

# Formale Semantik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Semantik>

## 1 Inferenz und Bedeutung

- Organisation
- Schlussfolgern
- Grundfragen der Semantik
- Programmatisches Schlussbild

## 2 Referentielle Semantik

- Linguistische Theorien
- Referentielle Semantik basal
- Semantische Eigenschaften von Sätzen
- Referenz von Sätzen
- Reden in Fragmenten

## 3 Mengen und Funktionen

- Mengen und Funktionen
- Funktionen und Relationen
- Mehr über Relationen und Mengen

## 4 Aussagenlogik

- Was ist Logik?
- Aussagenlogik
  - Rekursive Syntax
  - Interpretation von Wffs
  - Gesetze der Aussagenlogik
  - Schlussregeln
  - Beweise in der Aussagenlogik
  - Aufgaben

## 5 Prädikatenlogik

- Warum Prädikatenlogik?
- Syntax und Semantik

- Äquivalenzen
- Schlussregeln
- Aufgaben

## 6 Quantifikation und Modelltheorie

- Von Prädikatenlogik zu natürlicher Sprache
- Modelltheorie
- Quantifikation in natürlicher Sprache
- Aufgaben

## 7 Getypte höherstufige $\lambda$ -Sprachen

- Einfachere Semantik
- Getypte Sprachen
- $\lambda$ -Sprachen
- Ausblick auf Quantifikation bei Montague
- Aufgaben

## 8 Intensionalität

- Wozu Intensionalität?
- Formale Modellierung von Intensionen
- Mengen von Welten
- Intensionale Modelltheorie

## 9 Tempus und Modalität

- Tense
- Modality
- Embedding

## 10 Montague

- New types and up/down
- The IL of PTQ
- Examples

## Inferenz und Bedeutung

Die folgenden drei Bücher sind die Grundlage des Seminars:

- Chierchia & McConnell-Ginet (2000) | GB-orientiert, nur die Kapitel von Chierchia
- Dowty u. a. (1981) | Tolle Montague-Einführung von seinen Schülern
- Partee u. a. (1990) | Wichtige Grundlagen (Algebra, Logik), viele Druckfehler

Die auf den Folien angegebenen Teile dieser Bücher sollten für die Prüfungen durchgearbeitet werden. Das heißt natürlich nicht, dass Sie alles auswendig lernen sollen. Die Folien geben die Hinweise, was aus den Texten wichtig ist, sind aber nicht selbsterklärend.

- [Bucher \(1998\)](#) | Lesbare Logik-Einführung auf Deutsch
- [Carpenter \(1997\)](#) | Prima Hardcore-Einführung mit Kategorialgrammatik
- [Gutzmann \(2019\)](#) | Aktuelle Einführung auf Deutsch

# Seminarverlauf

- 1 [9.10.2023 Diskussion: Wie schlussfolgern wir? Wie hängen unsere Schlussfolgerungen mit Semantik zusammen?](#)
- 2 [26.10.2023 Referentielle Semantik \(Folien 2\)](#)
- 3 [02.11.2023 Referentielle Semantik \(Folien 2\) II](#)
- 4 [09.11.2023 Mengen- und Funktionstheorie \(Folien 3\)](#)
- 16.11.2023 Ausfall wegen Dienstreise
- 5 [23.11.2023 Aussagenlogik \(Folien 4\)](#)
- 6 [30.11.2023 Prädikatenlogik \(Folien 5\)](#)
- 7 [07.12.2023 Quantifikation und modelltheoretische Semantik \(Folien 6\)](#)
- 8 [14.12.2023 Getypte  \$\lambda\$ -Sprachen höherer Ordnung \(Folien 7\)](#)
- 9 [21.12.2023 Intensionalität \(Folien 8\)](#)
- 28.12.2023 Weihnachtsferien
- 04.01.2024 Weihnachtsferien
- 10 [11.01.2024 Tempus und Modalität \(Folien 9\)](#)
- 11 [18.01.2024 Montagues intensionale Logik \(Folien 10\)](#)
- 12 [25.01.2024 Lektüre](#)
- 13 [01.02.2024 Lektüre](#)
- 14 [08.02.2024 Lektüre](#)

## Hinweis in eigener Sache

- Vermutlich ist der Plan bis Weihnachten zu ambitioniert.
- Die Wochen 4 und 5 könnten länger dauern, Woche 7 ebenfalls.
- Dann ändert sich der Plan noch, eventuell fliegen Artikel am Ende raus.

## Hinweis zum Lernen

- Wir haben es hier mit anspruchsvollem Material zu tun.
- Nur so ergibt meiner Meinung nach formale Semantik Sinn, und irgendwelche weichgespülten Einführungen sind grob fahrlässig.
- Daher gilt aber: Wenn Sie nicht von Anfang an lernen, wird es sehr wahrscheinlich gegen Ende sehr schwierig!

Einheitlicher Inhalt für alle Modul- und Examensprüfungen:

- 1** eine oder zwei inhaltliche Fragen zu den Themen der *Sprachphilosophie*

Die Liste der relevanten Texte wird rechtzeitig vor den Prüfungen eingeschränkt.

- 2** eine Logik-Aufgabe (natürliche Deduktion) – außer in mündlichen Prüfungen
- 3** eine Semantik-Aufgabe (kompositionale Modellierung eines Satzes)

Hausarbeiten nach Absprache.

„Wozu brauchen wir das denn?“

- Nicht zu leugnende logische Eigenschaften von Sprache
- Kleiner Einblick in deren technisch sehr aufwendige Beschreibung
- Wichtige Lernziele
  - ▶ Realistische Einschätzung eigener semantischer Intuitionen
  - ▶ Erkennen der Grenzen der Möglichkeiten von Logik in der Analyse von Sprache
  - ▶ Für zukünftige Forschende | Grundausbildung in formaler Semantik unabdinglich

# Was folgt logisch?

Fallen Ihnen logische Schlussfolgerungen aus diesen Aussagen ein?

- Das Semester hat begonnen.
- Olha hat einen sehr leichten ukrainischen Akzent.
- Entweder regnet es gerade, oder die Wasserleitung ist gebrochen.
- Es regnet, oder die Wasserleitung ist gebrochen. Es regnet seit zwei Stunden.
- Falls der Dänemark-Urlaub ausfällt, fahre ich eine Woche zu meinen Eltern.  
Der Dänemark-Urlaub fällt aus.
- Wenn es regnet, wird die Straße nass. Die Straße ist nicht nass.
- Es ist nicht der Fall, dass der WANG PC keine Festplatten unterstützt hat.

# Folgt B aus A?

- A: Ein blauer Renault fährt auf der A9 Richtung Berlin.  
B: Ein Renault fährt auf der A9 Richtung Berlin.
- A: Ich finde Geranien abstoßend.  
B: Ich habe schon mindestens einmal mindestens eine Geranie gesehen.
- A: Der WANG PC ist nicht IBM-kompatibel.  
B: Es existiert mindestens ein WANG PC.
- A: Alle Menschen sind intelligent.  
B: Horst Lichter ist intelligent.
- A: Krister hat mir seinen Volvo Amazon verkauft.  
B: Irgendjemand hat seinen Volvo Amazon verkauft.

