

# Formale Semantik

## 08. Intensionalität

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Semantik>

1 Wozu Intensionalität?

2 Formale Modellierung von Intensionen

3 Mengen von Welten

4 Intensionale Modelltheorie

# Kernfragen dieser Woche

Verständnis dafür, dass wir bisher nur über **Extensionen** sprechen.

Verständnis dafür, dass wir bisher nur über **Extensionen** sprechen.  
Wissen um Konstruktionen, in denen das nicht ausreicht.

Verständnis dafür, dass wir bisher nur über **Extensionen** sprechen.

Wissen um Konstruktionen, in denen das nicht ausreicht.

Definition des intensionalen Kalküls auf Basis des extensionalen.

Verständnis dafür, dass wir bisher nur über **Extensionen** sprechen.

Wissen um Konstruktionen, in denen das nicht ausreicht.

Definition des intensionalen Kalküls auf Basis des extensionalen.

Nochmals zurück zu Chierchia,  
weil das entsprechende Kapitel wirklich gut ist.

Verständnis dafür, dass wir bisher nur über **Extensionen** sprechen.

Wissen um Konstruktionen, in denen das nicht ausreicht.

Definition des intensionalen Kalküls auf Basis des extensionalen.

Nochmals zurück zu Chierchia,  
weil das entsprechende Kapitel wirklich gut ist.

Texte für heute: Chierchia & McConnell-Ginet 2000: Kapitel 5 | Dowty u. a. (1981: Kapitel 5–6)



Wozu Intensionalität?



- Stockhausen *wird* eine andere Oper schreiben.

- Stockhausen *wird* eine andere Oper schreiben.
- *Hätte* Arno Schmidt weniger getrunken, *könnte* er noch leben.

- Stockhausen *wird* eine andere Oper schreiben.
- *Hätte* Arno Schmidt weniger getrunken, *könnte* er noch leben.
- Gustave Moreau *glaubt*, dass Ästhetizismus toll ist.



- *Stockhausen wird eine andere Oper schreiben.*
- *Hätte Arno Schmidt weniger getrunken, könnte er noch leben.*
- *Gustave Moreau glaubt, dass Ästhetizismus toll ist.*

- *Stockhausen wird eine andere Oper schreiben.*
- *Hätte Arno Schmidt weniger getrunken, könnte er noch leben.*
- *Gustave Moreau glaubt, dass Ästhetizismus toll ist.*
- **Syntax** der Ausdrücke | Problemlos mit Einführung von Auxiliaren



- *Stockhausen wird eine andere Oper schreiben.*
- *Hätte Arno Schmidt weniger getrunken, könnte er noch leben.*
- *Gustave Moreau glaubt, dass Ästhetizismus toll ist.*
- **Syntax** der Ausdrücke | Problemlos mit Einführung von Auxiliaren
- **Wahrheitsbedingungen** | **Nicht** angebbbar

- *Stockhausen wird eine andere Oper schreiben.*
- *Hätte Arno Schmidt weniger getrunken, könnte er noch leben.*
- *Gustave Moreau glaubt, dass Ästhetizismus toll ist.*
- **Syntax** der Ausdrücke | Problemlos mit Einführung von Auxiliaren
- **Wahrheitsbedingungen** | **Nicht angebbbar**
  - ▶ in eindimensionalen Modellen ohne Tempus

- *Stockhausen wird eine andere Oper schreiben.*
- *Hätte Arno Schmidt weniger getrunken, könnte er noch leben.*
- *Gustave Moreau glaubt, dass Ästhetizismus toll ist.*
- **Syntax** der Ausdrücke | Problemlos mit Einführung von Auxiliaren
- **Wahrheitsbedingungen** | **Nicht angebbbar**
  - ▶ in eindimensionalen Modellen ohne Tempus
  - ▶ und ohne Modellierung von Möglichkeit und Notwendigkeit  
(Modalverben, modale Adverbiale, *glauben*-Verben)

# Was sind Intensionen?

# Was sind Intensionen?

Extension (Bedeutung) und Intension (Sinn)

# Was sind Intensionen?

Extension (Bedeutung) und Intension (Sinn)

Synt. Typ	Bedeutung	Sinn	Beispiele

# Was sind Intensionen?

Extension (Bedeutung) und Intension (Sinn)

Synt. Typ	Bedeutung	Sinn	Beispiele
NP	Individuum	Individuenkonzept	<i>Venus, Helmut Kohl</i>

# Was sind Intensionen?

Extension (Bedeutung) und Intension (Sinn)

Synt. Typ	Bedeutung	Sinn	Beispiele
NP	Individuum	Individuenkonzept	<i>Venus, Helmut Kohl</i>
VP	Menge von Individuen	Eigenschaftskonzept	<i>Kolibri, laufen</i>



# Was sind Intensionen?

Extension (Bedeutung) und Intension (Sinn)

Synt. Typ	Bedeutung	Sinn	Beispiele
NP	Individuum	Individuenkonzept	<i>Venus, Helmut Kohl</i>
VP	Menge von Individuen	Eigenschaftskonzept	<i>Kolibri, laufen</i>
S	Wahrheitswert	Proposition (Gedanke)	<i>Ich mag Kolibris.</i>



Noch wissen wir nicht viel über Intensionen. Offensichtliche Eigenschaften aber:

Noch wissen wir nicht viel über Intensionen. Offensichtliche Eigenschaften aber:

- Nicht rein wahrheitsfunktional  
„Was ist in der Welt der Fall?“ reicht nicht aus.

