Formale Semantik
03. Mengen und Funktionen

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Semantik`

Inhalt

Kernfragen in dieser Woche

Was sind Mengen?

Welche Operationen kann man auf Mengen anwenden?

Was sind Relationen und Funktionen?
Und wie hängen sie mit Mengen zusammen?

Welche Eigenschaften können Funktionen und Relationen haben?

Text für heute: Partee u. a. (1990: Kapitel 1–4)

Mengen und Funktionen

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe
- Wörter
- ...

- nicht unbedingt zweckgebunden
- jedes Objekt maximal einmal in jeder Menge

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition $\{\}$, Elementstatus $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)
- N_1 = {*'my book'*} (einelementige Menge, enthält eine NP)
  - vs. N_2 = {*my book*} (einelementige Menge, enthält mein Buch)
  - vs. N_3 = {*'my', 'book'*} (Menge von Wörtern)
- auch möglich: N_4 = {*'my', book*}
- definiert über eine Eigenschaft der Elemente (zwei Notationen):
  M_2 = {*x: x is one of the first three letters of the alphabet*}
  M_2 = {*x|x is one of the first three letters of the alphabet*}
- U: die universelle Menge (alle Objekte)

Identität von Mengen

Zwei Mengen mit exakt den gleichen Elementen sind identisch.

- $\{a, b, c\}$ = {*x:x is one of the first three letters of the alphabet*}
- {*x: x is human*} = {*x: x is from the Earth, a primate but not an ape*}

Teilmengen und Obermengen

Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält,
das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. Obermenge).

Teilmenge oder Identität $\subseteq$
Obermenge oder Identität $\supseteq$

- $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$ und $\{a, b, c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$ und $\{a, b, c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c, d\} \nsubseteq \{a, b, c\}$ und $\{a, b, c\} \nsupseteq \{a, b, c, d\}$
- $\{$*x: x is human*$\} \subseteq \{$*x: is an ape*$\}$

Echte Teilmengen und Obermengen

Echte Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist, und die nicht mit M identisch ist.

Echte Teilmenge $\subset$
Echte Obermenge $\supset$

- $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ und $\{a\} \subset \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \not\subset \{a, b, c\}$ aber $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

Elemente vs. Teilmengen

- Achtung bei Mengen von Mengen
  - $\{\{a\}\} \not\subset \{a, b, c\}$
  - $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a, b, c\}$
  - $\{\{a\}\} \notin \{a, b, c\}$
- für leere Menge $\{\}$ oder $\emptyset$
  - $\{\} \subset$ jede anderen Menge
  - $\{\} \notin \{\}$

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.
  - w = Herr Webelhuth
    $E = \{x\text{: } x \text{ is a professor of English Linguistics}\}$
    $H = \{x\text{: } x \text{ is human}\}$
  - Aus $w \in E$ und $E \subset H$ folgt $w \in H$

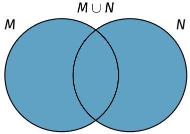
- Aber
  - *Die Anglistikprofessoren sind zahlreich.*
  - $N = \{x\text{: } x \text{ is a set with many members}\}$
  - Aus $\mathrm{w} \in \mathrm{E}$ und $\mathrm{E} \in \mathrm{N}$ folgt nicht $\mathrm{w} \in \mathrm{N}$
  - Vergleiche: **Herr Webelhuth ist zahlreich.*

Potenzmengen (power sets)

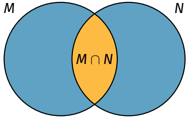
Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - $M = \{a, b, c\}$
  - $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Vereinigungsmenge und Schnittmenge



Vereinigungsmenge | Für Mengen M und N: $M \cup N = \{x : x \in M \textbf{ oder } x \in N\}$



Schnittmenge | Für Mengen M und N: $M \cap N = \{x : x \in M \textbf{ und } x \in N\}$

- Beispiel Vereinigungsmenge
  - $M = \{a, b, c\}$
  - $N = \{a, b, d\}$
  - $M \cup N = \{a, b, c, d\}$
- Beispiel Schnittmenge
  - $M = \{a, b, c\}$
  - $N = \{a, b\}$
  - $M \cap N = \{a, b\}$

