Formale Semantik
05. Prädikatenlogik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Achtung: Folien in Überarbeitung. Englische Teile sind noch von 2007!
Stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Semantik`

Inhalt

Warum Prädikatenlogik?

Kompositionalität

Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

- Kompositionalität beschärnkt auf Ebene des Satzes/der Proposition (und größer)
- keine Generalisierungen über Individuen, Eigenschaften und Quantifikation
- offensichtlicher Informationsverlust
  - *Martin is an expert on inversion and Martin is a good climber.*
  - wird zu $e \wedge c$

Erwünschte Schlussfolgerungen

Deduktion mit Quantifikation

- alle, einige/mindestens ein, zwei, die meisten, ... Individuen
- einige zu formalisierende Schlüsse
  - alle x haben eine Eigenschaft $\vdash$ einige x haben diese Eigenschaft
  - Martin hat eine Eigenschaft $\vdash$ mindestens ein x hat diese Eigenschafgt

Syntax und Semantik

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \cdots$ (Menge V)
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \cdots$ (Menge C)
- Terme: Variablen und Konstanten ($T = V \cup C$)
- Prädikatensymbole: $A, B, C, \cdots$
  - jedes Prädikat mit n Argumenten (n-stellige Prädikate)
  - Mengen $P_1, \ldots, P_n \subset P$
- Quantoren
  - $\exists$ *es gibt mindestens ein __*
  - $\forall$ *für alle __ gilt*
- plus alle Funktoren der Aussagenlogik

Wffs aus Prädikaten, Termen und Quantoren

- $P(t_1, \cdots, t_n)$ ist eine Wff
  wenn $P \in P_n$ und $t_1, \cdots, t_n \in T$
- $(\exists x)\phi$ und $(\forall x)\phi$ sind Wffs
  wenn $x \in V$ und ϕ eine Wff ist
- Wffs lassen sich mit den Funktoren der Aussagenlogik kombinieren
- Nichts anderes ist eine Wff in PL.
  Hinweis | Eigentlich ist Wff auch als Menge aller Wffs definiert.

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu derer Wffs ausgewertet werden

- Model $\mathcal{M}$| enthält Diskursuniversum D = Menge aller Individuen
- Beispiel | $\mathcal{M}_1$ enthält $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$
- Valuationsfunktion | $[\![\cdot]\!]^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $T \times D$
- Beispiel für ein Model $\mathcal{M}_1$
  - für $m, k, s \in C$ und $Martin, Kilroy, Scully \in D$
  - $[\![m]\!]^{\mathcal{M}_1} = Martin$
  - $[\![k]\!]^{\mathcal{M}_1} = Kilroy$
  - $[\![s]\!]^{\mathcal{M}_1} = Scully$

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als n-Tupel, hier Teil des Modells
  - *schläft* | $R_1 = \{Martin, Kilroy, Biden, \cdots\}$
  - *Staatsoberhaupt von* | $R_2 = \{\langle Biden, USA\rangle, \langle Xi, China\rangle, \langle Carl\ Gustaf, Schweden\rangle, \cdots\}$
  - *jagt* | $R_3 = \{\langle Kilroy, Martin\rangle, \langle Scully, Kilroy\rangle\}$

- Menge R der Relationen (R^n für n-stellige)
- Semantik eines Prädikats: Relation | $[\![\cdot]\!]^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $P \times \{0, 1\}$
- $[\![P(t_1)]\!]^{\mathcal{M}} = [\![P]\!]^{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{M}}) = 1$ *iff* $[\![t_1]\!]^{\mathcal{M}} \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$
  Äquivalente Formulierung mit n-Tupeln für n-stellige Prädikate
  - *Martin (m) schläft (R_1)*: $[\![R_1(m)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ weil $[\![m]\!]^{\mathcal{M}_1} = Martin$ und $Martin \in [\![R_1]\!]^{\mathcal{M}_1}$
  - *Martin (m) jagt (R_3) Kilroy (k)*: $[\![R_3(m, k)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ weil $[\![m]\!]^{\mathcal{M}_1} = Martin$ und $[\![k]\!]^{\mathcal{M}_1} = Kilroy$ und $\langle Martin, Kilroy\rangle \notin [\![R_3]\!]^{\mathcal{M}_1}$

Semantics for predicate symbols

- denote relations (sets of n-tuples)
- $[\![P]\!]^{\mathcal{M}_1} = \{Martin, Kilroy\}$ or $V_{\mathcal{M}_1}(P) = \{Martin, Kilroy\}$
- $V_{\mathcal{M}_1}(Q) = \{\langle Martin, Kilroy\rangle, \langle Martin, Scully\rangle, \langle Kilroy, Kilroy\rangle, \langle Scully, Scully\rangle\}$
- s.t.