# Folgt B aus A?

- A: Entweder regnet es, oder die Wasserleitung im Bad ist gebrochen, und die Wasserleitung im Bad ist gebrochen.  
B: Es regnet nicht.
- A: Michelle hat uns den Dobermann für eine Woche zur Pflege überlassen.  
B: Der Dobermann wurde uns für eine Woche zur Pflege überlassen.
- A: Jan glaubt, dass seine Sendung nicht abgesetzt wird.  
B: Jan glaubt nicht, dass seine Sendung abgesetzt wird.
- A: Falls Dr. Kohl jetzt wieder Kanzler der BRD ist, gibt es vermutlich jeden Tag Pfälzer Saumagen zum Abendessen.  
B: Es gibt einen Kanzler der BRD.
- A: Ein Mensch betritt den Raum.  
B: Es gibt mindestens einen Menschen.
- A: Ein Mensch, der die Bibel gelesen hat, begeht im Durchschnitt nicht weniger Straftaten als andere.  
B: Es gibt mindestens einen Menschen.
- A: *We don't need no education.*  
B: Yes, you do! You just used a double negative.

# Folgt B aus A?

- A: Herr Keydana fährt einen Golf. Alles, was einen Golf fährt, ist entweder menschlich oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt.  
**B: Es gibt mindestens einen Menschen.**
- A: Es gibt an der Uni Göttingen mindestens einen Dozenten, der einen Golf fährt. Götz ist Dozent an der Uni Göttingen und Radsportler. Sein Auto ist gerade in der Werkstatt. Jeder Dozent an der Uni Göttingen fährt entweder einen Golf oder ist kein Radsportler, falls sein Auto in der Werkstatt ist.  
**B: Götz fährt einen Golf.**

Versuchen Sie, eine Definition des Begriffs **logische Schlussfolgerung** zu geben.

Wann folgt eine Aussage aus einer oder mehreren anderen Aussagen?

Entspricht oft der „Alltagslogik“. Suche nach **spontan plausiblen Ursachen**.

- A: Der Verdächtige hat kein Alibi und ein Motiv.  
B: Der Verdächtige ist der Täter.
- Ich habe so einen komischen Husten, und die Infektionszahlen steigen wieder.  
B: Oh mein Gott, ich habe Covid!
- A: Es soll eine Impfpflicht eingeführt werden.  
B: George Soros und Bill Gates wollen uns Mikrochips einpflanzen.
- A: In Mikes Büro ist um 22 Uhr noch Licht.  
B: Mike bereitet seine Lehrveranstaltung für morgen vor.

Hochgradig gefährlich, weil nicht formalisierbar und sehr bequem.  
Gleichzeitig im Alltag unentbehrlich.

Die meisten „logischen“ Schlussfolgerungen von Vulkanieren sind im besten Fall Abduktionen.

Suche nach **allgemeingültigen Aussagen** aus Partikularereignissen.

- A<sub>1</sub>: Im Zentrum der Galaxis befindet sich ein supermassives schwarzes Loch.  
A<sub>2</sub>: Die Galaxis ist eine Galaxie.  
B: Im Zentrum jeder Galaxie befindet sich ein supermassives schwarzes Loch.
- A: Im Zentrum von 1200 Galaxien befindet sich ein supermassives schwarzes Loch.  
B: Im Zentrum jeder Galaxie befindet sich ein supermassives schwarzes Loch.
- A: Aus dieser Einmündung kam noch nie ein Auto von rechts.  
B: Aus dieser Einmündung wird in drei Sekunden kein Auto von rechts kommen.

„Besser“ als Abduktion, vor allem je mehr Partikularereignisse zugrundeliegen.  
Kann trotzdem gewaltig daneben gehen.

Spielt in der Wissenschaft eine große Rolle, aber ist fundamental nicht ausreichend.

Prämissen (egal, wo diese herkommen) und formale **Schlussregeln**

- A<sub>1</sub>: Götz ist ein Dozent an der Uni Göttingen.  
A<sub>2</sub>: Jeder Dozent an der Uni Göttingen ist ein Mensch.  
B: Götz ist ein Mensch.
- A<sub>1</sub>: Entweder (wurde die Welt von einem Gebrauchtwagenhändler erschaffen) oder (Rewe verkauft keine Weetabix).  
A<sub>2</sub>: Rewe verkauft keine Weetabix.  
B: Die Welt wurde von einem Gebrauchtwagenhändler erschaffen.

Nur Deduktion ist Logik. Nur darum geht es in diesem Semester.

# Ganz trivial ist das nicht ...

A: Herr Keydana fährt einen Golf. Alles, was einen Golf fährt, ist entweder menschlich oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt.

B: Es gibt mindestens einen Menschen.

Hier ist der Beweis (vgl. Woche 5):

1	$G(k)$	
2	$(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x)]$	
3	$\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$	$\vdash (\exists z)M(z)$
4	$(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$	3, QN
5	$(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$	4, DeM
6	$(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$	5, Komm., Impl.
7	$G(k) \rightarrow \neg A(k)$	6, $\neg\forall(1)$
8	$\neg A(k)$	1, 7, MP
9	$G(k) \rightarrow M(k) \vee A(k)$	2, $\neg\forall(1)$
10	$M(k) \vee A(k)$	1, 9, MP
11	$M(k)$	8, 10, DS
12	$(\exists z)M(z)$	11, + $\exists$ ■

Die Bedeutung eines Ausdrucks ist ...

- ... die Idee, die er vermittelt
- ... die mentale Repräsentation, die er erzeugt
- ... was mit ihm bewirkt werden soll
- ... die Menge der Dinge, auf die er verweist

Semantik untersucht ...

- ... intellektuelle Konzepte, die überwiegend introspektiv erforschbar sind
- ... die kognitive Verarbeitung und Repräsentation von Bedeutung
- ... die Funktion von Ausdrücken in Kommunikationssituationen
- ... Beziehungen zwischen Ausdrücken und Objekten und  
die Art der Kombination von Ausdrücken zu komplexeren Ausdrücken

Es dreht sich alles um die Beziehung von Sprache zur Welt!

- Auf welche Klassen von Objekten referieren welche Klassen von Ausdrücken?
- Wann sind Sätze wahr? (auch als Phänomen der Referenz!)
- Wie verhält sich die logische Struktur von Sätzen zu ihrem Informationsgehalt?
- Wie können Sätze eindeutig interpretiert werden,  
auch wenn sie mehrere Lesarten haben?

- Was ist die „Bedeutung“ von Wörtern und Sätzen jenseits ihrer Referenz?
- Wie verarbeitet das Gehirn Bedeutungen?
- Wie sind Diskurse strukturiert?

Sind Sie nun kognitiver Linguist,  
der sich für (probabilistische) **mentale Kategorien** interessiert,  
oder glauben Sie daran,  
dass Sprache **unabhängig vom Menschen logische Eigenschaften** hat?

Beides gleichzeitig geht ja nun wirklich nicht!

