1　包除原理

数え上げのテクニックの一つ．集合 A が与えられ，その要素を変数とする述語たち $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ を考える．$1 \leqslant i \leqslant k$ に対して A の部分集合 A_i を $A_i = \{a \in A \mid P_i(a)\}$ で定めるとき，$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ の要素数を求めるものである．$K = \{1, \ldots, k\}$ とする．

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{\emptyset \subset \Lambda \subseteq K} (-1)^{|\Lambda|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in \Lambda} A_i\right|. \tag{1}$$

$|\Lambda| = |\Lambda'| \implies \left|\bigcap_{i \in \Lambda} A_i\right| = \left|\bigcap_{i \in \Lambda'} A_i\right|$ であるなら，$|\Lambda| = j$ であるような Λ の代表元を Λ^j と書くことにして次のように変形できる．

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \cdot {}_k C_j \cdot \left|\bigcap_{i \in \Lambda^j} A_i\right|. \tag{2}$$

式 (1) においては $\sum$ で足し合わされる項が $2^k - 1$ 個だったのに対し，式 (2) では k に減っていてうれしい．

上の議論は，$\left|\bigcap_{i \in \Lambda} A_i\right|$ を計算するのが容易であることを前提としているが，逆に $\left|\bigcap_{i \in \Lambda} (A \setminus A_i)\right|$ の計算が容易な状況[*1]で $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ の要素数を求めたいときには以下のようにするとよい．

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} (A \setminus A_i)\right).$$

すなわち，

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| = |A| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} (A \setminus A_i)\right)\right|.$$

これは，$A \setminus A_i$ を A_i と置き直すことで，式 (1) の枠組みで求められる．

[*1] 満たす条件を決め打ちするよりも，満たさない条件を決め打ちした方が楽な場合．