

Modified hypersphere method applied to biparameter homotopy: bipolar circuit simulation

Héctor Vázquez-Leal and Roberto Castañeda Sheissa and Rafael Ravago Vernal

Universidad Veracruzana

Facultad de Instrumentación Electrónica

Xalapa, Veracruz, México

Email: hvazquez@uv.mx

Abstract—En este artículo se muestra como se puede adaptar y aplicar la técnica de las hiperesferas al trazado de homotopías multiparamétricas. Además, se presentará una técnica basada en círculos (derivada de las hiperesferas), la cual es más rápida y simple de implementar que la técnica de las hiperesferas. Por ultimo, se presentará un análisis comparativo entre ambas técnicas aplicándolas a la simulación de circuitos con transistores bipolares.

I. INTRODUCTION

El aumento en la complejidad de los circuitos, impulsa el avance científico en el área de las técnicas de simulación de circuitos integrados. Asimismo, las homotopías se han presentado como una herramienta novedosa y útil en el área de la solución del punto de operación de circuitos [2], [6], debido a que el método Newton-Raphson (NR) (ampliamente utilizado) presenta problemas de convergencia como oscilación y divergencia.

II. MULTIPARAMETER HOMOTOPY

El primer paso para formular una homotopía es establecer la ecuación de equilibrio a resolver, la cual se formula a partir de las leyes de Kirchhoff quedando definida como:

$$f(x) = 0 \quad \text{where} \quad f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n \quad (1)$$

donde x representa a las variables eléctricas del circuito y n es el número de variables eléctricas.

Las homotopías multiparamétricas [9], [3], [8] se caracterizan por agregar más de un parámetro homotópico a la ecuación de equilibrio. Cuando los parámetros homotópicos están ajustados a cero, la solución de $H(\cdot)$ es trivial y cuando los parámetros alcanzan el valor de uno, entonces se ha localizado el punto de operación. La función de homotopía multiparamétrica se puede representar como:

$$H(f(x), \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = 0 \quad (2)$$

donde los parámetros homotópicos son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in [0, 1]$ y k es el número de parámetros homotópicos.

Las homotopías multiparamétricas [9] se han propuesto con la finalidad de evadir fork bifurcations, singularidades, entre otros problemas que se pueden dar con las trayectorias homotópicas. Asimismo, tanto para las homotopías uniparamétricas [2] como para las multiparamétricas, la técnica de trazado [7], [1] es una herramienta fundamental que puede afectar la convergencia, velocidad y número de soluciones localizadas. Por lo tanto, se propone aplicar 2 técnicas de trazado a homotopías multiparamétricas, las cuales serán descritas las próximas secciones.

III. TÉCNICAS DE TRAZADO

Con la finalidad de aplicar las técnicas de trazado descritas en este artículo se utilizará a manera de ejemplo una homotopía biparamétrica basada en el método homotopía de Newton:

$$H(f(x), \lambda_1, \lambda_2) = G(f(x), \lambda_2) - (1 - \lambda_1)G(f(x_i), 0) \quad (3)$$

Con la existencia de dos parámetros se produce dos deformaciones o transformaciones simultáneas y relacionadas una en G y otra en H . Cuando $[x, \lambda_1, \lambda_2] = [x_i, 0, 0]$, la función homotópica se satisface ($H(\cdot) = 0$). Además, cuando $[\lambda_1, \lambda_2] = [1, 1]$, $G(f(x), 1) = f(x)$ y $H(\cdot) = G(f(x), 1)$ por lo que la solución encontrada es precisamente el punto de operación buscado (x_s). Sin embargo, como $H : \mathfrak{R}^{n+2} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ tiene 2 variables extras, es necesario agregar otras 2 ecuaciones al sistema H para poder resolverlo con técnicas más convencionales como NR.