Noch wissen wir nicht viel über Intensionen. Offensichtliche Eigenschaften aber:

- Nicht rein wahrheitsfunktional  
„Was ist in der Welt der Fall?“ reicht nicht aus.
- Wissen über die **tatsächlichen**, **vergangenen** und **möglichen** Zustände der Welt  
*PSOA = possible state of affairs*  
Z. B. alle vergangenen SOAs; die PSOAs, die Horst Lichter für möglich hält usw.

Noch wissen wir nicht viel über Intensionen. Offensichtliche Eigenschaften aber:

- Nicht rein wahrheitsfunktional  
„Was ist in der Welt der Fall?“ reicht nicht aus.
- Wissen über die **tatsächlichen**, **vergangenen** und **möglichen** Zustände der Welt  
PSOA = *possible state of affairs*  
Z. B. alle vergangenen SOAs; die PSOAs, die Horst Lichter für möglich hält usw.
- Sowas wie **mehrdimensionale Wahrheitsbedingungen**

Noch wissen wir nicht viel über Intensionen. Offensichtliche Eigenschaften aber:

- Nicht rein wahrheitsfunktional  
„Was ist in der Welt der Fall?“ reicht nicht aus.
- Wissen über die **tatsächlichen**, **vergangenen** und **möglichen** Zustände der Welt  
PSOA = *possible state of affairs*  
Z. B. alle vergangenen SOAs; die PSOAs, die Horst Lichter für möglich hält usw.
- Sowas wie **mehrdimensionale Wahrheitsbedingungen**
- Vermitteln zwischen Wissen über Dinge und Wahrheitswerten





Wir brauchen eine Logik für PSOAs!

Wir brauchen eine Logik für PSOAs!

- Offensichtliche **logische Beschränkungen auf PSOAs**

Wir brauchen eine Logik für PSOAs!

- Offensichtliche **logische Beschränkungen auf PSOAs**
- Solche Sätze scheitern nicht nur, weil sie nicht wahr sind:  
*Im Jahr 1985 wird Arno Schmidt planen, „Julia“ bis 1914 fertig zu schreiben.*

Wir brauchen eine Logik für PSOAs!

- Offensichtliche **logische Beschränkungen auf PSOAs**
- Solche Sätze scheitern nicht nur, weil sie nicht wahr sind:  
*Im Jahr 1985 wird Arno Schmidt planen, „Julia“ bis 1914 fertig zu schreiben.*
- **Inkompatibel** mit unserem Wissen über **zulässige/mögliche PSOAs**

# Paralleluniversen?

*Maria könnte Arno Schmidt persönlich kennen.*

*Maria könnte Arno Schmidt persönlich kennen.*

- Realität | Maria wurde nach dem Tod von AS geboren.

*Maria könnte Arno Schmidt persönlich kennen.*

- Realität | Maria wurde nach dem Tod von AS geboren.
- Vorstellbare alternative Realitäten



*Maria könnte Arno Schmidt persönlich kennen.*

- Realität | Maria wurde nach dem Tod von AS geboren.
- Vorstellbare alternative Realitäten
  - 1 AS ist kein Workaholic, trinkt nicht eine Flasche Korn am Tag und hat daher 1979 keinen Infarkt.

*Maria könnte Arno Schmidt persönlich kennen.*

- Realität | Maria wurde nach dem Tod von AS geboren.
- Vorstellbare alternative Realitäten
  - 1 AS ist kein Workaholic, trinkt nicht eine Flasche Korn am Tag und hat daher 1979 keinen Infarkt.
  - 2 Maria wurde zwanzig Jahre früher geboren.

*Maria könnte Arno Schmidt persönlich kennen.*

- Realität | Maria wurde nach dem Tod von AS geboren.
- Vorstellbare alternative Realitäten
  - 1 AS ist kein Workaholic, trinkt nicht eine Flasche Korn am Tag und hat daher 1979 keinen Infarkt.
  - 2 Maria wurde zwanzig Jahre früher geboren.
  - 3 AS ist von den Toten auferstanden.

*Maria könnte Arno Schmidt persönlich kennen.*

- Realität | Maria wurde nach dem Tod von AS geboren.
- Vorstellbare alternative Realitäten
  - 1 AS ist kein Workaholic, trinkt nicht eine Flasche Korn am Tag und hat daher 1979 keinen Infarkt.
  - 2 Maria wurde zwanzig Jahre früher geboren.
  - 3 AS ist von den Toten auferstanden.
  - 4 Im Prinzip unbegrenzt viele Möglichkeiten

## Formale Modellierung von Intensionen



## Basis der Formalisierung

## Basis der Formalisierung

- Annahme einer Menge von PSOs (= mögliche Welten)



## Basis der Formalisierung

- Annahme einer Menge von PSOAs (= mögliche Welten)
- Jeder PSOA | Exhaustiv bestimmt durch die in ihm wahren Propositionen

## Basis der Formalisierung

- Annahme einer Menge von PSOAs (= mögliche Welten)
- Jeder PSOA | Exhaustiv bestimmt durch die in ihm wahren Propositionen
- Jede Proposition | Zwei-Partitionierung der PSOAs:

## Basis der Formalisierung

- Annahme einer Menge von PSOAs (= mögliche Welten)
- Jeder PSOA | Exhaustiv bestimmt durch die in ihm wahren Propositionen
- Jede Proposition | Zwei-Partitionierung der PSOAs:
  - ▶ Die, in denen sie wahr ist

