

Formale Semantik

05. Prädikatenlogik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Folien in Überarbeitung. Englische Teile (ab Woche 7) sind noch von 2007!
Stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Semantik>

1 Warum Prädikatenlogik?

2 Syntax und Semantik

3 Äquivalenzen

4 Schlussregeln

5 Aufgaben

Kernfragen dieser Woche

Wie mach man Logik kompositional?

Wie mach man Logik kompositional?

Wie schließt man aus quantifizierten Aussagen (*ein* und *all*)?

Wie mach man Logik kompositional?

Wie schließt man aus quantifizierten Aussagen (*ein* und *all*)?

Was ist die Rolle der Modelltheorie Interpretation?

Wie mach man Logik kompositional?

Wie schließt man aus quantifizierten Aussagen (*ein* und *all*)?

Was ist die Rolle der Modelltheorie Interpretation?

Wann sind prädikatenlogische Ausdrücke gleichbedeutend?

Wie macht man Logik kompositional?

Wie schließt man aus quantifizierten Aussagen (*ein* und *all*)?

Was ist die Rolle der Modelltheorie Interpretation?

Wann sind prädikatenlogische Ausdrücke gleichbedeutend?

Wie schlussfolgert man aus prädikatenlogischen Ausdrücken?

Warum Prädikatenlogik?

Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

- Kompositionalität beschränkt auf Ebene des Satzes/der Proposition (und größer)

Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

- Kompositionalität beschränkt auf Ebene des Satzes/der Proposition (und größer)
- keine Generalisierungen über Individuen, Eigenschaften und Quantifikation

Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

- Kompositionalität beschränkt auf Ebene des Satzes/der Proposition (und größer)
- keine Generalisierungen über Individuen, Eigenschaften und Quantifikation
- offensichtlicher Informationsverlust

Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

- Kompositionalität beschränkt auf Ebene des Satzes/der Proposition (und größer)
- keine Generalisierungen über Individuen, Eigenschaften und Quantifikation
- offensichtlicher Informationsverlust
 - ▶ *Martin is an expert on inversion and Martin is a good climber.*

Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

- Kompositionalität beschränkt auf Ebene des Satzes/der Proposition (und größer)
- keine Generalisierungen über Individuen, Eigenschaften und Quantifikation
- offensichtlicher Informationsverlust
 - ▶ *Martin is an expert on inversion and Martin is a good climber.*
 - ▶ wird zu $e \wedge c$

Erwünschte Schlussfolgerungen

Deduktion mit Quantifikation

Deduktion mit Quantifikation

- alle, einige/mindestens ein, zwei, die meisten, ... Individuen

Deduktion mit Quantifikation

- alle, einige/mindestens ein, zwei, die meisten, ... Individuen
- einige zu formalisierende Schlüsse

Deduktion mit Quantifikation

- alle, einige/mindestens ein, zwei, die meisten, ... Individuen
- einige zu formalisierende Schlüsse
 - ▶ alle x haben eine Eigenschaft \vdash einige x haben diese Eigenschaft

Deduktion mit Quantifikation

- alle, einige/mindestens ein, zwei, die meisten, ... Individuen
- einige zu formalisierende Schlüsse
 - ▶ alle x haben eine Eigenschaft \vdash einige x haben diese Eigenschaft
 - ▶ Martin hat eine Eigenschaft \vdash mindestens ein x hat diese Eigenschaft

Syntax und Semantik

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \dots \in C$

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten $T = V \cup C$

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole: $A, B, C, \dots \in P$

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole: $A, B, C, \dots \in P$
 - ▶ jedes Prädikat mit n Argumenten (n -stellige Prädikate)

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole: $A, B, C, \dots \in P$
 - ▶ jedes Prädikat mit n Argumenten (n -stellige Prädikate)
 - ▶ Mengen $P^1, \dots, P^n \subset P$

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole: $A, B, C, \dots \in P$
 - ▶ jedes Prädikat mit n Argumenten (n -stellige Prädikate)
 - ▶ Mengen $P^1, \dots, P^n \subset P$
- Quantoren

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole: $A, B, C, \dots \in P$
 - ▶ jedes Prädikat mit n Argumenten (n -stellige Prädikate)
 - ▶ Mengen $P^1, \dots, P^n \subset P$
- Quantoren
 - ▶ \exists *es gibt mindestens ein* __

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole: $A, B, C, \dots \in P$
 - ▶ jedes Prädikat mit n Argumenten (n -stellige Prädikate)
 - ▶ Mengen $P^1, \dots, P^n \subset P$
- Quantoren
 - ▶ \exists *es gibt mindestens ein* __
 - ▶ \forall *für alle* __ *gilt*

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen: $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten: $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole: $A, B, C, \dots \in P$
 - ▶ jedes Prädikat mit n Argumenten (n -stellige Prädikate)
 - ▶ Mengen $P^1, \dots, P^n \subset P$
- Quantoren
 - ▶ \exists *es gibt mindestens ein* __
 - ▶ \forall *für alle* __ *gilt*
- plus alle Funktoren der Aussagenlogik

Wffs aus Prädikaten, Termen und Quantoren

Wffs aus Prädikaten, Termen und Quantoren

- $P(t_1, \dots, t_n)$ ist eine Wff
wenn $P \in P^n$ und $t_1, \dots, t_n \in T$

Wffs aus Prädikaten, Termen und Quantoren

- $P(t_1, \dots, t_n)$ ist eine Wff
wenn $P \in P^n$ und $t_1, \dots, t_n \in T$
- $(\exists x)\phi$ und $(\forall x)\phi$ sind Wffs
wenn $x \in V$ und ϕ eine Wff ist

Wffs aus Prädikaten, Termen und Quantoren

- $P(t_1, \dots, t_n)$ ist eine Wff
wenn $P \in P^n$ und $t_1, \dots, t_n \in T$
- $(\exists x)\phi$ und $(\forall x)\phi$ sind Wffs
wenn $x \in V$ und ϕ eine Wff ist
- Wffs lassen sich mit den Funktoren der Aussagenlogik kombinieren

Wffs aus Prädikaten, Termen und Quantoren

- $P(t_1, \dots, t_n)$ ist eine Wff
wenn $P \in P^n$ und $t_1, \dots, t_n \in T$
- $(\exists x)\phi$ und $(\forall x)\phi$ sind Wffs
wenn $x \in V$ und ϕ eine Wff ist
- Wffs lassen sich mit den Funktoren der Aussagenlogik kombinieren
- Nichts anderes ist eine Wff in PL.
Hinweis | Eigentlich ist Wff auch als Menge aller Wffs definiert.

