_n(x, \mu) \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde la última ecuación corresponde a la ecuación relacionada con la longitud del arco. Por último, se aplica algún método de integración numérica para resolver este sistema, cambiando a cada paso de integración la variable que se sustituirá por la longitud del arco.

El método de continuación de esta homotopía depende básicamente de una variable  $(x, \mu)$  distinta en cada paso de iteración y no de la posición de alguna ecuación como en el caso del método de Chao. Por lo tanto, la homotopía de Chua no se ve afectada por el reordenamiento de las ecuaciones de equilibrio o de la ecuación relacionada con la longitud del arco, ya que el reordenamiento de estas ecuaciones es una operación matricial que equivale a cambiar el orden de los renglones en una matriz y esa operación no causa efectos sobre el resultado final.

## IX. CASOS DE ESTUDIO

### A. Circuito ERD

El primer circuito-ejemplo consiste de la conexión en serie de una fuente independiente de voltaje ( $V_1$ ), una resistencia lineal ( $R_1$ ) y una conductancia no lineal ( $K_1$ ). Denotaremos a este circuito como el circuito ERD.

La conductancia no lineal tiene una función constitutiva de rama de un diodo túnel dada por una función polinomial de tercer grado:

$$i = (0.8u^3 - 5.25u^2 + 9u) \times 10^{-3} \text{ A}$$

El circuito se muestra en la Figura (10) junto con los valores de los elementos lineales.

Parámetros	Chao	Chua
h	1	0.2
tol	0.03	0.08
itemax	45	200

TABLE II  
PARÁMETROS DE CHAO Y CHUA

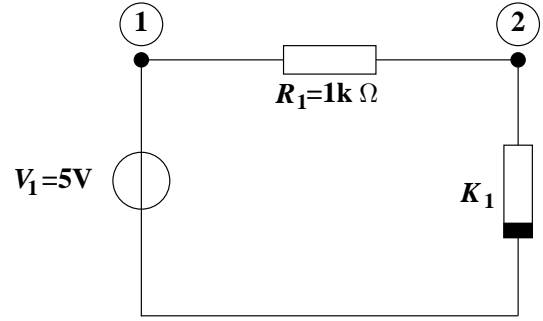


Fig. 10. Circuito ERD

### B. Aplicando el Criterio de Pesado

Como resultado de aplicar el criterio de pesado de funciones de rama fuertemente no lineales descrito en la sección II, el peso de la conductancia no lineal de este circuito ERD es 6, como se muestra en la Tabla (III). Además, resulta claro que el nodo más pesado del circuito es el nodo ② ya que la conductancia no lineal es incidente a él, como se muestra en la Tabla (IV).

Componentes	Peso
$R_1$	0
$V_1$	0
$K_1$	5

TABLE III  
PESOS DE LAS FUNCIONES DE RAMA DEL CIRCUITO ERD

Nodo	Peso
①	0
②	5

TABLE IV  
PESOS DE LOS NODOS DEL CIRCUITO ERD

Debido a que la fuente de voltaje  $V_1$  es un elemento no NA compatible, resulta que se agrega una ecuación extra a la ecuación de equilibrio. Por lo tanto, es necesario pesar esta ecuación, así que utilizando el criterio descrito en la sección V, el peso la ecuación extra es cero.

El pesado de las ecuaciones del circuito ERD emanadas del método MNA, permite reordenar las ecuaciones bajo los criterios de grado de no linealidad y simular para observar los efectos sobre la homotopía. A continuación se muestran los resultados para las homotopías de Chao y Chua.

### C. Simulación del Circuito ERD con el Método de Chao

El método de Chao calcula su punto de inicio utilizando un método de optimización que consiste en calcular un punto  $x_0$  sobre la intersección de los planos de las primeras  $(n + m - 1)$  ecuaciones del circuito, donde  $n$  es el número de nodos del circuito y  $m$  es el número de elementos no NA compatibles. Por lo tanto sólo existen  $(n + m)$  combinaciones que darán puntos de inicio diferentes, y por lo tanto trayectorias homotópicas diferentes.

Los resultados de las simulaciones del método de Chao han mostrado que el orden de las primeras  $(n + m - 1)$  ecuaciones del circuito no afecta las trayectorias homotópicas, y por lo tanto únicamente la última ecuación determina el comportamiento de esta homotopía, de tal forma que sólo existen  $(n + m)$  combinaciones del orden de las ecuaciones que darán trayectorias homotópicas diferentes.