## Basis der Formalisierung

- Annahme einer Menge von PSOAs (= mögliche Welten)
- Jeder PSOA | Exhaustiv bestimmt durch die in ihm wahren Propositionen
- Jede Proposition | Zwei-Partitionierung der PSOAs:
  - ▶ Die, in denen sie wahr ist
  - ▶ Die, in denen sie falsch ist

# Mögliche Welten und Zeiten in Koordinaten

# Mögliche Welten und Zeiten in Koordinaten

- Für jede Proposition  $p_n$  | Welten, in der  $\llbracket p_n \rrbracket = 1$  |  $w \in W$

# Mögliche Welten und Zeiten in Koordinaten

- Für jede Proposition  $p_n$  | Welten, in der  $\llbracket p_n \rrbracket = 1$  |  $w \in W$
- Für jeden Zeitpunkt | Ein möglicher Zustand jeder Welt |  $i \in I$

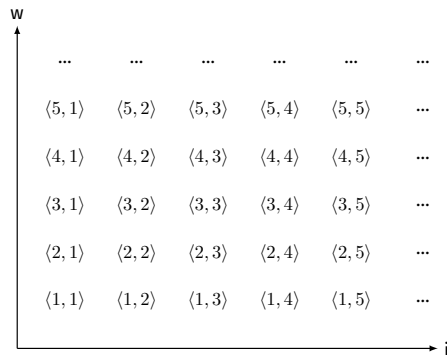
# Mögliche Welten und Zeiten in Koordinaten

- Für jede Proposition  $p_n$  | Welten, in der  $\llbracket p_n \rrbracket = 1$  |  $w \in W$
- Für jeden Zeitpunkt | Ein möglicher Zustand jeder Welt |  $i \in I$
- Also zeitlich geordnete Welt-Zeit-Koordinaten |  $\langle w, i \rangle \in W \times I$



# Mögliche Welten und Zeiten in Koordinaten

- Für jede Proposition  $p_n$  | Welten, in der  $\llbracket p_n \rrbracket = 1$  |  $w \in W$
- Für jeden Zeitpunkt | Ein möglicher Zustand jeder Welt |  $i \in I$
- Also zeitlich geordnete Welt-Zeit-Koordinaten |  $\langle w, i \rangle \in W \times I$





Propositionen sind die Intensionen von Formeln bzw. Sätzen!

Propositionen sind die Intensionen von Formeln bzw. Sätzen!

- Maximal alle Welten für jede Proposition als wahr, permutiert mit allen anderen  
 $w_1$ :  $p_1$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch  
 $w_{12}$ :  $p_1$  und  $p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch  
 $w_2$ :  $p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch usw.

Propositionen sind die Intensionen von Formeln bzw. Sätzen!

- Maximal alle Welten für jede Proposition als wahr, permutiert mit allen anderen  
 $w_1$ :  $p_1$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch  
 $w_{12}$ :  $p_1$  und  $p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch  
 $w_2$ :  $p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch usw.
- Exhaustive Charakterisierung eines Satzes | Alle Welten, in denen er wahr ist

Propositionen sind die Intensionen von Formeln bzw. Sätzen!

- Maximal alle Welten für jede Proposition als wahr, permutiert mit allen anderen  
 $w_1$ :  $p_1$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch  
 $w_{12}$ :  $p_1$  und  $p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch  
 $w_2$ :  $p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch usw.
- Exhaustive Charakterisierung eines Satzes | Alle Welten, in denen er wahr ist
- Intension eines Satzes | Alle Welten, in denen er wahr ist

Propositionen sind die Intensionen von Formeln bzw. Sätzen!

- Maximal alle Welten für jede Proposition als wahr, permutiert mit allen anderen  
 $w_1$ :  $p_1$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch  
 $w_{12}$ :  $p_1$  und  $p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch  
 $w_2$ :  $p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch usw.
- Exhaustive Charakterisierung eines Satzes | Alle Welten, in denen er wahr ist
- Intension eines Satzes | Alle Welten, in denen er wahr ist
- Proposition eines Satzes | Charakteristische Funktion der Menge der Welten, in denen er wahr ist zu den Zeitpunkten, zu denen er wahr ist

# Propositionen als Funktionen

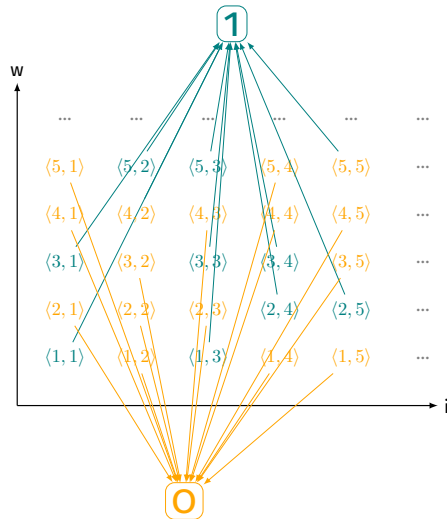


# Propositionen als Funktionen

Propositionen sind Funktionen  $\{0, 1\}^{W \times I}$

# Propositionen als Funktionen

Propositionen sind Funktionen  $\{0, 1\}^{W \times I}$



# Überlegen Sie sich das mal ...

Sind solche Propositionen als Intensionen wirklich unbefriedigend?

