Formale Semantik
05. Prädikatenlogik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Folien in Überarbeitung. Englische Teile (ab Woche 8) sind noch von 2007!

Stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Semantik`

Inhalt

Wie mach man Logik kompositional?

Wie schließt man aus quantifizierten Aussagen (*ein* und *all*)?

Was ist die Rolle der Modelltheorie Interpretation?

Wann sind prädikatenlogische Ausdrücke gleichbedeutend?

Wie schlussfolgert man aus prädikatenlogischen Ausdrücken?

Text für heute: Partee u. a. (1990: Kapitel 7 und 8.5)

Warum Prädikatenlogik?

Kompositionalität

Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

- Kompositionalität beschränkt auf Ebene des Satzes/der Proposition (und größer)
- keine Generalisierungen über Individuen, Eigenschaften und Quantifikation
- offensichtlicher Informationsverlust
  - *Martin is an expert on inversion and Martin is a good climber.*
  - wird zu $e \wedge c$

Erwünschte Schlussfolgerungen

Deduktion mit Quantifikation

- alle, einige/mindestens ein, zwei, die meisten, … Individuen
- einige zu formalisierende Schlüsse
  - alle x haben eine Eigenschaft $\vdash$ einige x haben diese Eigenschaft
  - Martin hat eine Eigenschaft $\vdash$ mindestens ein x hat diese Eigenschafgt

Syntax und Semantik

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \cdots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \cdots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole: $A, B, C, \cdots \in P$
  - jedes Prädikat mit n Argumenten (n-stellige Prädikate)
  - Mengen $P^1, \ldots, P^n \subset P$
- Quantoren
  - $\exists$ *es gibt mindestens ein __*
  - $\forall$ *für alle __ gilt*
- plus alle Funktoren der Aussagenlogik

Wffs aus Prädikaten, Termen und Quantoren

- $P(t_1, \cdots, t_n)$ ist eine Wff
  wenn $P \in P^n$ und $t_1, \cdots, t_n \in T$
- $(\exists x)\phi$ und $(\forall x)\phi$ sind Wffs
  wenn $x \in V$ und ϕ eine Wff ist
- Wffs lassen sich mit den Funktoren der Aussagenlogik kombinieren
- Nichts anderes ist eine Wff in PL.
  Hinweis | Eigentlich ist Wff auch als Menge aller Wffs definiert.

Semantik | Modelle und Individuen

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- Model $\mathcal{M}$| enthält Diskursuniversum D = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel | $\mathcal{M}_1$ enthält $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$
- Valuationsfunktion | $[\![\cdot]\!]^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $T \times D$
- Beispiel für ein Model $\mathcal{M}_1$
  - für $m, k, s \in C$ und $Martin, Kilroy, Scully \in D$
  - $[\![m]\!]^{\mathcal{M}_1} = Martin$
  - $[\![k]\!]^{\mathcal{M}_1} = Kilroy$
  - $[\![s]\!]^{\mathcal{M}_1} = Scully$

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als n-Tupel, hier Teil des Modells
  - *schläft* | $R_1 = \{Martin, Kilroy, Biden, \cdots\}$
  - *Staatsoberhaupt von* | $R_2 = \{\langle Biden, USA\rangle, \langle Xi, China\rangle, \langle Carl\ Gustaf, Schweden\rangle, \cdots\}$
  - *jagt* | $R_3 = \{\langle Kilroy, Martin\rangle, \langle Scully, Kilroy\rangle\}$

- Menge R der Relationen (R^n für n-stellige)
- Semantik eines Prädikats: Relation | $[\![\cdot]\!]^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $P \times \{0, 1\}$
- $[\![P(t_1)]\!]^{\mathcal{M}} = [\![P]\!]^{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]^{\mathcal{M}}) = 1$ *iff* $[\![t_1]\!]^{\mathcal{M}} \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$
  Äquivalente Formulierung mit n-Tupeln für n-stellige Prädikate
  - *Martin (m) schläft (R_1)*: $[\![R_1(m)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ weil $[\![m]\!]^{\mathcal{M}_1} = Martin$ und $Martin \in [\![R_1]\!]^{\mathcal{M}_1}$
  - *Martin (m) jagt (R_3) Kilroy (k)*: $[\![R_3(m, k)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ weil
    $[\![m]\!]^{\mathcal{M}_1} = Martin$ und $[\![k]\!]^{\mathcal{M}_1} = Kilroy$ und $\langle Martin, Kilroy\rangle \notin [\![R_3]\!]^{\mathcal{M}_1}$