Generalisierte Vereinigungs- und Schnittmenge

$\bigcup M = \{x : x \in Y \textbf{ für irgendeine } Y \in M\}$
$\bigcap M = \{x : x \in Y \textbf{ für jede } Y \in M\}$

- Beispiel generalisierte Vereinigungsmenge
  - $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
  - $\bigcup M = \{a, b, c\}$
- Beispiel generalisierte Schnittmenge
  - $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
  - $\bigcap M = \{a\}$

Differenzmenge und Komplementmenge

Differenzmenge | $M - N = \{x : x \in M \text{ and } x \notin N\}$
Komplementmenge | $M \backslash N = \{x : x \in N \text{ and } x \notin M\}$

- Beispiel Differenzmenge
  - $M = \{a, b, c\}$
  - $N = \{a\}$
  - $M - N = \{b, c\}$
- Beispiel Komplementmenge
  - $O = \{a, b, c, k\}$
  - $M \backslash O = \{k\}$
- Universelles Komplement
  - die universelle Menge | $U = \{x\text{: } x \textit{ is an object}\}$
  - $M' = \{x : x \in U \text{ and } x \notin M\}$

Triviale Identitäten

Idempotenz	$M \cup M$	$=$	M
	$M \cap M$	$=$	M
Kommutativität	$M \cup N$	$=$	$N \cup M$
	$M \cap N$	$=$	$N \cap M$
Assoziativität	$(M \cup N) \cup O$	$=$	$M \cup (N \cup O)$
	$(M \cap N) \cap O$	$=$	$M \cap (N \cap O)$
Distributivität	$M \cup (N \cap O)$	$=$	$(M \cup N) \cap (M \cup O)$

Interessante Identitäten

Komplementgesetze

- $M \cup \emptyset = M$
- $M'' = M$
- $M \cap M' = \emptyset$
- $X \cap U = U$

DeMorgan

- $(M \cup N)' = M' \cap X'$
- DeMorgan begegnet uns in der Logik wieder.

Funktionen und Relationen

Tupel (geordnete Paare, Vektoren)

Mengen | ungeordnet $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$

Tupel | dasselbe, aber geordnet $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$

- Definition ohne neues Primitiv | $\langle a, b\rangle \stackrel{def}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- Rekursive Anwendung | $\langle a, b, c\rangle = ???$
- in $\langle a, b\rangle$ | a erste und b zweite Koordinate

Kartesische Produkte

Mengen von Tupeln | $\{< a, b >, < a, c >, < b, c >\}$ usw.

Kartesisches Produkt | $S_1 \times \cdots \times S_n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle : x_i \in S_i\}$

- Für zwei Mengen | $S_1 \times S_2 = \{\langle x, y\rangle \| x \in S_1$ and $y \in S_2\}$
  - $S_1 = \{a, b, c\}$
  - $S_2 = \{1, 2, 3\}$
  - $S_1 \times S_2 = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$
  - Achtung | $\langle 1, a\rangle \notin S_1 \times S_2$ usw.

- Nomenklatur | $\vec{x}$ für $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$

- n-faches Produkt | $S^n = \{\vec{s} : s_i \in S$ for $1 \leq i \leq n\}$
  - $S_1^2 = S_1 \times S_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

Relationen

a sieht b, a wohnt im selben Stockwerk wie b, a macht b Vorwürfe, ...

- Notationen | Rab, aRb, $R(a, b)$, $R(\langle a, b\rangle)$
- Definitionsmenge (domain) A | $a \in A$
- Zielmenge, Wertemenge (range) B | $b \in B$
- Zielmenge = Wertemenge A | *R ist eine Relation in A.*

- Relation R = eine Menge von Tupeln
- $R \subseteq A \times B$

Komplement und Umkehrung

Komplement von R | $R' = (A \times B) - R = R \backslash (A \times B) = \{\langle a, b \rangle \ \notin R\}$ for $R \subseteq A \times B$
Umkehrung (inverse) von R | $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle : \langle a, b \rangle \in R\}$ for $R \subseteq A \times B$