- 1) **Ecuación $n + 1$.** Se agrega una ecuación que defina la trayectoria $\lambda_1 - \lambda_2$, la cual se denominará función paramétrica $M(\lambda_1, \lambda_2)$. Esta ecuación cruza por 3 puntos $[\lambda_1, \lambda_2]$: $p_1 = [0, 0]$, $p_2 = [A, B]$ y $p_3 = [1, 1]$. La

ecuación es:

$$M(\lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 + \frac{(\lambda_2 + \frac{B(-1+A)}{AB+1-2A})}{(-\frac{(-1+2A-B)\lambda_2}{AB+1-2A} + 2\frac{B(-1+A)}{AB+1-2A})} \quad (4)$$

donde p_2 es definido por usuario, tal como se muestra en la figura 1(a). El rango de valores para A y B es $[0, 1]$.

- 2) **Ecuación $n+2$.** Se agrega la ecuación de la hipersfera [10]:

$$S(\cdot) = (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + \dots + (\lambda_1 - c_{n+1})^2 + (\lambda_2 - c_{n+2})^2 - r^2 \quad (5)$$

donde c es el centro de la hipersfera (el cual ajusta su valor en cada iteración) y $r \ll 1$ es el radio de la hipersfera (tamaño de paso).

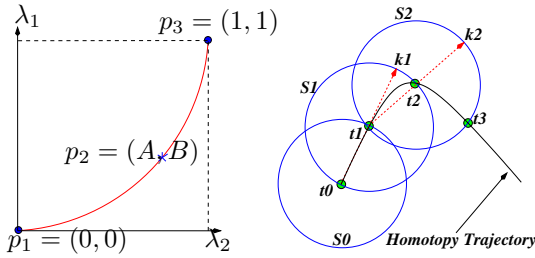


Fig. 1: a) Función paramétrica b) Técnica de las hipersferas

El resumen del procedimiento consiste en los siguientes pasos [10] (ver figura 1(b)):

- 1) Se establece la primer hipersfera $S0$ con centro en $t0 = [x_i, p_1]$ y se resuelve el sistema de ecuaciones (ecuaciones 3, 4 y 5) con el método de NR (usando como punto de inicio el $t0$), localizándose el punto $t1$.
- 2) Se crea una nueva hipersfera $S1$ con centro en $t1$.
- 3) Utilizando los puntos $t0$ y $t1$ se realiza una predicción, la cual toca la hipersfera $S1$ en el punto $k1$, el cual es utilizado como punto de inicio para el método NR, hasta localizar el punto $t2$ sobre la trayectoria homotópica.
- 4) Los pasos 2 y 3 se repiten sucesivamente hasta cruzar por el punto $p3$.
- 5) Se utiliza los dos puntos anterior y posterior a $p3$ para realizar una interpolación [4]. El tipo de interpolación utilizada en este artículo es la interpolación lineal multidimensional (conocida como LERP), la cual produce una aproximación x_a de la solución x_s de la ecuación de equilibrio.
- 6) Finalmente, usando el método NR con punto de inicio x_a , se mejora la precisión del punto de operación x_s .

Es posible remplazar la ecuación 5 por la ecuación de un círculo, en función de los parámetros homotópicos:

$$C(\cdot) = (\lambda_1 - c_{n+1})^2 + (\lambda_2 - c_{n+2})^2 - r^2 \quad (6)$$

donde $r \ll 1$. El resto de los pasos para implementar la continuación numérica son los mismos que los descritos para la técnica de las hipersferas.

IV. STUDY CASE: CIRCUIT WITH BIPOLAR TRANSISTORS AND A DIODE

The following circuit [5] (see figure 2), contains 9 solutions, has become the reference circuit for the Homotopy applied to circuit analysis.

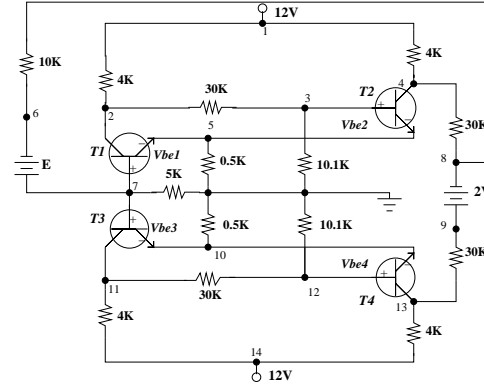


Fig. 2: Chua's circuit.

