

# Formale Semantik

## 05. Prädikatenlogik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Semantik>

- 1 Warum Prädikatenlogik?
- 2 Syntax und Semantik

- 3 Äquivalenzen
- 4 Schlussregeln
- 5 Aufgaben

Wie macht man Logik **kompositional**?

Wie schließt man aus quantifizierten Aussagen (*ein* und *all*)?

Was ist die Rolle der **Modelltheorie** Interpretation?

Wann sind prädikatenlogische Ausdrücke **gleichbedeutend**?

Wie **schlussfolgert** man aus prädikatenlogischen Ausdrücken?

Text für heute: Partee u. a. (1990: Kapitel 7 und 8.5)

Warum Prädikatenlogik?

## Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

- Kompositionalität beschränkt auf Ebene des **Satzes/der Proposition** (und größer)
- keine Generalisierungen über **Individuen**, **Eigenschaften** und **Quantifikation**
- offensichtlicher Informationsverlust
  - ▶ *Martin is an expert on inversion and Martin is a good climber.*
  - ▶ wird zu  $e \wedge c$

## Deduktion mit Quantifikation

- alle, einige/mindestens ein, zwei, die meisten, ... Individuen
- einige zu formalisierende Schlüsse
  - ▶ **alle**  $x$  haben eine Eigenschaft  $\vdash$  **einige**  $x$  haben diese Eigenschaft
  - ▶ **Martin** hat eine Eigenschaft  $\vdash$  **mindestens ein**  $x$  hat diese Eigenschaft

## Syntax und Semantik

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen:  $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten:  $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten  $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole:  $A, B, C, \dots \in P$ 
  - ▶ jedes Prädikat mit  $n$  Argumenten ( $n$ -stellige Prädikate)
  - ▶ Mengen  $P^1, \dots, P^n \subset P$
- Quantoren
  - ▶  $\exists$  es gibt mindestens ein \_\_
  - ▶  $\forall$  für alle \_\_ gilt
- plus alle Funktoren der Aussagenlogik



## Wffs aus Prädikaten, Termen und Quantoren

- $P(t_1, \dots, t_n)$  ist eine Wff  
wenn  $P \in P^n$  und  $t_1, \dots, t_n \in T$
- $(\exists x)\phi$  und  $(\forall x)\phi$  sind Wffs  
wenn  $x \in V$  und  $\phi$  eine Wff ist
- Wffs lassen sich mit den Funktoren der Aussagenlogik kombinieren
- Nichts anderes ist eine Wff in PL.  
Hinweis | Eigentlich ist Wff auch als Menge aller Wffs definiert.

**Modell** | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- **Model**  $\mathcal{M}$  | enthält **Diskursuniversum**  $D$  = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel |  $\mathcal{M}_1$  enthält  $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$
- **Valuationsfunktion** |  $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$  enthält eine Funktion in  $T \times D$
- Beispiel für ein Model  $\mathcal{M}_1$ 
  - ▶ für  $m, k, s \in C$  und  $Martin, Kilroy, Scully \in D$
  - ▶  $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = Martin$
  - ▶  $\llbracket k \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = Kilroy$
  - ▶  $\llbracket s \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = Scully$

## Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als **n-Tupel**, hier Teil des Modells
  - ▶ *schläft* |  $R_1 = \{\text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Biden}, \dots\}$
  - ▶ *Staatsoberhaupt von* |  $R_2 = \{\langle \text{Biden}, \text{USA} \rangle, \langle \text{Xi}, \text{China} \rangle, \langle \text{Carl Gustaf}, \text{Schweden} \rangle, \dots\}$
  - ▶ *jagt* |  $R_3 = \{\langle \text{Kilroy}, \text{Martin} \rangle, \langle \text{Scully}, \text{Kilroy} \rangle\}$
- Menge  $R$  der Relationen ( $R^n$  für n-stellige)
- Semantik eines Prädikats: Relation |  $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$  enthält eine Funktion in  $P \times \{0, 1\}$
- $\llbracket P(t_1) \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}}) = 1$  *iff*  $\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}} \in \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}$   
Äquivalente Formulierung mit n-Tupeln für n-stellige Prädikate
  - ▶ *Martin (m) schläft ( $R_1$ )*:  $\llbracket R_1(m) \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = 1$  weil  $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Martin}$  und  $\text{Martin} \in \llbracket R_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1}$
  - ▶ *Martin (m) jagt ( $R_3$ ) Kilroy (k)*:  $\llbracket R_3(m, k) \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = 0$  weil  $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Martin}$  und  $\llbracket k \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Kilroy}$  und  $\langle \text{Martin}, \text{Kilroy} \rangle \notin \llbracket R_3 \rrbracket^{\mathcal{M}_1}$

