Invarianten der Doppelmengen

Ritvij Singh

26. Mai 2022

Definition 0.1 *Zu jedem Doppelmenge $X = [A][B]$ können wir eine Funktion $c_X : \mathbb{C} \to \mathbb{Z}$ (genannt **die charakteristische Funktion von** X) durch die Regel*

$$c_X(z) = \begin{cases} m & \textit{wenn } z \textit{ kommt in } A\ m \textit{ mal vor} \\ -m & \textit{wenn } z \textit{ kommt in } B\ m \textit{ mal vor} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Anmerkung 1 *Wir können frei zwischen der Sichtweise der Doppelmenge und der Sichtweise der charakteristischen Funktion wechseln. Die Doppelmengen-Sichtweise ist bequemer für manuelle Berechnungen, während die Funktionssichtweise für bestimmte Beweise besser geeignet ist.*

Definition 0.2 *Die **Kardinalität** von $[A][B]$ ist ein geordnetes Paar, das die Anzahl der Elemente in A und die Anzahl der Elemente in B besteht.*

Definition 0.3 *Die **Augmentation** eines Doppelmenge $[A][B]$, geschrieben $\operatorname{aug}([A][B])$, ist die Differenz zwischen dem ersten Element der Kardinalität und dem zweiten Element der Kardinalität.*

Beispiel 0.0.1 *Das Symbol*

$$[1, 2][3, 4, 5]$$

die Kardinalität $(2, 3)$ und die Augmentation $2 - 3 = -1$.

Proposition 0.0.1 *Die Augmentation ist ein Homomorphismus vom Ring der Doppelmengen zu den ganzen Zahlen.*

Beweis: Durch Berechnung haben wir $\operatorname{aug}([1][]) = 1$. X und Y seien Doppelmengen, und c_Z bezeichne die charakteristische Funktion eines beliebigen Symbols Z. Wir können sehen, dass

$$\operatorname{aug}(Z) = \sum_{z \in \mathbb{C}} c_Z(z)$$

für alle Z, und dass

$$c_{X \oplus Y}(z) = c_X(z) + c_Y(z)$$

Daraus erhalten wir

$$aug(X \oplus Y) = \sum_{z \in \mathbb{C}} c_{X \oplus Y}(z) = \sum_{z \in \mathbb{C}} (c_X(z) + c_Y(z))$$

$$= \sum_{z \in \mathbb{C}} c_X(z) + \sum_{z \in \mathbb{C}} c_Y(z) = \operatorname{aug}(X) + \operatorname{aug}(Y)$$

Außerdem haben wir

$$c_{X \otimes Y}(z) = \sum_{x \cdot y = z} c_X(x) \cdot c_Y(y)$$

Daraus erhalten wir

$$\operatorname{aug}(X \otimes Y) = \sum_{z \in \mathbb{C}} \sum_{x \cdot y = z} c_X(x) \cdot c_Y(y) = \sum_{x, y \in \mathbb{C}} c_X(x) \cdot c_Y(y)$$

$$= \left(\sum_{x \in \mathbb{C}} c_X(x) \right) \left(\sum_{y \in \mathbb{C}} c_Y(y) \right) = \operatorname{aug}(X) \operatorname{aug}(Y)$$

$\blacksquare$

Proposition 0.0.2 *Eine multiplikative Funktion ist vollständig multiplikativ, wenn und nur wenn die Doppelmenge (bei allen Primzahlen) die Kardinalität* $\leq (1,0)$ *hat.*

Beweis: Nehmen wir an, f sei vollständig multiplikativ. Dann haben wir $f(p^e) = f(p)^e$. Das bedeutet, dass alle Bell-Reihen geometrisch sein müssen (d.h. von der Form $1+\alpha t+\alpha^2t^2+\alpha^3t^3+\ldots$). Die zugehörigen formalen Potenzreihen sind dann $1/(1-\alpha t)$. Im Spezialfall $\alpha = 0$ erhalten wir $1/1$, was $\varnothing/\varnothing$ entspricht. Andernfalls erhalten wir α als reziproke Wurzel, und wir erhalten das Symbol $[\alpha][]$. Daraus geht klar hervor, dass jede Wahl von α funktioniert, also kann und muss das Symbol die Form $\varnothing/\varnothing$ oder $[\alpha][]$ haben. Dies ist eindeutig äquivalent zur Kardinalität $\leq (1,0)$. ■

