Thema 6-8 Kreuzer Aufgaben

Thema 6

Aufgabe 3

Geben Sie die Matrix zum Basiswechsel von der Standardbasis zur Basis $B = \{(1,3,1),(0,1,2),(-1,-3,-2)\}$ an. Berechnen Sie damit die Koordinaten des Vektors $(2,4,2)$ bezüglich der neuen Basis B.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

Matrix zum Basiswechsel: $U = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\3 & 1 & -3\\1 & 2 & -2\end{pmatrix}$, neue Koordinaten v. $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$

$$[\vec{x}]_U = U^{-1} \cdot \vec{x}$$

Determinante: $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\3 & 1 & -3\\1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\3 & 1\\1 & 2\end{matrix}$ $\rightarrow ((1\cdot1\cdot-2)+(0\cdot-3\cdot1)+(-1\cdot3\cdot2)) - ((1\cdot1\cdot-1)+(2\cdot-3\cdot1)+(-2\cdot3\cdot0))$

$= (-2-6)-(-1-6) = -8+7 = -1 \neq 0$ ✓

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\3 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{II-3I} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0\\1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0\\0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{III-2II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 5 & -2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{I-III} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -1\\0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 5 & -2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{III\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -1\\0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -1\end{array}\right)$$

U^{-1}

(Wolfram Alpha)

$$\vec{x}_U = U^{-1} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix}-4 & 2 & -1\\-3 & 1 & 0\\-5 & 2 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\-3 & -1\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ 2x2 Matrix, also 2 Eigenwerte

(a) Argumentieren Sie, dass A diagonalisierbar ist!

(b) Diagonalisieren Sie die Matrix A! Berechnen Sie also eine Matrix U und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = UDU^{-1}$ ist.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der unter (a) berechneten Zerlegung A^{1002}.

a) Wenn A (als 2x2 Matrix) zwei voneinander verschiedene Eigenwerte hat, existieren zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\rightarrow$ A ist diagonalisierbar

Satz: A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ algebraische = geometrische Vielfachheit für alle

$$U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von A

[bei symmetrischen Matrizen funktioniert es immer]

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda \cdot -1-\lambda) - (-3 \cdot -1) = -1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 - 3 =$

$= -4 + \lambda^2$

$\rightarrow \quad -4 + \lambda^2 = 0$

$\lambda = \sqrt{4} = \pm 2$ (Algebraische Vielfachheit 2) $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ Eigenwerte

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - \lambda I_2) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

I: $(1-\lambda) \cdot v_1 - 1 v_2 = 0$

II: $-3 v_1 + (-1-\lambda) \cdot v_2 = 0$

① $\lambda_1 = 2$

einsetzen in I: $(1-2) \cdot v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$

II: $-3v_1 + (-1-2) v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -v_2$

$\rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix}, \quad v_1 \in \mathbb{R}$

Geom. V = 1
Alg. V = 1

Basis aus EV

② $\lambda_2 = -2$

einsetzen in I: $(1+2) \cdot v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{3} v_2$

II: $-3v_1 + (-1+2) v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{1}{3} v_2$

$\rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 3v_1 \end{pmatrix}, \quad v_1 \in \mathbb{R}$

Geom. V = 1
Alg. V = 1

Somit: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow U^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = U^{-1} \cdot A \cdot U$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{U}$$

$A = U \cdot D \cdot U^{-1}$ (Probe!)

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (6-2) & (-2-2) \\ (-6-6) & (2-6) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der unter (a) berechneten Zerlegung A^{1002}.

c) Ist A diagonalisierbar, so gilt $A = U \cdot D \cdot U^{-1}$, so gilt $A^k = U \cdot D^k \cdot U^{-1}$

$(A^k = A \cdot A \cdot A \cdot A \ldots \cdot A = U \cdot D \cdot \cancel{U^{-1}} \cdot \cancel{U} \cdot D \cdot \cancel{U^{-1}} \ldots \cdot \cancel{U} \cdot D \cdot U^{-1})$ -> Matrix U multipliziert mit ihren Inversen = Einheitsmatrix, also wie 1 => folgt: $A^k = U \cdot D^k \cdot U^{-1}$

$$\rightarrow A^{1002} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{1002} & 0 \\ 0 & (-2)^{1002} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12

Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -10 & -18 \\ -2 & 5 & 9 \\ 3 & -6 & -11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms (3. Grades) können Sie mit Hilfe von WolframAlpha oder einem ähnlichen Tool ermitteln.

3 x 3 -> Polynom Grad 3 => 3 Ergebnisse!