Synkategorematische Ausdrücke | **Modifizieren Bedeutungen**, haben aber keine eigene

- wie in AL
  - ▶  $\neg\phi$
  - ▶  $\phi_1 \vee \phi_2$  und  $\phi_1 \wedge \phi_2$
  - ▶  $\phi_1 \rightarrow \phi_2$  und  $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$
- Allquantor |  $\llbracket (\forall x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$  gdw  $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$  für alle  $c \in C$ , eingesetzt anstelle aller Vorkommen von  $x$  in  $\phi$
- Existenzquantor |  $\llbracket (\exists x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$  gdw  $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$  für mindestens ein  $c \in C$ , eingesetzt anstelle aller Vorkommen von  $x$  in  $\phi$
- eigentlich ein Algorithmus, der alle Individuenkonstanten durchgeht
- Quantorenskopos von **außen nach innen**
- **extrem enger Skopus über die nächstkleinste Wff** (also Klammern!)

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
  - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* ( $M$ ) und *feiern* ( $F$ )
  - ▶  $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
  - ▶ Was würde  $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$  bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
  - ▶ zwei Individuenkonstanten:  $m$ ,  $s$
  - ▶ zwei Prädikate:  $S$ ,  $A$
  - ▶ ein Quantor (mit einer Variable):  $\exists x$
  - ▶  $(\exists x)[A(x) \wedge S(m, s, x)]$
  - ▶ Was würde  $(\exists x)[A(x) \rightarrow S(m, s, x)]$  bedeuten?

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶  $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- ▶  $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- ▶ Sowie  $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$   
aber  $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- ▶  $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$  | so wie  $P(m) \wedge \neg P(m)$
- ▶  $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$  |  $\forall$  sucht eine leere Menge

- Typische Fehler | **Diese Formeln sind falsch!**

- ▶ Prädikate direkt am Quantor |  $(\forall M) \dots$  falsch für: *für alle Menschen gilt*
- ▶ Negierte Quantoren |  $(\neg \forall x)M(x)$  falsch für: *nicht für alle x gilt*
- ▶ Funktoren vor Termen |  $(\exists x)M(x) \wedge F(\neg x)$  falsch für: *Ein Mensch feiert nicht.*
- ▶ Mehrfache Variablenbindung |  $(\forall x \exists x)P(x)$
- ▶ Klammern vergessen, ungebundene Variable |  $(\forall x)P(x) \rightarrow Q(x)$  statt:  $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

## Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus

- ▶  $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- ▶  $\forall x.\exists y.P(x, y)$
- ▶  $\forall x\exists y.P(x, y)$
- ▶  $\forall x\exists y[P(x, y)]$

- Schreibweisen für Prädikate und ihre Argumente

- ▶  $P(x), P(x, y)$
- ▶  $P(x), P(\langle x, y \rangle)$
- ▶  $Px, Pxy$
- ▶  $Px, xPy$

# Äquivalenzen



## In Beweisen oft praktische Äquivalenzen mit negierten Quantoren

- $\neg(\forall x)Px \equiv (\exists x)\neg Px$

*Nicht alle Dinge sind Parkscheiben.  $\equiv$  Es gibt mindestens ein Ding, das keine Parkscheibe ist.*

- $\neg(\exists x)Px \equiv (\forall x)\neg Px$

*Es gibt keine Parkscheibe.  $\equiv$  Alle Dinge sind keine Parkscheiben.*

- $\neg(\forall x)\neg Px \equiv (\exists x)Px$

*Nicht alle Dinge sind keine Parkscheibe.  $\equiv$  Es gibt eine Parkscheibe.*

- $\neg(\exists x)\neg Px \equiv (\forall x)Px$

*Es gibt nichts, das keine Parkscheibe ist.  $\equiv$  Alle Dinge sind Parkscheiben.*