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- Model \mathcal{M} | enthält Diskursuniversum D = nicht-leere Menge aller Individuen

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- Model \mathcal{M} | enthält Diskursuniversum D = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel | \mathcal{M}_1 enthält $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- Model \mathcal{M} | enthält Diskursuniversum D = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel | \mathcal{M}_1 enthält $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$
- Valuationsfunktion | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $T \times D$

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- Model \mathcal{M} | enthält Diskursuniversum D = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel | \mathcal{M}_1 enthält $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$
- Valuationsfunktion | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $T \times D$
- Beispiel für ein Model \mathcal{M}_1

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- Model \mathcal{M} | enthält Diskursuniversum D = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel | \mathcal{M}_1 enthält $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$
- Valuationsfunktion | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $T \times D$
- Beispiel für ein Model \mathcal{M}_1
 - ▶ für $m, k, s \in C$ und $Martin, Kilroy, Scully \in D$

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- Model \mathcal{M} | enthält Diskursuniversum D = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel | \mathcal{M}_1 enthält $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$
- Valuationsfunktion | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $T \times D$
- Beispiel für ein Model \mathcal{M}_1
 - ▶ für $m, k, s \in C$ und $Martin, Kilroy, Scully \in D$
 - ▶ $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = Martin$

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- Model \mathcal{M} | enthält Diskursuniversum D = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel | \mathcal{M}_1 enthält $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$
- Valuationsfunktion | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $T \times D$
- Beispiel für ein Model \mathcal{M}_1
 - ▶ für $m, k, s \in C$ und $Martin, Kilroy, Scully \in D$
 - ▶ $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = Martin$
 - ▶ $\llbracket k \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = Kilroy$

Modell | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- Model \mathcal{M} | enthält Diskursuniversum D = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel | \mathcal{M}_1 enthält $D = \{Martin, Kilroy, Scully\}$
- Valuationsfunktion | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $T \times D$
- Beispiel für ein Model \mathcal{M}_1
 - ▶ für $m, k, s \in C$ und $Martin, Kilroy, Scully \in D$
 - ▶ $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = Martin$
 - ▶ $\llbracket k \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = Kilroy$
 - ▶ $\llbracket s \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = Scully$

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n -stellige Relationen als n -Tupel, hier Teil des Modells

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n -stellige Relationen als n -Tupel, hier Teil des Modells
 - ▶ *schläft* | $R_1 = \{Martin, Kilroy, Biden, \dots\}$

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n -stellige Relationen als n -Tupel, hier Teil des Modells
 - ▶ *schläft* | $R_1 = \{\text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Biden}, \dots\}$
 - ▶ *Staatsoberhaupt von* | $R_2 = \{\langle \text{Biden}, \text{USA} \rangle, \langle \text{Xi}, \text{China} \rangle, \langle \text{Carl Gustaf}, \text{Schweden} \rangle, \dots\}$

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als n-Tupel, hier Teil des Modells
 - ▶ *schläft* | $R_1 = \{ \langle \text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Biden}, \dots \rangle \}$
 - ▶ *Staatsoberhaupt von* | $R_2 = \{ \langle \text{Biden}, \text{USA} \rangle, \langle \text{Xi}, \text{China} \rangle, \langle \text{Carl Gustaf}, \text{Schweden} \rangle, \dots \}$
 - ▶ *jagt* | $R_3 = \{ \langle \text{Kilroy}, \text{Martin} \rangle, \langle \text{Scully}, \text{Kilroy} \rangle \}$

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als n-Tupel, hier Teil des Modells
 - ▶ *schläft* | $R_1 = \{ \langle \text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Biden}, \dots \rangle \}$
 - ▶ *Staatsoberhaupt von* | $R_2 = \{ \langle \text{Biden}, \text{USA} \rangle, \langle \text{Xi}, \text{China} \rangle, \langle \text{Carl Gustaf}, \text{Schweden} \rangle, \dots \}$
 - ▶ *jagt* | $R_3 = \{ \langle \text{Kilroy}, \text{Martin} \rangle, \langle \text{Scully}, \text{Kilroy} \rangle \}$
- Menge R der Relationen (R^n für n-stellige)

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als n-Tupel, hier Teil des Modells
 - ▶ *schläft* | $R_1 = \{\text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Biden}, \dots\}$
 - ▶ *Staatssoberhaupt von* | $R_2 = \{\langle \text{Biden}, \text{USA} \rangle, \langle \text{Xi}, \text{China} \rangle, \langle \text{Carl Gustaf}, \text{Schweden} \rangle, \dots\}$
 - ▶ *jagt* | $R_3 = \{\langle \text{Kilroy}, \text{Martin} \rangle, \langle \text{Scully}, \text{Kilroy} \rangle\}$
- Menge R der Relationen (R^n für n-stellige)
- Semantik eines Prädikats: Relation | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $P \times \{0, 1\}$

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als n-Tupel, hier Teil des Modells
 - ▶ *schläft* | $R_1 = \{ \text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Biden}, \dots \}$
 - ▶ *Staatssoberhaupt von* | $R_2 = \{ \langle \text{Biden}, \text{USA} \rangle, \langle \text{Xi}, \text{China} \rangle, \langle \text{Carl Gustaf}, \text{Schweden} \rangle, \dots \}$
 - ▶ *jagt* | $R_3 = \{ \langle \text{Kilroy}, \text{Martin} \rangle, \langle \text{Scully}, \text{Kilroy} \rangle \}$
- Menge R der Relationen (R^n für n-stellige)
- Semantik eines Prädikats: Relation | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $P \times \{0, 1\}$
- $\llbracket P(t_1) \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}}) = 1$ iff $\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}} \in \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}$
Äquivalente Formulierung mit n-Tupeln für n-stellige Prädikate

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als n-Tupel, hier Teil des Modells
 - ▶ *schläft* | $R_1 = \{\text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Biden}, \dots\}$
 - ▶ *Staatssoberhaupt von* | $R_2 = \{\langle \text{Biden}, \text{USA} \rangle, \langle \text{Xi}, \text{China} \rangle, \langle \text{Carl Gustaf}, \text{Schweden} \rangle, \dots\}$
 - ▶ *jagt* | $R_3 = \{\langle \text{Kilroy}, \text{Martin} \rangle, \langle \text{Scully}, \text{Kilroy} \rangle\}$
- Menge R der Relationen (R^n für n-stellige)
- Semantik eines Prädikats: Relation | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $P \times \{0, 1\}$
- $\llbracket P(t_1) \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}}) = 1$ iff $\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}} \in \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}$
Äquivalente Formulierung mit n-Tupeln für n-stellige Prädikate
 - ▶ *Martin (m) schläft (R_1):* $\llbracket R_1(m) \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = 1$ weil $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Martin}$ und $\text{Martin} \in \llbracket R_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1}$

Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als n-Tupel, hier Teil des Modells
 - ▶ *schläft* | $R_1 = \{\text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Biden}, \dots\}$
 - ▶ *Staatsoberhaupt von* | $R_2 = \{\langle \text{Biden}, \text{USA} \rangle, \langle \text{Xi}, \text{China} \rangle, \langle \text{Carl Gustaf}, \text{Schweden} \rangle, \dots\}$
 - ▶ *jagt* | $R_3 = \{\langle \text{Kilroy}, \text{Martin} \rangle, \langle \text{Scully}, \text{Kilroy} \rangle\}$
- Menge R der Relationen (R^n für n-stellige)
- Semantik eines Prädikats: Relation | $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$ enthält eine Funktion in $P \times \{0, 1\}$
- $\llbracket P(t_1) \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}}) = 1$ iff $\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}} \in \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}$
Äquivalente Formulierung mit n-Tupeln für n-stellige Prädikate
 - ▶ *Martin (m) schläft (R_1):* $\llbracket R_1(m) \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = 1$ weil $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Martin}$ und $\text{Martin} \in \llbracket R_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1}$
 - ▶ *Martin (m) jagt (R_3) Kilroy (k):* $\llbracket R_3(m, k) \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = 0$ weil $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Martin}$ und $\llbracket k \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Kilroy}$ und $\langle \text{Martin}, \text{Kilroy} \rangle \notin \llbracket R_3 \rrbracket^{\mathcal{M}_1}$

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL

▶ $\neg\phi$

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL
 - ▶ $\neg\phi$
 - ▶ $\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 \wedge \phi_2$

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL

- ▶ $\neg\phi$
- ▶ $\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 \wedge \phi_2$
- ▶ $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ und $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL
 - ▶ $\neg\phi$
 - ▶ $\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 \wedge \phi_2$
 - ▶ $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ und $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$
- Allquantor | $\llbracket (\forall x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ für alle $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL
 - ▶ $\neg\phi$
 - ▶ $\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 \wedge \phi_2$
 - ▶ $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ und $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$
- Allquantor | $\llbracket (\forall x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ für alle $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ
- Existenzquantor | $\llbracket (\exists x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ für mindestens ein $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL
 - ▶ $\neg\phi$
 - ▶ $\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 \wedge \phi_2$
 - ▶ $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ und $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$
- Allquantor | $\llbracket (\forall x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ für alle $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ
- Existenzquantor | $\llbracket (\exists x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ für mindestens ein $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ
- eigentlich ein Algorithmus, der alle Individuenkonstanten durchgeht

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL
 - ▶ $\neg\phi$
 - ▶ $\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 \wedge \phi_2$
 - ▶ $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ und $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$
- Allquantor | $\llbracket (\forall x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ für alle $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ
- Existenzquantor | $\llbracket (\exists x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ für mindestens ein $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ
- eigentlich ein Algorithmus, der alle Individuenkonstanten durchgeht
- Quantorenskopos von außen nach innen

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL
 - ▶ $\neg\phi$
 - ▶ $\phi_1 \vee \phi_2$ und $\phi_1 \wedge \phi_2$
 - ▶ $\phi_1 \rightarrow \phi_2$ und $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$
- Allquantor | $\llbracket (\forall x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ für alle $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ
- Existenzquantor | $\llbracket (\exists x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ für mindestens ein $c \in C$, eingesetzt anstelle aller Vorkommen von x in ϕ
- eigentlich ein Algorithmus, der alle Individuenkonstanten durchgeht
- Quantorenskopos von außen nach innen
- extrem enger Skopus über die nächstkleinste Wff (also Klammern!)

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ **zwei** Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ *zwei* Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- Alle *Menschen* feiern.
 - ▶ *zwei* Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x)$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ **zwei** Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x)F(x)]$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ **zwei** Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x)F(x)]$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ **zwei** Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ **zwei** Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ **zwei** Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten:

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ **zwei** Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ **zwei** Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt **Scully** einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate:

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ **zwei** Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin **schenkt** Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A
 - ▶ ein Quantor (mit einer Variable):

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully **einen** Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A
 - ▶ ein Quantor (mit einer Variable): $\exists x$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A
 - ▶ ein Quantor (mit einer Variable): $\exists x$
 - ▶

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully **einen** Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A
 - ▶ ein Quantor (mit einer Variable): $\exists x$
 - ▶ $(\exists x)$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A
 - ▶ ein Quantor (mit einer Variable): $\exists x$
 - ▶ $(\exists x)S(m, s, x)$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A
 - ▶ ein Quantor (mit einer Variable): $\exists x$
 - ▶ $(\exists x)[A(x)S(m, s, x)]$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A
 - ▶ ein Quantor (mit einer Variable): $\exists x$
 - ▶ $(\exists x)[A(x) \wedge S(m, s, x)]$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A
 - ▶ ein Quantor (mit einer Variable): $\exists x$
 - ▶ $(\exists x)[A(x) \wedge S(m, s, x)]$

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
 - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* (M) und *feiern* (F)
 - ▶ $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
 - ▶ Was würde $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$ bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
 - ▶ zwei Individuenkonstanten: m , s
 - ▶ zwei Prädikate: S , A
 - ▶ ein Quantor (mit einer Variable): $\exists x$
 - ▶ $(\exists x)[A(x) \wedge S(m, s, x)]$
 - ▶ Was würde $(\exists x)[A(x) \rightarrow S(m, s, x)]$ bedeuten?

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- Vertauschbarkeit von Quantoren
 - ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$

- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$

- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$

- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$

- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$

- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- ▶ $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$ | so wie $P(m) \wedge \neg P(m)$

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- ▶ $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$ | so wie $P(m) \wedge \neg P(m)$
- ▶ $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$ | \forall sucht eine leere Menge

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- ▶ $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$ | so wie $P(m) \wedge \neg P(m)$
- ▶ $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$ | \forall sucht eine leere Menge

- Typische Fehler | Diese Formeln sind falsch!