I: EW: $\det(A - \lambda E) \overset{!}{=} 0$
II: EV: $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0$ $(\vec{x} \neq 0)$

$$A = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -10 & -18 \\ -2 & +5-\lambda & -9 \\ 3 & -6 & -11-\lambda \end{pmatrix}$$ -> Entwickeln nach der 2ten Zeile

$$= +2 \cdot \det \begin{pmatrix} -10 & -18 \\ -6 & -11-\lambda \end{pmatrix} + (5-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -18 \\ 3 & -11-\lambda \end{pmatrix} - 9 \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -10 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= +2 \cdot [(-10) \cdot (-11-\lambda) - (-6 \cdot -18)] + (5-\lambda) \cdot [(6-\lambda) \cdot (-11-\lambda) - (3 \cdot -18)] - 9 \cdot [(6-\lambda) \cdot (-6) - (3 \cdot -10)]$$

$$= +2 \cdot [110 + 10\lambda - 108] + (5-\lambda) \cdot [-66 - 6\lambda + 11\lambda + \lambda^2 + 54] - 9 \cdot [-36 + 6\lambda + 30] =$$

$$= +4 + 20\lambda + (5-\lambda) \cdot [\lambda^2 + 5\lambda - 12] - 9 \cdot [6\lambda - 6] =$$

$$= +4 + 20\lambda + \cancel{5\lambda^2} + 25\lambda - 60 - \lambda^3 - \cancel{5\lambda^2} + 12\lambda - 54\lambda + 54 =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0$$ -> Wolfram Alpha oder:

$\lambda_1 = -2$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 1$

$-(\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda + 2) = 0$
$\lambda_1 = -2$
$\lambda_{2,3} = 1$

$$\begin{pmatrix} 6-\lambda & -10 & -18 \\ -2 & 5-\lambda & 9 \\ 3 & -6 & -11-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I: $(6-\lambda) \cdot v_1 - 10 \cdot v_2 - 18 v_3 = 0$
II: $-2 v_1 + (5-\lambda) \cdot v_2 + 9 v_3 = 0$

$\text{III}: 3u_1 - 6u_2 + (-11-\lambda)\cdot u_3 = 0$

① $\lambda_1 = -2$ einsetzen:

$\text{I}: 8u_1 - 10u_2 - 18u_3 = 0$
$\text{II}: -2u_1 + 7u_2 + 9u_3 = 0$
$\text{III}: 3u_1 - 6u_2 - 9u_3 = 0$

→ Wolfram Alpha, Maxima, oder:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -10 & -18 & 0 \\ -2 & 7 & 9 & 0 \\ 3 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}:3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 7 & 9 & 0 \\ 8 & -10 & -18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 8 & -10 & -18 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-8\text{I}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x \quad y \quad z \quad \rightarrow z = t$

$3y + 3t = 0 \quad |:3$
$y = -t$

$1x + 2t - 3t = 0$
$1x - t = 0$
$x = t$

$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$ Normierter Eigenvektor $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

② $\lambda_{2,3} = 1$ einsetzen:

$\text{I}: 5u_1 - 10u_2 - 18u_3 = 0$
$\text{II}: -2u_1 + 4u_2 + 9u_3 = 0$
$\text{III}: 3u_1 - 6u_2 - 12u_3 = 0$

⇒ Wolfram Alpha bzw Maxima: $u_1 = 2u_2$, $u_3 = 0$ $\quad u = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Normierter EV: $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 8-\lambda & -9 & 5 \\ -2 & +1-\lambda & -1 \\ 2 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$ → Entwickeln nach der 2ten Zeile

$$-2 \det \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} + (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & 5 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -2\,[(9+9\lambda) - 15] + (1-\lambda)\cdot[(8-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - 10] - 1\cdot[24 - 3\lambda + 18] =$$

$$= -18 - 18\lambda + 30 + (1-\lambda)\cdot[-8 - 8\lambda + \lambda + \lambda^2 - 10] - 24 + 3\lambda - 18 =$$

$$= -18 - 18\lambda + 30 - 8 - 7\lambda + \lambda^2 - 10 + 8\lambda + 8\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 + 10\lambda - 24 + 3\lambda - 18 =$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda - 48 = 0$$ → Wolfram Alpha, Maxima:

$\lambda_1 = -2$
$\lambda_2 = 4$
$\lambda_3 = 6$

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & -9 & 5 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\text{I}: (8-\lambda)u_1 - 9u_2 + 5u_3 = 0$
$\text{II}: 2u_1 + (1-\lambda)\cdot u_2 + u_3 = 0$
$\text{III}: 2u_1 + 3u_2 + (-1-\lambda)u_3 = 0$