Utilizando el sistema reportado en [5] se formula la ecuación de equilibrio aumentada: $f(v_1, v_2, v_3, v_4, \lambda_2)$:

$$f_1 = 6.103168I_s(e^{40v_1} - 1)\lambda_2 + 4.36634v_2 + 2.863168I_s(e^{40v_2} - 1) - 12$$

$$f_2 = 5.4v_1 + 3.58I_s(e^{40v_1} - 1)\lambda_2 + 6.62I_s(e^{40v_2} - 1) + v_3 + 0.7I_s(e^{40v_3} - 1) + 0.5I_s(e^{40v_4} - 1) - 22$$

$$f_3 = 6.103168I_s(e^{40v_3} - 1) + 2.863168I_s(e^{40v_4} - 1)\lambda_2 + 4.36634v_4 - 12$$

$$f_4 = v_1 + 0.7I_s(e^{40v_1} - 1)\lambda_2 + 0.5I_s(e^{40v_2} - 1) + 5.4v_3 + 3.58I_s(e^{40v_3} - 1) + 6.62I_s(e^{40v_4} - 1)\lambda_2 - 20$$

donde $I_s = 10^{-6}$. Se formula el sistema de ecuaciones aumentado utilizando las ecuaciones 3, 4 y 5 o 6 dependiendo de la técnica de trazado a utilizar.

En la tabla I se presenta de manera resumida los resultados de realizar el trazado de 4 trayectorias con diferente punto de inicio (x_{i1} , x_{i2} , x_{i3} y x_{i4}) cada una. Este proceso se repitió para las 2 técnicas de trazado, mostrándose de manera gráfica en las figuras 3 (a) y 3(b). Existen dos conclusiones interesantes que resaltar: en primera las trayectorias homotópicas trazadas desde un mismo punto de inicio conducen exactamente a la misma solución, de hecho, al contrastar las figuras punto a punto se puede observar que es exactamente la misma trayectoria y en segunda pese a que las trayectorias son idénticas, la técnica de los círculos requirió

Hiperesferas Initial P. [λ_1, λ_2] = [0, 0]	# Iter	Operating Point [v_1, v_2, v_3, v_4] where [λ_1, λ_2] = [1, 1]
$x_{i1} = [-5, -5, -5, -5]$	519	$x_{s1} = [0.3830, -3.5446, 0.3851, -4.0990]$
$x_{i2} = [-1, -2, -1, 0]$	202	$x_{s2} = [0.3869, -4.6321, -0.8002, 0.3775]$
$x_{i3} = [-5, -0.5, -5, 0]$	216	$x_{s3} = [-0.5136, 0.3775, -0.9682, 0.3775]$
$x_{i4} = [-1, 0, 0, 0]$	168	$x_{s4} = [-1.0510, 0.3775, 0.3845, -3.9542]$
Círculos Initial P. [λ_1, λ_2] = [0, 0]	# Iter	Operating Point [v_1, v_2, v_3, v_4] where [λ_1, λ_2] = [1, 1]
$x_{i1} = [-5, -5, -5, -5]$	48	$x_{s1} = [0.3830, -3.5446, 0.3851, -4.0990]$
$x_{i2} = [-1, -2, -1, 0]$	48	$x_{s2} = [0.3869, -4.6321, -0.8002, 0.3775]$
$x_{i3} = [-5, -0.5, -5, 0]$	48	$x_{s3} = [-0.5136, 0.3775, -0.9682, 0.3775]$
$x_{i4} = [-1, 0, 0, 0]$	48	$x_{s4} = [-1.0510, 0.3775, 0.3845, -3.9542]$

TABLE I: Points Homotopy Simulations

de un número fijo de iteraciones 48, lo cuales son mucho menos que los requeridos con la técnica de las hiperesferas. De hecho, de la tabla I se puede concluir que en el mejor de los casos (punto de inicio en x_{i1}), la técnica de trazado de los círculos resulto tener 10.8 veces menos iteraciones que la técnica de las hiperesferas. En ambas técnicas de trazado se utilizó un radio de $r = 0.03$ y una función paramétrica M con $p_2 = [0.2, 0.3]$.