# Überlegen Sie sich das mal ...

Sind solche Propositionen als Intensionen wirklich unbefriedigend?

- Wenn wir den aktuellen SOA exhaustiv kennen, wissen wir für jeden Satz, ob er wahr ist.

# Überlegen Sie sich das mal ...

Sind solche Propositionen als Intensionen wirklich unbefriedigend?

- Wenn wir den aktuellen SOA exhaustiv kennen, wissen wir für jeden Satz, ob er wahr ist.
- Wenn wir wissen, welche Sätze wahr sind, kennen wir den aktuellen SOA exhaustiv.

# Überlegen Sie sich das mal ...

Sind solche Propositionen als Intensionen wirklich unbefriedigend?

- Wenn wir den aktuellen SOA exhaustiv kennen, wissen wir für jeden Satz, ob er wahr ist.
- Wenn wir wissen, welche Sätze wahr sind, kennen wir den aktuellen SOA exhaustiv.
- Sätze denotieren Wahrheitswerte, und die Wahrheit eines Satzes hängt nur vom aktuellen SOA ab.

# Überlegen Sie sich das mal ...

Sind solche Propositionen als Intensionen wirklich unbefriedigend?

- Wenn wir den aktuellen SOA exhaustiv kennen, wissen wir für jeden Satz, ob er wahr ist.
- Wenn wir wissen, welche Sätze wahr sind, kennen wir den aktuellen SOA exhaustiv.
- Sätze denotieren Wahrheitswerte, und die Wahrheit eines Satzes hängt nur vom aktuellen SOA ab.

Eine Funktion von möglichen Welten zu Wahrheitswerten charakterisiert daher die Semantik eines Satzes umfassend.

# Überlegen Sie sich das mal ...

Sind solche Propositionen als Intensionen wirklich unbefriedigend?

- Wenn wir den aktuellen SOA exhaustiv kennen, wissen wir für jeden Satz, ob er wahr ist.
- Wenn wir wissen, welche Sätze wahr sind, kennen wir den aktuellen SOA exhaustiv.
- Sätze denotieren Wahrheitswerte, und die Wahrheit eines Satzes hängt nur vom aktuellem SOA ab.

Eine Funktion von möglichen Welten zu Wahrheitswerten charakterisiert daher die Semantik eines Satzes umfassend.

- Was mehr gäbe es über einen Satz zu wissen?



# Überlegen Sie sich das mal ...

Sind solche Propositionen als Intensionen wirklich unbefriedigend?

- Wenn wir den aktuellen SOA exhaustiv kennen, wissen wir für jeden Satz, ob er wahr ist.
- Wenn wir wissen, welche Sätze wahr sind, kennen wir den aktuellen SOA exhaustiv.
- Sätze denotieren Wahrheitswerte, und die Wahrheit eines Satzes hängt nur vom aktuellen SOA ab.

Eine Funktion von möglichen Welten zu Wahrheitswerten charakterisiert daher die Semantik eines Satzes umfassend.

- Was mehr gäbe es über einen Satz zu wissen?
- Sätze mit derselben Intension  $\{0, 1\}^{W \times I}$  sind absolut gleichbedeutend.

## Mengen von Welten



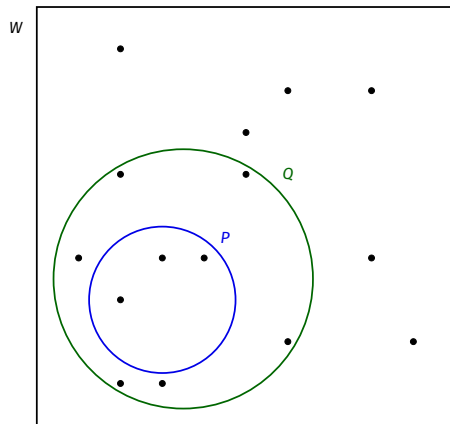
Satzintensionen | Charakteristische Funktionen – oder Mengen von  $w$  bzw.  $\langle w, i \rangle$

Satzintensionen | Charakteristische Funktionen – oder Mengen von  $w$  bzw.  $\langle w, i \rangle$

$p \rightarrow q$  entspricht  $P \subseteq Q$ :

Satzintensionen | Charakteristische Funktionen – oder Mengen von  $w$  bzw.  $\langle w, i \rangle$

$p \rightarrow q$  entspricht  $P \subseteq Q$ :

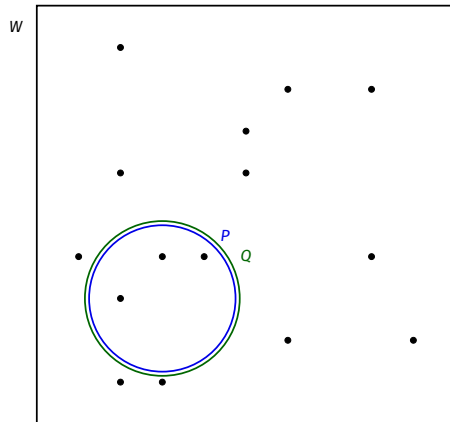




$p \leftrightarrow q$  entspricht  $P = Q$ :



