計算量解析に関する自明でない例

えびちゃん

2019 年 11 月 5 日

1 調和級数

以下のようなループの回数を解析する．

```
for (size_type i = 0; i < n; ++i)
  for (size_type j = 0; j < n; i += j)
    ...
```

i を固定したとき，内側のループは $\lfloor n/i \rfloor$ 回なので，全体は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \\
&= n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \\
&= n \cdot (\log_e n + \gamma + \varepsilon_n) \\
&\subseteq n \cdot (\log_e n + \gamma + o(1)) \\
&\subseteq n \log_e n + \Theta(n) \\
&\subseteq \Theta(n \log n).
\end{aligned}
$$

定数倍を細かく見ることはなさそうなので，$\Theta(n \log n)$ 回と見ることが多そう．

2 最小値を選ぶやつ

これはたぶん特殊な例．適宜一般化する．

Σ 上の長さ n の文字列を考える．n_σ を文字 σ の出現数としたとき，以下の式を解析する[*1]．

$$
\sum_{\sigma \in \Sigma} \min(n_\sigma^2, n \log n).
$$

[*1] 二種類のアルゴリズムのうち，効率的な方を選ぶ場合の計算量解析など．

これが最大となるのは $n_\sigma^2 = n \log n$ のときのはずで，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\Sigma} \min(n_\sigma^2, n \log n) \\
&= \sum_{\sigma\in\Sigma} \sqrt{n_\sigma^2} \cdot \sqrt{n \log n} \\
&= \left(\sum_{\sigma\in\Sigma} n_\sigma\right) \cdot \sqrt{n \log n} \\
&= n \cdot \sqrt{n \log n}.
\end{aligned}
$$

min の引数のうち，片方が n に依存していて，他方が束縛変数に依存している場合に，それらが等しいとおいて変形する？ 束縛変数のみの式にして，閉じた形にできるとうれしい．

3 二乗の木 DP

二分木での木 DP を考える．頂点 v_p と，その子 v_l, v_r があり，それらの部分木のサイズがそれぞれ n_p, n_l, n_r であるときの計算量が以下のようになっているとする．

$$T(n_p) = T(n_l) + T(n_r) + O(lr).$$

全体の頂点数が n のとき，これは $T(n) = O(n^2)$ となる．

多分木なら $O(lr)$ の項はどう書くとよい？ あるいは（二分木でも）その項がもっと大きかったら？