Mo's Algorithm

えびちゃん

2019 年 11 月 5 日

静的な配列に対して，区間 $[L_i, R_i)$ に関するクエリ処理を行う．ある区間 $[s, t)$ についての結果が求められているときに $[s \pm 1, t \pm 1)$ に関するクエリに $T(n)$ で求められるとする．

配列を個数 b のバケットで分割する．バケットの個数は $\lceil n/b \rceil$ である．クエリの区間 $[L_i, R_i)$ を $(\lfloor L_i/b \rfloor, R_i)$ をキーとしてソートし，順に処理することを考える．

まず，区間の左端がどの程度変更されるかを考える．

う

左端の属するバケットが同じとき，左端の移動は at most b per query．右端の移動は at most n．左端の属するバケットが次のものに変わるとき，左端の移動は at most $2b$．右端の移動は at most n．バケットが変わるのは at most $\lceil n/b \rceil - 1$ times．

これより，左端の移動は $bq + 2b(\lceil n/b \rceil - 1) = bq + O(n)$ で，右端の移動は $2n(\lceil n/b \rceil - 1) = O(n^2/b)$．よって，$bq \cdot T(n)$ と $n^2/b \cdot T(n)$ をバランスよくするような b を定めたい．相加・相乗平均の関係から，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}(bq + n^2/b) \cdot T(n) &\geqslant \bigl((bq \cdot T(n)) \cdot (n^2/b \cdot T(n))\bigr)^{1/2} \\ &= n\sqrt{q} \cdot T(n)\end{aligned}$$

等号が成り立つのは $bq = n^2/b$ のときで，$b = n/\sqrt{q}$ 程度に選ぶのがよさそう．