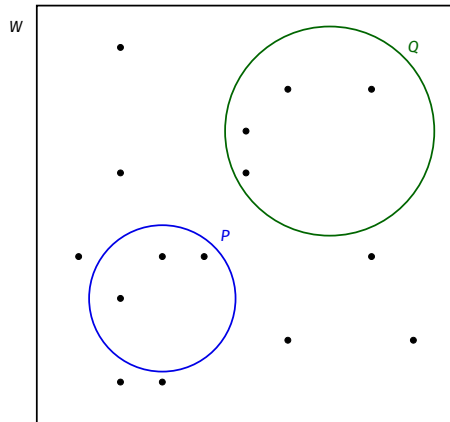
$p \leftrightarrow q$  entspricht  $P = Q$ :





Kontradiktion liegt vor bei  $P \cap Q = 0$ :

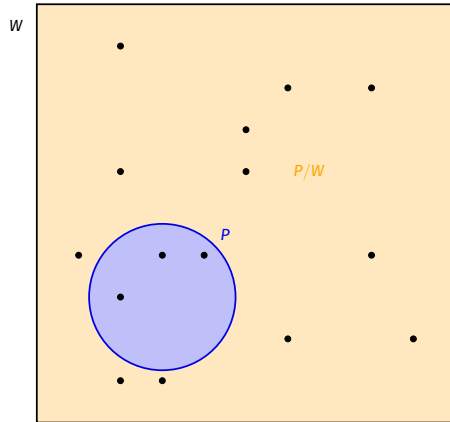
Kontradiktion liegt vor bei  $P \cap Q = 0$ :





$\neg p$  entspricht  $P/W$ :

$\neg p$  entspricht  $P/W$ :



# Modalität = Quantifikation über Welten



Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

- **Notwendigkeit**

Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

- **Notwendigkeit**
  - ▶ Es muss so sein, dass  $p$ .

Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

- **Notwendigkeit**

- ▶ Es muss so sein, dass  $p$ .
- ▶ In allen möglichen/denkaren Welten gilt  $p$ .

Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

- **Notwendigkeit**

- ▶ Es muss so sein, dass  $p$ .
- ▶ In allen möglichen/denkaren Welten gilt  $p$ .
- ▶  $\Box p \equiv \forall w \in W(\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

- **Notwendigkeit**

- ▶ Es muss so sein, dass  $p$ .
- ▶ In allen möglichen/denkaren Welten gilt  $p$ .
- ▶  $\Box p \equiv \forall w \in W (\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

- **Möglichkeit**

Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

- **Notwendigkeit**

- ▶ Es muss so sein, dass  $p$ .
- ▶ In allen möglichen/denkaren Welten gilt  $p$ .
- ▶  $\Box p \equiv \forall w \in W (\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

- **Möglichkeit**

- ▶ Es kann so sein, dass  $p$ .

Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

- **Notwendigkeit**

- ▶ Es muss so sein, dass  $p$ .
- ▶ In allen möglichen/denkaren Welten gilt  $p$ .
- ▶  $\Box p \equiv \forall w \in W(\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

- **Möglichkeit**

- ▶ Es kann so sein, dass  $p$ .
- ▶ In mindestens einer möglichen/denkaren Welt gilt  $p$ .



Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

- **Notwendigkeit**

- ▶ Es muss so sein, dass  $p$ .
- ▶ In allen möglichen/denkaren Welten gilt  $p$ .
- ▶  $\Box p \equiv \forall w \in W(\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

- **Möglichkeit**

- ▶ Es kann so sein, dass  $p$ .
- ▶ In mindestens einer möglichen/denkaren Welt gilt  $p$ .
- ▶  $\Diamond p \equiv \exists w \in W(\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

Was heißt **notwendigerweise** und **möglicherweise**?

- **Notwendigkeit**

- ▶ Es muss so sein, dass  $p$ .
- ▶ In allen möglichen/denkaren Welten gilt  $p$ .
- ▶  $\Box p \equiv \forall w \in W(\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

- **Möglichkeit**

- ▶ Es kann so sein, dass  $p$ .
- ▶ In mindestens einer möglichen/denkaren Welt gilt  $p$ .
- ▶  $\Diamond p \equiv \exists w \in W(\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

- Für alle Wffs  $\phi \in Wff$  sind  $\Box\phi$  und  $\Diamond\phi$  ebenfalls in Wff.

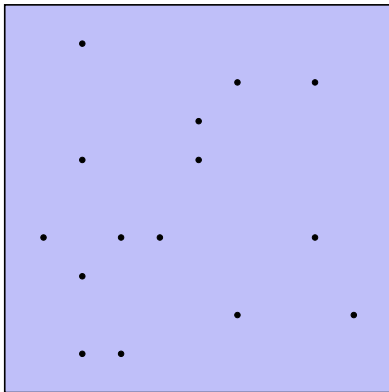
# Notwendigkeit als universelle Quantifikation

$\Box p$  entspricht  $P = W$ :

# Notwendigkeit als universelle Quantifikation

$\Box p$  entspricht  $P = W$ :

$W = P$

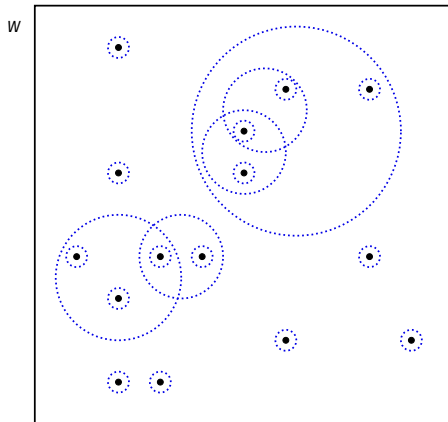


# Möglichkeit als existenzielle Quantifikation

$\Diamond p$  entspricht  $P \neq \emptyset$  in  $W$  (nur beispielhaft):