① $\lambda_1 = -2$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{I}&: 10u_1 - 9u_2 + 5u_3 = 0 \\ \text{II}&: 2u_1 + 3u_2 + u_3 = 0 \\ \text{III}&: 2u_1 + 3u_2 + u_3 = 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Maxima: $u_1 = \frac{-u_3}{2}$, $u_2 = 0$ $\quad U = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{u} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② $\lambda_2 = 4$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{I}&: 4u_1 - 9u_2 + 5u_3 = 0 \\ \text{II}&: 2u_1 - 3u_2 + u_3 = 0 \\ \text{III}&: 2u_1 + 3u_2 - 5u_3 = 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Maxima: $u_1 = u_2 = u_3$ $\quad U = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ $\lambda_3 = 6$ einsetzen:

$$\begin{aligned} \text{I}&: 2u_1 - 9u_2 + 5u_3 = 0 \\ \text{II}&: 2u_1 - 5u_2 + u_3 = 0 \\ \text{III}&: 2u_1 + 3u_2 - 7u_3 = 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Maxima: $u_1 = 2u_3$, $u_2 = u_3$ $\quad U = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Thema 7

Aufgabe 1

Für welche Zahlen $a, b, d \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte der folgenden symmetrischen Matrix reelle Zahlen?

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det A = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow (a-\lambda)\cdot(d-\lambda) - b^2 = 0$$

$$ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - b^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda \cdot (a+d) - b^2 + ad = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-a-d)^2}{4} + b^2 - ad}$$

$$\frac{(-a-d)^2}{4} + b^2 - ad \geq 0 \quad | \cdot 4$$

$$(-a-d)^2 + 4b^2 - 4ad \geq 0$$

$$a^2 \underline{+2ad} + d^2 + 4b^2 \underline{-4ad} \geq 0$$

$\rightarrow$ b ist egal für die Gleichung!

$$a^2 + d^2 \geq 2ad$$

$$a^2 - 2ad + d^2 \geq 0$$

$$(a-d)^2 \geq 0$$

wahre Aussage!

$\Rightarrow$ Somit gilt: Für egal welche Zahlen $a, b, d \in \mathbb{R}$ sind die Eigenwerte IMMER reell!!

Aufgabe 4

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix. Existiert eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren der Matrix A?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad \rightarrow \text{ Entwickeln nach der 3ten Zeile}$$

$$(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 1) = 0$$

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -1$
$\lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{I}: -\lambda v_1 + v_2 = 0 \\ \text{II}: v_1 - \lambda v_2 = 0 \\ \text{III}: (1-\lambda) v_3 = 0 \end{array}$$

① $\lambda_{1,3} = 1$ einsetzen:

$$\begin{array}{ll} \text{I}: & -v_1 + v_2 = 0 \\ \text{II}: & v_1 - v_2 = 0 \\ \text{III}: & 0 = 0 \end{array} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} s \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R} \qquad \text{z.B.: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

② $\lambda_2 = -1$ einsetzen

$$\begin{array}{ll} \text{I}: & v_1 + v_2 = 0 \\ \text{II}: & v_1 + v_2 = 0 \\ \text{III}: & 2v_3 = 0 \end{array} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \qquad \text{z.B.: } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EV_1: $s = 1$; $t = 0$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$EV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$EV_3 = s = 0$; $t = 1$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}:(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}-\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark \text{ Ist eine Basis!}$$

Aufgabe 6

Geben Sie eine Matrix an, die die Eigenwerte 4 und -6 und die Eigenvektoren $\vec{u}_1 = (1, 3)$ und $\vec{u}_2 = (-3, 1)$ hat.

$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -6 \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad U^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow D = U^{-1} \cdot A \cdot U$

$A = U \cdot D \cdot U^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 18 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -50 & 30 \\ 30 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Probe $\rightarrow \det(A - \lambda I)$

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die symmetrische 3×3 Matrix A mit

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4\,(x_1 - x_2 + 2x_3)^2 \qquad \text{für alle } x_j \in \mathbb{R}$$

und ermitteln Sie ihren Rang, ihre Eigenwerte und ihre Determinante.