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- ▶ $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$ | so wie $P(m) \wedge \neg P(m)$
- ▶ $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$ | \forall sucht eine leere Menge

- Typische Fehler | **Diese Formeln sind falsch!**

- ▶ Prädikate direkt am Quantor | $(\forall M) \dots$ falsch für: *für alle Menschen gilt*

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- ▶ $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$ | so wie $P(m) \wedge \neg P(m)$
- ▶ $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$ | \forall sucht eine leere Menge

- Typische Fehler | **Diese Formeln sind falsch!**

- ▶ Prädikate direkt am Quantor | $(\forall M) \dots$ falsch für: *für alle Menschen gilt*
- ▶ Negierte Quantoren | $(\neg \forall x)M(x)$ falsch für: *nicht für alle x gilt*

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- ▶ $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$ | so wie $P(m) \wedge \neg P(m)$
- ▶ $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$ | \forall sucht eine leere Menge

- Typische Fehler | **Diese Formeln sind falsch!**

- ▶ Prädikate direkt am Quantor | $(\forall M) \dots$ falsch für: *für alle Menschen gilt*
- ▶ Negierte Quantoren | $(\neg \forall x)M(x)$ falsch für: *nicht für alle x gilt*
- ▶ Funktoren vor Termen | $(\exists x)M(x) \wedge F(\neg x)$ falsch für: *Ein Mensch feiert nicht.*

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- ▶ $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$ | so wie $P(m) \wedge \neg P(m)$
- ▶ $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$ | \forall sucht eine leere Menge

- Typische Fehler | **Diese Formeln sind falsch!**

- ▶ Prädikate direkt am Quantor | $(\forall M) \dots$ falsch für: *für alle Menschen gilt*
- ▶ Negierte Quantoren | $(\neg \forall x)M(x)$ falsch für: *nicht für alle x gilt*
- ▶ Funktoren vor Termen | $(\exists x)M(x) \wedge F(\neg x)$ falsch für: *Ein Mensch feiert nicht.*
- ▶ Mehrfache Variablenbindung | $(\forall x \exists x)P(x)$

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- ▶ $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- ▶ $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- ▶ Sowie $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$
aber $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- ▶ $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$ | so wie $P(m) \wedge \neg P(m)$
- ▶ $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$ | \forall sucht eine leere Menge

- Typische Fehler | **Diese Formeln sind falsch!**

- ▶ Prädikate direkt am Quantor | $(\forall M) \dots$ falsch für: *für alle Menschen gilt*
- ▶ Negierte Quantoren | $(\neg \forall x)M(x)$ falsch für: *nicht für alle x gilt*
- ▶ Funktoren vor Termen | $(\exists x)M(x) \wedge F(\neg x)$ falsch für: *Ein Mensch feiert nicht.*
- ▶ Mehrfache Variablenbindung | $(\forall x \exists x)P(x)$
- ▶ Klammern vergessen, ungebundene Variable | $(\forall x)P(x) \rightarrow Q(x)$ statt: $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus
 - ▶ $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus
 - ▶ $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
 - ▶ $\forall x.\exists y.P(x, y)$

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus
 - ▶ $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
 - ▶ $\forall x.\exists y.P(x, y)$
 - ▶ $\forall x\exists y.P(x, y)$

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus

- ▶ $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- ▶ $\forall x.\exists y.P(x, y)$
- ▶ $\forall x\exists y.P(x, y)$
- ▶ $\forall x\exists y[P(x, y)]$

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus

- ▶ $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- ▶ $\forall x.\exists y.P(x, y)$
- ▶ $\forall x\exists y.P(x, y)$
- ▶ $\forall x\exists y[P(x, y)]$

- Schreibweisen für Prädikate und ihre Argumente

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus
 - ▶ $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
 - ▶ $\forall x.\exists y.P(x, y)$
 - ▶ $\forall x\exists y.P(x, y)$
 - ▶ $\forall x\exists y[P(x, y)]$
- Schreibweisen für Prädikate und ihre Argumente
 - ▶ $P(x), P(x, y)$

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus
 - ▶ $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
 - ▶ $\forall x.\exists y.P(x, y)$
 - ▶ $\forall x\exists y.P(x, y)$
 - ▶ $\forall x\exists y[P(x, y)]$
- Schreibweisen für Prädikate und ihre Argumente
 - ▶ $P(x), P(x, y)$
 - ▶ $P(x), P(\langle x, y \rangle)$

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus
 - ▶ $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
 - ▶ $\forall x.\exists y.P(x, y)$
 - ▶ $\forall x\exists y.P(x, y)$
 - ▶ $\forall x\exists y[P(x, y)]$
- Schreibweisen für Prädikate und ihre Argumente
 - ▶ $P(x), P(x, y)$
 - ▶ $P(x), P(\langle x, y \rangle)$
 - ▶ Px, Pxy

Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus

- ▶ $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- ▶ $\forall x.\exists y.P(x, y)$
- ▶ $\forall x\exists y.P(x, y)$
- ▶ $\forall x\exists y[P(x, y)]$

- Schreibweisen für Prädikate und ihre Argumente

- ▶ $P(x), P(x, y)$
- ▶ $P(x), P(\langle x, y \rangle)$
- ▶ Px, Pxy
- ▶ Px, xPy

Äquivalenzen

Quantorennegation (QN)

In Beweisen oft praktische Äquivalenzen mit negierten Quantoren

In Beweisen oft praktische Äquivalenzen mit negierten Quantoren

- $\neg(\forall x)Px \equiv (\exists x)\neg Px$

Nicht alle Dinge sind Parkscheiben. \equiv Es gibt mindestens ein Ding, das keine Parkscheiben ist.

In Beweisen oft praktische Äquivalenzen mit negierten Quantoren

- $\neg(\forall x)Px \equiv (\exists x)\neg Px$

Nicht alle Dinge sind Parkscheiben. \equiv Es gibt mindestens ein Ding, das keine Parkscheiben ist.

- $\neg(\exists x)Px \equiv (\forall x)\neg Px$

Es gibt keine Parkscheibe. \equiv Alle Dinge sind keine Parkscheiben.

In Beweisen oft praktische Äquivalenzen mit negierten Quantoren

- $\neg(\forall x)Px \equiv (\exists x)\neg Px$

Nicht alle Dinge sind Parkscheiben. \equiv Es gibt mindestens ein Ding, das keine Parkscheiben ist.

- $\neg(\exists x)Px \equiv (\forall x)\neg Px$

Es gibt keine Parkscheibe. \equiv Alle Dinge sind keine Parkscheiben.

- $\neg(\forall x)\neg Px \equiv (\exists x)Px$

Nicht alle Dinge sind keine Parkscheibe. \equiv Es gibt eine Parkscheibe.