## Kognition

- basierend auf Ähnlichkeiten von wahrgenommenen Objekten
- optimiert für schnelle Mustererkennung **in allen Bereichen**
- unscharfe Klassenbildung und Segmentierung der Ontologie
- parallele Verarbeitung (meistens mehrere Areale beteiligt)

## Symbolische Systeme

- diskrete Symbole, wohldefinierte Semantik
- scharf getrennte Klassen von Symbolen
- eindeutige Referenz auf ontologische Objekte
- intrinsische (nicht emergente) logische Eigenschaften  
(Axiomatik, Schlussregeln usw.)
- sequentielle Verarbeitung/statische Deklaration  
(z. B. Python oder PROLOG; parallele Verarbeitung immer linearisierbar)

Klassisches kognitives Modell: **Prototypentheorie** (Rosch 1973)

Diskretes Symbol: **Vogel** ... und demgegenüber ...

Graduelles kognitives Konzept basierend auf Ähnlichkeiten/Prototypen:



&gt;



&gt;



Bildquelle: Wikipedia

Die ewige Schwachsinnfrage: Sind Kiwis und Pinguine nun **Vögel** oder nicht?

Nur getoppt von: Erdbeeren sind gar keine Beeren, sondern Sammelnussfrüchte.

- Kognition | **intrinsisch nicht diskret**, sondern ähnlichkeitsbasiert und **parallel**
    - ▶ Netzwerkarchitektur
  - Symbole = Phone, Morphe, Wörter, Phrasen, ... | **intrinsisch** diskret und **linear**
    - ▶ **akustisches** Medium | Sagen Sie mal zwei Wörter gleichzeitig!
    - ▶ **schriftliches** Medium | Lesen Sie mal *Zettels Traum* von Arno Schmidt  
(inkl. der Versuche, mehrere Wörter „in einem“ zu schreiben)
- Da wir nur akustisch oder über schriftliche Artefakte kommunizieren können,  
**muss das Sprachsystem symbolisch sein.**
- Da es architekturbedingt nur nicht-symbolisch verarbeiten kann,  
**muss das Gehirn symbolische Systeme so gut wie nötig und möglich emulieren.**

Auch nicht-verschriftete Sprache muss medial bedingt logische Eigenschaften haben.  
Kulturell bilden sich stärker symbolische Modi aus, vor allem durch Schrift.

Norm, Selbst- und Fremdkorrektur, Textplanung, intensionale Definitionen, Explizierung, ...

Warum wird das vor allem im Kontext von Schule, Fremdsprache und Bildungssprache diskutiert?

(= spontane Sprachproduktion)

weniger symbolische Eigenschaften



mehr symbolische Eigenschaften

(= reflektierte Sprachproduktion)

informelle Alltagssprache

formelle Alltagssprache

Bildungssprache

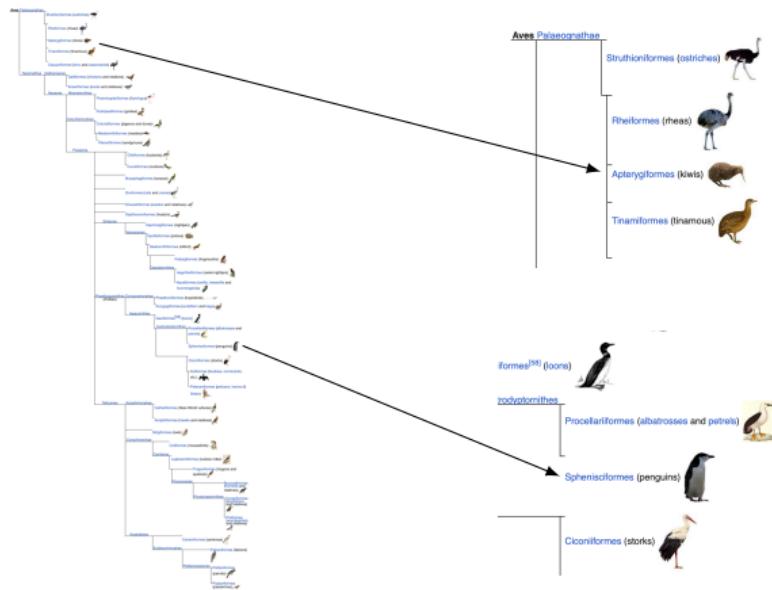
Wissenschaftssprache

Orthosprache

formales System

# Und was ist denn nun mit Kiwis und Pinguinen?

Unser Verständnis der Welt führt zu genaueren und diskreten Kategorisierungen, wo dies nötig ist. Die Sprache folgt dem erforderlichen Maß an Genauigkeit/Diskretheit.



Bildquelle: Wikipedia

- Viele Missverständnisse in der Linguistik basieren darauf, dass das eben Gesagte nicht dem allgemeinen Forschungsprogramm zugrundeliegt.
- Die Doppelnatur von Sprache führt dazu, dass sowohl rein formale Linguistik und sogenannte kognitive Linguistik scheinbar erfolgreich sind.
- Im Prinzip läuft aber die Linguistik aktuell weitgehend ins Leere.
- Modelltheoretische Semantik beschreibt einen essentiellen Teil von Sprache!
- Sie modelliert logische Eigenschaften und den Bezug zur realen objektiven Welt.
- Ganz am Rande zu generativer AI:
  - ▶ Erfolg | Sie modelliert völlig natürliche Grammatik.
  - ▶ Also alle traditionellen Grammatiker inkl. Chomsky: Setzen!
  - ▶ Gebrauchsbasiert ist generative AI sowieso. Also Stefan Gries: Setzen!
  - ▶ Misserfolg | Sie weiß nichts über die Welt im eigentlichen Sinn von Wissen.
  - ▶ Wissen wird über die Verarbeitung eines immensen sprachlichen Inputs vorgetäuscht.
  - ▶ Es handelt sich um eine Art fancy Papagei.

## Referentielle Semantik

Wie kommt man von der Syntax zur Interpretation von Sätzen?

Was **bezeichnen** sprachliche Einheiten?

Warum bezeichnen Sätze **Wahrheitswerte**?

Welche logischen Beziehungen bestehen zwischen Sätzen?

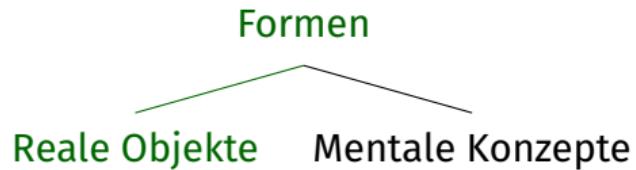
Implikation vs. Präsposition

Wie wird **kleinschrittig natürlichsprachliche Semantik modelliert**?