- Allquantordistribution

$$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \equiv (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

- Existenzquantordistribution

$$(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \equiv (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

- Warum hingegen

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vdash (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$$

aber

$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \not\vdash (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

# Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Wünschenswert: alle Quantoren ganz am Anfang

- Quantorenbewegung aus dem **Antezedens von Konditionalen**

$$(\exists x)P(x) \rightarrow \phi \equiv (\forall x)[P(x) \rightarrow \phi]$$

$$(\forall x)P(x) \rightarrow \phi \equiv (\exists x)[P(x) \rightarrow \phi]$$

- Quantorenbewegung aus **Konjunktionen, Disjunktionen und Konsequenzen von Konditionalen: einfach nach vorne bewegen!**

$$\triangleright (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists y)F(y) \equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \rightarrow F(y)]$$

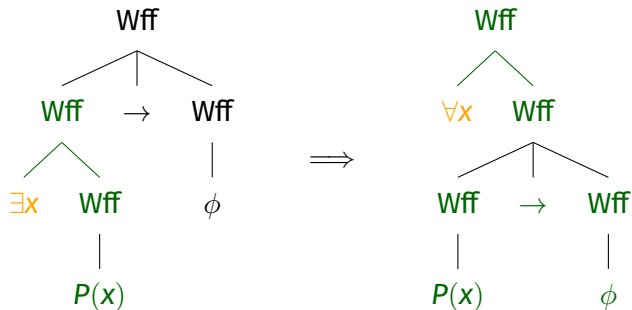
*Wenn es eine Parkscheibe gibt, gibt es einen Falk-Plan.  $\equiv$  Für alle Dinge  $x$  gilt, dass es ein Ding  $y$  gibt, sodass  $y$  ein Falk-Plan ist, wenn  $x$  eine Parkscheibe ist.*

$$\triangleright S(m) \vee (\exists x)P(x) \equiv (\exists x)[S(m) \vee P(x)]$$

*Martin schläft oder es gibt eine Parkscheibe.  $\equiv$  Es gibt ein Ding  $x$ , sodass entweder Martin schläft oder dieses Ding eine Parkscheibe ist.*

- Bei Bewegung des Quantors von  $x$  darf  $x$  in der restlichen Formel nicht frei sein!

# Quantorenbewegung mit Bäumen



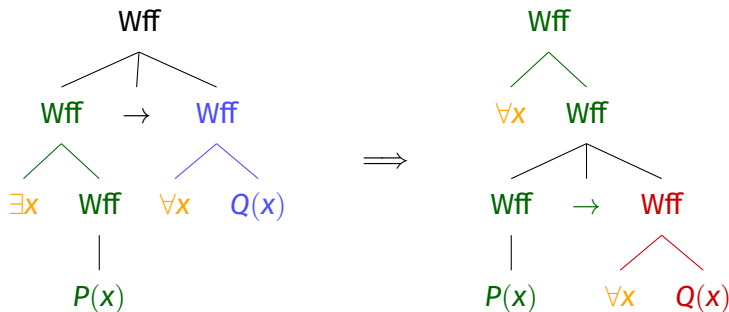
Bewegung = **Ausweitung des Skopus**

Wenn man möchte, kann man jetzt von c-Kommando reden.

**Pränexe Normalform** | Allen Quantoren maximalen Skopus geben

# Quantorenbewegung | Obacht auf die Variablen

Was steckt in  $\phi$ ?



Links | Unabhängig ausgewertete **quantifizierte**  $x$  mit **unabhängigem** Skopus  
Rechts | Problem! Das  $x$  im **roten Teilbaum** ist doppelt gebunden.

- drip-133 ist Musiker und mit Dan Bell befreundet.
- Wenn es Einhörner gibt, muss Jan singen.
- Er hat einen Netzfilter repariert, und nicht alle Komponenten waren verfügbar.
- Alle Fernsehpersönlichkeiten sind Menschen, und Heide ist eine Fernsehpersönlichkeit.
- Einige Fernsehpersönlichkeiten sind keine Musiker.
- Manche sind weder eine Fernsehpersönlichkeit, noch kennen sie Dan Bell.