In Beweisen oft praktische Äquivalenzen mit negierten Quantoren

- $\neg(\forall x)Px \equiv (\exists x)\neg Px$

Nicht alle Dinge sind Parkscheiben. \equiv Es gibt mindestens ein Ding, das keine Parkscheiben ist.

- $\neg(\exists x)Px \equiv (\forall x)\neg Px$

Es gibt keine Parkscheibe. \equiv Alle Dinge sind keine Parkscheiben.

- $\neg(\forall x)\neg Px \equiv (\exists x)Px$

Nicht alle Dinge sind keine Parkscheibe. \equiv Es gibt eine Parkscheibe.

- $\neg(\exists x)\neg Px \equiv (\forall x)Px$

Es gibt nichts, das keine Parkscheibe ist. \equiv Alle Dinge sind Parkscheiben.

Distributivgesetze (Distr.)

- Allquantordistribution

$$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \equiv (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

Distributivgesetze (Distr.)

- Allquantordistribution

$$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \equiv (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

- Existenzquantordistribution

$$(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \equiv (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

Distributivgesetze (Distr.)

- Allquantordistribution

$$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \equiv (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

- Existenzquantordistribution

$$(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \equiv (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

- Warum hingegen

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vdash (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$$

aber

$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \not\vdash (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Wünschenswert: alle Quantoren ganz am Anfang

Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Wünschenswert: alle Quantoren ganz am Anfang

- Quantorenbewegung aus dem Antezedens von Konditionalen

$$(\exists x) \underline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\forall x) [P(x) \rightarrow \phi]$$

$$(\forall x) \underline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\exists x) [\underline{P(x)} \rightarrow \phi]$$

Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Wünschenswert: alle Quantoren ganz am Anfang

- Quantorenbewegung aus dem Antezedens von Konditionalen

$$(\exists x) \underline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\forall x) [P(x) \rightarrow \phi]$$

$$(\forall x) \underline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\exists x) [\underline{P(x)} \rightarrow \phi]$$

- Quantorenbewegung aus Konjunktionen, Disjunktionen und Konsequenzen von Konditionalen: einfach nach vorne bewegen!

Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Wünschenswert: alle Quantoren ganz am Anfang

- Quantorenbewegung aus dem Antezedens von Konditionalen

$$(\exists x)P(x) \rightarrow \phi \equiv (\forall x)[P(x) \rightarrow \phi]$$

$$(\forall x)\overline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\exists x)\overline{[P(x) \rightarrow \phi]}$$

- Quantorenbewegung aus Konjunktionen, Disjunktionen und Konsequenzen von Konditionalen: einfach nach vorne bewegen!

▶ $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists y)F(y) \equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \rightarrow F(y)]$

Wenn es eine Parkscheibe gibt, gibt es einen Falk-Plan. \equiv Für alle Dinge x gilt, dass es ein Ding y gibt, sodass y ein Falk-Plan ist, wenn x eine Parkscheibe ist.

Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Wünschenswert: alle Quantoren ganz am Anfang

- Quantorenbewegung aus dem Antezedens von Konditionalen

$$(\exists x)P(x) \rightarrow \phi \equiv (\forall x)[P(x) \rightarrow \phi]$$

$$(\forall x)\overline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\exists x)\overline{[P(x) \rightarrow \phi]}$$

- Quantorenbewegung aus Konjunktionen, Disjunktionen und Konsequenzen von Konditionalen: einfach nach vorne bewegen!

- ▶ $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists y)F(y) \equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \rightarrow F(y)]$

Wenn es eine Parkscheibe gibt, gibt es einen Falk-Plan. \equiv Für alle Dinge x gilt, dass es ein Ding y gibt, sodass y ein Falk-Plan ist, wenn x eine Parkscheibe ist.

- ▶ $S(m) \vee (\exists x)P(x) \equiv (\exists x)[S(m) \vee P(x)]$

Martin schläft oder es gibt eine Parkscheibe. \equiv Es gibt ein Ding x, sodass entweder Martin schläft oder dieses Ding eine Parkscheibe ist.

Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Wünschenswert: alle Quantoren ganz am Anfang

- Quantorenbewegung aus dem Antezedens von Konditionalen

$$(\exists x)P(x) \rightarrow \phi \equiv (\forall x)[P(x) \rightarrow \phi]$$

$$(\forall x)\overline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\exists x)\overline{[P(x) \rightarrow \phi]}$$

- Quantorenbewegung aus Konjunktionen, Disjunktionen und Konsequenzen von Konditionalen: einfach nach vorne bewegen!

- ▶ $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists y)F(y) \equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \rightarrow F(y)]$

Wenn es eine Parkscheibe gibt, gibt es einen Falk-Plan. \equiv Für alle Dinge x gilt, dass es ein Ding y gibt, sodass y ein Falk-Plan ist, wenn x eine Parkscheibe ist.

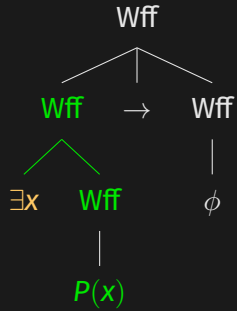
- ▶ $S(m) \vee (\exists x)P(x) \equiv (\exists x)[S(m) \vee P(x)]$

Martin schläft oder es gibt eine Parkscheibe. \equiv Es gibt ein Ding x, sodass entweder Martin schläft oder dieses Ding eine Parkscheibe ist.

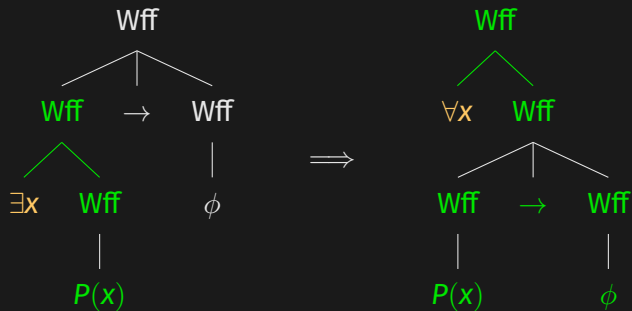
- Bei Bewegung des Quantors von x darf x in der restlichen Formel nicht frei sein!

