1　包除原理

数え上げのテクの一つ．集合 A と，その要素を変数とする述語たち $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ に対して，以下の集合の要素数を求める[*1]．

$$\left\{ a \in A \;\middle|\; \bigvee_{P \in \mathcal{P}} P(a) \right\}.$$

これが以下のように求められるというものである．

$$\left| \left\{ a \in A \;\middle|\; \bigvee_{P \in \mathcal{P}} P(a) \right\} \right| = \sum_{\emptyset \subset \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}} (-1)^{|\mathcal{P}'|-1} \cdot \left| \left\{ a \in A \;\middle|\; \bigwedge_{P \in \mathcal{P}'} P(a) \right\} \right|. \tag{1}$$

ここで，$\left|\left\{ a \in A \mid \bigwedge_{P \in \mathcal{P}'} P(a) \right\}\right|$ は容易に計算できるとする．$\mathcal{P}'$ の要素数を i で固定したときにこの値が一定であるなら，そうした $\mathcal{P}'$ の代表元を $\mathcal{P}^i$ と書くことにしてさらに変形できる．

$$\left| \left\{ a \in A \;\middle|\; \bigvee_{P \in \mathcal{P}} P(a) \right\} \right| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \cdot {}_k C_i \cdot \left| \left\{ a \in A \;\middle|\; \bigwedge_{P \in \mathcal{P}^i} P(a) \right\} \right|. \tag{2}$$

式 (1) では求めるべき値の個数が $2^k - 1$ であるのに対し，式 (2) では k になっていてうれしい．

あるいは $\left|\left\{ a \in A \mid \bigwedge_{P \in \mathcal{P}'} \neg P(a) \right\}\right|$ が容易に計算でき，以下の集合の要素数を求めたいこともある．

$$\left\{ a \in A \;\middle|\; \bigwedge_{P \in \mathcal{P}} P(a) \right\}.$$

余事象を考えるとよくて，以下のように変形できる．

$$\left\{ a \in A \;\middle|\; \bigwedge_{P \in \mathcal{P}} P(a) \right\} = A \setminus \left\{ a \in A \;\middle|\; \bigvee_{P \in \mathcal{P}} \neg P(a) \right\}.$$

これは式 (1) の枠組みで求められる．

1.1　発展

1.1.1　高速ゼータ変換

集合 S の部分集合を引数に取る関数 f に対して $g(S) = \sum_{T \subseteq S} f(T)$ を高速に求める．若干ギャップがある気がするけど，たぶん述語たち $\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{P}'$ についていい感じのことができる．To-do: 追記．

1.2　応用

1.2.1　暗黙の制約

$n \leqslant 10^9$ なら n の持つ素因数の個数はたかだか 9 個なので，n が多少大きくても n の素因数に関する部分集合であれば式 (1) をそのまま計算することができる．

[*1] 各 i に対して $A_i = \{a \in A \mid P_i(a)\}$ なる A の部分集合を考えると図示しやすいかも？