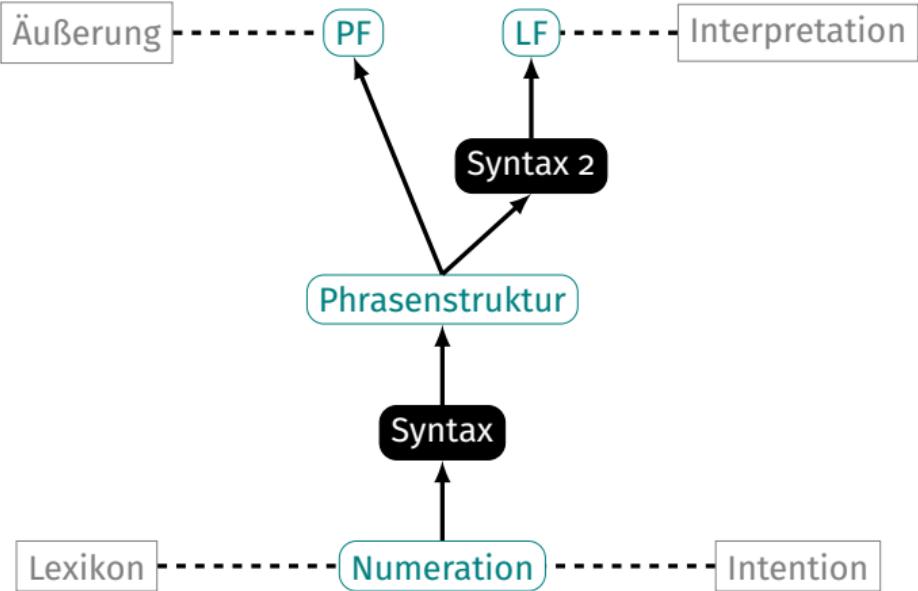
Das Wesentliche von heute in Chierchia & McConnell-Ginet (2000: Kapitel 2)

# Ein neues semiotisches Dreieck

Im Sinn der letzten Woche interessiert uns nur die linke Seite.



# „Semantik“ im generativen T-Modell



## Im klassischen generativen Modell:

(In minimalistischen Modellen herrscht – Chomsky muss es mögen! – sowieso Anarchie.)

- keine echte Interpretation auf LF
- Bewegung **nachdem** der Satz geäußert wurde
- Herstellung einer logisch interpretierbaren **Form** auf LF
- Grund | Syntax kann nicht alle Interpretationen abbilden

**Klassiker Quantorenskopus**

*Everybody loves somebody.*

- A Für alle Personen  $y$  gilt, dass es eine Person  $x$  gibt, für die gilt:  $y$  liebt  $x$  |  $(\forall y)(\exists x)L(y, x)$
- B Es gibt eine Person  $x$ , sodass für alle Personen  $y$  gilt:  $y$  liebt  $x$  |  $(\exists x)(\forall y)L(y, x)$

Sprache ist Logik ist Sprache ...

- A Entweder ist die Übersetzung in eine LF trivial und äquivalent zur PF/Syntax, oder sie fügt etwas hinzu, das der Sprache an sich fehlt.
  - B Sätze haben aber auch mit LF-Übersetzung nur die Bedeutungen, die sie sowieso haben (keine Hinzufügung).
- Also ist die Übersetzung in LF trivial und äquivalent zur PF/Syntax.
- Wir können Sätze direkt interpretieren (wie sie gesprochen/geschrieben werden).
- Montagues *lf* | direkte Übersetzung von sprachlichen in logische Ausdrücke

- Aussagen über die/Teile der Welt
- Ausdrücke bezeichnen/referieren auf Dinge i. w. S.
- Informativität
- objektiv beurteilbar (z. B. Wahrheit von Sätzen)
- Aber welche sprachlichen Einheiten referieren auf was?

Ein Eigenname → genau ein Objekt in der Welt

*Jan Böhmermann*

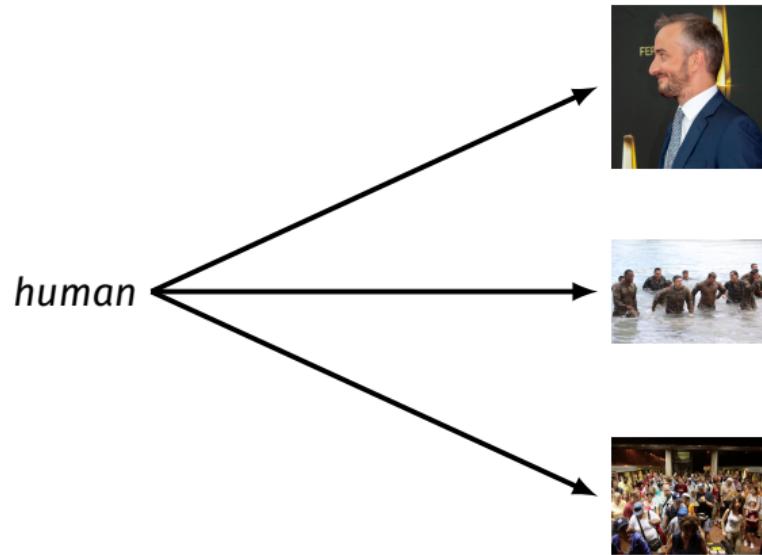


Ein normales **Nomen** → eine Menge von Objekten in der Welt

*soldier*



Ein (intersektives) **Adjektiv** oder ein **Verb** → eine Menge von Objekten in der Welt



# Referenz | Sätze

Ein Satz → in erster Näherung ein Sachverhalt

*A humming bird  
is hovering over  
a red flower.*

Nein! falsche  
Art von Objekt



(als Individuum)

# Freges Prinzip | Das hier wollen wir formalisieren!

Bedeutung ist kompositional!

- *humming bird* → die Menge der Kolibri-Objekte
- *a* → Existenzaussage für ein Element aus einer Menge
- *a humming bird* → Existenzaussage für ein Element  $x$  aus der Menge der Kolibri-Objekte
- *is hovering* → die Menge der schwebenden Objekte
- *a humming bird is hovering* → das existierende Kolibri-Objekt  $x$  ist auch ein Element der Menge der schwebenden Objekte
- *a red flower* → Existenzaussage für ein Element  $y$  aus der Schnittmenge der roten Objekte und der Blumen-Objekte
- *over* → die Relation zwischen Objekten (s. nächste Woche), die sich übereinander befinden
- *A Humming is hovering over a red flower.* →  
Es gibt ein Objekt  $x$  aus der Schnittmenge der Kolibri- und der schwebenden Objekte, und es gibt ein Objekt  $y$  aus der Schnittmenge der roten und der Blumen-Objekte, und  $x$  befindet sich über  $y$ .

# Implikation (Entailment)

Mengen von Aussagesätzen **implizieren** andere Sätze.

Sätze (Implikationen) lassen sich aus anderen Sätzen (Axiome) **beweisen**.

A *Jan Böhmermann ist ein Mensch.*

B *Jan Böhmermann ist leutselig.*

C *Jan Böhmermann ist ein leutseliger Mensch.*

$A, B \vdash C$  | A und B implizieren C. (C ist beweisbar aus A und B.)

$A \not\vdash C$  | A impliziert nicht C.

$B \not\vdash C$  | B impliziert nicht C.