Proposition 0.0.3 *Erinnern Sie sich, dass eine speziell multiplikative Funktion eine Dirichlet-Faltung von zwei vollständig multiplikativen Funktionen ist. Eine multiplikative Funktion ist dann und nur dann speziell multiplikativ, wenn sie die Kardinalität* $\leq (2,0)$ *hat.*

Beweis: Trivial aus 0.0.2 und der Art, wie die Dirichlet-Faltung mit der Kardinalität interagiert. ■

Proposition 0.0.4 *Erinnern Sie sich, dass eine totiente multiplikative Funktion eine Dirichlet-Faltung einer vollständig multiplikativen Funktion mit der Dirichlet-Inversen einer vollständig multiplikativen Funktion ist. Eine multiplikative Funktion ist dann und nur dann ein Totient, wenn sie die Kardinalität* $\leq (1,1)$ *hat.*

Beweis: Trivial aus 0.0.2 und der Art und Weise, wie die Dirichlet-Faltung mit der Kardinalität interagiert. ■

Definition 0.4 *Die Spur eines Doppelmenge,* $\mathrm{tr}(X)$*, ist die Summe aller seiner Elemente aus der ersten Multimenge minus der Summe aller Elementen der zweiten Multimenge.*

Proposition 0.0.5 tr *ist ein Ringhomomorphismus von Doppelmengen nach* $\mathbb{C}$*.*

Beweis: Durch Berechnung haben wir $\mathrm{tr}([1][]) = 1$. X und Y seien Doppelmengen, und c_Z bezeichne die charakteristische Funktion eines beliebigen Symbols Z. Wir können sehen, dass

$$\mathrm{tr}(Z) = \sum_{z\in\mathbb{C}} z c_Z(z)$$

für alle Z, und dass

$$c_{X\oplus Y}(z) = c_X(z) + c_Y(z)$$

Daraus erhalten wir

$$tr(X \oplus Y) = \sum_{z\in\mathbb{C}} z c_{X\oplus Y}(z) = \sum_{z\in\mathbb{C}} z(c_X(z) + c_Y(z))$$
$$= \sum_{z\in\mathbb{C}} z c_X(z) + \sum_{z\in\mathbb{C}} z c_Y(z) = \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y)$$

Außerdem haben wir

$$c_{X\otimes Y}(z) = \sum_{x\cdot y=z} c_X(x)\cdot c_Y(y)$$

Daraus erhalten wir

$$tr(X \otimes Y) = \sum_{z\in\mathbb{C}} z \sum_{x\cdot y=z} c_X(x)\cdot c_Y(y) = \sum_{x,y\in\mathbb{C}} x c_X(x)\cdot y c_Y(y)$$
$$= \left(\sum_{x\in\mathbb{C}} x c_X(x)\right)\left(\sum_{y\in\mathbb{C}} y c_Y(y)\right) = \mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y)$$

■

Satz 0.1 *Unter der Voraussetzung, dass* f *die Doppelmenge* X *zur Primzahl* p *hat, ist der* k*-te Koeffizient der Bell-Reihe von* f *zu* p

$$\mathrm{tr}\left(\lambda^k\left(X \times [][-1]\right)\right)$$

Beweis: Wir beginnen mit der Definition von $\mathrm{tr}_t : \mathbb{C}[[t]] \to \mathbb{C}[[t]]$ als die kanonische Erweiterung von tr, die durch Setzen von $\mathrm{tr}_t(t) = t$ gegeben ist. Damit können wir den Satz so umformulieren, dass die gesamte Bell-Reihe gleich **??** ist

$$\mathrm{tr}_t\left(\lambda_t\left(X \otimes [][-1]\right)\right)$$

Man beachte, dass X als eine Summe von Komponenten C_i geschrieben werden kann, wobei jede Komponente entweder die Kardinalität $(1,0)$ oder $(0,1)$ hat. Wir haben $X = \bigoplus_i C_i$, was uns ergibt

$$= \mathrm{tr}_t\left(\lambda_t\left(\left(\bigoplus_i C_i\right) \otimes [][-1]\right)\right)$$

$$= \mathrm{tr}_t\left(\lambda_t\left(\bigoplus_i \left(C_i \otimes [][-1]\right)\right)\right)$$

