Minimale Logik und Semantik für die Sprachphilosophie
03. Aussagenlogik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Semantik`

Inhalt

Kernfragen in dieser Woche

Kernfragen in dieser Woche

Was leistet eine Aussagenlogik (und was nicht)?

Kernfragen in dieser Woche

Was leistet eine Aussagenlogik (und was nicht)?

Wann sind und/oder/wenn-dann-Aussagen wahr oder falsch?

Kernfragen in dieser Woche

Was leistet eine Aussagenlogik (und was nicht)?

Wann sind und/oder/wenn-dann-Aussagen wahr oder falsch?

Wann sind logische Ausdrücke gleichbedeutend (äquivalent)?

Kernfragen in dieser Woche

Was leistet eine Aussagenlogik (und was nicht)?

Wann sind und/oder/wenn-dann-Aussagen wahr oder falsch?

Wann sind logische Ausdrücke gleichbedeutend (äquivalent)?

Was darf man aus was folgern?

Kernfragen in dieser Woche

Was leistet eine Aussagenlogik (und was nicht)?

Wann sind und/oder/wenn-dann-Aussagen wahr oder falsch?

Wann sind logische Ausdrücke gleichbedeutend (äquivalent)?

Was darf man aus was folgern?

Texte für heute: Partee u. a. (1990: 87-246), selektiv auch Bucher (1998).

Was ist Logik?

Logik

Wie Logiken funktionieren

Logik

Wie Logiken funktionieren

- Sammlungen von Aussagen bzw. Propositionen

Logik

Wie Logiken funktionieren

- Sammlungen von Aussagen bzw. Propositionen
- Axiome | als wahr angenommene Aussagen

Logik

Wie Logiken funktionieren

- Sammlungen von Aussagen bzw. Propositionen
- Axiome | als wahr angenommene Aussagen
  - eventuell über Induktion gegeben

Logik

Wie Logiken funktionieren

- Sammlungen von Aussagen bzw. Propositionen
- Axiome | als wahr angenommene Aussagen
  - eventuell über Induktion gegeben
  - oder aus rein theoretischen Überlegungen abgeleitet

Wie Logiken funktionieren

- Sammlungen von Aussagen bzw. Propositionen
- Axiome | als wahr angenommene Aussagen
  - eventuell über Induktion gegeben
  - oder aus rein theoretischen Überlegungen abgeleitet
- Deduktion | Ableiten von Aussagen aus Axiomen

Logik

Wie Logiken funktionieren

- Sammlungen von Aussagen bzw. Propositionen
- Axiome | als wahr angenommene Aussagen
  - eventuell über Induktion gegeben
  - oder aus rein theoretischen Überlegungen abgeleitet
- Deduktion | Ableiten von Aussagen aus Axiomen
- in der Wissenschaft damit Voraussagen aus Axiomen

Beweise

Beweise

Status von Aussagen in logischen Beweisen …

Beweise

Status von Aussagen in logischen Beweisen ...

- Axiome | atomare Wahrheiten (der Theorie oder des Diskurses)

Beweise

Status von Aussagen in logischen Beweisen ...

- Axiome | atomare Wahrheiten (der Theorie oder des Diskurses)
- Theorem | eine Aussage, die bewiesen werden soll oder bewiesen wurde

Status von Aussagen in logischen Beweisen …

- Axiome | atomare Wahrheiten (der Theorie oder des Diskurses)
- Theorem | eine Aussage, die bewiesen werden soll oder bewiesen wurde
- Lemma | ein nebensächliches bewiesenes Theorem

Beweise

Status von Aussagen in logischen Beweisen ...

- Axiome | atomare Wahrheiten (der Theorie oder des Diskurses)
- Theorem | eine Aussage, die bewiesen werden soll oder bewiesen wurde
- Lemma | ein nebensächliches bewiesenes Theorem
- Korollar | ein minderes Theorem im Rahmen einer Beweisführung

Wozu Logik?

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen …

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen ...

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen …

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen ...

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen
- Schlussregeln zur Ableitung von Theoremen aus Axiomen

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen …

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen
- Schlussregeln zur Ableitung von Theoremen aus Axiomen
- Untersuchung, inwieweit Sprache logischen Prinzipien folgt

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen ...

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen
- Schlussregeln zur Ableitung von Theoremen aus Axiomen
- Untersuchung, inwieweit Sprache logischen Prinzipien folgt
- Wissenschaft

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen …

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen
- Schlussregeln zur Ableitung von Theoremen aus Axiomen
- Untersuchung, inwieweit Sprache logischen Prinzipien folgt
- Wissenschaft
  - Hypothesengenerierung durch Induktion und Abduktion

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen …

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen
- Schlussregeln zur Ableitung von Theoremen aus Axiomen
- Untersuchung, inwieweit Sprache logischen Prinzipien folgt
- Wissenschaft
  - Hypothesengenerierung durch Induktion und Abduktion
  - Hypothesenprüfung durch Deduktion plus Testung

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen ...

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen
- Schlussregeln zur Ableitung von Theoremen aus Axiomen
- Untersuchung, inwieweit Sprache logischen Prinzipien folgt
- Wissenschaft
  - Hypothesengenerierung durch Induktion und Abduktion
  - Hypothesenprüfung durch Deduktion plus Testung
  - außerdem Prüfen auf Widerspruchsfreiheit

Warum Logik in der Semantik?

Warum Logik in der Semantik?

Sprache ist nicht ohne Logik.

Warum Logik in der Semantik?

Sprache ist nicht ohne Logik.

- Aussagesätze haben Wahrheitsbedingungen!

Warum Logik in der Semantik?

Sprache ist nicht ohne Logik.