- Beispiel Komplement
  - $R \stackrel{def}{=} \{\langle a, b \rangle : a$ ist Lehrer von b$\}$
  - $\langle$Herr Webelhuth, Herr Schäfer$\rangle \in R$
  - $R' = \{\langle a, b \rangle : a$ ist nicht Lehrer von $b\}$
  - $\langle$Herr Webelhuth, Frau Klenk$\rangle \notin R$,
    $\langle$der Garten meiner Eltern, Frau Klenk$\rangle \notin R$ usw.
- Beispiel Umkehrung
  - $R^{-1} = \{\langle a, b \rangle : b$ ist Lehrer von $a\}$
  - $= \{\langle a, b \rangle : a$ ist Schüler von $\}$
  - $\langle$Herr Schäfer, Herr Webelhuth$\rangle \in R^{-1}$

Funktionen

a hat Vater b, zugelassenes Auto a hat Kennzeichen b, b ist der Logarithmus von a, ...

Funktion f | eine Relation, sodass für jedes $a \in A$ genau ein $\langle a, b \rangle \in A \times B$ existiert

- partielle Funktion | Funktion in $A \times B$ sodass für mindestens ein $a \in A$ kein $\langle a, b \rangle \in A \times B$ existiert
- formal meistens | $\bar{f} \subseteq A \times (B \cup \{\bot\})$ mit $\bot$ als *undefiniert*

Funktionskomposition

b ist die Mutter des Vaters von a (schwed. *farmor*),
a ist der Kehrwert des Logarithmus von b, ...

Funktionsverknüpfung (composition) | Für $F_1 \subseteq A \times B$ und $F_2 \subseteq A \times C$: $F_1 \circ F_2 \subseteq A \times C$

- farmor | $F = Vater \circ Mutter$ und $F \subseteq Menschen \times Frauen$
  - $Männer = \{Ulrich\ Schäfer, Roland\ Schäfer, Jan\ Böhmermann, \cdots\}$
  - $Frauen = \{Maria\ Schäfer, Frau\ Dr.\ Heide\ \text{Rezepa-Zabel}, \cdots\}$
  - $Menschen = Männer \cup Frauen$
  - $Vater \subseteq \{\langle Roland\ Schäfer, Ulrich\ Schäfer\rangle, \langle Frau\ Dr.\ Heide\ \text{Rezepa-Zabel}, Jan\ Böhmermann\rangle, \cdots\}$
  - $Mutter \subseteq \{\langle Ulrich\ Schäfer, Maria\ Schäfer\rangle, \langle Jan\ Böhmermann, Frau\ Dr.\ Heide\ \text{Rezepa-Zabel}\rangle, \cdots\}$
  - $F(Roland\ Schäfer) = Vater \circ Mutter(Roland\ Schäfer) = Maria\ Schäfer$

Mehr über Relationen und Mengen

Reflexivität

Eine Relation R in A ist ...

reflexiv	gdw	für **jedes** $a \in A$: $\langle a, a \rangle \in R$	*ist dasselbe Objekt wie*
irreflexiv	gdw	für **jedes** $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$	*ist Vater von*
nichtreflexiv	gdw	für **ein** $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$	*hat gesehen*

Symmetrie

Eine Relation R in A ist ...

symmetrisch	gdw	für jedes $\langle a, b\rangle \in R : \langle b, a\rangle \in R$	*hat dasselbe Auto wie*
asymmetrisch	gdw	für jedes $\langle a, b\rangle \in R : \langle b, a\rangle \notin R$	*hat ein anderes Auto als*
nichtsymmetrisch	gdw	für ein $\langle a, b\rangle \in R : \langle b, a\rangle \notin R$	*ist Mutter von*[1]
antisymmetrisch	gdw	für jedes $\langle a, b\rangle \in R : \langle b, a\rangle \notin R$ **oder** $a = b$	$\leq$

[1] Wer hat *Dark* gesehen?

Transitivität

Eine Relation R in A ist …

transitiv	gdw	$\langle a, b \rangle \in R$ and $\langle b, c \rangle \in R : \langle a, c \rangle \in R$	*steht links von*
nichttransitiv	gdw	das Obige stimmt manchmal nicht	*mag*
intransitiv	gdw	das Obige stimmt nie	*ist Mutter von*

Einordnung

Wozu das Ganze?