Da $\lambda_t(a+b) = \lambda_t(a)\lambda_t(b)$, können wir

$$= \mathrm{tr}_t\left(\prod_i \lambda_t\left(C_i \times [][-1]\right)\right)$$

und schließlich, da Spur ein Homomorphismus ist,

$$= \prod_i \mathrm{tr}_t\left(\lambda_t\left(C_i \otimes [][-1]\right)\right)$$

Wir können $X = [A][B]$ setzen und C_i in diese aufteilen, so dass wir

$$= \prod_{a\in A} \mathrm{tr}_t\left(\lambda_t\left([a][] \otimes [][-1]\right)\right) \cdot \prod_{b\in B} \mathrm{tr}_t\left(\lambda_t\left([][b] \otimes [][-1]\right)\right)$$

$$= \prod_{a\in A} \mathrm{tr}_t\left(\lambda_t\left([][-a]\right)\right) \cdot \prod_{b\in B} \mathrm{tr}_t\left(\lambda_t\left([-b][]\right)\right)$$

Durch explizite Berechnung erhalten wir

$$= \prod_{a\in A} \mathrm{tr}_t\left(\left([1][] \oplus [-a][]t\right)^{-1}\right) \cdot \prod_{b\in B} \mathrm{tr}_t\left([1][] \oplus [-b][]t\right)$$

$$= \prod_{a\in A} (1-at)^{-1} \cdot \prod_{b\in B} (1-bt)$$

Dies ist die Formel für die Bell-Reihe. ∎

Satz 0.2 *Unter der Voraussetzung, dass f die Doppelmenge X zur Primzahl p hat, ist der k-te Koeffizient der Bell-Reihe von f' zu p*

$$\mathrm{tr}\left(U_{\bigcirc}^{k}(X)\right)$$

wobei $k > 0$

Beweis: Wir können $X = [A][B]$ setzen. Dann wissen wir, dass die Bell-Reihe lautet

$$\prod_{b\in B}(1-bt)\prod_{a\in A}(1-at)^{-1}$$

Die Bell-Reihe von f' ist dann die verschobene logarithmische Ableitung der Bell-Reihe von f (beide bei einer festen Primzahl). Mit anderen Worten, die Bell-Reihe von f' ist

$$1 + \left(\log\left(\prod_{b\in B}(1-bt)\prod_{a\in A}(1-at)^{-1}\right)\right)' t$$

$$1 + \left(\log\left(\prod_{b\in B}(1-bt)\right) + \log\left(\prod_{a\in A}(1-at)^{-1}\right)\right)' t$$

$$1 + \left(\sum_{b \in B} \log(1-bt) - \sum_{a \in A} \log(1-at) \right)' t$$

$$1 + \sum_{b \in B} (1-bt)\, t - \sum_{a \in A} (1-at)\, t$$

$$1 + \sum_{b \in B} (1-bt)' 1 - btt - \sum_{a \in A} (1-at)' 1 - att$$

$$1 + \sum_{b \in B} -b1 - btt - \sum_{a \in A} -a1 - att$$

$$1 + \sum_{a \in A} a11 - att - \sum_{b \in B} b11 - btt$$

$$1 + \sum_{a \in A} \sum_{i=1}^{\infty} a^i t^i - \sum_{b \in B} \sum_{j=1}^{\infty} b^j t^j$$

Betrachtet man den Koeffizienten von t^k, wobei $k > 0$ ist, erhält man

$$\sum_{a \in A} a^k - \sum_{b \in B} b^k$$

Wir sehen deutlich, dass dies gleich $\mathrm{tr}(\mathrm{U}_{\bigcirc}^{k}([A][B]))$ ist ■

Korollar 0.2.1 *Die Spur des Doppelmenge von f bei p ist der Koeffizient von t in der Bell-Reihe von f bei der Primzahl p. Außerdem ist sie auch der Koeffizient von t in der Bell-Reihe nach p der Bell-Transformation von f.*