Semantik | Funktoren und Quantoren

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL
  - $\neg\phi$
  - $\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 \wedge \phi_2$
  - $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ und $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$

- Allquantor | $[\![(\forall x)\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ für alle $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ
- Existenzquantor | $[\![(\exists x)\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ für mindestens ein $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ

- eigentlich ein Algorithmus, der alle Individuenkonstanten durchgeht
- Quantorenskopus von außen nach innen
- extrem enger Skopus über die nächstkleinste Wff (also Klammern!)

Appellativa und Sätze

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
  - zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
  - $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
  - Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
  - zwei Individuenkonstanten: m , s
  - zwei Prädikate: S, A
  - ein Quantor (mit einer Variable): $\exists x$
  - $(\exists x)[A(x) \wedge S(m, s, x)]$
  - Was würde $(\exists x)[A(x) \rightarrow S(m, s, x)]$ bedeuten?

Details zu Quantoren

- Vertauschbarkeit von Quantoren
  - $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
  - $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
  - Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
    aber $(\forall x)(\exists y)\phi \nvdash (\exists y)(\forall x)\phi$
- Widersprüche (Kontradiktionen)
  - $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$ | so wie $P(m) \wedge \neg P(m)$
  - $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$ | $\forall$ sucht eine leere Menge
- Typische Fehler | Diese Formeln sind falsch!
  - Prädikate direkt am Quantor | $(\forall M) \ldots$ falsch für: *für alle Menschen gilt*
  - Negierte Quantoren | $(\neg\forall x)M(x)$ falsch für: *nicht für alle x gilt*
  - Funktoren vor Termen | $(\exists x)M(x) \wedge F(\neg x)$ falsch für: *Ein Mensch feiert nicht.*
  - Mehrfache Variablenbindung | $(\forall x \exists x)P(x)$
  - Klammern vergessen, ungebundene Variable | $(\forall x)P(x) \rightarrow Q(x)$ statt: $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

Alternative Schreibweisen

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus
  - $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$
  - $\forall x.\exists y.P(x,y)$
  - $\forall x\exists y.P(x,y)$
  - $\forall x\exists y[P(x,y)]$
- Schreibweisen für Prädikate und ihre Argumente
  - $P(x)$, $P(x,y)$
  - $P(x)$, $P(\langle x,y\rangle)$
  - *Px*, *Pxy*
  - *Px*, *xPy*

Äquivalenzen

Quantorennegation (QN)

In Beweisen oft praktische Äquivalenzen mit negierten Quantoren

- $\neg(\forall x)Px \equiv (\exists x)\neg Px$
  Nicht alle Dinge sind Parkscheiben. $\equiv$ *Es gibt mindestens ein Ding, das keine Parkscheiben ist.*
- $\neg(\exists x)Px \equiv (\forall x)\neg Px$
  Es gibt keine Parkscheibe. $\equiv$ *Alle Dinge sind keine Parkscheiben.*
- $\neg(\forall x)\neg Px \equiv (\exists x)Px$
  Nicht alle Dinge sind keine Parkscheibe. $\equiv$ *Es gibt eine Parkscheibe.*
- $\neg(\exists x)\neg Px \equiv (\forall x)Px$
  Es gibt nichts, das keine Parkscheibe ist. $\equiv$ *Alle Dinge sind Parkscheiben.*

Distributivgesetze (Distr.)