Existe un ordenamiento de ecuaciones para el método de optimización y otro ordenamiento de la homotopía. Por lo tanto, ya que en el método de optimización únicamente  $(n + m)$  combinaciones son de interés y que el método de Chao tiene únicamente  $(n + m)$  combinaciones que resultan en trayectorias homotópicas diferentes, resulta que existen  $(n + m)^2$  combinaciones que son de interés para observar los efectos del reordenamiento, debido a que el resto de las combinaciones arrojan resultados redundantes.

Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla (V). La primer simulación de esta tabla corresponde al caso de reordenamiento en el cual se coloca al final de la optimización y de la homotopía la función de rama de la fuente de voltaje, y solo se obtuvo una raíz, este caso de ordenamiento es el que se obtiene normalmente cuando no se aplican los criterios de reordenamiento.

Por otro lado, el mejor de los casos de reordenamiento es el último, el cual es uno de los tres ordenamientos que lograron convergencia global al tener al final del sistema de ecuaciones la ecuación del nodo ①. Los mejores tiempos de cómputo se obtuvieron al colocar exactamente la misma ecuación al final del sistema de ecuaciones, en la homotopía y en la optimización.

Los valores de las raíces resultantes de la simulación con la ecuación del nodo ① al final del sistema de ecuaciones en la optimización y en la homotopía se muestran a continuación:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_{V_1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5.00000 \\ 0.82520 \\ -0.00417 \end{bmatrix}}_{\text{Solución \#1}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 5.00000 \\ 2.32209 \\ -0.00267 \end{bmatrix}}_{\text{Solución \#2}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 5.00000 \\ 3.74245 \\ -0.00125 \end{bmatrix}}_{\text{Solución \#3}}$$

### D. Simulación del Circuito ERD con el Método de Chua

Las simulaciones han mostrado que el reordenamiento de las ecuaciones del circuito no tiene efectos sobre las trayectorias homotópicas.

En la Tabla (VI) se muestran los resultados de las simulaciones para todos los ordenes de las ecuaciones

$(n + m)$ -ésima Ecuación en Chao	$(n + m - 1)$ Ecuaciones en Optimización	# de Raíces	Tiempo Total
$V_1$	①, ②	1	3.000
$V_1$	①, $V_1$	1	3.550
$V_1$	②, $V_1$	1	3.569
②	①, ②	1	3.120
②	①, $V_1$	1	3.089
②	②, $V_1$	1	3.130
①	①, ②	3	4.369
①	①, $V_1$	3	4.139
①	②, $V_1$	3	3.999

TABLE V

SIMULACIONES CON EL MÉTODO DE CHAO DEL CIRCUITO ERD

del circuito ERD. En esta tabla se puede observar que la convergencia del método de Chua no se afectó por el reordenamiento de las ecuaciones, de hecho las trayectorias homotópicas son exactamente las mismas y por lo tanto los tiempos de cómputo también resultan ser iguales. El reordenamiento de la ecuación relacionada con la longitud del arco, tampoco logró ningún efecto sobre las trayectorias homotópicas.

Orden de Ecuaciones	# de Raíces
①, ②, $V_1$	2
①, $V_1$ , ②	2
②, ①, $V_1$	2
②, $V_1$ , ①	2
$V_1$ , ①, ②	2
$V_1$ , ②, ①	2

TABLE VI

SIMULACIONES CON EL MÉTODO DE CHUA DEL CIRCUITO ERD

Los valores de las raíces resultantes de las simulaciones son:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_{V_1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5.00000 \\ 0.78122 \\ -0.00421 \end{bmatrix}}_{\text{Solución \#1}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 5.01699 \\ 2.25608 \\ -0.00276 \end{bmatrix}}_{\text{Solución \#2}}$$

Es puede observar que existe pequeña diferencia entre los valores de las raíces arrojadas por el método de Chua y Chao, y se debe a que se han elegido valores diferentes de tolerancia para cada método.

*Circuito ERDD*

El siguiente circuito de ejemplo consta de dos conductancias no lineales con funciones de rama polinomiales

$$\begin{aligned} i_{K_3} &= (2.5u^3 - 10.5u^2 + 11.8u) \times 10^{-3} \text{ A} \\ i_{K_4} &= (0.43u^3 - 2.69u^2 + 4.56u) \times 10^{-3} \text{ A} \end{aligned}$$

en serie con una resistencia lineal ( $R_2$ ) y una fuente de voltaje ( $V_1$ ). El diagrama del circuito se muestra en la Figura (11) junto con los valores de los elementos lineales.