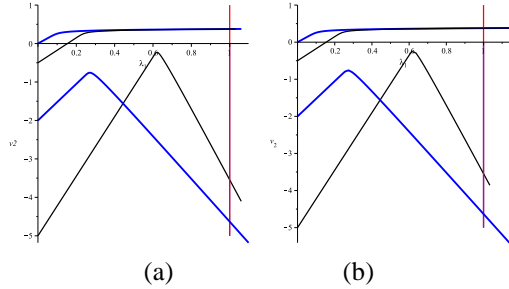


Fig. 3: Homotopy Trajectories $v_2 - \lambda_1$.

La técnica de los círculos puede ser modificada cambiando uno de los dos parámetros homotópicos por alguna variable eléctrica de interés. Por ejemplo, se repitió la simulación a partir del punto de inicio x_{i1} , cambiando únicamente el círculo de la ecuación 6, por otro en función de las variables v_1 y λ_1 . El resultado fue que se trazó la trayectoria homotópica ya conocida (ver figura 3(b)) en un total de 191 iteraciones (localizándose la misma solución x_{s1}). También es posible utilizar uno de los dos parámetros homotópicos con más de una variable eléctrica, para implementar una hiperesfera reducida. Por lo tanto, en un próximo trabajo se abordará con más profundidad este aspecto de la técnica de los círculos y su posible aplicación a la simulación de circuitos VLSI.

V. CONCLUSION

En el presente trabajo se mostró que es posible utilizar la técnica de las hiperesferas para el trazado de homotopías multiparamétricas y se presentó una técnica de trazado derivada de las hiperesferas (círculos), la cual es aún más simple de programar y rápida que la técnica de las hiperesferas. Estos resultados hacen de la técnica de los

círculos una herramienta atractiva para el trazado de funciones multiparamétricas.

REFERENCES

- [1] E. L. Allgower and K. Georg, *Numerical path following*, 1994.
- [2] R. C. Melville and L. Trajković, *Artificial parameter homotopy methods for the dc operating point problem*, IEEE transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems **12** (1997), no. 6, 861–877.
- [3] J. Roychowdhury and R. Melville, *Delivering global dc convergence for large mixed-signal circuits via homotopy/continuation methods*, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems **25** (2006), no. 1, 66.
- [4] M. Sosonkina, L. T. Watson, and D. E. Stewart, *Note on the end game in homotopy zero curve tracking*, ACM Transactions On Mathematical Software **22** (1996), no. 3, 281–287.
- [5] A. Ushida and L. O. Chua, *Tracing solution curves of nonlinear equations with sharp turning points*, Circuit Theory and Applications **12** (1984), 1–21.
- [6] H. Vázquez-L., L. Hernández-M., and A. Sarmiento-R., *Double-bounded homotopy for analysing nonlinear resistive circuits*, International Symposium on Circuits and Systems (2005).
- [7] ———, *Numerical continuation scheme for tracing the double bounded homotopy for analysing nonlinear circuits*, International Conference on Communications, Circuits and Systems (2005).
- [8] H. Vázquez-L., L. Hernández-M., A. Sarmiento-R., and R. S. Murphy-A., *Improving multi-parameter homotopy via symbolic analysis techniques for circuit simulation*, 2003 European Conference on Circuit Theory and Design **II** (2003), 402–405.
- [9] D. M. Wolf and S. R. Sanders, *Multiparameter homotopy methods for finding dc operating points of nonlinear circuits*, IEEE transactions on circuits and systems-I: fundamental theory and applications **43** (1996), no. 10, 824–837.
- [10] Kiyotaka Yamamura, *Simple algorithms for tracing solution curves*, IEEE transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications **40** (1993), no. 8, 537–541.