- Aussagesätze haben Wahrheitsbedingungen!
- Sprache ist systematisch und kompositional!

Warum Logik in der Semantik?

Sprache ist nicht ohne Logik.

- Aussagesätze haben Wahrheitsbedingungen!
- Sprache ist systematisch und kompositional!
- Natürlichsprachliche Sätze folgen aus anderen Sätzen!
  ... wie Theoreme aus Axiomen ...

Warum Logik in der Semantik?

Sprache ist nicht ohne Logik.

- Aussagesätze haben Wahrheitsbedingungen!
- Sprache ist systematisch und kompositional!
- Natürlichsprachliche Sätze folgen aus anderen Sätzen!
  ... wie Theoreme aus Axiomen ...
- Was das Gehirn damit macht, ist – wie gesagt – eine parallele Frage.

Aussagenlogik

Atomare Formeln

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - *Herr Keydana is a passionate cyclist.*: k

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - *Herr Keydana is a passionate cyclist.*: k
- Wahrheitswert | Semantik einer Formel

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - *Herr Keydana is a passionate cyclist.*: k
- Wahrheitswert | Semantik einer Formel
  - $[\![k]\!] \in \{0, 1\}$

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - *Herr Keydana is a passionate cyclist.: k*
- Wahrheitswert | Semantik einer Formel
  - $[\![k]\!] \in \{0, 1\}$
  - Wenn Herr Keydana passionierter Radsportler ist, dann $[\![k]\!] = 1$

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - *Herr Keydana is a passionate cyclist.: k*
- Wahrheitswert | Semantik einer Formel
  - $[\![k]\!] \in \{0, 1\}$
  - Wenn Herr Keydana passionierter Radsportler ist, dann $[\![k]\!] = 1$
  - ... sonst $[\![k]\!] = 0$

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - *Herr Keydana is a passionate cyclist.*: k
- Wahrheitswert | Semantik einer Formel
  - $[\![k]\!] \in \{0, 1\}$
  - Wenn Herr Keydana passionierter Radsportler ist, dann $[\![k]\!] = 1$
  - ... sonst $[\![k]\!] = 0$
  - k ist kontingent | wahr oder falsch je nach Modell

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - *Herr Keydana is a passionate cyclist.: k*
- Wahrheitswert | Semantik einer Formel
  - $[\![k]\!] \in \{0, 1\}$
  - Wenn Herr Keydana passionierter Radsportler ist, dann $[\![k]\!] = 1$
  - ... sonst $[\![k]\!] = 0$
  - *k* ist kontingent | wahr oder falsch je nach Modell
  - Modell | Spezifikation von Wahrheitsbedingungen

Komplexe (molekulare) Formeln

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn *p* und *q* Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$
  - $p \vee q$

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$
  - $p \vee q$
  - $p \wedge q$

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$
  - $p \vee q$
  - $p \wedge q$
  - $p \rightarrow q$

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$
  - $p \vee q$
  - $p \wedge q$
  - $p \rightarrow q$
  - $p \leftrightarrow q$
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$
  - $p \vee q$
  - $p \wedge q$
  - $p \rightarrow q$
  - $p \leftrightarrow q$
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p*
  - $p \vee q$
  - $p \wedge q$
  - $p \rightarrow q$
  - $p \leftrightarrow q$
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p*
  - $p \vee q$ | *p oder q*
  - $p \wedge q$
  - $p \rightarrow q$
  - $p \leftrightarrow q$
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p*
  - $p \vee q$ | *p oder q*
  - $p \wedge q$ | *p und q*
  - $p \rightarrow q$
  - $p \leftrightarrow q$
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p*
  - $p \vee q$ | *p oder q*
  - $p \wedge q$ | *p und q*
  - $p \rightarrow q$ | *wenn p dann q*
  - $p \leftrightarrow q$
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p*
  - $p \vee q$ | *p oder q*
  - $p \wedge q$ | *p und q*
  - $p \rightarrow q$ | *wenn p dann q*
  - $p \leftrightarrow q$ | *p genau dann wenn q*
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p* | Negation
  - $p \vee q$ | *p oder q*
  - $p \wedge q$ | *p und q*
  - $p \rightarrow q$ | *wenn p dann q*
  - $p \leftrightarrow q$ | *p genau dann wenn q*
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p* | Negation
  - $p \vee q$ | *p oder q* | Disjunktion
  - $p \wedge q$ | *p und q*
  - $p \rightarrow q$ | *wenn p dann q*
  - $p \leftrightarrow q$ | *p genau dann wenn q*
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn *p* und *q* Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p* | Negation
  - $p \vee q$ | *p oder q* | Disjunktion
  - $p \wedge q$ | *p und q* | Konjunktion
  - $p \rightarrow q$ | *wenn p dann q*
  - $p \leftrightarrow q$ | *p genau dann wenn q*
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p* | Negation
  - $p \vee q$ | *p oder q* | Disjunktion
  - $p \wedge q$ | *p und q* | Konjunktion
  - $p \rightarrow q$ | *wenn p dann q* | Konditional
  - $p \leftrightarrow q$ | *p genau dann wenn q*
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p* | Negation
  - $p \vee q$ | *p oder q* | Disjunktion
  - $p \wedge q$ | *p und q* | Konjunktion
  - $p \rightarrow q$ | *wenn p dann q* | Konditional
  - $p \leftrightarrow q$ | *p genau dann wenn q* | Bikonditional
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Negation | Semantik von $\neg$

Es ist nicht der Fall, dass p.

Es ist nicht der Fall, dass p.

- Definition gemäß letzter Woche: $[\![\neg]\!] = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$

Es ist nicht der Fall, dass p.