Quantorenbewegung mit Bäumen

Quantorenbewegung mit Bäumen

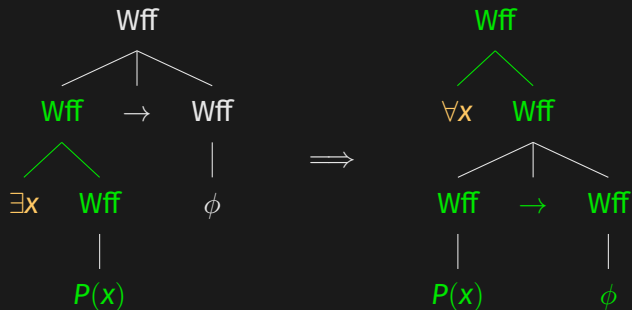


Quantorenbewegung mit Bäumen



Bewegung = Ausweitung des Skopus

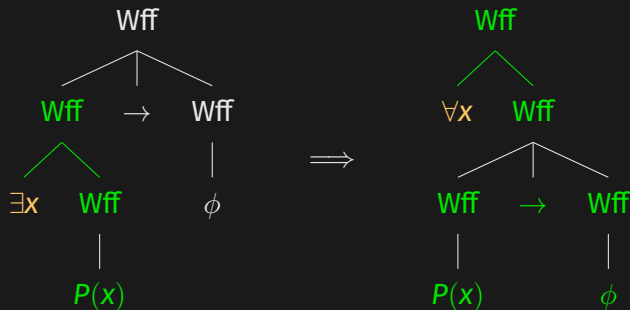
Quantorenbewegung mit Bäumen



Bewegung = **Ausweitung des Skopus**

Wenn man möchte, kann man jetzt von c-Kommando reden.

Quantorenbewegung mit Bäumen



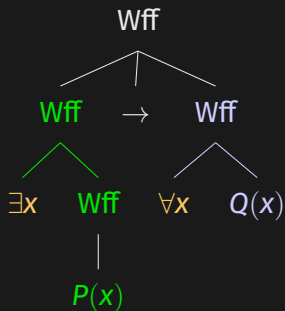
Bewegung = **Ausweitung des Skopus**

Wenn man möchte, kann man jetzt von c-Kommando reden.

Pränexe Normalform | Allen Quantoren maximalen Skopus geben

Was steckt in ϕ ?

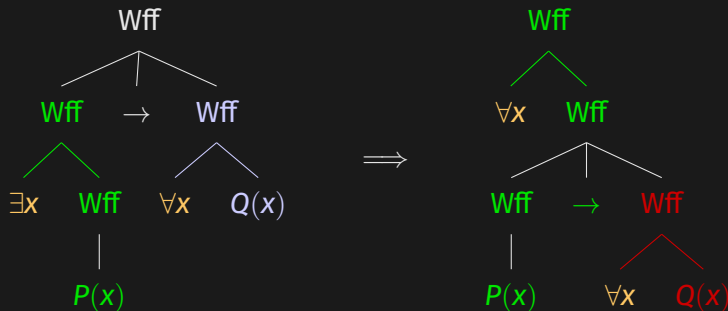
Was steckt in ϕ ?



Links | Unabhängig ausgewertete **quantifizierte** x mit **unabhängigem** Skopus

Quantorenbewegung | Obacht auf die Variablen

Was steckt in ϕ ?



Links | Unabhängig ausgewertete **quantifizierte** x mit **unabhängigem** Skopus
Rechts | Problem! Das x im **roten Teilbaum** ist doppelt gebunden.

- *drip-133 ist Musiker und mit Dan Bell befreundet.*

- *drip-133 ist Musiker und mit Dan Bell befreundet.*
- *Wenn es Einhörner gibt, muss Jan singen.*

- drip-133 ist Musiker und mit Dan Bell befreundet.
- Wenn es Einhörner gibt, muss Jan singen.
- Er hat einen Netzfilter repariert, und nicht alle Komponenten waren verfügbar.

- drip-133 ist Musiker und mit Dan Bell befreundet.
- Wenn es Einhörner gibt, muss Jan singen.
- Er hat einen Netzfilter repariert, und nicht alle Komponenten waren verfügbar.
- Alle Fernsehpersönlichkeiten sind Menschen, und Heide ist eine Fernsehpersönlichkeit.

- drip-133 ist Musiker und mit Dan Bell befreundet.
- Wenn es Einhörner gibt, muss Jan singen.
- Er hat einen Netzfilter repariert, und nicht alle Komponenten waren verfügbar.
- Alle Fernsehpersönlichkeiten sind Menschen, und Heide ist eine Fernsehpersönlichkeit.
- Einige Fernsehpersönlichkeiten sind keine Musiker.

- *drip-133 ist Musiker und mit Dan Bell befreundet.*
- *Wenn es Einhörner gibt, muss Jan singen.*
- *Er hat einen Netzfilter repariert, und nicht alle Komponenten waren verfügbar.*
- *Alle Fernsehpersönlichkeiten sind Menschen, und Heide ist eine Fernsehpersönlichkeit.*
- *Einige Fernsehpersönlichkeiten sind keine Musiker.*
- *Manche sind weder eine Fernsehpersönlichkeit, noch kennen sie Dan Bell.*

Schlussregeln

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $-\forall$

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $\neg\forall$

- ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$

- Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.*

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $\neg\forall$
 - ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$
Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.
 - ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $- \forall$
 - ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$
Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.
 - ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten
- Universelle Generalisierung $+ \forall$

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $- \forall$
 - ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$
Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.
 - ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten
- Universelle Generalisierung $+ \forall$
 - ▶ $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $- \forall$
 - ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$
Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.
 - ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten
- Universelle Generalisierung $+ \forall$
 - ▶ $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$
 - ▶ Nur, wenn a durch $- \forall$ eingeführt wurde!

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $- \forall$
 - ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$
Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.
 - ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten
- Universelle Generalisierung $+ \forall$
 - ▶ $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$
 - ▶ Nur, wenn a durch $- \forall$ eingeführt wurde!
- Beispiel ... Substanzielles wird an Individuen bewiesen.

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $- \forall$

- ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$

- Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.*

- ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten

- Universelle Generalisierung $+ \forall$

- ▶ $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$

- ▶ Nur, wenn a durch $- \forall$ eingeführt wurde!

- Beispiel ... Substanzielles wird an Individuen bewiesen.

$$1 \quad (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$$

Alles ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $- \forall$

- ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$

- Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.*

- ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten

- Universelle Generalisierung $+ \forall$

- ▶ $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$

- ▶ Nur, wenn a durch $- \forall$ eingeführt wurde!

- Beispiel ... Substanzielles wird an Individuen bewiesen.

- 1 $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$

- Alles ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.*

- 2 $\neg P(m)$

- Martin ist keine Parkscheibe.*

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $- \forall$

- ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$

- Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.*

- ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten

- Universelle Generalisierung $+ \forall$

- ▶ $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$

- ▶ Nur, wenn a durch $- \forall$ eingeführt wurde!