# Möglichkeit als existenzielle Quantifikation

$\Diamond p$  entspricht  $P \neq \emptyset$  in  $W$  (nur beispielhaft):





## Intensionale Modelltheorie



Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$
  - ▶  $U$  | Die Menge der Individuen/Objekte



Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$
  - ▶  $U$  | Die Menge der Individuen/Objekte
  - ▶  $V$  | Eine Auswertungsfunktion für Konstanten jeder Ordnung

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$
  - ▶  $U$  | Die Menge der Individuen/Objekte
  - ▶  $V$  | Eine Auswertungsfunktion für Konstanten jeder Ordnung
- Ein Ausdruck  $\alpha$  wird jetzt evaluiert relativ zu

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$
  - ▶  $U$  | Die Menge der Individuen/Objekte
  - ▶  $V$  | Eine Auswertungsfunktion für Konstanten jeder Ordnung
- Ein Ausdruck  $\alpha$  wird jetzt evaluiert relativ zu
  - ▶ Dem Modell  $\mathcal{M}$

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$
  - ▶  $U$  | Die Menge der Individuen/Objekte
  - ▶  $V$  | Eine Auswertungsfunktion für Konstanten jeder Ordnung
- Ein Ausdruck  $\alpha$  wird jetzt evaluiert relativ zu
  - ▶ Dem Modell  $\mathcal{M}$
  - ▶ Einer konkreten Welt  $w$

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$
  - ▶  $U$  | Die Menge der Individuen/Objekte
  - ▶  $V$  | Eine Auswertungsfunktion für Konstanten jeder Ordnung
- Ein Ausdruck  $\alpha$  wird jetzt evaluiert relativ zu
  - ▶ Dem Modell  $\mathcal{M}$
  - ▶ Einer konkreten Welt  $w$
  - ▶ Einem konkreten Zeitpunkt  $i$

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$
  - ▶  $U$  | Die Menge der Individuen/Objekte
  - ▶  $V$  | Eine Auswertungsfunktion für Konstanten jeder Ordnung
- Ein Ausdruck  $\alpha$  wird jetzt evaluiert relativ zu
  - ▶ Dem Modell  $\mathcal{M}$
  - ▶ Einer konkreten Welt  $w$
  - ▶ Einem konkreten Zeitpunkt  $i$
  - ▶ Der Belegungsfunktion  $g$

Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$
  - ▶  $U$  | Die Menge der Individuen/Objekte
  - ▶  $V$  | Eine Auswertungsfunktion für Konstanten jeder Ordnung
- Ein Ausdruck  $\alpha$  wird jetzt evaluiert relativ zu
  - ▶ Dem Modell  $\mathcal{M}$
  - ▶ Einer konkreten Welt  $w$
  - ▶ Einem konkreten Zeitpunkt  $i$
  - ▶ Der Belegungsfunktion  $g$
  - ▶  $\llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$

# Und Individuen?



# Und Individuen?

Individuenkonzepte als Funktionen von Welten zu Individuen

## Individuenkonzepte als Funktionen von Welten zu Individuen

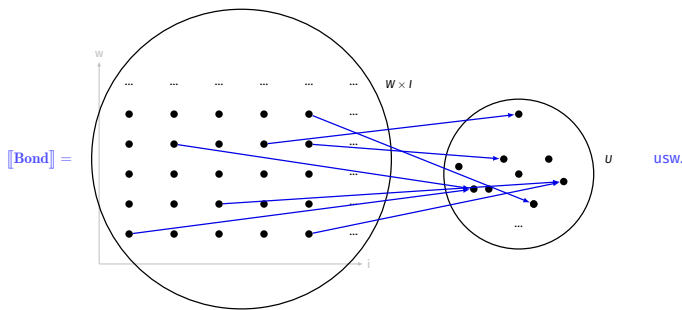
- *der Präsident der USA, der Papst, Bond*  
(im Sinn von *der Schauspieler, der gerade Bond spielt*)

## Individuenkonzepte als Funktionen von Welten zu Individuen

- *der Präsident der USA, der Papst, Bond*  
(im Sinn von *der Schauspieler, der gerade Bond spielt*)
- Für  $\beta \in \text{Cons}_{ind}$  ist  $V(\beta)$  eine Funktion aus  $U^{W \times I}$ .  
Eine Funktion, die für jedes Welt-Zeit-Paar sagt, wer Präsident, Papst, Bond usw. ist.

## Individuenkonzepte als Funktionen von Welten zu Individuen

- *der Präsident der USA, der Papst, Bond*  
(im Sinn von *der Schauspieler, der gerade Bond spielt*)
- Für  $\beta \in \text{Cons}_{ind}$  ist  $V(\beta)$  eine Funktion aus  $U^{W \times I}$ .  
Eine Funktion, die für jedes Welt-Zeit-Paar sagt, wer Präsident, Papst, Bond usw. ist.



# Und Prädikate?

# Und Prädikate?

Eigenschaftskonzepte als Funktionen von Welten zu Mengen von Tupeln von Individuen

Eigenschaftskonzepte als Funktionen von Welten zu Mengen von Tupeln von Individuen

- Konstanten wie *geht*, *kauft*, *gibt* usw. denotieren unterschiedliche Mengen (bzw. CFs) zu unterschiedlichen  $\langle w, i \rangle$ -Koordinaten.