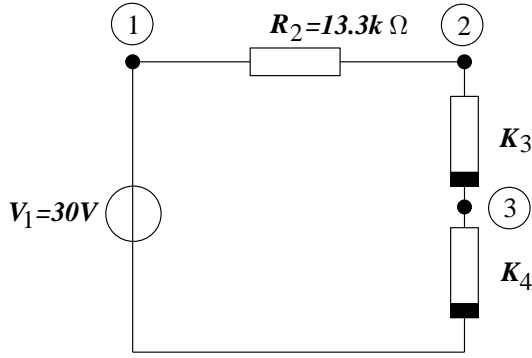


Fig. 11. Circuito ERDD

#### F. Aplicando el Criterio de Pesado

Los pesos de las ramas y las ecuaciones del circuito se presentan en las Tablas (VII) y (VIII) respectivamente. Es claro que el nodo más no lineal resulta ser el nodo ③ ya que las dos conductancias no lineales ( $K_3$  y  $K_4$ ) son incidentes a él.

Componentes	Peso
$V_1$	0
$R_2$	0
$K_3$	5
$K_4$	5

TABLE VII

PESOS DE LAS FUNCIONES DE RAMA DEL CIRCUITO ERDD

Nodo	Peso
①	0
②	5
③	10

TABLE VIII

PESOS DE LOS NODOS DEL CIRCUITO ERDD

El peso de la última ecuación emanada del análisis nodal es la de la fuente de voltaje  $V_1$  por lo que se le asigna un peso de 0 al aplicar los criterios de la sección V. A continuación se muestran los resultados de las simulaciones de este circuito para diferentes ordenamientos de ecuaciones, usando las homotopías de Chao y Chua.

#### G. Simulación del circuito ERDD con el método de Chao

Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla (IX). En este caso la homotopía fue mejorada al colocar al final del sistema de ecuaciones la ecuación ② en vez de ①, lo cual significó aumentar el grado de no linealidad de la  $(n + m)$ -ésima ecuación. En ningún caso el reordenamiento de las ecuaciones en el método de optimización causó diferencia en la convergencia del método, la cual no fue global ya que el circuito cuenta con 9 soluciones.

$(n + m)$ -ésima Ecuación en Chao	$(n + m - 1)$ Ecuaciones en Optimización	# de Raíces	Tiempo Total
①	$V_1, ③, ②$	2	2.754
①	$V_1, ③, ①$	2	2.789
①	$V_1, ②, ①$	2	2.849
①	①, ②, ③	2	2.920
②	$V_1, ③, ②$	1	2.685
②	$V_1, ③, ①$	1	2.807
②	$V_1, ②, ①$	1	3.027
②	①, ②, ③	1	3.175
③	$V_1, ③, ②$	1	2.781
③	$V_1, ③, ①$	1	2.780
③	$V_1, ②, ①$	1	2.865
③	①, ②, ③	1	2.900
$V_1$	$V_1, ③, ②$	1	2.980
$V_1$	$V_1, ③, ①$	1	3.043
$V_1$	$V_1, ②, ①$	1	3.159
$V_1$	①, ②, ③	1	3.090

TABLE IX

SIMULACIONES CON EL MÉTODO DE CHAO DEL CIRCUITO ERDD

#### H. Simulación del Circuito ERDD con el Método de Chua

El valor inicial de la homotopía se eligió de:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_{V_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.000 \\ 2.005 \\ 0.617 \\ 0.002 \end{bmatrix}$$

El reordenamiento del sistema de ecuaciones de equilibrio y de la ecuación relacionada con la longitud del arco no afectaron a las trayectorias homotópicas (utilizando una precisión de 30 dígitos significativos), con las cuales únicamente dos raíces fueron encontradas de las 9 que posee el circuito ERDD.