$A \vdash A \wedge A$  | *Jan Böhmermann ist ein Mensch und Jan Böhmermann ist ein Mensch.*

D *Irgendetwas ist ein Mensch.*

$A \vdash D$

Wenn diese Kriterien zutreffen, impliziert A B:

- Wenn A wahr ist, ist B auch immer wahr.
- Eine Situation, die von B beschrieben wird, wird auch von A beschrieben.
- Die Information in B ist vollständig in der Information in A enthalten.
- Man kann unter keinen Umständen sagen: *A ist wahr, aber B ist nicht wahr.*

# Übung | Sind das Implikationen?

- Böhmermann ist Showmaster.  $\vdash$  Böhmermann ist menschlich.
- Böhmermann ist nicht sehr groß.  $\vdash$  Irgendjemand ist nicht sehr groß.
- Böhmermann ist nicht sehr groß.  $\vdash$  Irgendjemand ist sehr groß.
- Manche Menschen sind leutselig.  $\vdash$  Böhmermann ist leutselig.
- Ich habe das neue drip-133-Album gehört.  $\vdash$  drip-133 hat ein neues Album veröffentlicht.
- Nachdem ich einen Sherry getrunken habe, habe ich den Kondensator getauscht.  
 $\vdash$  Ich habe einen Sherry getrunken.
- Nachdem Linux nicht mehr startete, habe ich einen weiteren Sherry getrunken.  
 $\vdash$  Linux ist noch nie gestartet.
- Mein ehemaliger Mitbewohner mag Becks.  
 $\vdash$  Mein ehemaliger Mitbewohner könnte Sherry mögen.
- Böhmermann hat das heutige ZDF Magazin beendet.  
 $\vdash$  Das heutige ZDF Magazin wurde beendet.

Präsuppositionen sind schwächer als Implikationen.

- A *Willy Brandt ist der gegenwärtige Kanzler Deutschlands.*
  - B *Wenn Willy Brandt der gegenwärtige Kanzler Deutschlands ist,  
trägt er eine große Verantwortung.*
  - C *Willy Brandt ist nicht der gegenwärtige Kanzler Deutschlands.*
  - D *Willy Brandt lebt.*
  - E *Es gibt einen Kanzler Deutschlands.*
- A und B präsupponieren D. = D ist eine Voraussetzung  
für eine erfolgreiche Interpretation von A und B.
  - C präsupponiert nicht D.
  - A, B und C präsupponieren E.

Die Unterschiede zur Implikation sind relevant.

- Nicht nur Aussagesätze haben Präspositionen (Modale, Konditionale, ...)
- Negierte Sätze haben oft gleiche Präspositionen wie nicht-negierte.
- Präspositionen können negiert werden, und der Ausgangssatz bleibt wahr.  
Geht nicht mit Implikationen.

F *Willy Brandt ist nicht der Kanzler Deutschlands.*

G *Es gibt einen Kanzler Deutschlands.*

F präsponniert G, bleibt aber wahr, wenn G falsch ist.

Synonyme Ausdrücke haben **exakt** die gleiche Referenz.

- lexikalische Synonymie | *humming bird*  $\overset{\text{lex}}{\equiv}$  *colibri*
- kompositionale Synonymie
  - Mulder traf seine entführte Schwester, nachdem er in die geheime Militärbasis eingebrochen war.*  
≡ *Bevor er seine entführte Schwester traf, brach Mulder in die geheime Militärbasis ein.*
- $A \equiv B$  gdw  $A \vdash B$  und  $B \vdash A$  (gegenseitige Implikation)
- *gdw* = genau dann wenn | *iff* = if and only if

Referentielle Semantik **modelliert mehr als einfaches Zeigen auf Objekte durch Sprache.**  
Zusätzliche Logik für Fälle wie diesen (und viele andere):

- *Die Lieblingsblume meines Kolibris ist rot.*
- *Eine Blume ist rot.*

# Sätze referieren aus Wahrheitswerte!

Um zu der gewünschten Logik zu kommen, zeigen wir jetzt,  
dass Sätze auf Wahrheitswerte referieren.

Wahrheitswerte sind nur *wahr* und *falsch*.

Die Verben *denotieren* und *referieren auf* sind hier erst einmal synonym.

Warten Sie bitte ein paar Wochen, wenn Sie diese Darstellung reduktionistisch finden.

# Synonyme NPs

a *colibri*

b *humming bird*

$a \stackrel{\text{lex}}{\equiv} b$

c *a brunette lady*

d *a brown-haired dame*

$c \equiv d$

e *the primates*

f *the apes and humans*

$e \equiv f$

# Synonymie von Konstituenten und Sätzen

Synonymie von Konstituenten im Satzkontext → Satzsynonymie

A A *colibri* is hovering over a red flower.

B A *humming bird* is hovering over a red flower.

A ≡ B weil a ≡ b und Satzkontext identisch

[<sub>A</sub>a] ≡ [<sub>B</sub>b] wenn a ≡ b und [<sub>A</sub>\_] = [<sub>B</sub>\_]

C Lauren Bacall was a *brunette lady*.

D Lauren Bacall was a *brown-haired dame*.

C ≡ D weil c ≡ d und Satzkontext identisch

E *Primates* are intelligent.

F *The apes and humans* are intelligent.

E ≡ F weil e ≡ f und Satzkontext identisch

Referenz/Denotat eines Ausdrucks A notiert als  $\llbracket A \rrbracket$   
 $\llbracket \cdot \rrbracket$  ist eine Funktion, nicht bloß eine Notationsweise.

Erinnerung: Synonymität von Sätzen ist gegenseitige Implikation.

Ax1 Synonyme Ausdrücke (NPs, Verben, Sätze, ...) haben dieselbe Referenz.

Also ist  $A \equiv B$  gleichbedeutend mit  $\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$

Ax2 Wenn wir in Ausdruck C einen Ausdruck A durch  
einen synonymen Ausdruck B ersetzen, behält C seine Referenz.

Also ist  $\llbracket A \rrbracket = \llbracket B \rrbracket$  gleichbedeutend mit  $\llbracket [cA] \rrbracket = \llbracket [cB] \rrbracket$

# Zwei wahre Sätze

Wahrheitswert von A und B | 1 bzw. *wahr* bzw. *true* oder *T*

A *Lauren Bacall was a brunette lady.*

B *My humming bird's favourite flower is red.*

Diese Sätze haben außer ihrem Wahrheitswert  
semantisch nichts gemein!

(1) Aussagesätze und einfache Aussagen über ihre Wahrheitswerte sind äquivalent.

T *The truth value of \_ is 1.*

Lies  $[_T A]$  als: Konstituente/Satz A eingebettet in den Kontext/Satz/die Konstituente T

$[_T A]$  *The truth value of ‘Lauren Bacall was a brunette lady.’ is 1.*

$[_T B]$  *The truth value of ‘My humming bird’s favourite flower is red.’ is 1.*

Da aus A  $[_T A]$  folgt und umgekehrt:  $A \equiv [_T A]$  und  $B \equiv [_T B]$

und daher mit Ax1  $\llbracket A \rrbracket = \llbracket [_T A] \rrbracket$  und  $\llbracket B \rrbracket = \llbracket [_T B] \rrbracket$

Bitte bedenken: A und  $[_T A]$  haben auch intuitiv „denselben Inhalt“.