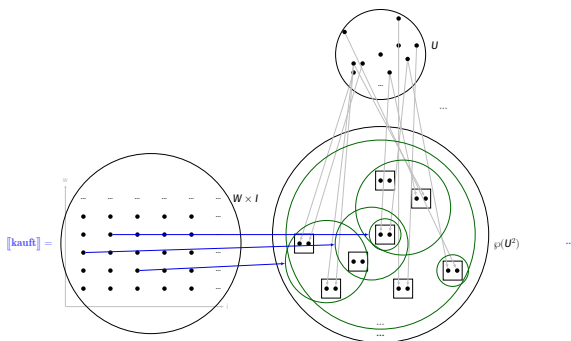
## Eigenschaftskonzepte als Funktionen von Welten zu Mengen von Tupeln von Individuen

- Konstanten wie *geht*, *kauft*, *gibt* usw. denotieren unterschiedliche Mengen (bzw. CFs) zu unterschiedlichen  $\langle w, i \rangle$ -Koordinaten.
- Für  $\beta \in \text{Cons}_{pred_n}$  ist  $V(\beta)$  eine Funktion aus  $(\wp U^n)^{W \times I}$ .  
Eine Funktion, die für jedes Welt-Zeit-Paar sagt, wer geht, wer was kauft, wer wem was gibt usw.  
Erinnerung |  $U^n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$



## Eigenschaftskonzepte als Funktionen von Welten zu Mengen von Tupeln von Individuen

- Konstanten wie *geht*, *kauft*, *gibt* usw. denotieren unterschiedliche Mengen (bzw. CFs) zu unterschiedlichen  $\langle w, i \rangle$ -Koordinaten.
- Für  $\beta \in \text{Cons}_{pred_n}$  ist  $V(\beta)$  eine Funktion aus  $(\wp U^n)^{W \times I}$ .  
Eine Funktion, die für jedes Welt-Zeit-Paar sagt, wer geht, wer was kauft, wer wem was gibt usw.  
Erinnerung |  $U^n = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$





Diese umständlichen T-Sätze!

Diese umständlichen T-Sätze!

- Wenn  $\beta$  eine Wff der Form  $\delta(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ist

Diese umständlichen T-Sätze!

- Wenn  $\beta$  eine Wff der Form  $\delta(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \beta \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw

Diese umständlichen T-Sätze!

- Wenn  $\beta$  eine Wff der Form  $\delta(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \beta \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶  $\langle \llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}, \llbracket t_2 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} \rangle \in \llbracket \delta \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$

Diese umständlichen T-Sätze!

- Wenn  $\beta$  eine Wff der Form  $\delta(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \beta \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶  $\langle \llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}, \llbracket t_2 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} \rangle \in \llbracket \delta \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$
  - ▶ Mit  $\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = V(\langle w, i \rangle)(t_1)$

Diese umständlichen T-Sätze!

- Wenn  $\beta$  eine Wff der Form  $\delta(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \beta \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶  $\langle \llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}, \llbracket t_2 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} \rangle \in \llbracket \delta \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$
  - ▶ Mit  $\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = V(\langle w, i \rangle)(t_1)$

In einer typentheoretischen Sprache wie  $L_{Type}$  wäre Funktionsapplikation möglich.





Hier ändert sich eigentlich nichts ...

Hier ändert sich eigentlich nichts ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\forall x\phi$  ist

Hier ändert sich eigentlich nichts ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\forall x \phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw

Hier ändert sich eigentlich nichts ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\forall x\phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M},w,i,g} = 1$  gdw
  - ▶ Für alle  $u \in U$   $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M},w,i,g[u/x]} = 1$

Hier ändert sich eigentlich nichts ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\forall x \phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶ Für alle  $u \in U$   $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g[u/x]} = 1$
- Und Paralleles für den Existenzquantor



Die modalen Funktoren quantifizieren wie gesagt über Welten ...



Die modalen Funktoren quantifizieren wie gesagt über Welten ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\Box x \phi$  ist

Die modalen Funktoren quantifizieren wie gesagt über Welten ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\Box x\phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw

Die modalen Funktoren quantifizieren wie gesagt über Welten ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\Box x \phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶ Für alle  $w' \in W$

Die modalen Funktoren quantifizieren wie gesagt über Welten ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\Box x \phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶ Für alle  $w' \in W$
  - ▶ Und alle  $i' \in I$

Die modalen Funktoren quantifizieren wie gesagt über Welten ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\Box x\phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶ Für alle  $w' \in W$
  - ▶ Und alle  $i' \in I$
  - ▶  $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}, w', i', g} = 1$

Die modalen Funktoren quantifizieren wie gesagt über Welten ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\Box x\phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶ Für alle  $w' \in W$
  - ▶ Und alle  $i' \in I$
  - ▶  $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}, w', i', g} = 1$
- Und Paralleles für den  $\Diamond$ -Operator mit Existenzquantifikation

# Eine Ähnlichkeit zwischen $\forall$ und $\Box$

# Eine Ähnlichkeit zwischen $\forall$ und $\Box$

Modale Möglichkeit distribuiert wie Allquantifikation ...



Modale Möglichkeit distribuiert wie Allquantifikation ...

- Weil  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \vdash [\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)]$   
aber nicht umgekehrt

Modale Möglichkeit distribuiert wie Allquantifikation ...