Beweis: Setzen Sie $k = 1$ in beiden Fällen. $\lambda^1 = \mathrm{U}_{\bigcirc}^{1} = id$. ■

Proposition 0.2.1 *Seien f, g zwei multiplikative Funktionen, mit Doppelmengen bzw. X, Y. Dann sind die Spuren der Doppelmengen von $f \boxplus g$ und $f \boxtimes g$ jeweils $\mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y)$ und $\mathrm{tr}(X) \cdot \mathrm{tr}(Y)$*

Beweis: Siehe **??**, und dies folgt aus den Definitionen der Operationen. ■

Definition 0.5 *Wir definieren die* ***Determinante*** *eines Doppelmenge X, geschrieben $\det(X)$, als das Produkt aller Elemente der ersten Multimenge durch alle Elemente der zweiten Multimenge.*

Beispiel 0.2.1

$$\det([1, 2, i][1+i, 1-i]) = 1 \cdot 2 \cdot i(i+1)(i-1) = i$$

Proposition 0.2.2

1. *Die Determinante bildet sowohl die additive als auch die multiplikative Einheit auf 1 ab.*

$$\det([][]) = \det([1][]) = 1$$

2. *Die Determinante bildet die direkte Summe auf das Produkt ab.*

$$\det(X \oplus Y) = \det(X) \cdot \det(Y)$$

3. *Die Determinante bildet die unären Operationen auf Potenzoperationen ab.*

$$\det({U_{\bigcirc}^{1}}^{k}(X)) = \det(X)^k$$

4. *Die Determinante bildet das Tensorprodukt auf das augmentierte-gewichtete Produkt ab.*

$$det(X \otimes Y) = \det(X)^{\mathrm{aug}(Y)} \cdot \det(Y)^{\mathrm{aug}(X)}$$

Beweis: Punkt 1 folgt aus einer einfachen Berechnung. Für die Punkte 2, 3 und 4 seien X und Y Doppelmengen, und c_Z bezeichne die charakteristische Funktion eines beliebigen Doppelmenge Z. Wir können sehen, dass

$$\det(Z) = \prod_{z \in \mathbb{C}} z^{c_Z(z)}$$

für alle Z. Für Punkt 2 haben wir

$$c_{X \oplus Y}(z) = c_X(z) + c_Y(z)$$

was uns ergibt

$$\det(X \oplus Y) = \prod_{z \in \mathbb{C}} z^{c_X(z)+c_Y(z)} = \prod_{z \in \mathbb{C}} z^{c_X(z)} \cdot \prod_{z \in \mathbb{C}} z^{c_Y(z)} = \det(X) \cdot \det(Y)$$

Für Punkt 3 können wir sehen

$$c_{\mathrm{U}^k_{\bigcirc}(X)}(z) = \sum_{a^k = z} c_X(a)$$

was uns ergibt

$$\det(\mathrm{U}^k_{\bigcirc}(X)) = \prod_{z \in \mathbb{C}} z^{\sum\limits_{a^k=z} c_X(a)} = \prod_{z \in \mathbb{C}} \prod_{a^k = z} z^{c_X(a)} = \prod_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ a^k = z}} z^{c_X(a)} = \prod_{a \in \mathbb{C}} \prod_{z = a^k} z^{c_X(a)}$$

$$= \prod_{a \in \mathbb{C}} a^{k^{c_X(a)}} = \left(\prod_{a \in \mathbb{C}} a^{c_X(a)} \right)^k = \det(X)^k$$

Für den letzten Schritt verwenden wir, dass

$$c_{X \otimes Y}(z) = \sum_{x \cdot y = z} c_X(x) \cdot c_Y(y)$$

was uns ergibt

$$\det(X \otimes Y) = \prod_{z \in \mathbb{C}} z^{\sum\limits_{x \cdot y = z} c_X(x) \cdot c_Y(y)} = \prod_{z \in \mathbb{C}} \prod_{x \cdot y = z} z^{c_X(x) \cdot c_Y(y)} = \prod_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ x \cdot y = z}} z^{c_X(x) \cdot c_Y(y)}$$

$$= \prod_{x, y \in \mathbb{C}} (xy)^{c_X(x) \cdot c_Y(y)} = \prod_{x, y \in \mathbb{C}} x^{c_X(x) \cdot c_Y(y)} \cdot \prod_{x, y \in \mathbb{C}} y^{c_Y(y) \cdot c_X(x)}$$