- Definition gemäß letzter Woche: $[\![\neg]\!] = \{\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle\}$
- Typische Definition als Funktion

$$[\![\neg]\!] = \left[\begin{array}{c} 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{array}\right]$$

Es ist nicht der Fall, dass p.

- Definition gemäß letzter Woche: $[\![\neg]\!] = \{\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle\}$
- Typische Definition als Funktion

$$[\![\neg]\!] = \begin{bmatrix} 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{bmatrix}$$

- Typische Darstellung mit Wahrheitstafel

¬	*p*
0	1
1	0

Diskjunktion | Semantik von $\vee$

Es ist der Fall, dass p, dass q, oder dass p und q.

Es ist der Fall, dass p, dass q, oder dass p und q.

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

Es ist der Fall, dass p, dass q, oder dass p und q.

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

- *Herr Keydana is a passionate cyclist or we all love logic.*

Es ist der Fall, dass p, dass q, oder dass p und q.

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

- *Herr Keydana is a passionate cyclist or we all love logic.*
- $k \vee l$

Konjunktion | Semantik von $\wedge$

Konjunktion | Semantik von $\wedge$

Es ist der Fall, dass p, und dass q.

Es ist der Fall, dass p, und dass q.

p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

Konjunktion | Semantik von $\wedge$

Es ist der Fall, dass p, und dass q.

p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

- *Herr Keydana is a passionate cyclist and we all love logic.*

Es ist der Fall, dass p, und dass q.

p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

- *Herr Keydana is a passionate cyclist and we all love logic.*
- $k \wedge l$

Konditional | Semantik von $\rightarrow$

Wenn q gilt, dann gilt q.

Wenn q gilt, dann gilt q.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Wenn q gilt, dann gilt q.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- *If it rains, then the streets get wet.*

Wenn q gilt, dann gilt q.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- *If it rains, then the streets get wet.*
- $r \rightarrow s$

Ex falso sequitur quodlibet!

Ex falso sequitur quodlibet!

If it rains, the streets get wet. $\vdash$? It doesn't rain, so the streets are dry.

Ex falso sequitur quodlibet!

If it rains, the streets get wet. $\vdash$? It doesn't rain, so the streets are dry.

- it is raining (1) , the streets are wet (1) : **1**

Ex falso sequitur quodlibet!

If it rains, the streets get wet. $\vdash$? It doesn't rain, so the streets are dry.

- it is raining (1) , the streets are wet (1) : **1**
- it is raining (1) , the streets are not wet (0) : **0**

Ex falso sequitur quodlibet!

If it rains, the streets get wet. $\vdash$? It doesn't rain, so the streets are dry.

- it is raining (1) , the streets are wet (1) : **1**
- it is raining (1) , the streets are not wet (0) : **0**
- it is not raining (0) , the streets are wet (1) : **1**

Ex falso sequitur quodlibet!

If it rains, the streets get wet. $\vdash$? It doesn't rain, so the streets are dry.

- it is raining (1) , the streets are wet (1) : **1**
- it is raining (1) , the streets are not wet (0) : **0**
- it is not raining (0) , the streets are wet (1) : **1**
- it is not raining (0) , the streets are not wet (0) : **1**

Ex falso sequitur quodlibet!

If it rains, the streets get wet. $\vdash$? It doesn't rain, so the streets are dry.

- it is raining (1) , the streets are wet (1) : **1**
- it is raining (1) , the streets are not wet (0) : **0**
- it is not raining (0) , the streets are wet (1) : **1**
- it is not raining (0) , the streets are not wet (0) : **1**

- *Ex falso sequitur quodlibet.* | Modus morons

Bikonditional | Semantik von $\leftrightarrow$

Bikonditional | Semantik von $\leftrightarrow$

p ist der Fall genau dann, wenn q der Fall ist.
Wenn p der Fall ist, dann ist q der Fall und umgekehrt.

p ist der Fall genau dann, wenn q der Fall ist.
Wenn p der Fall ist, dann ist q der Fall und umgekehrt.

p	$\leftrightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

p ist der Fall genau dann, wenn q der Fall ist.
Wenn p der Fall ist, dann ist q der Fall und umgekehrt.

p	$\leftrightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

- *If and only if your score is above 50, then you pass the semantics exam.*

Bikonditional | Semantik von $\leftrightarrow$

p ist der Fall genau dann, wenn q der Fall ist.
Wenn p der Fall ist, dann ist q der Fall und umgekehrt.

p	$\leftrightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

- *If and only if your score is above 50, then you pass the semantics exam.*
- $s \leftrightarrow p$

Skopus und Klammern

Skopus und Klammern

Bindungsstärke der Funktoren

Skopus und Klammern

Bindungsstärke der Funktoren

$$\neg$$
$$\wedge$$
$$\vee$$
$$\rightarrow$$
$$\leftrightarrow$$

Skopus und Klammern

Bindungsstärke der Funktoren

$$\text{Skopus} \;\Bigg\downarrow\; \begin{array}{c} \neg \\ \wedge \\ \vee \\ \rightarrow \\ \leftrightarrow \end{array}$$

Skopus und Klammern

Bindungsstärke der Funktoren

$$\text{Skopus}\ \left\downarrow\ \begin{array}{c} \neg \\ \wedge \\ \vee \\ \rightarrow \\ \leftrightarrow \end{array}\ \right\uparrow\ \text{Bindungsstärke}$$

Hilfreiche überflüssige Klammern

Hilfreiche überflüssige Klammern

Die folgenden Wffs sind alle äquivalent.