- Beispiel ... Substanzielles wird an Individuen bewiesen.

| | | |
|---|-------------------------------|--|
| 1 | $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ | <i>Alles ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.</i> |
| 2 | $\neg P(m)$ | <i>Martin ist keine Parkscheibe.</i> |
| 3 | $P(m) \vee Q(m)$ | <i>Martin ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.</i> |
| | | 1, $- \forall(2)$ |

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $- \forall$

- ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$

- Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.*

- ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten

- Universelle Generalisierung $+ \forall$

- ▶ $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$

- ▶ Nur, wenn a durch $- \forall$ eingeführt wurde!

- Beispiel ... Substanzielles wird an Individuen bewiesen.

| | | | |
|-------|-------------------------------|------------------|--|
| 1 | $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ | | <i>Alles ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.</i> |
| 2 | $\neg P(m)$ | | <i>Martin ist keine Parkscheibe.</i> |
| <hr/> | | | |
| 3 | $P(m) \vee Q(m)$ | $1, -\forall(2)$ | <i>Martin ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.</i> |
| 4 | $Q(m)$ | 3, DS | <i>Martin besteht aus Quarks.</i> |

Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von Allaussagen auf Individualaussagen und umgekehrt

- Universelle Instanziierung $- \forall$

- ▶ $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$

- Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.*

- ▶ Für a : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten

- Universelle Generalisierung $+ \forall$

- ▶ $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$

- ▶ Nur, wenn a durch $- \forall$ eingeführt wurde!

- Beispiel ... Substanzielles wird an Individuen bewiesen.

| | | | |
|---|-------------------------------|----------------------|---|
| 1 | $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$ | | Alles ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks. |
| 2 | $\neg P(m)$ | | Martin ist keine Parkscheibe. |
| 3 | $P(m) \vee Q(m)$ | 1, $- \forall(2)$ | Martin ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks. |
| 4 | $Q(m)$ | 3, DS | Martin besteht aus Quarks. |
| 5 | $(\forall x)Q(x)$ | 4, 3, $+ \forall[1]$ | Alles besteht aus Quarks. |

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

1 $(\exists x)Q(x)$

Es gibt ein Ding, das aus Quarks besteht.

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

| | | |
|---|--------------------------------------|--|
| 1 | $(\exists x)Q(x)$ | <i>Es gibt ein Ding, das aus Quarks besteht.</i> |
| 2 | $(\forall y)[Q(y) \rightarrow P(y)]$ | <i>Alles, was aus Quarks besteht, ist ein physikalisches Objekt.</i> |

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

| | | | |
|---|--------------------------------------|---------------|---|
| 1 | $(\exists x)Q(x)$ | | <i>Es gibt ein Ding, das aus Quarks besteht.</i> |
| 2 | $(\forall y)[Q(y) \rightarrow P(y)]$ | | <i>Alles, was aus Quarks besteht, ist ein physikalisches Objekt.</i> |
| 3 | $Q(h)$ | $1, -\exists$ | <i>Ein Objekt, das wir jetzt Hoxnoxno nennen, besteht aus Quarks.</i> |

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

| | | | |
|---|--------------------------------------|---------------|--|
| 1 | $(\exists x)Q(x)$ | | <i>Es gibt ein Ding, das aus Quarks besteht.</i> |
| 2 | $(\forall y)[Q(y) \rightarrow P(y)]$ | | <i>Alles, was aus Quarks besteht, ist ein physikalisches Objekt.</i> |
| 3 | $Q(h)$ | $1, -\exists$ | <i>Ein Objekt, das wir jetzt Hoxnoxno nennen, besteht aus Quarks.</i> |
| 4 | $Q(h) \rightarrow P(h)$ | $2, -\forall$ | <i>Wenn Hoxnoxno aus Quarks besteht, ist Hoxnoxno ein physikalisches Objekt.</i> |

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

| | | | |
|---|--------------------------------------|---------------|--|
| 1 | $(\exists x)Q(x)$ | | <i>Es gibt ein Ding, das aus Quarks besteht.</i> |
| 2 | $(\forall y)[Q(y) \rightarrow P(y)]$ | | <i>Alles, was aus Quarks besteht, ist ein physikalisches Objekt.</i> |
| 3 | $Q(h)$ | 1, $-\exists$ | <i>Ein Objekt, das wir jetzt Hoxnoxno nennen, besteht aus Quarks.</i> |
| 4 | $Q(h) \rightarrow P(h)$ | 2, $-\forall$ | <i>Wenn Hoxnoxno aus Quarks besteht, ist Hoxnoxno ein physikalisches Objekt.</i> |
| 5 | $P(h)$ | 3,4,MP | <i>Hoxnoxno ist ein physikalisches Objekt.</i> |

Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung $+\exists$

- ▶ $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

- Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung $-\exists$

- ▶ $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

- Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

| | | | |
|---|--------------------------------------|---------------|--|
| 1 | $(\exists x)Q(x)$ | | <i>Es gibt ein Ding, das aus Quarks besteht.</i> |
| 2 | $(\forall y)[Q(y) \rightarrow P(y)]$ | | <i>Alles, was aus Quarks besteht, ist ein physikalisches Objekt.</i> |
| 3 | $Q(h)$ | 1, $-\exists$ | <i>Ein Objekt, das wir jetzt Hoxnoxno nennen, besteht aus Quarks.</i> |
| 4 | $Q(h) \rightarrow P(h)$ | 2, $-\forall$ | <i>Wenn Hoxnoxno aus Quarks besteht, ist Hoxnoxno ein physikalisches Objekt.</i> |
| 5 | $P(h)$ | 3,4, MP | <i>Hoxnoxno ist ein physikalisches Objekt.</i> |
| 6 | $(\exists z)P(z)$ | 5, $+\exists$ | <i>Es gibt physikalische Objekte.</i> |

(1) Herr Keydana fährt einen Golf. (2) Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt. **Zeigen oder widerlegen Sie: B: Es gibt mindestens einen Menschen.**

(1) Herr Keydana fährt einen Golf. (2) Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt. **Zeigen oder widerlegen Sie: B: Es gibt mindestens einen Menschen.**

1 $G(k)$

(1) Herr Keydana fährt einen Golf. (2) Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt. **Zeigen oder widerlegen Sie: B: Es gibt mindestens einen Menschen.**

1 $G(k)$

2 $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$

(1) Herr Keydana fährt einen Golf. (2) Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt. **Zeigen oder widerlegen Sie: B: Es gibt mindestens einen Menschen.**