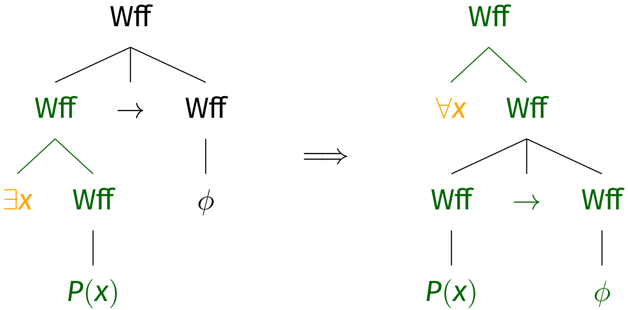
- Allquantordistribution
  $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \equiv (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$
- Existenzquantordistribution
  $(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \equiv (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$
- Warum hingegen
  $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vdash (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$
  aber
  $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \nvdash (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Wünschenswert: alle Quantoren ganz am Anfang

- Quantorenbewegung aus dem Antezedens von Konditionalen
  $(\exists x)\underline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\forall x)\underline{[P(x) \rightarrow \phi]}$
  $(\forall x)\underline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\exists x)\underline{[P(x) \rightarrow \phi]}$
- Quantorenbewegung aus Konjunktionen, Disjunktionen und Konsequenzen von Konditionalen: einfach nach vorne bewegen!
  - $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists y)F(y) \equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \rightarrow F(x)]$
    Wenn es eine Parkscheibe gibt, gibt es einen Falk-Plan. $\equiv$ *Für alle Dinge x gilt, dass es ein Ding y gibt, sodass y ein Falk-Plan ist, wenn x eine Parkscheibe ist.*
  - $S(m) \vee (\exists x)P(x) \equiv (\exists x)[S(m) \vee P(x)]$
    Martin schläft oder es gibt eine Parkscheibe. $\equiv$ *Es gibt ein Ding x, sodass entweder Martin schläft oder dieses Ding eine Parkscheibe ist.*
- Bei Bewegung des Quantors von *x* darf *x* in der restlichen Formel nicht frei sein!

Quantorenbewegung mit Bäumen

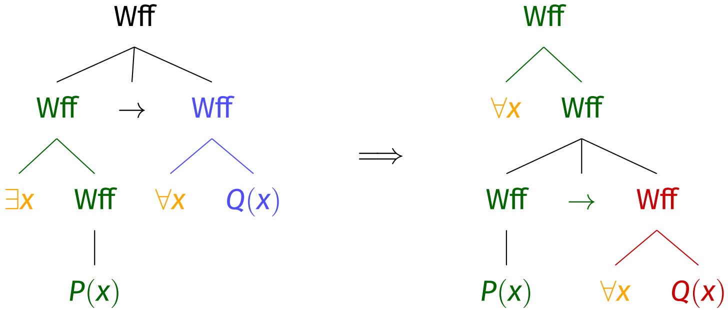


Bewegung = Ausweitung des Skopus

Wenn man möchte, kann man jetzt von c-Kommando reden.

Pränexe Normalform | Allen Quantoren maximalen Skopus geben

Was steckt in ϕ?



Links | Unabhängig ausgewertete quantifizierte *x* mit unabhängigem Skopus
Rechts | Problem! Das *x* im roten Teilbaum ist doppelt gebunden.

Formalisieren üben

- *drip-133 ist Musiker und mit Dan Bell befreundet.*
- *Wenn es Einhörner gibt, muss Jan singen.*
- *Er hat einen Netzfilter repariert, und nicht alle Komponenten waren verfügbar.*
- *Alle Fernsehpersönlichkeiten sind Menschen, und Heide ist eine Fernsehpersönlichkeit.*
- *Einige Fernsehpersönlichkeiten sind keine Musiker.*
- *Manche sind weder eine Fernsehpersönlichkeit, noch kennen sie Dan Bell.*

Schlussregeln

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $-\forall$
  - $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$
    Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hatIviddum a diese Eigenschaft.
  - Für a: frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten
- Universelle Generalisierung $+\forall$
  - $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$
  - Nur, wenn a durch $-\forall$ eingeführt wurde!
- Beispiel … Substanzielles wird an Individuen bewiesen.