Semantics for connectives and quantifiers

- connectives: ‘apply to’ formulas (semantically truth-valued), semantics as in SL
- $(\forall x)\phi$ = 1 iff ϕ is true for every $d \in D$
  assigned to every occurence of x in ϕ
- $(\exists x)\phi$ = 1 iff ϕ is true for at least one $d \in D$
  assigned to every occurence of x in ϕ
- algorithmic instruction to check wff’s containing Q’s
- check outside-in (unambiguous scoping)

Dependencies

- universal quantifiers can be swapped:
  $(\forall x)(\forall y)\phi \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\phi$
- same for existential quantifiers:
  $(\exists x)(\exists y)\phi \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\phi$
- whereas: $(\exists x)(\forall y)\phi \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\phi$
- example in $\mathcal{M}_1$:
  - $[\![\underline{(\forall x)\underline{(\exists y)Qxy}}]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$
  - but: $[\![\underline{(\exists y)\underline{(\forall x)Qxy}}]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$
  - direct consequence of algorithmic definition
  - if $\exists\forall$ is true, $\forall\exists$ follows

Hints on quantifiers

- domain of quantifiers: D (universe of discourse)
- $\forall x$ checks for truth of some predication for all individuals
- $\exists x(Px \wedge \neg Px)$ is a contradiction
- $\forall x(Wx \wedge \neg Wx)$ is a contradiciton,
  $\forall x$ 'checks' for an empty set by def.
- standard form of NL quantification:
  $\forall x(Wx \rightarrow Bx)$ 'All women are beautiful.'
- standard form of NL existential quantification:
  $\exists x(Wx \wedge Bx)$ 'Some woman is beautiful.'

Functor/quantifier practice

- by def., functors take formulas, not terms:
  - $\neg Wm$ 'Mary doesn't weep.'
  - $(\exists x)(Gx \wedge Wx)$ 'Some girl weeps.'
  - $^{*}W\neg x$
  - $^{*}(\exists\neg x)(Gx)$
- quantifiers take variables, not constants:
  - $(\forall x)(Ox \rightarrow Wx)$ 'All ozelots are wildcats.'
  - $^{*}(\forall o)(Wo)$
- $\neg$ negates the wff, not the q:
  $^{*}(\neg\forall x)Px$ but $\neg(\forall x)Px$

Scope

- quantifiers bind variables
- free variables (constants) are unbound
- no double binding $^{*}(\forall x \exists x)Px$
- Q scope: only the first wff to its right:
  - $\underline{(\forall x)Px} \vee Qx$
  - $\underline{(\forall x)(Px \vee Qx)} = \underline{(\forall x)Px} \vee \underline{(\forall x)Qx}$
  - $\underline{(\exists x)Px} \rightarrow \underline{(\forall y)(Qy \wedge Ry)}$
  - $\underline{(\exists x)Px} \wedge Qx$ (second x is a unbound)
- no double-naming

Äquivalenzen

Universal $\vee$ and $\wedge$

- $\exists$ and $\forall$ 'or' and 'and' over the universe of discourse (hence: $\bigvee$ and $\bigwedge$)
- $(\forall x)Px \Leftrightarrow Px_1 \wedge Px_2 \wedge \ldots \wedge Px_n$ for all x_n assigned to $d_n \in D$
- $(\exists x)Px \Leftrightarrow Px_1 \vee Px_2 \vee \ldots \vee Px_n$ for all x_n assigned to $d_n \in D$
- hence: $\neg(\forall x)Px \Leftrightarrow \neg(Px_1 \wedge Px_2 \wedge \ldots \wedge Px_n)$
- with DeM: $\overline{Px_1 \wedge Px_2 \wedge \ldots \wedge Px_n}$
- $\Leftrightarrow \overline{Px_1} \vee \overline{Px_2} \vee \ldots \vee \overline{Px_n}$
- $\Leftrightarrow (\exists x)\neg Px$