$\Rightarrow$ linke Seite ausrechnen:

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}$$

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3) \cdot \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ bx_1 + dx_2 + ex_3 \\ cx_1 + ex_2 + fx_3 \end{pmatrix} = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_1x_3 + bx_1x_2 + dx_2^2 + ex_2x_3 +$$

$$+ cx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + 2cx_1x_3 +$$

$$+ dx_2^2 + 2ex_2x_3 + fx_3^2$$

rechte Seite: $\underbrace{4 \cdot (x_1 - x_2 + 2x_3)^2}$

binomische Formel

$$4 \cdot ((x_1 - x_2)^2 + 2 \cdot (x_1 - x_2) \cdot 2x_3 + 4x_3^2) = 4((x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + 4x_3 \cdot (x_1 - x_2) + 4x_3^2)$$

$$= 4x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_2^2 + 16x_1x_3 - 16x_2x_3 + 16x_3^2$$

$a=4 \quad b=-4 \quad c=8 \quad d=4 \quad e=-8 \quad f=16$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -4 & 4 & -8 \\ 8 & -8 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :4 \Rightarrow \text{Rang } 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = (1\cdot 1\cdot 4) + (-1\cdot -2\cdot 1) + (2\cdot -1\cdot -2) - [(1\cdot 1\cdot 2) + (-2\cdot -2\cdot 1) + (4\cdot -1\cdot -1)]$$

$$= 4 + 2 + 4 - [2 + 4 + 4] = 10 - 10 = 0$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{pmatrix} +4-\lambda & --4 & +8 \\ -4 & 4-\lambda & -8 \\ 8 & -8 & 16-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \text{Entwickeln nach der 1.ten Zeile}$$

$$(4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -8 \\ -8 & 16-\lambda \end{pmatrix} + 4\cdot\det\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & 16-\lambda \end{pmatrix} + 8\det\begin{pmatrix} -4 & 4-\lambda \\ 8 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\cdot[(4-\lambda)\cdot(16-\lambda) - 64] + 4\cdot[-64 + 4\lambda + 64] + 8\cdot[32 - 32 + 8\lambda] =$$

$$= (4-\lambda)\cdot[\cancel{64} - 4\lambda - 16\lambda + \lambda^2 \cancel{-64}] + 16\lambda + 64\lambda = -16\lambda - 64\lambda + 4\lambda^2 + 4\lambda^2 + 16\lambda^2 - \lambda^3 + 16\lambda + 64\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 24\lambda^2 = \lambda^2\cdot(-\lambda + 24)$$

$\lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_3 = 24$

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 8 \\ -4 & 4-\lambda & -8 \\ 8 & -8 & 16-\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{I}: (4-\lambda)u_1 - 4u_2 + 8u_3 = 0 \\ \text{II}: -4u_1 + (4-\lambda)u_2 - 8u_3 = 0 \\ \text{III}: 8u_1 - 8u_2 + (16-\lambda)u_3 = 0 \end{matrix}$$

① $\lambda_{1,2} = 0$ einsetzen:

$$\begin{matrix} \text{I}: 4u_1 - 4u_2 + 8u_3 = 0 \\ \text{II}: -4u_1 + 4u_2 - 8u_3 = 0 \\ \text{III}: 8u_1 - 8u_2 + 16u_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{Maxima: } u_3 = \frac{u_2 - u_1}{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} s \\ t \\ \frac{t-s}{2} \end{pmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

z.B: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

② $\lambda_3 = 24$ einsetzen:

$$\begin{matrix} \text{I}: -20u_1 - 4u_2 + 8u_3 = 0 \\ \text{II}: -4u_1 - 20u_2 - 8u_3 = 0 \\ \text{III}: 8u_1 - 8u_2 - 8u_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{Maxima: } \begin{matrix} u_2 = -u_1 \\ u_3 = 2u_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{z.B: } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Thema 8