(2) Wahrheitswertaussagen über wahre Sätze sind äquivalent.  
Und daher können Sätze nur auf Wahrheitswerte referieren.

- In  $[\tau A]$  und  $[\tau B]$  sind A und B jeweils in einer NP eingebettet, die offensichtlich jeweils auf dasselbe referieren, nämlich den Wahrheitswert:  
 $\llbracket \text{the truth value of } A \rrbracket = \llbracket \text{the truth value of } B \rrbracket = 1$

mit Ax2 daher  $\llbracket [\tau A] \rrbracket = \llbracket [\tau B] \rrbracket$

und damit  $\llbracket A \rrbracket = \llbracket [\tau A] \rrbracket = \llbracket [\tau B] \rrbracket = \llbracket B \rrbracket = 1$

- Den Sätzen A und B ist aber nichts gemein außer ihrem Wahrheitswert.
- Sätze referieren also auf Wahrheitswerte.
- Achtung | Wahrheitswerte sind auch nur realweltliche Objekte.

Der Beweis ist komplexer, s. Church (1948).

Etwas zugänglicher in <https://plato.stanford.edu/entries/truth-values/slingshot-argument.html>

Nicht so **sinnlos**, **schwachsinnig** oder **inhaltssleer** usw. wie oft vermutet

- Referentielle Semantik
  - ▶ Analyse der Referenten verschiedener Typen von Ausdrücken
  - ▶ Komposition von Sätzen
  - ▶ deduktive Logik für Sätze
  - ▶ Benennen der Wahrheitsbedingungen (→ Modelltheorie)
- Wahrheitswert | minimale Gemeinsamkeit aller falschen/wahren Sätze
- gut formal berechenbar (Binarität)
- reichhaltigere Semantik später (basierend auf Wahrheitswerten)

## Konstruktive, schrittweise Annäherungen an sprachliche Modellierung

- Grammatikfragment | Ausschnitt einer Gesamtgrammatik
- erwünschte schrittweise Erweiterung von Fragmenten (vgl. HPSG)
- Konstruktion eines Semantik-Fragments
  - ▶ grammatische Kategorien und Referenzen von Wörtern
  - ▶ Grammatikmechanismen und zugehörige Bedeutungskonstruktion
  - ▶ Ergebnis | Semantik von Sätzen und Beitrag aller Konstituenten dazu
- T-Sätze
  - ▶ L eine Sprache, S ein Satz, v ein Sachverhalt, p eine Aussage über Wahrheitsbedingungen
  - ▶ S aus L ist wahr in v gdw p.

Die folgenden simplexen Ausdrücke sind Teil von  $F_1$ .  
Kein anderer simplexer Ausdruck ist Teil von  $F_1$ .

- 1  $N \rightarrow \text{Herr Webelhuth, Frau Klenk, the Turm-Mensa}$
- 2  $V_i \rightarrow \text{is relaxed, is creative, is stupid}$
- 3  $V_t \rightarrow \text{prefers}$
- 4  $\text{conj} \rightarrow \text{and, or}$
- 5  $\text{neg} \rightarrow \text{it is not the case that}$

Folgende Kompositionsregeln sind Teil von F<sub>1</sub>.  
Keine andere Kompositionssregel ist Teil von F<sub>1</sub>.

- 1 S → N VP
- 2 S → S conj S
- 3 S → neg S
- 4 VP → V<sub>i</sub>
- 5 VP → V<sub>t</sub> N

# Referenz simplexer Ausdrücke

- $\llbracket \text{Herr Webelhuth} \rrbracket = \text{Herr Webelhuth}$
- $\llbracket \text{Frau Klenk} \rrbracket = \text{Frau Klenk}$
- $\llbracket \text{the Turm-Mensa} \rrbracket = \text{the Turm-Mensa}$
- $\llbracket \text{is relaxed} \rrbracket = \{x : x \text{ is } \textit{relaxed}\}$
- $\llbracket \text{is creative} \rrbracket = \{x : x \text{ is } \textit{creative}\}$
- $\llbracket \text{is stupid} \rrbracket = \{x : x \text{ is } \textit{stupid}\}$
- $\llbracket \text{prefers} \rrbracket = \{\langle x, y \rangle : x \text{ prefers } y\}$

# Referenz von Funktionswörtern

Funktionswörter referieren auf [Funktionen](#).

- $\llbracket \text{neg} \rrbracket = \begin{bmatrix} 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{bmatrix}$
- $\llbracket \text{and} \rrbracket = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle 1, 0 \rangle \rightarrow 0 \\ \langle 0, 1 \rangle \rightarrow 0 \\ \langle 0, 0 \rangle \rightarrow 0 \end{bmatrix}$
- $\llbracket \text{or} \rrbracket = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle 1, 0 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle 0, 1 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle 0, 0 \rangle \rightarrow 0 \end{bmatrix}$

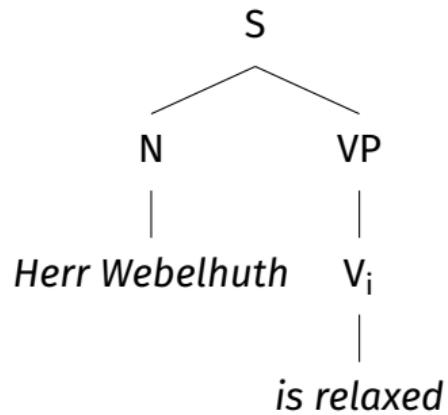
- $\llbracket [S N VP] \rrbracket = 1$  iff  $\llbracket N \rrbracket \in \llbracket VP \rrbracket$ , else 0
- $\llbracket [S S_1 \text{ conj } S_2] \rrbracket = \llbracket \text{conj} \rrbracket(\langle \llbracket S_1 \rrbracket, \llbracket S_2 \rrbracket \rangle)$
- $\llbracket [S \text{ neg } S] \rrbracket = \llbracket \text{neg} \rrbracket(\llbracket S \rrbracket)$
- $\llbracket [VP V_t N] \rrbracket = \{x : \langle x, \llbracket N \rrbracket \rangle \in \llbracket V_t \rrbracket\}$
- für einen nicht verzweigenden Knoten K und seine Tochter D:  $\llbracket [\kappa D] \rrbracket = \llbracket D \rrbracket$
- Das geht alles eleganter. Bitte etwas Geduld!