Quantifier negation (QN)

- $\neg(\forall x)Px \Leftrightarrow (\exists x)\neg Px$
- $\neg(\exists x)Px \Leftrightarrow (\forall x)\neg Px$
- $\neg(\forall x)\neg Px \Leftrightarrow (\exists x)Px$
- $\neg(\exists x)\neg Px \Leftrightarrow (\forall x)Px$

The distribution laws

- the conjunction of universally quantified formulas:
  $\underline{(\forall x)(Px \land Qx)} \Leftrightarrow \underline{(\forall x)Px} \land \underline{(\forall x)Qx}$
- the disjunction of existentially quantified formulas:
  $\underline{(\exists x)(Px \lor Qx)} \Leftrightarrow \underline{(\exists x)Px} \lor \underline{(\exists x)Qx}$
- not v.v.: $(\forall x)Px \lor (\forall x)Qx \Rightarrow (\forall x)(Px \lor Qx)$
- why?

Quantifier movement (QM)

- desirable format: prefix + matrix
- Movement Laws for antecedents of conditionals:
  $(\exists x)Px \rightarrow \phi \Leftrightarrow (\forall x)(Px \rightarrow \phi)$
  $(\forall x)Px \rightarrow \phi \Leftrightarrow (\exists x)(Px \rightarrow \phi)$
- Movement Laws for Q's in disjunction, conjunction, and the consequent of conditionals: Just move them to the prefix!
- condition: x must not be free in ϕ.
- i.e.: Watch your variables!

Let’s formalize:

- *Paul Kalkbrenner is a musician and signed on bpitchcontrol.*
- *Herr S. installed RedHat and not every Linux distribution is easy to install.*
- *All talkmasters are human and Harald Schmidt is a talkmaster.*
- *Some talkmasters are not musicians.*
- *Heiko Laux owns Kanzleramt records and does not like any Gigolo artist.*
- *Some humans are neither talkmasters nor do they own Kanzleramt records.*

Schlussregeln

Universal instantiation ($-\forall$) and generalization ($+\forall$)

- $(\forall x)Px \rightarrow Pa$
- always applies
- can use any variable/constant
- $Pa \rightarrow (\forall x)Px$
- iff *Pa* was instantiated by $-\forall$

Existential generalization ($+\exists$) and instantiation ($-\exists$)

- $Pa \rightarrow (\exists x)Px$ for any individual constant a
- always applies
- $(\exists x)Px \rightarrow Pa$ for some indiv. const.
- always applies (there is a minimal individual for $\exists x$)
- for some $(\exists x)Px$ and $(\exists x)Qx$ the minimal individual might be different
- hence: When you apply EI, always use fresh constants!

One sample task

- (1) Herr Keydana drives a Golf. (2) Anything that drives a golf is human or a complex program simulating an artificial neural net. (3) There are no programs s.a.a.n.n. which are complex enough to drive a Golf.
- Formalize and prove: At least one human exists.
- (1) Dk
- (2) $(\forall x)(Dx \rightarrow Hx \vee Px)$
- (3) $\neg(\exists x)(Px \wedge Dx)$
- $(\exists x)Hx$

The proof

(1)	Dk	
(2)	$(\forall x)(Dx \rightarrow Hx \vee Px)$	
(3)	$\neg(\exists x)(Px \wedge Dx)$	
(4)	$(\forall x)\neg(Px \wedge Dx)$	3,QN
(5)	$(\forall x)(\neg Px \vee \neg Dx)$	4,DeM
(6)	$(\forall x)(Dx \rightarrow \neg Px)$	5,Comm,Impl
(7)	$Dk \rightarrow \neg Pk$	6,$-\forall$(1)
(8)	$\neg Pk$	1,7,MP
(9)	$Dk \rightarrow Hk \vee Pk$	2,$-\forall$(1)
(10)	$Hk \vee Pk$	1,9,MP
(11)	Hk	8,10,DS
$\therefore$	$(\exists x)Hx$	10,$+\exists$

Literatur I

Autor

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

https://rolandschaefer.net
roland.schaefer@uni-jena.de

Lizenz