Hilfreiche überflüssige Klammern

Die folgenden Wffs sind alle äquivalent.

$$p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s$$

Hilfreiche überflüssige Klammern

Die folgenden Wffs sind alle äquivalent.

$$
\begin{aligned}
& p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s \\
\equiv\ & p \wedge (\neg q) \vee r \rightarrow (\neg s)
\end{aligned}
$$

Hilfreiche überflüssige Klammern

Die folgenden Wffs sind alle äquivalent.

$$
\begin{aligned}
& p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s \\
\equiv\ & p \wedge (\neg q) \vee r \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\ & (p \wedge (\neg q)) \vee r \rightarrow (\neg s)
\end{aligned}
$$

Hilfreiche überflüssige Klammern

Die folgenden Wffs sind alle äquivalent.

$$\begin{aligned} & p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s \\ \equiv\ & p \wedge (\neg q) \vee r \rightarrow (\neg s) \\ \equiv\ & (p \wedge (\neg q)) \vee r \rightarrow (\neg s) \\ \equiv\ & ((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (\neg s) \end{aligned}$$

Hilfreiche überflüssige Klammern

Die folgenden Wffs sind alle äquivalent.

$$
\begin{aligned}
& p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s \\
\equiv\; & p \wedge (\neg q) \vee r \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\; & (p \wedge (\neg q)) \vee r \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\; & ((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\; & (((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (\neg s))
\end{aligned}
$$

Große Wahrheitstabellen anlegen

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs
- für jede atomare Wff W_m mit $m \in \{1, ..n\}$

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs
- für jede atomare Wff W_m mit $m \in \{1, ..n\}$
    - $2^{(n-m)}$ Einsen gefolgt von $2^{(n-m)}$ Nullen

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs
- für jede atomare Wff W_m mit $m \in \{1, ..n\}$
  - $2^{(n-m)}$ Einsen gefolgt von $2^{(n-m)}$ Nullen
- Beispiel mit vier atomaren Wffs p, q, r, s

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs
- für jede atomare Wff W_m mit $m \in \{1, ..n\}$
  - $2^{(n-m)}$ Einsen gefolgt von $2^{(n-m)}$ Nullen
- Beispiel mit vier atomaren Wffs p, q, r, s
  - für p als W_m mit $m = 1$ | alternierende Blöcke von $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs
- für jede atomare Wff W_m mit $m \in \{1, ..n\}$
  - $2^{(n-m)}$ Einsen gefolgt von $2^{(n-m)}$ Nullen
- Beispiel mit vier atomaren Wffs p, q, r, s
  - für p als W_m mit $m = 1$ | alternierende Blöcke von $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q als W_m mit $m = 2$ | alternierende Blöcke von $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs
- für jede atomare Wff W_m mit $m \in \{1, ..n\}$
  - $2^{(n-m)}$ Einsen gefolgt von $2^{(n-m)}$ Nullen
- Beispiel mit vier atomaren Wffs p, q, r, s
  - für p als W_m mit $m = 1$ | alternierende Blöcke von $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q als W_m mit $m = 2$ | alternierende Blöcke von $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r als W_m mit $m = 3$ | alternierende Blöcke von $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs
- für jede atomare Wff W_m mit $m \in \{1, ..n\}$
  - $2^{(n-m)}$ Einsen gefolgt von $2^{(n-m)}$ Nullen
- Beispiel mit vier atomaren Wffs p, q, r, s
  - für p als W_m mit $m = 1$ | alternierende Blöcke von $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q als W_m mit $m = 2$ | alternierende Blöcke von $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r als W_m mit $m = 3$ | alternierende Blöcke von $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s als W_m mit $m = 4$ | alternierende Blöcke von $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen

Ein Beispiel

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s

- Tabelle vorbereiten

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1								
1								
1								
1								
1								
1								
1								
1								
0								
0								
0								
0								
0								
0								
0								
0								

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1			1					
1			1					
1			1					
1			1					
1			0					
1			0					
1			0					
1			0					
0			1					
0			1					
0			1					
0			1					
0			0					
0			0					
0			0					
0			0					

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1			1		1			
1			1		1			
1			1		0			
1			1		0			
1			0		1			
1			0		1			
1			0		0			
1			0		0			
0			1		1			
0			1		1			
0			1		0			
0			1		0			
0			0		1			
0			0		1			
0			0		0			
0			0		0			

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1			1		1			1
1			1		1			0
1			1		0			1
1			1		0			0
1			0		1			1
1			0		1			0
1			0		0			1
1			0		0			0
0			1		1			1
0			1		1			0
0			1		0			1
0			1		0			0
0			0		1			1
0			0		1			0
0			0		0			1
0			0		0			0

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s | $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1			1		1			1
1			1		1			0
1			1		0			1
1			1		0			0
1			0		1			1
1			0		1			0
1			0		0			1
1			0		0			0
0			1		1			1
0			1		1			0
0			1		0			1
0			1		0			0
0			0		1			1
0			0		1			0
0			0		0			1
0			0		0			0

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s | $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen
- Wahrheitswerte ermitteln
  entsprechend Funktorenskopus

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1		0	1		1			1
1		0	1		1			0
1		0	1		0			1
1		0	1		0			0
1		1	0		1			1
1		1	0		1			0
1		1	0		0			1
1		1	0		0			0
0		0	1		1			1
0		0	1		1			0
0		0	1		0			1
0		0	1		0			0
0		1	0		1			1
0		1	0		1			0
0		1	0		0			1
0		1	0		0			0

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s | $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen
- Wahrheitswerte ermitteln entsprechend Funktorenskopus
  - für $\neg q$

