1　線形計画問題

線形関数の制約で書ける最適化問題を線形計画問題と呼ぶ．例を以下に挙げる：

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -2x_1 + 3x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + \ \ x_2 = 7, \\
& x_1 - 2x_2 \leqslant 4, \\
& x_1 \qquad\ \ \geqslant 0.
\end{array}
$$

この問題を解く方法を線形計画法といい，今回はその一つとして simplex 法を紹介する．

1.1　制約の形式

最初に，standard form / slack form と呼ばれる二つの形式について述べる．

1.1.1　standard form

standard form は以下のような形式を持つ．

1. 最大化の形である．
   - 線形関数の minimize ではなく maximize をする．
   - minimize $\sum_j c_j x_j$ を maximize $\sum_j -c_j x_j$ に書き換えると変換可能．
2. 各変数 x_j について非負制約 $x_j \geqslant 0$ がある．
   - 非負制約のない x_j を $x_j = x_j' - x_j''$ で置き換え，これらに非負制約をつけることで変換可能．
3. 等号制約ではなく不等号制約の形である．
   - $\sum_j a_{ij} x_j = b_i$ を $\sum_j a_{ij} x_j \leqslant b_i$ と $\sum_j a_{ij} x_j \geqslant b_i$ の二つの条件に書き換えると変換可能．
4. 不等式制約は $\geqslant$ ではなく $\leqslant$ の形の制約である．
   - これは各変数の非負制約については除外されるはず．
   - $\sum_j a_{ij} x_j \geqslant b_i$ を $\sum_j -a_{ij} x_j \leqslant -b_i$ に書き換えると変換可能．

すなわち，standard form は $m \times n$ 行列 $\mathbf{A} = (a_{ij})$，m 次元ベクトル $\mathbf{b} = (b_i)$，n 次元ベクトル $\mathbf{c} = (c_j)$，$\mathbf{x} = (x_j)$ を用いて以下のように表せる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\
\text{subject to} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}, \\
& \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.
\end{array}
$$

ここで，ベクトルについての不等式は，各要素に対してその不等式が成り立つことを意味する．

1.1.2　slack form

次に，slack form について述べる．standard form における次の式がある．

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i.$$

これを次の二つの制約に書き換える．この書き換えによって得られる形式が slack form である．

$$
\begin{aligned}
x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \\
x_{n+i} &\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

slack form において，左辺に現れる変数たち x_{n+i} を basic variables といい，右辺に現れる変数たち x_j を nonbasic variables という．

1.2 simplex 法

線形計画問題を slack form の形式で扱い，大まかには以下のような処理をする．ある basic な変数と nonbasic な変数を一つずつ選び，それらを交換する*1ことを繰り返しながら最大化を行う．

*1 basic な変数を nonbasic になるようにし，nonbasic な変数を basic になるように書き換える．