Formeln für Kastenoperationen über Doppelmengen

Ritvij Singh

26. Mai 2022

Satz 0.1 *Man erhält die folgenden Formeln für die Kastenoperationen auf Doppelmengen*

1. *Es sei*

$$[X][Y] = [A][B] \boxplus [C][D]$$

Dann ist X eine Teilmenge von $A \uplus C$, und die Kardinalität von Y ist beschränkt durch

$$|Y| \leq \max(|A| + |C|, |A| + |D|, |B| + |C|)$$

1a.

$$[a][] \boxplus [b][] = [a, b][\sqrt{ab}, -\sqrt{ab}]$$

1b.

$$[a][] \boxplus [][b] = [a][r, s]$$

wobei

$$r = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ab}}{2} \qquad \textit{und} \qquad s = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ab}}{2}$$

1c.

$$[][a] \boxplus [][b] = [][a + b]$$

1d.

$$[a][b] \boxplus [c][] = [a, c][r, s]$$

wobei

$$r = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c(a - b)}}{2} \qquad \textit{und} \qquad s = \frac{b - \sqrt{b^2 + 4c(a - b)}}{2}$$

1e.

$$[a][b] \boxplus [][c] = [a][r, s]$$

wobei

$$r = \frac{b + c + \sqrt{(b + c)^2 - 4ac}}{2} \qquad \textit{und} \qquad s = \frac{b + c - \sqrt{(b + c)^2 - 4ac}}{2}$$

2. *Es sei*

$$[X][Y] = [A][B] \boxtimes [C][D]$$

Dann haben wir:

$$|X| \leq |A| \cdot |C|$$

2a.

$$[A][B] \boxtimes [c][] = [A][B] \otimes [c][]$$

2b.

$$[A][B] \boxtimes [][c] = [][c \cdot tr[A][B]]$$

2c.

$$[a][b] \boxtimes [c][d] = [ac][-bd + bc + ad]$$

2d.

$$[a,b][]\boxtimes[c,d][]=[ac,ad,bc,bd][\sqrt{abcd},-\sqrt{abcd}]$$

2e.

$$[a][b]\boxtimes[c,d][]=[ac,ad][r,s]$$

wobei

$$r=\frac{b(c+d)+\sqrt{b^2(c+d)^2-4abcd}}{2}\text{ und }s=\frac{b(c+d)-\sqrt{b^2(c+d)^2-4abcd}}{2}$$

2f.

$$[][a,b]\boxtimes[][c,d]=[][r,s]$$

wobei

$$r=\frac{(a+b)(c+d)+\sqrt{(a+b)^2(c+d)^2-4abcd}}{2}\text{ und }s=\frac{(a+b)(c+d)-\sqrt{(a+b)^2(c+d)^2-4abcd}}{2}$$

2g.

$$[A][B]\boxtimes[][c,d]=[][r,s]$$

wobei r und s die Nullstellen vom Polynom

$$X^2+UX+V$$

wobei

$$U=-(c+d)\cdot\operatorname{tr}([A][B])$$

und

$$V=\frac{1}{2}\cdot cd\cdot\left((\operatorname{tr}([A][B]))^2+\operatorname{tr}\left(([A][B])^2\right)\right)$$

Diese Formel ist für konkrete Multimengen A und B eindeutig.

Ich gebe für 2*c*. einen Beweis an. Für alle anderen Teile geht es analog.

Beweis: Die Bell-Reihe von $[a][b]$ ist

$$(1-bt)(1+at+a^2t^2+a^3t^3+\ldots)$$

mit dem Bell-Koeffizienten $(a-b)a^{e-1}$ bei t^e.

Die Bellsche Reihe von $[c,d][]$ ist

$$(1+ct+c^2t^2+c^3t^3+\ldots)(1+dt+d^2t^2+d^3t^3+\ldots)$$

mit dem Bell-Koeffizienten $\sum_{i=0}^{e}c^id^{e-i}$ bei t^e.

Der e-te Bell-Koeffizient der linken Seite ist also

$$(a-b)a^{e-1}\cdot\sum_{i=0}^{e}c^id^{e-i}$$

Die rechte Seite hat die Bell-Reihe

$$\frac{(1-mt)(1-nt)}{(1-act)(1-adt)}$$

Um zu zeigen, dass die Bell-Reihe auf der rechten Seite gleich derjenigen auf der linken Seite ist, multiplizieren wir zunächst beide Seiten mit $(1-act)(1-adt)$. Durch Berechnung von $m+n$ und mn sehen wir, dass auf der rechten Seite übrig bleibt

$$1-b(c+d)t+abcdt^2$$

Um zu sehen, dass dies mit der linken Seite übereinstimmt, müssen wir die einzelnen Koeffizienten der linken Seite explizit berechnen. Die Details werden hier weggelassen, aber die Koeffizienten für $e=1$ und $e=2$ stimmen mit denen auf der rechten Seite überein, während die Koeffizienten ab $e=3$ verschwinden, weil wir in jedem solchen Koeffizienten den Ausdruck faktorieren können

$$\sum_{i=0}^{e}c^id^{e-i}-(c+d)\cdot\sum_{i=0}^{e-1}c^id^{e-1-i}+cd\cdot\sum_{i=0}^{e-2}c^id^{e-2-i}$$

was immer gleich Null ist. ■