$$= \prod_{x \in \mathbb{C}} \prod_{y \in \mathbb{C}} x^{c_X(x) \cdot c_Y(y)} \cdot \prod_{y \in \mathbb{C}} \prod_{x \in \mathbb{C}} y^{c_Y(y) \cdot c_X(x)}$$

$$= \prod_{x \in \mathbb{C}} x^{c_X(x) \cdot \sum\limits_{y \in \mathbb{C}} c_Y(y)} \cdot \prod_{y \in \mathbb{C}} y^{c_Y(y) \cdot \sum\limits_{x \in \mathbb{C}} c_X(x)} = \prod_{x \in \mathbb{C}} x^{c_X(x) \cdot \mathrm{aug}(Y)} \cdot \prod_{y \in \mathbb{C}} y^{c_Y(y) \cdot \mathrm{aug}(X)}$$

$$= \left(\prod_{x \in \mathbb{C}} x^{c_X(x)} \right)^{\mathrm{aug}(Y)} \cdot \left(\prod_{y \in \mathbb{C}} y^{c_Y(y)} \right)^{\mathrm{aug}(X)} = \det(X)^{\mathrm{aug}(Y)} \cdot \det(Y)^{\mathrm{aug}(X)}$$

∎

Proposition 0.2.3 *Sei f eine multiplikative Funktion und sei p eine Primzahl. Die Bell Reihe von f bei p sei $f_p(t) = 1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots$ und die Bell Reihe von f' bei p sei $f'_p(t) = 1 + D_1 t + D_2 t^2 + \dots$ Dann gilt für jedes n die folgende Beziehung:*

$$n \cdot A_n - D_n = \sum_{i=1}^{n-1} A_i D_{n-i}$$

Die ersten paar Beziehungen sind hier:

$$\begin{aligned}
A_1 - D_1 &= 0 \\
2A_2 - D_2 &= A_1 D_1 \\
3A_3 - D_3 &= A_1 D_2 + A_2 D_1 \\
4A_4 - D_4 &= A_1 D_3 + A_2 D_2 + A_3 D_1
\end{aligned}$$

Beweis: Wir definieren O.b.d.A $A_0 = D_0 = 1$. Nach der Definition, haben wir:

$$f'_p(t) = 1 + t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \log f_p(t)$$

Da $(\log f)' = f'/f$ gilt, haben wir dann:

$$f'_p(t) = 1 + t\frac{(f_p(t))'}{f_p(t)}$$

Jetzt setzen wir A_n und D_n ein und wir erhalten:

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_i t^i = 1 + t\frac{\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i\right)'}{\sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_i t^i = 1 + t\frac{\sum_{i=0}^{\infty} iA_i t^{i-1}}{\sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_i t^i = 1 + \frac{\sum_{i=0}^{\infty} iA_i t^i}{\sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} D_i t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} iA_i t^i$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} D_j A_{i-j}\right) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} A_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} iA_i t^i$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$\sum_{j=0}^{i} D_j A_{i-j} = A_i + iA_i$$

$$D_0 A_i + \sum_{j=1}^{i} D_j A_{i-j} = A_i + iA_i$$

$$\sum_{j=1}^{i} D_j A_{i-j} = iA_i$$

■

Proposition 0.2.4 *Wir haben nach dem Satz folgende Beziehungen:*

$$A_1 = D_1$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2)$$

$$A_3 = \frac{1}{6}(D_1^3 + 3D_1D_2 + 2D_3)$$

$$A_4 = \frac{1}{24}(D_1^4 + 6D_1^2D_2 + 3D_2^2 + 8D_1D_3 + 6D_4)$$

$$D_1 = A_1$$

$$D_2 = 2A_2 - A_1^2$$

$$D_3 = 3A_3 - 3A_1A_2 + A_1^3$$

$$D_4 = 4A_4 - 4A_1A_3 + 4A_1^2A_2 - 2A_2^2 - A_1^4$$

Für jedes i gibt es ähnliche Polynome, die durch rekursive Anwendung der Beziehungen des vorigen Satzes erhalten werden können.