- Weil  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \vdash [\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)]$   
aber nicht umgekehrt
- Gilt auch  $\Box [\psi \rightarrow \phi] \vdash [\Box \psi \rightarrow \Box \phi]$   
aber nicht umgekehrt

# Einige Implikationen und Äquivalenzen

# Einige Implikationen und Äquivalenzen

Beweistheorie für Modallogik ist nicht so richtig trivial.

Hier nur einige interessante Implikationen und Äquivalenzen ...

# Einige Implikationen und Äquivalenzen

Beweistheorie für Modallogik ist nicht so richtig trivial.

Hier nur einige interessante Implikationen und Äquivalenzen ...

	Existenzquantor	Allquantor
<b>Notwendigkeit</b>	$\exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$	$\forall x \Box P(x) \leftrightarrow \Box \forall x P(x)$
<b>Möglichkeit</b>	$\exists x \Diamond P(x) \leftrightarrow \Diamond \exists x P(x)$	$\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$

# Einige Implikationen und Äquivalenzen

Beweistheorie für Modallogik ist nicht so richtig trivial.

Hier nur einige interessante Implikationen und Äquivalenzen ...

	Existenzquantor	Allquantor
<b>Notwendigkeit</b>	$\exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$	$\forall x \Box P(x) \leftrightarrow \Box \forall x P(x)$
<b>Möglichkeit</b>	$\exists x \Diamond P(x) \leftrightarrow \Diamond \exists x P(x)$	$\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$

- Wenn es ein  $x$  gibt, dass notwendigerweise  $P$  ist, dann ist es notwendigerweise der Fall, dass es ein  $x$  gibt, dass  $P$  ist.

# Einige Implikationen und Äquivalenzen

Beweistheorie für Modallogik ist nicht so richtig trivial.

Hier nur einige interessante Implikationen und Äquivalenzen ...

	Existenzquantor	Allquantor
<b>Notwendigkeit</b>	$\exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$	$\forall x \Box P(x) \leftrightarrow \Box \forall x P(x)$
<b>Möglichkeit</b>	$\exists x \Diamond P(x) \leftrightarrow \Diamond \exists x P(x)$	$\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$

- Wenn es ein  $x$  gibt, dass notwendigerweise  $P$  ist, dann ist es notwendigerweise der Fall, dass es ein  $x$  gibt, dass  $P$  ist.
- Wenn es ein  $x$  gibt, dass möglicherweise  $P$  ist, dann ist es möglicherweise der Fall, dass es ein  $x$  gibt, dass  $P$  ist. Und umgekehrt!

# Einige Implikationen und Äquivalenzen

Beweistheorie für Modallogik ist nicht so richtig trivial.

Hier nur einige interessante Implikationen und Äquivalenzen ...

	Existenzquantor	Allquantor
<b>Notwendigkeit</b>	$\exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$	$\forall x \Box P(x) \leftrightarrow \Box \forall x P(x)$
<b>Möglichkeit</b>	$\exists x \Diamond P(x) \leftrightarrow \Diamond \exists x P(x)$	$\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$

- Wenn es ein  $x$  gibt, dass notwendigerweise  $P$  ist, dann ist es notwendigerweise der Fall, dass es ein  $x$  gibt, dass  $P$  ist.
- Wenn es ein  $x$  gibt, dass möglicherweise  $P$  ist, dann ist es möglicherweise der Fall, dass es ein  $x$  gibt, dass  $P$  ist. Und umgekehrt!
- **Carnap-Barcan-Formel** Wenn alle  $x$  notwendigerweise  $P$  ist, dann ist es notwendigerweise der Fall, dass alle  $x$   $P$  sind. Und umgekehrt!



# Einige Implikationen und Äquivalenzen

Beweistheorie für Modallogik ist nicht so richtig trivial.

Hier nur einige interessante Implikationen und Äquivalenzen ...

	Existenzquantor	Allquantor
<b>Notwendigkeit</b>	$\exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$	$\forall x \Box P(x) \leftrightarrow \Box \forall x P(x)$
<b>Möglichkeit</b>	$\exists x \Diamond P(x) \leftrightarrow \Diamond \exists x P(x)$	$\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$

- Wenn es ein  $x$  gibt, dass notwendigerweise  $P$  ist, dann ist es notwendigerweise der Fall, dass es ein  $x$  gibt, dass  $P$  ist.
- Wenn es ein  $x$  gibt, dass möglicherweise  $P$  ist, dann ist es möglicherweise der Fall, dass es ein  $x$  gibt, dass  $P$  ist. Und umgekehrt!
- **Carnap-Barcan-Formel** Wenn alle  $x$  notwendigerweise  $P$  ist, dann ist es notwendigerweise der Fall, dass alle  $x$   $P$  sind. Und umgekehrt!
- Wenn alle  $x$  möglicherweise  $P$  sind, dann ist es möglicherweise der Fall, dass alle  $x$   $P$  sind.

t add

- Chierchia, Gennaro & Sally McConnell-Ginet. 2000. *Meaning and grammar: An introduction to semantics*. 2. Aufl. Cambridge, MA: MIT Press.
- Dowty, David R., Robert E. Wall & Stanley Peters. 1981. *Introduction to Montague semantics*. Dordrecht: Kluwer.

## Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer  
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft  
Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Fürstengraben 30  
07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>  
[roland.schaefer@uni-jena.de](mailto:roland.schaefer@uni-jena.de)

## Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.