Karatsuba 法の概略

えびちゃん

2019 年 10 月 21 日

多項式 $A(x), B(x)$ が以下のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
A(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \\
B(x) &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n.
\end{aligned}
$$

このとき，その積 $A(x) \cdot B(x)$ を求めたい．

$$A(x) \cdot B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + \cdots + a_n b_n x^{2n}.$$

ここで，まず $A(x)$ を以下のように分解することを考える．

$$
\begin{aligned}
A(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} x^{\lfloor n/2 \rfloor} + a_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\, x^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + \cdots + a_n x^n \\
&= \underbrace{\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{\lfloor n/2 \rfloor} x^{\lfloor n/2 \rfloor}\right)}_{A_L(x)} + \underbrace{\left(a_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}\, x + \cdots + a_n x^{n - \lfloor n/2 \rfloor}\right)}_{A_H(x)} \cdot x^{\lfloor n/2 \rfloor} \\
&= A_L(x) + A_H(x) \cdot x^{\lfloor n/2 \rfloor}.
\end{aligned}
$$

$B(x)$ についても同様に $B_L(x)$ と $B_H(x)$ に分解する．これを用いると，所望の式は以下のように書き直せる．

$$
\begin{aligned}
A(x) \cdot B(x) &= \left(A_L(x) + A_H(x) \cdot x^{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \cdot \left(B_L(x) + B_H(x) \cdot x^{\lfloor n/2 \rfloor}\right) \\
&= A_L(x) \cdot B_L(x) + \big(A_L(x) \cdot B_H(x) + A_H(x) \cdot B_L(x)\big) \cdot x^{\lfloor n/2 \rfloor} + A_H(x) \cdot B_H(x) \cdot x^{2\lfloor n/2 \rfloor}.
\end{aligned}
$$

$A \cdot B$ を $A_L \cdot B_L$ など半分のサイズの問題 4 つに分解できたことになるが，これでは得をしていない．そこで，真ん中の項についてさらに変形をする．

$$
\begin{aligned}
A_L(x) \cdot B_H(x) + A_H(x) \cdot B_L(x) = \quad & \big(A_L(x) + A_H(x)\big) \cdot \big(B_L(x) + B_H(x)\big) \\
& - A_L(x) \cdot B_L(x) - A_H(x) \cdot B_H(x).
\end{aligned}
$$

これにより，半分のサイズの解くべき問題が以下の 3 つになったことがわかる．

- $A_L(x) \cdot B_L(x)$
- $A_H(x) \cdot B_H(x)$
- $\big(A_L(x) + A_H(x)\big) \cdot \big(B_L(x) + B_H(x)\big)$

よって，分割統治のえらい定理から，$O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.59})$ 時間で $A(x) \cdot B(x)$ を計算できることがわかる．