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1		0	1		1		0	1
1		0	1		1		1	0
1		0	1		0		0	1
1		0	1		0		1	0
1		1	0		1		0	1
1		1	0		1		1	0
1		1	0		0		0	1
1		1	0		0		1	0
0		0	1		1		0	1
0		0	1		1		1	0
0		0	1		0		0	1
0		0	1		0		1	0
0		1	0		1		0	1
0		1	0		1		1	0
0		1	0		0		0	1
0		1	0		0		1	0

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s | $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen
- Wahrheitswerte ermitteln
  entsprechend Funktorenskopus
  - für $\neg q$
  - für $\neg s$

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1	0	0	1		1		0	1
1	0	0	1		1		1	0
1	0	0	1		0		0	1
1	0	0	1		0		1	0
1	1	1	0		1		0	1
1	1	1	0		1		1	0
1	1	1	0		0		0	1
1	1	1	0		0		1	0
0	0	0	1		1		0	1
0	0	0	1		1		1	0
0	0	0	1		0		0	1
0	0	0	1		0		1	0
0	0	1	0		1		0	1
0	0	1	0		1		1	0
0	0	1	0		0		0	1
0	0	1	0		0		1	0

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s | $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen
- Wahrheitswerte ermitteln
  entsprechend Funktorenskopus
  - für $\neg q$
  - für $\neg s$
  - für $p \wedge \neg q$

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1	0	0	1	1	1		0	1
1	0	0	1	1	1		1	0
1	0	0	1	0	0		0	1
1	0	0	1	0	0		1	0
1	1	1	0	1	1		0	1
1	1	1	0	1	1		1	0
1	1	1	0	1	0		0	1
1	1	1	0	1	0		1	0
0	0	0	1	1	1		0	1
0	0	0	1	1	1		1	0
0	0	0	1	0	0		0	1
0	0	0	1	0	0		1	0
0	0	1	0	1	1		0	1
0	0	1	0	1	1		1	0
0	0	1	0	0	0		0	1
0	0	1	0	0	0		1	0

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s | $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen
- Wahrheitswerte ermitteln
  entsprechend Funktorenskopus
  - für $\neg q$
  - für $\neg s$
  - für $p \wedge \neg q$
  - für $p \wedge \neg q \vee r$

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s | $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen
- Wahrheitswerte ermitteln
  entsprechend Funktorenskopus
  - für $\neg q$
  - für $\neg s$
  - für $p \wedge \neg q$
  - für $p \wedge \neg q \vee r$
  - für $p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s$

Tautologie, Kontradiktion, Kontingenz

Tautologie, Kontradiktion, Kontingenz

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

Tautologie, Kontradiktion, Kontingenz

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

- Tautologie = immer wahr | Beispiel $p \vee \neg p$

Tautologie, Kontradiktion, Kontingenz

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

- Tautologie = immer wahr | Beispiel $p \vee \neg p$

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0

Tautologie, Kontradiktion, Kontingenz

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

- Tautologie = immer wahr | Beispiel $p \vee \neg p$

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0

- Kontradiktion = immer falsch | Beispiel $p \wedge \neg p$

Tautologie, Kontradiktion, Kontingenz

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

- Tautologie = immer wahr | Beispiel $p \vee \neg p$

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0

- Kontradiktion = immer falsch | Beispiel $p \wedge \neg p$

p	$\wedge$	$\neg$	p
1	0	0	1
0	0	1	0

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

- Tautologie = immer wahr | Beispiel $p \vee \neg p$

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0

- Kontradiktion = immer falsch | Beispiel $p \wedge \neg p$

p	$\wedge$	$\neg$	p
1	0	0	1
0	0	1	0

- Kontingenz = je nach Modell wahr oder falsch | Beispiel $p \wedge p$

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

- Tautologie = immer wahr | Beispiel $p \vee \neg p$

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0

- Kontradiktion = immer falsch | Beispiel $p \wedge \neg p$

p	$\wedge$	$\neg$	p
1	0	0	1
0	0	1	0

- Kontingenz = je nach Modell wahr oder falsch | Beispiel $p \wedge p$

p	$\wedge$	p
1	1	1
0	0	0

Was heißt Gesetze?

Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.

Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.
Gesetze als Formulierung bekannter Äquivalenzen ($\equiv$ oder $\Leftrightarrow$)

Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.
Gesetze als Formulierung bekannter Äquivalenzen ($\equiv$ oder $\Leftrightarrow$)

- Wffs mit stets gleicher Interpretation
  $X \equiv Y$: X hat dieselben Wahrheitsbedingungen wie Y

Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.
Gesetze als Formulierung bekannter Äquivalenzen ($\equiv$ oder $\Leftrightarrow$)

- Wffs mit stets gleicher Interpretation
  $X \equiv Y$: X hat dieselben Wahrheitsbedingungen wie Y
- Regeln zum wahrheitswertkonservativen Umschreiben komplexer Wffs

Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.
Gesetze als Formulierung bekannter Äquivalenzen ($\equiv$ oder $\Leftrightarrow$)

- Wffs mit stets gleicher Interpretation
  $X \equiv Y$: X hat dieselben Wahrheitsbedingungen wie Y
- Regeln zum wahrheitswertkonservativen Umschreiben komplexer Wffs
- Parallelen zur Mengenlehre offensichtlich
  (mit den zugrundeliegenden algebraischen Formalisierungen erst recht)

Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.
Gesetze als Formulierung bekannter Äquivalenzen ($\equiv$ oder $\Leftrightarrow$)

- Wffs mit stets gleicher Interpretation
  $X \equiv Y$: X hat dieselben Wahrheitsbedingungen wie Y
- Regeln zum wahrheitswertkonservativen Umschreiben komplexer Wffs
- Parallelen zur Mengenlehre offensichtlich
  (mit den zugrundeliegenden algebraischen Formalisierungen erst recht)
- Alle Funktoren lassen sich aus einem Funktor ableiten.

Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.
Gesetze als Formulierung bekannter Äquivalenzen ($\equiv$ oder $\Leftrightarrow$)

- Wffs mit stets gleicher Interpretation
  X $\equiv$ Y: X hat dieselben Wahrheitsbedingungen wie Y
- Regeln zum wahrheitswertkonservativen Umschreiben komplexer Wffs
- Parallelen zur Mengenlehre offensichtlich
  (mit den zugrundeliegenden algebraischen Formalisierungen erst recht)
- Alle Funktoren lassen sich aus einem Funktor ableiten.

  Scheffer-Strich (NAND, *nicht-und*; vgl. auch Peirce-Funktor)

p	$\mid$	q	$\equiv$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$
1	0	1		0	1	1	1
1	1	0		1	1	0	0
0	1	1		1	0	0	1
0	1	0		1	0	0	0

Eher triviale Äquivalenzregeln

Eher triviale Äquivalenzregeln

Idempotenz	$p \vee p \equiv p$	$P \cup P = P$	*They talk or they talk.*
	$p \wedge p \equiv p$	$P \cap P = P$	*They talk and they talk.*
Assoziativität	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$	*(He walks or (she talks) or we walk).*
	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$	*(He walks and (she talks) and we walk).*
Kommutativität	$p \vee q \equiv q \vee p$	$P \cup Q = Q \cup P$	*Peter walks or Sue snores.* $\equiv$ *Sue snores or Peter walks.*
	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$P \cap Q = Q \cap P$	*Peter walks and Sue snores.* $\equiv$ *Sue snores and Peter walks.*
Distributivität	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$	*(Sue snores) and (Peter walks or we talk).* $\equiv$ *(Sue snores and Peter walks) or (Sue snores and we talk).*
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$	
DeMorgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$(P \cup Q)' = P' \cap Q'$	
	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$(P \cap Q)' = P' \cup Q'$	
Komplementgesetze			
– Tautologie	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$		
– Kontradiktion	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$		
– Doppelnegation	$\neg\neg p \equiv p$		

Eher triviale Äquivalenzregeln

Idempotenz	$p \vee p \equiv p$	$P \cup P = P$	*They talk or they talk.*
	$p \wedge p \equiv p$	$P \cap P = P$	*They talk and they talk.*
Assoziativität	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$	*(He walks or (she talks) or we walk).*
	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$	*(He walks and (she talks) and we walk).*
Kommutativität	$p \vee q \equiv q \vee p$	$P \cup Q = Q \cup P$	*Peter walks or Sue snores.* $\equiv$ *Sue snores or Peter walks.*
	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$P \cap Q = Q \cap P$	*Peter walks and Sue snores.* $\equiv$ *Sue snores and Peter walks.*
Distributivität	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$	*(Sue snores) and (Peter walks or we talk).* $\equiv$ *(Sue snores and Peter walks) or (Sue snores and we talk).*
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$	
DeMorgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$(P \cup Q)' = P' \cap Q'$	
	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$(P \cap Q)' = P' \cup Q'$	
Komplementgesetze			
– Tautologie	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$		
– Kontradiktion	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$		
– Doppelnegation	$\neg\neg p \equiv p$		

T für Tautologie ($[\![\mathbf{T}]\!] = 1$), **F** für Kontradiktion ($[\![\mathbf{F}]\!] = 0$)

alternative Notation für DeMorgan: $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

folgt aus DeMorgan: $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{\overline{q}} \equiv p \wedge q$

Konditionalgesetze

Konditionalgesetze

Implikation (Impl.)

Konditionalgesetze

Implikation (Impl.)

P	$\rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1	1	1		0	1	1	1
1	0	0		0	1	0	0
0	1	1		1	0	1	1
0	1	0		1	0	1	0

Konditionalgesetze

Implikation (Impl.)

P	$\rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1	1	1		0	1	1	1
1	0	0		0	1	0	0
0	1	1		1	0	1	1
0	1	0		1	0	1	0

Kontraposition (Kontr.)

Konditionalgesetze

Implikation (Impl.)

P	$\rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1	1	1		0	1	1	1
1	0	0		0	1	0	0
0	1	1		1	0	1	1
0	1	0		1	0	1	0

Kontraposition (Kontr.)

P	$\rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	Q	$\rightarrow$	$\neg$	P
1	1	1		0	1	1	0	1
1	0	0		1	0	0	0	1
0	1	1		0	1	1	1	0
0	1	0		1	0	1	1	0

Echte Schlussregeln

Echte Schlussregeln

Feste Regeln für Deduktionsschlüsse aus Prämissen

Echte Schlussregeln

Feste Regeln für Deduktionsschlüsse aus Prämissen

- alle obigen Regeln | Äquivalenzregeln (= Umformungsregeln) für einzelne Wffs

Echte Schlussregeln

Feste Regeln für Deduktionsschlüsse aus Prämissen

- alle obigen Regeln | Äquivalenzregeln (= Umformungsregeln) für einzelne Wffs
- Schlussregeln

Echte Schlussregeln

Feste Regeln für Deduktionsschlüsse aus Prämissen

- alle obigen Regeln | Äquivalenzregeln (= Umformungsregeln) für einzelne Wffs
- Schlussregeln
    - Schließen aus Mengen von Prämissen

Echte Schlussregeln

Feste Regeln für Deduktionsschlüsse aus Prämissen

- alle obigen Regeln | Äquivalenzregeln (= Umformungsregeln) für einzelne Wffs
- Schlussregeln
  - Schließen aus Mengen von Prämissen
  - kein neues Wissen, aber Erschließen existierenden Wissens

Echte Schlussregeln

Feste Regeln für Deduktionsschlüsse aus Prämissen

- alle obigen Regeln | Äquivalenzregeln (= Umformungsregeln) für einzelne Wffs
- Schlussregeln
    - Schließen aus Mengen von Prämissen
    - kein neues Wissen, aber Erschließen existierenden Wissens
    - nicht naturgegeben | zahlreiche alternative Logiken

Modus ponens (MP)

Modus ponens (MP)

Eine Implikation (Antezedens $\rightarrow$ Konsequenz) und ihr Antezedens sind gegeben.