1	$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$		*Alles ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.*
2	$\neg P(m)$		*Martin ist keine Parkscheibe.*
3	$P(m) \vee Q(m)$	1,$-\forall(2)$	*Martin ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.*
4	$Q(m)$	3,DS	*Martin besteht aus Quarks.*
5	$(\forall x)Q(x)$	4,3,$+\forall[1]$	*Alles besteht aus Quarks.*

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$
  - $P(a) \ \vdash \ (\exists x)P(x)$
    Wenn ein benanntes Idividuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individdum diese Eigenschaft.
  - Für x: nur frische Individuenvariablen
- Existenzielle Instanziierung $-\exists$
  - $(\exists x)P(x) \ \vdash \ P(a)$
    Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.
  - Für a: nur frische Individuenkonstanten
- Beispiel

1	$(\exists x)Q(x)$		*Es gibt ein Ding, das aus Quarks besteht.*
2	$(\forall y)[Q(y) \rightarrow P(y)]$		*Alles, was aus Quarks besteht, ist ein physikalisches Objekt.*
3	$Q(h)$	1,$-\exists$	*Ein Objekt, das wir jetzt Hoxnoxno nennen, besteht aus Quarks.*
4	$Q(h) \rightarrow P(h)$	2,$-\forall$	*Wenn Hoxnoxno aus Quarks besteht, ist Hoxnoxno ein physikalisches Objekt.*
5	$P(h)$	3,4,MP	*Hoxnoxno ist ein physikalisches Objekt.*
6	$(\exists z)P(z)$	5,$+\exists$	*Es gibt physikalische Objekte.*

Beispielaufgabe

(1) Herr Keydana fährt einen Golf. (2) Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt. **Zeigen oder widerlegen Sie: B: Es gibt mindestens einen Menschen.**

1 $G(k)$

2 $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x)]$

3 $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$

$(\exists z)M(z)$

Der Beweis

1	$G(k)$		*Herr Keydana fährt einen Golf.*
2	$(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x)]$		*Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.*
3	$\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$	$\vdash (\exists z)M(z)$	*Es gibt keine AI, die einen Golf fährt.* $\vdash$ *Es gibt mindestens einen Menschen.*
4	$(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$	3,QN	
5	$(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$	4,DeM	
6	$(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$	5,Komm.,Impl.	
7	$G(k) \rightarrow \neg A(k)$	6,$-\forall(1)$	
8	$\neg A(k)$	1,7,MP	
9	$G(k) \rightarrow M(k) \vee A(k)$	2,$-\forall(1)$	
10	$M(k) \vee A(k)$	1,9,MP	
11	$M(k)$	8,10,DS	
12	$(\exists z)M(z)$	11,$+\exists$ ■	

Aufgaben

Aufgaben I | Quantorennegation

1. Treffen die folgenden Behauptungen zu?
   1. $\forall x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \neg\exists x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x))$
   2. $\neg\neg\forall x(R(x) \vee \neg\neg S(x)) \equiv \neg\exists x \neg(R(x) \vee S(x))$
   3. $\exists x(P(x) \wedge P(x)) \equiv \neg\forall x \neg P(x)$
2. Versuchen Sie, intuitiv zu formulieren, warum die auf Folie 11 besprochene Einschränkung bei der Quantorenvertauschung besteht. Gemeint ist: $(\forall x)(\exists y)\phi \not\models (\exists y)(\forall x)\phi$

Aufgaben II | Natürliche Deduktion

1. Alle Lügner sind unglaubwürdig. Einige Lügner sind Zugschaffner.
   Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Zugschaffner sind unglaubwürdig.
2. Alle Flugzeuge sind Automaten. Einige Automaten sind besorgniserregend.
   Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Flugzeuge sind besorgniserregend.
3. Kein Käufer wird betrogen. Einige Käufer sind auch Händler.
   Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Händler werden nicht betrogen.

Literatur I

Partee, Barbara, Alice ter Meulen & Robert E. Wall. 1990. *Mathematical methods in linguistics*. Dordrecht: Kluwer.

Autor

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

https://rolandschaefer.net
roland.schaefer@uni-jena.de

Lizenz