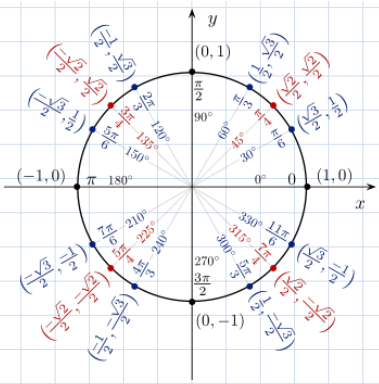
Aufgabe 4

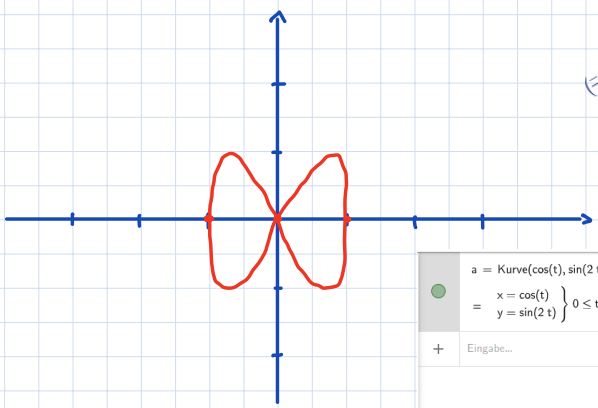
Gegeben ist die Kurve

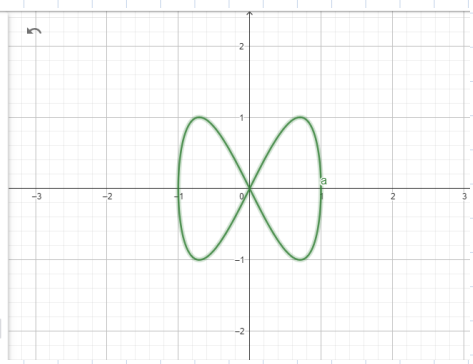
$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(2t) \end{pmatrix}$$

Skizzieren Sie oder beschreiben Sie die Kurve f.

0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$







Aufgabe 7

Berechnen Sie alle ersten partiellen Ableitungen der Funktionen

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 3x - 2y + 1$

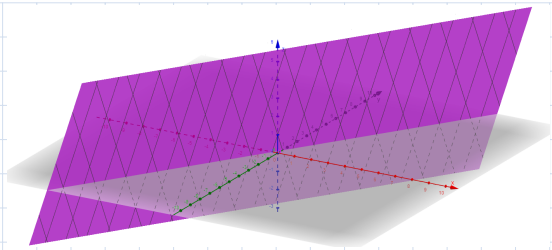
(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x, y) = x^2 + y^2$

(c) $h : D \to \mathbb{R},\ h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

und interpretieren Sie sie geometrisch!

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 3x - 2y + 1$

$\frac{\delta f}{\delta x} = 3 \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = -2$

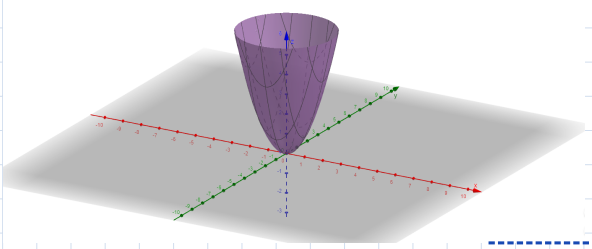


→ Abbildung f: repräsentiert eine Ebene im 3-dimensionalen Raum; Positive Steigung von 3 in Richtung x-Achse (Funktionswert steigt an, wenn x zunimmt); Neg. Steigung von −2 der y-Achse. Achsenabschnitt = +1

→ Ebene schneidet z-Achse bei z = 1, wenn x + y gleich 0 sind.

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = x^2 + y^2$

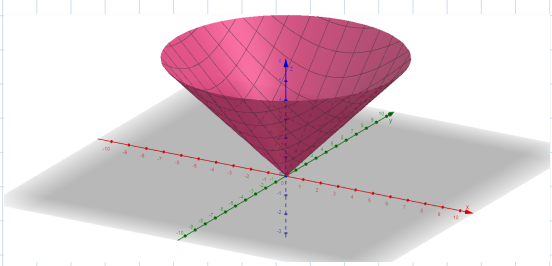
$$\frac{\delta g}{\delta x} = 2x \qquad \frac{\delta g}{\delta y} = 2y$$



→ Abbildung g: Funktion beschreibt die quadratische Entfernung eines Punktes (x, y) vom Ursprung im 2-dim. Raum; Ist eine Parabel, die um den Ursprung zentriert ist, partielle Abl. geben Steigung entlang d. Achsen an;

c) $h : D \to \mathbb{R},\ h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\frac{\delta h}{\delta x} = \cancel{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\delta h}{\delta y} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cancel{2}y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



→ Abbildung h: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ → bedeutet, dass Funktion nur für die Punkte innerhalb oder auf dem Einheitskreis definiert ist; Es handelt sich um einen Kegel mit Radius 1, der um den Ursprung zentriert ist; Ableitungen → Steigung der Oberfläche des Kegels entlang der Achsen;

Aufgabe 8

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^4 + y^2 + \cos(xy)$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Partielle Ableitung erster Ordnung:

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 4x^3 - \sin(xy) \cdot y = 4x^3 - y \cdot \sin(xy)$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2y - x \cdot \sin(xy)$$

Partielle Ableitung zweiter Ordnung:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 12x^2 - y^2 \cos(xy)$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 2 - x^2 \cdot \cos(xy)$$

... nach x und y gemischt:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta f}{\delta y}\left(4x^3 - y \sin(xy)\right)$$

$$= -\sin(xy) - y \cdot \cos(xy) \cdot x$$

$$= -\sin(xy) - xy \cdot \cos(xy)$$