Modus ponens (MP)

Eine Implikation (Antezedens $\rightarrow$ Konsequenz) und ihr Antezedens sind gegeben.

	$p \rightarrow q$	Prämisse 1
	p	Prämisse 2
$\vdash$	q	Schluss

Modus ponens (MP)

Eine Implikation (Antezedens $\rightarrow$ Konsequenz) und ihr Antezedens sind gegeben.

	$p \rightarrow q$	Prämisse 1
	p	Prämisse 2
$\vdash$	q	Schluss

Beispiel mit natürlichsprachlichem Material

(1)	*If It rains, the streets get wet.*	
(2)	*It is raining.*	
$\vdash$	*The streets are getting wet.*	1,2,MP

Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- Prämisse 1 ($p \rightarrow q$) muss wahr sein, ...

Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- Prämisse 1 ($p \rightarrow q$) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 für streichen!

Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- Prämisse 1 ($p \rightarrow q$) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 für streichen!
- Prämisse 2 (p) muss wahr sein, ...

Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- Prämisse 1 ($p \rightarrow q$) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 für streichen!
- Prämisse 2 (p) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 streichen

Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- Prämisse 1 ($p \rightarrow q$) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 für streichen!
- Prämisse 2 (p) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 streichen
- Es bleibt nur noch eine Zeile, in der $[\![q]\!] = 1$

Modus tollens (MT)

Modus tollens (MT)

Eine Implikation und die Negation ihrer Konsequenz sind gegeben.

Modus tollens (MT)

Eine Implikation und die Negation ihrer Konsequenz sind gegeben.

	$p \rightarrow q$	Prämisse 1
	$\neg q$	Prämisse 2
$\vdash$	$\neg p$	Schluss

Modus tollens (MT)

Eine Implikation und die Negation ihrer Konsequenz sind gegeben.

	$p \rightarrow q$	Prämisse 1
	$\neg q$	Prämisse 2
$\vdash$	$\neg p$	Schluss

Illustration an der Wahrheitstafel

P	$\rightarrow$	Q	
1	1	1	ausgeschlossen durch Prämisse 2
1	0	0	ausgeschlossen durch Prämisse 1
0	1	1	ausgeschlossen durch Prämisse 2
0	1	0	

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q,\ \ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, \;\; q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q,\ \ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q,\ \ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*
  - $\vdash$ *If it rains, it smells nice.*

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, \;\; q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*
  - $\vdash$ *If it rains, it smells nice.*

Disjunktiver Syllogismus (DS) | Eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Disjunkte

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, \;\; q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*
  - $\vdash$ *If it rains, it smells nice.*

Disjunktiver Syllogismus (DS) | Eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Disjunkte

- $p \vee q, \neg p \vdash q$

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*
  - $\vdash$ *If it rains, it smells nice.*

Disjunktiver Syllogismus (DS) | Eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Disjunkte

- $p \vee q, \neg p \vdash q$
- Beispiel in natürlicher Sprache

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, \;\; q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*
  - $\vdash$ *If it rains, it smells nice.*

Disjunktiver Syllogismus (DS) | Eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Disjunkte

- $p \vee q, \neg p \vdash q$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *Either Peter sleeps or Peter is awake.*

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q,\ \ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*
  - $\vdash$ *If it rains, it smells nice.*

Disjunktiver Syllogismus (DS) | Eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Disjunkte

- $p \vee q, \neg p \vdash q$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *Either Peter sleeps or Peter is awake.*
  - *Peter isn't awake.*

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*
  - $\vdash$ *If it rains, it smells nice.*

Disjunktiver Syllogismus (DS) | Eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Disjunkte

- $p \vee q, \neg p \vdash q$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *Either Peter sleeps or Peter is awake.*
  - *Peter isn't awake.*
  - $\vdash$ *Peter sleeps.*

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):
  - $p, q \vdash p \wedge q$

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):
  - $p, q \vdash p \wedge q$
  - *It is raining. The sun is shining.* $\vdash$ *It is raining and the sun is shining.*

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):
  - $p, q \vdash p \wedge q$
  - *It is raining. The sun is shining.* $\vdash$ *It is raining and the sun is shining.*
- Addition (Add.):

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):
  - $p, q \vdash p \wedge q$
  - *It is raining. The sun is shining.* $\vdash$ *It is raining and the sun is shining.*
- Addition (Add.):
  - $p \vdash p \vee q$

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):
  - $p, q \vdash p \wedge q$
  - *It is raining. The sun is shining.* $\vdash$ *It is raining and the sun is shining.*
- Addition (Add.):
  - $p \vdash p \vee q$
  - *It is raining.* $\vdash$ *It is raining or the sun is shining.*

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):
  - $p, q \vdash p \wedge q$
  - *It is raining. The sun is shining.* $\vdash$ *It is raining and the sun is shining.*
- Addition (Add.):
  - $p \vdash p \vee q$
  - *It is raining.* $\vdash$ *It is raining or the sun is shining.*
  - Und was ist, wenn q durch eine andere Prämisse als wahr oder falsch bekannt ist?