A continuación se muestran las raíces encontradas:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ i_{V_1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 30.06000 \\ 2.41129 \\ 0.74103 \\ -0.00207 \end{bmatrix}}_{\text{Solución \#1}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 30.00839 \\ 4.12780 \\ 1.85372 \\ -0.00195 \end{bmatrix}}_{\text{Solución \#2}}$$

Por otro lado, una modificación de las condiciones de simulación de este ejemplo, ha puesto de manifiesto que es posible tener trayectorias homotópicas diferentes en el método de Chua al reordenar el sistema de ecuaciones y simular bajo la condición de baja precisión (10 dígitos significativos), lo cual produce cierto error numérico en las operaciones aritméticas. De tal forma que el orden de las ecuaciones afecta las trayectorias homotópicas después de varias iteraciones, debido al error numérico acumulado iteración tras iteración y que ciertos órdenes de las ecuaciones resultan ser más propensos al error numérico que otros. Por ejemplo, se han realizado exactamente las mismas simulaciones de este ejemplo, pero usando una precisión de 10 dígitos. Los resultados para algunas de las simulaciones se muestran en la Tabla (X), mostrando

que debido a la baja precisión, el error acumulado en las iteraciones en combinación con los reordenamientos de las ecuaciones modifica las trayectorias homotópicas e inclusive mejora la convergencia del método, al lograr alcanzar 4 raíces en una de las simulaciones.

Orden de Ecuaciones	# de Raíces
①,②,③, $i_{V_1}$	2
①,②, $i_{V_1}$ ,③	2
①,③,②, $i_{V_1}$	4

TABLE X

SIMULACIONES CON EL MÉTODO DE CHUA DEL CIRCUITO ERDD  
(BAJA PRECISIÓN)

#### X. CIRCUITO SCHMITT-TRIGGER

En esta sección se analizará el circuito Schmitt-trigger, que cuenta con tres puntos de operación y se muestra con los valores de sus componentes en la Figura (12). En este ejemplo se utiliza el modelo de Ebers-Moll para los transistores bipolares, mostrado en la Figura (13). Los valores para  $\alpha_F$  y  $\alpha_R$  de ambos transistores bipolares ( $Q_1$ ,  $Q_2$ ) son de 0.99 y 0.01 respectivamente y las funciones constitutivas de rama de los diodos en el modelo de Ebers-Moll son:

$$i_{D_C} = 1 \times 10^{-9} (e^{40v_{BC}} - 1) A$$

$$i_{D_E} = 1 \times 10^{-9} (e^{40v_{BE}} - 1) A$$

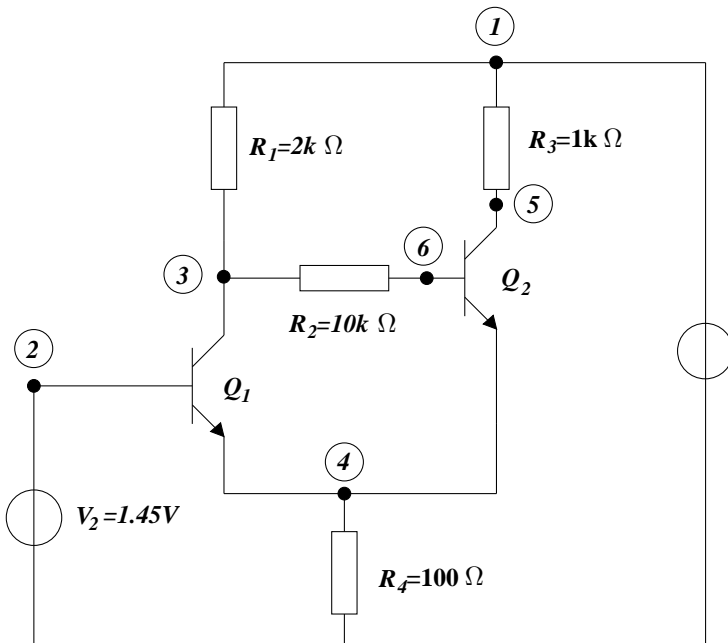


Fig. 12. Circuito Schmitt-trigger

##### A. Aplicando el Criterio de Pesado

Los pesos de las ecuaciones nodales del circuito se presentan en la Tabla (XI). Como se puede observar los

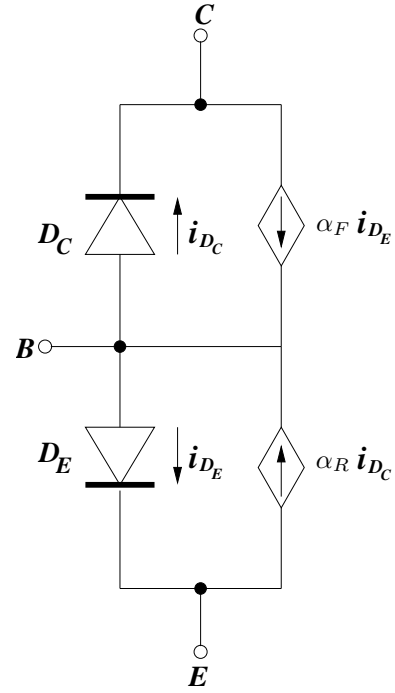


Fig. 13. Modelo Ebers-Moll del transistor bipolar

nodos ② y ⑥ son los más pesados del circuito, con un peso de 6 cada uno. Entonces, se puede aplicar el criterio de desempate descrito en la sección VI-A, de tal forma que el nodo ② adquiere un peso total de 9 y por lo tanto se considera que el nodo ② tiene la ecuación nodal asociada más no lineal del circuito.