## Schlussregeln

# Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von **Allaussagen** auf **Individualaussagen** und umgekehrt

- Universelle Instanziierung  $- \forall$

- ▶  $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$

- Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.*

- ▶ Für  $a$ : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten

- Universelle Generalisierung  $+ \forall$

- ▶  $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$

- ▶ Nur, wenn  $a$  durch  $- \forall$  eingeführt wurde!

- Beispiel ... **Substanzielles wird an Individuen bewiesen.**

1	$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$		Alles ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.
2	$\neg P(m)$		Martin ist keine Parkscheibe.
<hr/>			
3	$P(m) \vee Q(m)$	1, $- \forall(2)$	Martin ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.
4	$Q(m)$	3, DS	Martin besteht aus Quarks.
5	$(\forall x)Q(x)$	4, 3, $+ \forall[1]$	Alles besteht aus Quarks.



# Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von **Individualaussagen** auf **Existenzaussagen** und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung  $+\exists$

- $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung  $-\exists$

- $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

1	$(\exists x)Q(x)$		<i>Es gibt ein Ding, das aus Quarks besteht.</i>
2	$(\forall y)[Q(y) \rightarrow P(y)]$		<i>Alles, was aus Quarks besteht, ist ein physikalisches Objekt.</i>
3	$Q(h)$	1, $-\exists$	<i>Ein Objekt, das wir jetzt Hoxnoxno nennen, besteht aus Quarks.</i>
4	$Q(h) \rightarrow P(h)$	2, $-\forall$	<i>Wenn Hoxnoxno aus Quarks besteht, ist Hoxnoxno ein physikalisches Objekt.</i>
5	$P(h)$	3,4, MP	<i>Hoxnoxno ist ein physikalisches Objekt.</i>
6	$(\exists z)P(z)$	5, $+\exists$	<i>Es gibt physikalische Objekte.</i>

(1) Herr Keydana fährt einen Golf. (2) Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt. **Zeigen oder widerlegen Sie: B: Es gibt mindestens einen Menschen.**

1  $G(k)$

2  $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$

3  $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$

$(\exists z)M(z)$

1	$G(k)$	
2	$(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$	
3	$\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$	$\vdash (\exists z)M(z)$
<hr/>		
4	$(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$	3,QN
5	$(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$	4,DeM
6	$(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$	5,Komm.,Impl.
7	$G(k) \rightarrow \neg A(k)$	6, $\neg\forall(1)$
8	$\neg A(k)$	1,7,MP
9	$G(k) \rightarrow M(k) \vee A(k)$	2, $\neg\forall(1)$
10	$M(k) \vee A(k)$	1,9,MP
11	$M(k)$	8,10,DS
12	$(\exists z)M(z)$	11,+ $\exists$ ■

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt.  $\vdash$  Es gibt mindestens einen Menschen.

## Aufgaben

## 1 Treffen die folgenden Behauptungen zu?

- ①  $\forall x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \neg \exists x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x))$
- ②  $\neg \neg \forall x (R(x) \vee \neg \neg S(x)) \equiv \neg \exists x \neg (R(x) \vee S(x))$
- ③  $\exists x (P(x) \wedge P(x)) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$

## 2 Versuchen Sie, intuitiv zu formulieren, warum die auf Folie 11 besprochene Einschränkung bei der Quantorenvertauschung besteht. Gemeint ist:

$$(\forall x)(\exists y)\phi \not\equiv (\exists y)(\forall x)\phi$$

- 1 Alle Lügner sind unglaubwürdig. Einige Lügner sind Zugschaffner.  
Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Zugschaffner sind unglaubwürdig.
- 2 Alle Flugzeuge sind Automaten. Einige Automaten sind besorgniserregend.  
Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Flugzeuge sind besorgniserregend.
- 3 Kein Käufer wird betrogen. Einige Käufer sind auch Händler.  
Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Händler werden nicht betrogen.

Partee, Barbara, Alice ter Meulen & Robert E. Wall. 1990. *Mathematical methods in linguistics*. Dordrecht: Kluwer.

## Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer  
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft  
Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Fürstengraben 30  
07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>  
[roland.schaefer@uni-jena.de](mailto:roland.schaefer@uni-jena.de)



## Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.