- Referenzsemantik und Einteilung der Welt in Mengen
- Ausdrücke, die auf Relationen und Funktionen referieren
- andere Grundlage: Logik, denn Sprache=Logik (irgendwie)

Aufgaben I

1. Sind folgende Mengendefinitionen zulässig?
   1. $A = \{a, b, d, e, f, g\}$
   2. $C = \{\textit{x: x ist in keiner Menge enthalten}\}$
   3. $D = \{\textit{Böhmermann, Horst Lichter}, \{\}\}$
   4. $E = \{a, b, a, d, e, f, g\}$
   5. $F = \{\textit{r: r ist eine rationale Zahl}\} \cup \mathbb{N}$

2. Sind folgende Aussagen korrekt?
   1. $\{\} \subseteq \{blau, rot, gelb\}$
   2. $\{x : x \in A\} = A$
   3. $\{Jan, Horst, Heide\} \neq \{Horst, Jan, Heide\}$
   4. Wenn $A = \{\textit{x:x ist ein Auto}\}$ und $a \in A$ und außerdem $B = \{\textit{x:x ist eine Menge von Dingen, die die Umwelt belasten}\}$ und $A \in B$, dann folgt daraus $a \in B$.
   5. Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann folgt $A = B$.
   6. Wenn $A \subset B$ und $B \subset A$, dann folgt $A \neq B$.
   7. Wenn $a \in A$ und $a \in B$, dann folgt $a \in A \cup B$.
   8. Wenn $a \in A$ und $a \in B$, dann folgt $a \in A \cap B$.
   9. Wenn $a \notin A$ und $a \notin B$, dann folgt $a \in (A \cup B)'$.

Aufgaben II

3. Beantworten Sie die folgenden Fragen.
    1. Was ist $\wp\{Horst, Heide, Jan\}$?
    2. Beantworten Sie die beiden Fragen auf Folie 10.
    3. Stimmt es, dass $\{Horst, Heide\} \subset \bigcap\{\{Tschernobyl, Harrisburg\}, \{Horst, Heide, Albert\}, \{Horst, Webelhuth, Heide, Fukushima\}\}$?
    4. Stimmt es, dass $\{Heide, Harrisburg\} \subseteq \bigcup\{\{Tschernobyl, Harrisburg\}, \{Horst, Heide, Albert\}, \{Horst, Webelhuth, Heide, Fukushima\}\}$?
    5. Stimmt es für nicht-leere Mengen A und B, dass $A \backslash B = B - A$?
    6. Und für leere Mengen?
    7. Vervollständigen Sie von Folie 16 $\langle a, b, c\rangle = ???$ (Auflösen von Tupeln in Mengenschreibweise).
    8. Auch wenn es weh tut, dasselbe bitte für $\langle a, b, c, d\rangle$!
    9. Ist Folgendes korrekt: $\langle Horst, Heide\rangle = \langle Heide, Horst\rangle$?
    10. Ist Folgendes korrekt: $\{\langle Horst, Heide\rangle, \langle Jan, Albert\rangle\} = \{\langle Jan, Albert\rangle, \langle Horst, Heide\rangle\}$?
    11. Was muss der Fall sein, damit $A \circ B = B \circ A$?
    12. Finden Sie ein Beispiel für eine nicht-partielle Funktion von Dingen der realen Welt zu Dingen der realen Welt. Warum ist diese Funktion keine Relation? Finden Sie außerdem ein ähnliches Beispiel für eine partielle Funktion.
    13. Finden Sie je eine Relationen zwischen Dingen der realen Welt, die reflexiv, irreflexiv, nichtreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, nichtsymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, nichttransitiv und intransitiv ist. Die Relationen müssen nicht mit einem bestimmten natürlichsprachlichen Wort ausdrückbar sein (vergleiche viele der Beispiele auf den Folien). In einigen Fällen ist das recht schwierig. Versuchen Sie es ohne Google, ChatGPT usw., sonst bringt es Ihnen nichts.

Literatur I

Partee, Barbara, Alice ter Meulen & Robert E. Wall. 1990. *Mathematical methods in linguistics*. Dordrecht: Kluwer.

Autor

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

https://rolandschaefer.net
roland.schaefer@uni-jena.de

Lizenz