1　行列累乗で高速化する DP

$\mathrm{dp}[i]$ が $\mathrm{dp}[i-1]$ と，ある $\mathrm{dp}_1[i-1], \ldots, \mathrm{dp}_k[i-1]$ から計算でき，ある定数行列 A が存在して任意の i について以下の式が成り立つとうれしい．

$$\begin{pmatrix} \mathrm{dp}[i] \\ \mathrm{dp}_1[i] \\ \vdots \\ \mathrm{dp}_k[i] \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} \mathrm{dp}[i-1] \\ \mathrm{dp}_1[i-1] \\ \vdots \\ \mathrm{dp}_k[i-1] \end{pmatrix}.$$

うれしいのは以下のようにできるためである．

$$\begin{pmatrix} \mathrm{dp}[n] \\ \mathrm{dp}_1[n] \\ \vdots \\ \mathrm{dp}_k[n] \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} \mathrm{dp}[0] \\ \mathrm{dp}_1[0] \\ \vdots \\ \mathrm{dp}_k[0] \end{pmatrix}.$$

行列 A の大きさは $(k+1, k+1)$ なので，乗算は $O(k^3)$ で計算でき[*1]，繰り返し二乗法などで $O(\log n)$ 回の乗算で済ませられるので，全体として $O(k^3 \log n)$ 時間で $\mathrm{dp}[n]$ を計算できる．自分でうまく $\mathrm{dp}_1, \ldots, \mathrm{dp}_k$ を決めてあげる必要があって，そこは大変そう．

1.1　利用例

以下のような遷移をする DP を考える．

Algorithm 1: 愚直な DP

$\mathrm{dp}[0] \leftarrow c$　　▷ 初期条件は計算できるとする．

for $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ **do**

　$\mathrm{dp}[i] \leftarrow \sum_{j=1}^{i} j^2 \cdot \mathrm{dp}[i-j]$

[*1] Strassen の方法を使えば $O(k^{\log_2 7 + o(1)}) \subset O(k^{2.81})$ で計算することもできる．

以下のように式変形をしていく.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dp}[i] &= \sum_{j=1}^{i} j^2 \cdot \mathrm{dp}[i-j] \\
&= 1^2 \cdot \mathrm{dp}[i-1] + \sum_{j=2}^{i} j^2 \cdot \mathrm{dp}[i-j] \\
&= \mathrm{dp}[i-1] + \sum_{j=1}^{i-1} (j+1)^2 \cdot \mathrm{dp}[i-(j+1)] \\
&= \mathrm{dp}[i-1] + \sum_{j=1}^{j-1} j^2 \cdot \mathrm{dp}[i-1-j] + \sum_{j=1}^{i-1} 2j \cdot \mathrm{dp}[i-1-j] + \sum_{j=1}^{i-1} 1 \cdot \mathrm{dp}[i-1-j] \\
&= \mathrm{dp}[i-1] + \mathrm{dp}[i-1] + 2 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} j \cdot \mathrm{dp}[i-1-j] + \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{dp}[i-1-j].
\end{aligned}
$$

ここで，$\mathrm{dp}_1[i] = \sum_{j=1}^{i} j \cdot \mathrm{dp}[i-j], \mathrm{dp}_2[i] = \sum_{j=1}^{i} \mathrm{dp}[i-j]$ とおくと，次のようにできる.

$$
\mathrm{dp}[i] = 2 \cdot \mathrm{dp}[i-1] + 2 \cdot \mathrm{dp}_1[i-1] + \mathrm{dp}_2[i-1].
$$

dp_1 および dp_2 についても同じ手続きをする.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dp}_1[i] &= \sum_{j=1}^{i} j \cdot \mathrm{dp}[i-j] \\
&= \mathrm{dp}[i-1] + \sum_{j=1}^{i-1} (j+1) \cdot \mathrm{dp}[i-1-j] \\
&= \mathrm{dp}[i-1] + \sum_{j=1}^{i-1} j \cdot \mathrm{dp}[i-1-j] + \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{dp}[i-1-j] \\
&= \mathrm{dp}[i-1] + \mathrm{dp}_1[i-1] + \mathrm{dp}_2[i-1]. \\
\mathrm{dp}_2[i] &= \sum_{j=1}^{i} \mathrm{dp}[i-j] \\
&= \mathrm{dp}[i-1] + \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{dp}[i-1-j] \\
&= \mathrm{dp}[i-1] + \mathrm{dp}_2[i-1].
\end{aligned}
$$

これらより，次のように書けることがわかる.

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{dp}[i] \\ \mathrm{dp}_1[i] \\ \mathrm{dp}_2[i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{dp}[i-1] \\ \mathrm{dp}_1[i-1] \\ \mathrm{dp}_2[i-1] \end{pmatrix}.
$$

一般に，$\mathrm{dp}[i] = \sum_{j=1}^{i} j^k \cdot \mathrm{dp}[i-j]$ の形の DP は上のような変形から行列累乗で解ける.