1 $G(k)$

2 $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$

3 $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$

(1) Herr Keydana fährt einen Golf. (2) Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt. **Zeigen oder widerlegen Sie: B: Es gibt mindestens einen Menschen.**

1 $G(k)$

2 $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$

3 $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$

$(\exists z)M(z)$

- 1 $G(k)$
 - 2 $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$
 - 3 $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)] \quad \vdash (\exists z)M(z)$
-

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

| | | |
|---|--|--------------------------|
| 1 | $G(k)$ | |
| 2 | $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$ | |
| 3 | $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$ | $\vdash (\exists z)M(z)$ |
| 4 | $(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$ | 3,QN |

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

| | | |
|-------|--|--------------------------|
| 1 | $G(k)$ | |
| 2 | $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$ | |
| 3 | $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$ | $\vdash (\exists z)M(z)$ |
| <hr/> | | |
| 4 | $(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$ | 3,QN |
| 5 | $(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$ | 4,DeM |

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

| | | |
|-------|--|--------------------------|
| 1 | $G(k)$ | |
| 2 | $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$ | |
| 3 | $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$ | $\vdash (\exists z)M(z)$ |
| <hr/> | | |
| 4 | $(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$ | 3,QN |
| 5 | $(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$ | 4,DeM |
| 6 | $(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$ | 5,Komm.,Impl. |

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

| | | |
|-------|--|--------------------------|
| 1 | $G(k)$ | |
| 2 | $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$ | |
| 3 | $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$ | $\vdash (\exists z)M(z)$ |
| <hr/> | | |
| 4 | $(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$ | 3,QN |
| 5 | $(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$ | 4,DeM |
| 6 | $(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$ | 5,Komm.,Impl. |
| 7 | $G(k) \rightarrow \neg A(k)$ | 6, $\neg\forall(1)$ |

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

Der Beweis

| | | |
|-------|--|--------------------------|
| 1 | $G(k)$ | |
| 2 | $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$ | |
| 3 | $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$ | $\vdash (\exists z)M(z)$ |
| <hr/> | | |
| 4 | $(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$ | 3,QN |
| 5 | $(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$ | 4,DeM |
| 6 | $(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$ | 5,Komm.,Impl. |
| 7 | $G(k) \rightarrow \neg A(k)$ | 6, $\forall(1)$ |
| 8 | $\neg A(k)$ | 1,7,MP |

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

Der Beweis

| | | |
|-------|--|--------------------------|
| 1 | $G(k)$ | |
| 2 | $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$ | |
| 3 | $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$ | $\vdash (\exists z)M(z)$ |
| <hr/> | | |
| 4 | $(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$ | 3,QN |
| 5 | $(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$ | 4,DeM |
| 6 | $(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$ | 5,Komm.,Impl. |
| 7 | $G(k) \rightarrow \neg A(k)$ | 6, $\neg\forall(1)$ |
| 8 | $\neg A(k)$ | 1,7,MP |
| 9 | $G(k) \rightarrow M(k) \vee A(k)$ | 2, $\neg\forall(1)$ |

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

| | | |
|----|--|--------------------------|
| 1 | $G(k)$ | |
| 2 | $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$ | |
| 3 | $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$ | $\vdash (\exists z)M(z)$ |
| 4 | $(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$ | 3,QN |
| 5 | $(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$ | 4,DeM |
| 6 | $(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$ | 5,Komm.,Impl. |
| 7 | $G(k) \rightarrow \neg A(k)$ | 6, $\neg\forall(1)$ |
| 8 | $\neg A(k)$ | 1,7,MP |
| 9 | $G(k) \rightarrow M(k) \vee A(k)$ | 2, $\neg\forall(1)$ |
| 10 | $M(k) \vee A(k)$ | 1,9,MP |

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

Der Beweis

| | | |
|----|--|--------------------------|
| 1 | $G(k)$ | |
| 2 | $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$ | |
| 3 | $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$ | $\vdash (\exists z)M(z)$ |
| 4 | $(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$ | 3,QN |
| 5 | $(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$ | 4,DeM |
| 6 | $(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$ | 5,Komm.,Impl. |
| 7 | $G(k) \rightarrow \neg A(k)$ | 6, $\neg\forall(1)$ |
| 8 | $\neg A(k)$ | 1,7,MP |
| 9 | $G(k) \rightarrow M(k) \vee A(k)$ | 2, $\neg\forall(1)$ |
| 10 | $M(k) \vee A(k)$ | 1,9,MP |
| 11 | $M(k)$ | 8,10,DS |

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

Der Beweis

| | | |
|----|--|--------------------------|
| 1 | $G(k)$ | |
| 2 | $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x))]$ | |
| 3 | $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$ | $\vdash (\exists z)M(z)$ |
| 4 | $(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$ | 3,QN |
| 5 | $(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$ | 4,DeM |
| 6 | $(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$ | 5,Komm.,Impl. |
| 7 | $G(k) \rightarrow \neg A(k)$ | 6, $\neg\forall(1)$ |
| 8 | $\neg A(k)$ | 1,7,MP |
| 9 | $G(k) \rightarrow M(k) \vee A(k)$ | 2, $\neg\forall(1)$ |
| 10 | $M(k) \vee A(k)$ | 1,9,MP |
| 11 | $M(k)$ | 8,10,DS |
| 12 | $(\exists z)M(z)$ | 11,+ \exists ■ |

Herr Keydana fährt einen Golf.

Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.

Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. \vdash Es gibt mindestens einen Menschen.

Aufgaben

1 Treffen die folgenden Behauptungen zu?

- 1 $\forall x \neg (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \neg \exists x \neg (P(x) \leftrightarrow Q(x))$
- 2 $\neg \neg \forall x (R(x) \vee \neg \neg S(x)) \equiv \neg \exists x \neg (R(x) \vee S(x))$
- 3 $\exists x (P(x) \wedge P(x)) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$

2 Versuchen Sie, intuitiv zu formulieren, warum die auf Folie 11 besprochene Einschränkung bei der Quantorenvertauschung besteht. Gemeint ist:

$$(\forall x)(\exists y)\phi \not\equiv (\exists y)(\forall x)\phi$$

- 1 Alle Lügner sind unglaublich. Einige Lügner sind Zugschaffner.
Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Zugschaffner sind unglaublich.
- 2 Alle Flugzeuge sind Automaten. Einige Automaten sind besorgniserregend.
Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Flugzeuge sind besorgniserregend.
- 3 Kein Käufer wird betrogen. Einige Käufer sind auch Händler.
Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Händler werden nicht betrogen.

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>
roland.schaefer@uni-jena.de

Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.