Nodo	Peso
①	0
②	6
③	3.98
④	4.04
⑤	3.98
⑥	6

TABLE XI

PESOS DE LOS NODOS DEL CIRCUITO SCHMITT-TRIGGER

$$V_1 = 10V$$

##### B. Simulación del Circuito Schmitt-trigger con el Método de Chao

Las simulaciones del circuito Schmitt-trigger con el método de Chao, con diferentes ordenamientos de las ecuaciones en la optimización y en la homotopía no lograron convergencia a ninguna raíz. La razón por la cual el método de Chao ha fallado en converger a las soluciones, se puede explicar en función de que es posible que el método de optimización no fue capaz de encontrar ningún punto sobre alguna trayectoria de soluciones que lograra asegurar la convergencia del método. Por lo tanto, únicamente mediante el uso de un valor inicial arbitrario se ha logrado la convergencia del método.

El valor inicial de las incógnitas está dado por el siguiente vector:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ i_{V_1} \\ i_{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.33 \\ 1.20 \\ 4.87 \\ 0.90 \\ 0.98 \\ 1.24 \\ 0 \\ -0.01 \end{bmatrix}$$

Bajo estas condiciones iniciales de la homotopía, los reordenamientos de las ecuaciones afectaron las trayectorias homotópicas. Los resultados de estas simulaciones se pueden observar en la Tabla (XII).

$(n + m)$ -ésima Ecuación en Chao	# de Raíces	Tiempo Total
①	1	44.630
②	1	38.290
③	1	45.310
④	1	44.759
⑤	1	44.630
⑥	1	38.620
$V_1$	1	39.680
$V_2$	1	38.969

TABLE XII

SIMULACIONES CON EL MÉTODO DE CHAO DEL CIRCUITO SCHMITT-TRIGGER

Es interesante observar de esta tabla, que los menores tiempos de computo fue cuando se colocaron en la  $(n + m)$ -ésima posición las ecuaciones que obtuvieron el mayor grado de no linealidad. Por último, la raíz que se encontró con este método es:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ i_{V_1} \\ i_{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.999999 \\ 1.449999 \\ 5.764902 \\ 1.091165 \\ 1.223019 \\ 1.541015 \\ -0.000017 \\ -0.010894 \end{bmatrix}$$

### C. Simulación del Circuito Schmitt-trigger con el Método de Chua

El resultado de las simulaciones confirmó una vez más, que el reordenamiento de las ecuaciones del circuito y de la ecuación relacionada con la longitud del arco no afectan a las trayectorias homotópicas. Como resultado de las simulaciones se encontró la siguiente raíz:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ i_{V_1} \\ i_{V_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.00000 \\ 1.45000 \\ 1.06006 \\ 1.04578 \\ 10.00000 \\ 1.06007 \\ -0.00598 \\ -0.004469 \end{bmatrix}$$

## XI. CONCLUSIONES

El desarrollo de los métodos de homotopía en los últimos años ha resultado importante para la simulación numérica de circuitos resistivos no lineales. El presente trabajo de tesis se enfocó a mejorar el rendimiento de las homotopías mediante el reordenamiento del sistema de ecuaciones no lineales emanadas del método MNA. El criterio para llevar a cabo el reordenamiento ocurre a través de la asignación de pesos a las ecuaciones algebraicas no lineales. Se determinaron varios esquemas de asignación de pesos.

Se ha demostrado que el reordenamiento es capaz de afectar la trayectoria de soluciones del método de homotopía de Chao, mientras que para el método de homotopía de Chua no tiene efectos. Esto es debido fundamentalmente a que el mecanismo de continuación del método de Chao reside en efectuar un cambio de signo en una ecuación de las  $n$  del sistema. Mientras que en el método de Chua, el mecanismo de continuación va apareado a la variación de la longitud del arco en  $c/u$  de las direcciones del espacio  $n$ -dimensional; i.e., no está asociado con una ecuación en particular.