Ein Beweis

Ein Beweis

Schritte zur Beweisführung

Ein Beweis

Schritte zur Beweisführung

1. Prämissen formalisieren | eine atomare Wff (Buchstabe) pro atomarer Aussage

Ein Beweis

Schritte zur Beweisführung

1. Prämissen formalisieren | eine atomare Wff (Buchstabe) pro atomarer Aussage
2. zu beweisende Aussage (Schlussfolgerung) notieren

Ein Beweis

Schritte zur Beweisführung

1. Prämissen formalisieren | eine atomare Wff (Buchstabe) pro atomarer Aussage
2. zu beweisende Aussage (Schlussfolgerung) notieren
3. aus den Prämissen und Schlussregeln versuchen, zur Schlussfolgerung zu kommen

Ein Beweis

Schritte zur Beweisführung

1. Prämissen formalisieren | eine atomare Wff (Buchstabe) pro atomarer Aussage
2. zu beweisende Aussage (Schlussfolgerung) notieren
3. aus den Prämissen und Schlussregeln versuchen, zur Schlussfolgerung zu kommen

- keine exakte Wissenschaft, erfordert Übung und Intuition

Ein Beweis

Schritte zur Beweisführung

1. Prämissen formalisieren | eine atomare Wff (Buchstabe) pro atomarer Aussage
2. zu beweisende Aussage (Schlussfolgerung) notieren
3. aus den Prämissen und Schlussregeln versuchen, zur Schlussfolgerung zu kommen

- keine exakte Wissenschaft, erfordert Übung und Intuition
- automatische Schlussverfahren (Tableaux) verfügbar (Partee u. a. 1990)

Ein Beispielbeweis

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse |

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $\rightarrow$

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow$

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(\qquad)$

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \qquad)$

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \quad)$

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg \quad)$

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse |

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung |

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \to \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung | s

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung | $\neg s$

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung | $\neg s$

1 $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung | $\neg s$

1	$r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$	
2	r	$\vdash \neg s$

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \to \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung | $\neg s$

1	$r \to \neg(s \vee \neg b)$	
2	r	$\vdash \neg s$
3	$\neg(s \vee \neg b)$	1,2,MP

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung | $\neg s$

1	$r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$	
2	r	$\vdash \neg s$
3	$\neg(s \vee \neg b)$	1,2,MP
4	$\neg s \wedge b$	3,DeM

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung | $\neg s$

1	$r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$	
2	r	$\vdash \neg s$
3	$\neg(s \vee \neg b)$	1,2,MP
4	$\neg s \wedge b$	3,DeM
5	$\neg s$	4,Simp. ■

Aufgaben

Aufgaben I

1. Versuchen Sie, nur mittels des Scheffer-Strichs (s. Folie 20) die Wahrheitstabellen für $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$ und $p \rightarrow q$ zu rekonstruieren. Das ergibt nur einen Sinn, wenn Sie es selbst versuchen. Sie haben mehr davon, wenn Sie daran scheitern, als wenn Sie gleich Wikipedia nehmen.

Aufgaben II

Versuchen Sie sich an folgenden vier Beweisen.

Hinweis: Sie benötigen, soweit ich sehe, nur die folgenden Schlussregeln:

- Simp. | Simplifikation (auch Konjunktionsreduktion o.ä.)
- MT | Modus Tollens
- MP | Modus Ponens
- DS | Disjunktiver Syllogismus
- Konj. | Konjunktionsregel

1. Der Beweis ist sophistisch, oder Achilles holt die Schildkröte ein. Wenn Achilles die Schildkröte einholt, dann versagt die Logik. Die Mathematiker haben alles geprüft, und die Logik versagt nicht. **Zeigen/Widerlegen Sie: Der Beweis ist sophistisch.**

Aufgaben II

2. Pettenkofer lebte weiter, oder seine Hypothese versagte. Wenn die Hypothese versagte, dann wurde Pettenkofer in der Hygiene abgeschrieben. Er schluckte öffentlich eine Kultur Cholerabakterien und wurde in der Hygiene nicht abgeschrieben. **Zeigen/Widerlegen Sie: Pettenkofer lebte weiter.**
3. Der Fischer trinkt gerne Wein, und der Müller singt im Männerchor. Wenn der Veganladenbesitzer Hausbesitzer ist, dann wählt er nicht die Linkspartei. Der Veganladenbesitzer ist Hausbesitzer, oder der Müller singt nicht im Männerchor. **Zeigen/Widerlegen Sie: Der Fischer trinkt gern ein Glas Wein, und der Veganladenbesitzer wählt nicht die Linkspartei.**
4. Wenn Schopenhauer so früh aufstand wie Kant, dann hat er ihn in dieser Hinsicht gut nachgeahmt. Schopenhauer war eingebildet, liebte die Demokratie nicht, und er hatte Wutanfälle. In einem Wutausbruch warf er die Näherin die Stiege hinunter. Er stand so früh auf wie Kant, oder er war nicht eingebildet. **Zeigen/Widerlegen Sie: Schopenhauer hat die Näherin die Stiege hinuntergeworfen, und er hat Kant im Frühaufstehen gut nachgeahmt.**

Literatur I

Bucher, Theodor. 1998. *Einführung in die angewandte Logik*. 2. Aufl. Bd. 2231 (Sammlung Göschen). Berlin: de Gruyter.

Partee, Barbara, Alice ter Meulen & Robert E. Wall. 1990. *Mathematical methods in linguistics*. Dordrecht: Kluwer.

Autor

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

https://rolandschaefer.net
roland.schaefer@uni-jena.de