# Schritt 1 | Syntax parsen

Ist folgendes ein Satz aus  $F_1$ ? *Herr Webelhuth is relaxed.*

- $[_N \text{Herr Webelhuth}]$  mit Lexikonregel 1
- $[_{V_i} \text{is relaxed}]$  mit Lexikonregel 2
- $[_{VP} [_{V_i} \text{is relaxed}]]$  mit Syntaxregel 4
- $[_S [_N \text{Herr Webelhuth}] _{VP} [_{V_i} \text{is relaxed}]]$  mit Syntax 1

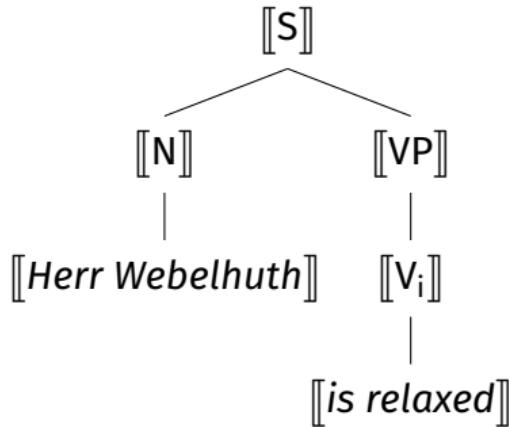
# Syntax als Baum



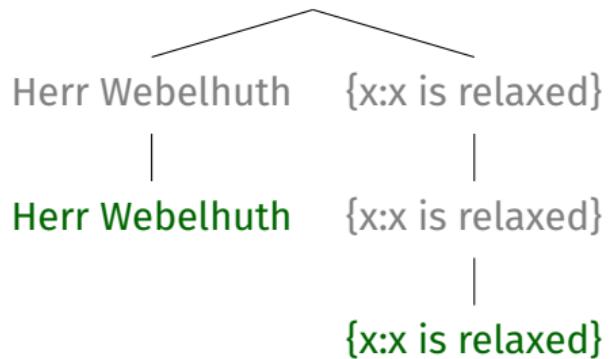
v (Sachverhalt) | Herr Webelhuth (das ontologische Objekt)  $\in \{x : x \text{ is relaxed}\}$

- für N:  $\llbracket \text{Herr Webelhuth} \rrbracket = \text{Herr Webelhuth}$  (das ontologische Objekt)
- für VP (und V<sub>i</sub>):  $\llbracket \text{is relaxed} \rrbracket = \{x : x \text{ is relaxed}\}$  (enthält Herrn Webelhuth)
- für S:  $\llbracket [S \ N \ VP] \rrbracket = 1$  iff  $\llbracket N \rrbracket \in \llbracket VP \rrbracket$ , else 0
- in v daher  $\llbracket [S \ Herr \ Webelhuth \ is \ relaxed.] \rrbracket = 1$

# Semantik im Baum

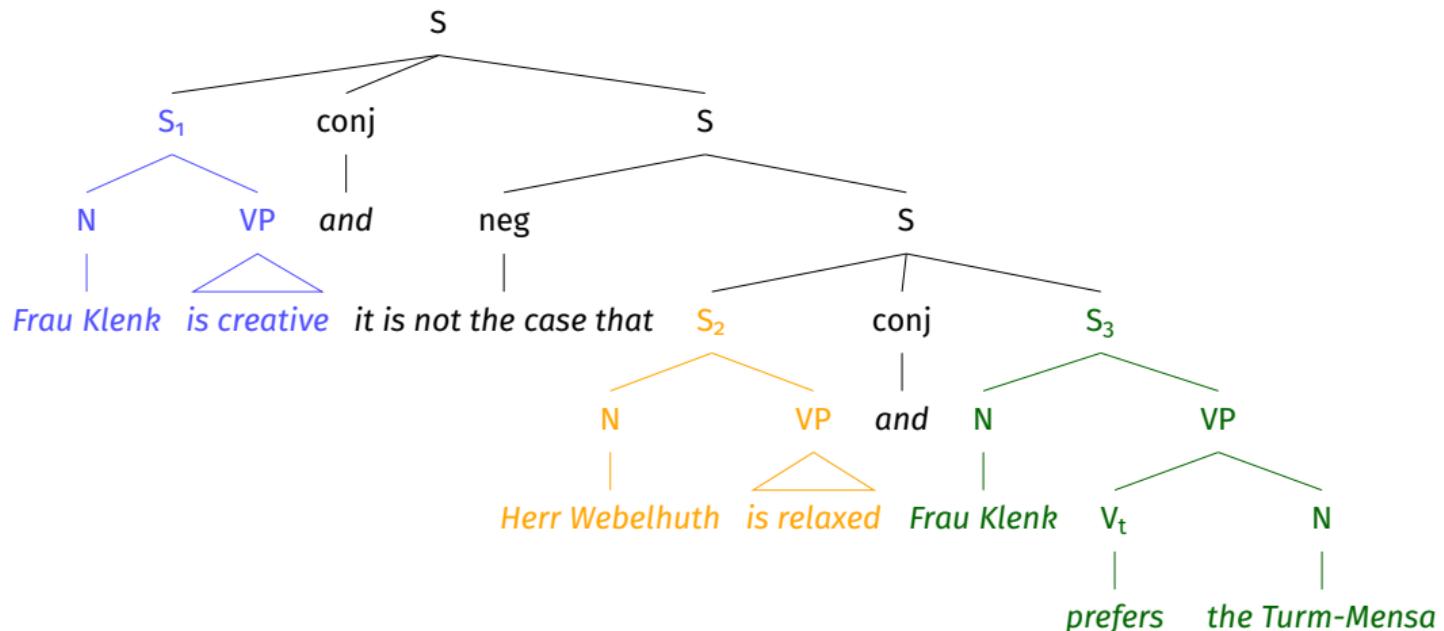


1 because  $\text{Herr Webelhuth} \in \{x : x \text{ is relaxed}\}$



# Komplexere Phrasenstrukturen

[ $S_1$ , *Frau Klenk is creative*] and it is not the case that [ $S_2$ , *Herr Webelhuth is relaxed*]  
and [ $S_3$ , *Frau Klenk prefers the Turm-Mensa*].

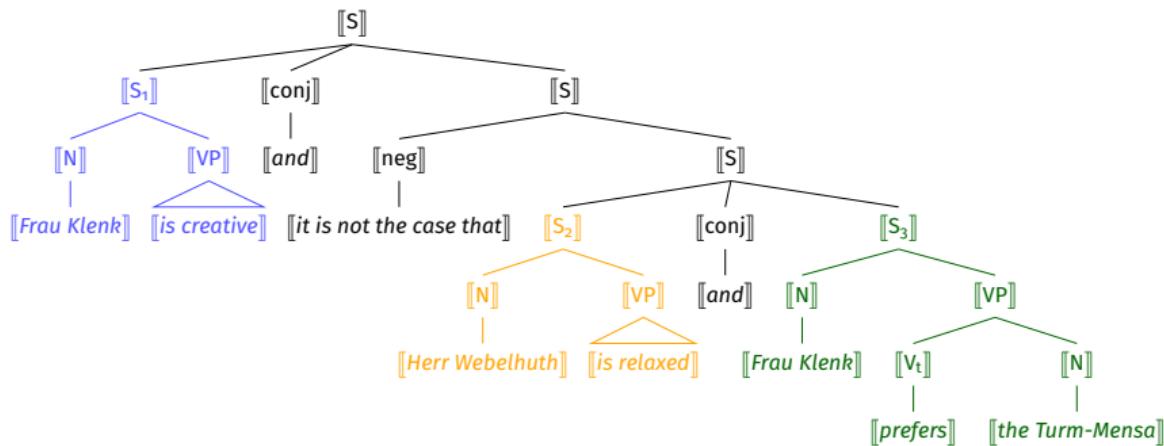


Die Situation/die Umstände v sind:

- Herr Webelhuth  $\in \{x : x \text{ is relaxed}\}$
- Frau Klenk  $\in \{x : x \text{ is creative}\}$
- $\langle \text{Frau Klenk}, \text{Turm-Mensa} \rangle \notin \{\langle x, y \rangle : x \text{ prefers } y\}$

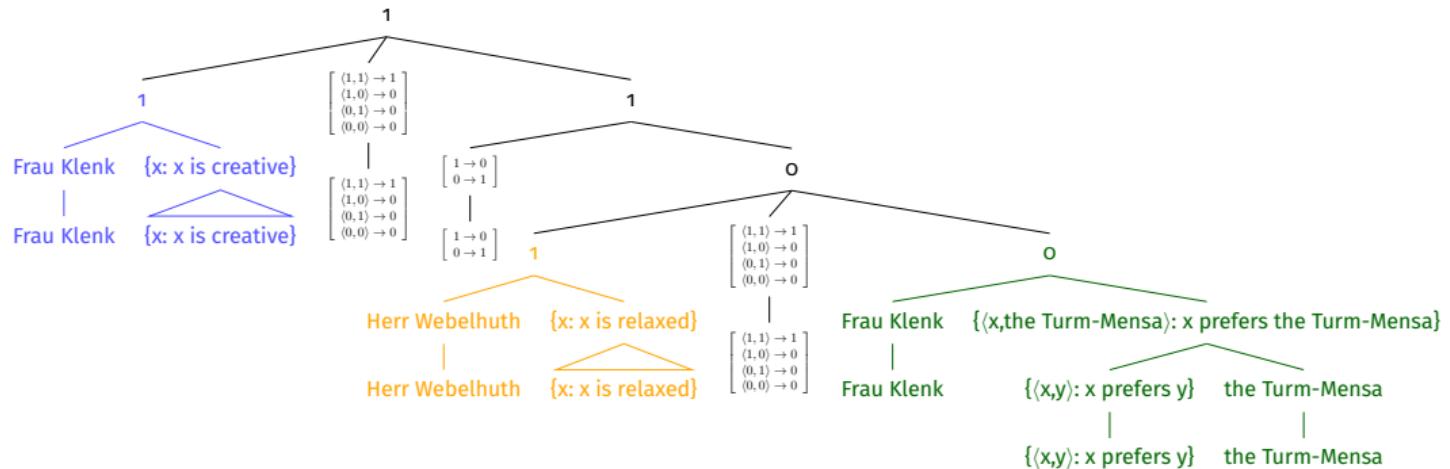
# Die Interpretation komplexerer Phrasenstrukturen

- Herr Webelhuth  $\in \{x : x \text{ is relaxed}\}$
- Frau Klenk  $\in \{x : x \text{ is creative}\}$
- $\langle \text{Frau Klenk}, \text{Turm-Mensa} \rangle \notin \{\langle x, y \rangle : x \text{ prefers } y\}$



# Die Interpretation komplexerer Phrasenstrukturen

- Herr Webelhuth  $\in \{x : x \text{ is relaxed}\}$
- Frau Klenk  $\in \{x : x \text{ is creative}\}$
- $\langle \text{Frau Klenk}, \text{Turm-Mensa} \rangle \notin \{\langle x, y \rangle : x \text{ prefers } y\}$



# Das war aber nicht alles

Der zuletzt analysierte Satz ist strukturell ambig, und  
und mit der strukturellen geht eine semantische Ambiguität einher.

Hausaufgabe: Analysieren Sie die Syntax und Semantik des Satzes  
in der anderen Lesart nur mit den Mitteln von F<sub>1</sub>.

# Zusatzaufgabe

Entwickeln Sie ein ähnliches Fragment  $D_1$  für das Deutsche mit Lexikon, Syntax und Semantik, das die folgenden Sätze generiert. Lexikon und Konstituentenstruktur können Sie frei wählen.

Es hat einen guten Grund, dass wir oft Englisch als Objektsprache nehmen. Sie können für dieses Fragment des Deutschen Kasus entweder ignorieren, oder Sie probieren, Kasusunterschiede zu modellieren.

- 1 Herr Müller ist Aktivist.
- 2 Frau Klann ist intelligent.
- 3 Frau Klann begrüßt Herrn Müller.
- 4 Frau Klann hustet.
- 5 Frau Klann schreibt ein gutes Buch.

## Mengen und Funktionen

Was sind **Mengen**?

Welche Operationen kann man auf Mengen anwenden?

Was sind **Relationen** und **Funktionen**?

Und wie hängen sie mit Mengen zusammen?

Welche Eigenschaften können Funktionen und Relationen haben?

Text für heute: Partee u. a. (1990: Kapitel 1–4)

# Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe
- Wörter
- ...
- nicht unbedingt zweckgebunden
- jedes Objekt maximal einmal in jeder Menge

# Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition  $\{\}$ , Elementstatus  $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$  (Menge von Buchstaben)
- $N_1 = \{'my book'\}$  (einelementige Menge, enthält eine NP)
  - ▶ vs.  $N_2 = \{my book\}$  (einelementige Menge, enthält mein Buch)
  - ▶ vs.  $N_3 = \{'my', 'book'\}$  (Menge von Wörtern)
- auch möglich:  $N_4 = \{'my', book\}$
- definiert über eine Eigenschaft der Elemente (zwei Notationen):  
 $M_2 = \{x: x \text{ is one of the first three letters of the alphabet}\}$   
 $M_2 = \{x | x \text{ is one of the first three letters of the alphabet}\}$
- $U$ : die universelle Menge (alle Objekte)

Zwei Mengen mit exakt den gleichen Elementen sind **identisch**.

- $\{a, b, c\} = \{x: x \text{ is one of the first three letters of the alphabet}\}$
- $\{x: x \text{ is human}\} = \{x: x \text{ is from the Earth, a primate but not an ape}\}$

# Teilmengen und Obermengen

**Teilmenge** | Eine Menge N, die kein Element enthält,  
das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. **Obermenge**).

Teilmenge oder Identität  $\subseteq$

Obermenge oder Identität  $\supseteq$

- $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$  und  $\{a, b, c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$  und  $\{a, b, c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c, d\} \not\subseteq \{a, b, c\}$  und  $\{a, b, c\} \not\supseteq \{a, b, c, d\}$
- $\{x: x \text{ is human}\} \subseteq \{x: x \text{ is an ape}\}$

**Echte Teilmenge** | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist, und die nicht mit M identisch ist.

Echte Teilmenge  $\subset$

Echte Obermenge  $\supset$

- $\{a\} \subset \{a, b, c\}$  und  $\{a\} \subsetneq \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \not\subset \{a, b, c\}$  aber  $\{a, b, c\} \supsetneq \{a, b, c\}$

- Achtung bei Mengen von Mengen

- ▶  $\{\{a\}\} \not\subset \{a, b, c\}$
- ▶  $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a, b, c\}$
- ▶  $\{\{a\}\} \not\in \{a, b, c\}$

- für leere Menge  $\{\}$  oder  $\emptyset$

- ▶  $\{\} \subset$  jede anderen Menge
- ▶  $\{\} \not\in \{\}$

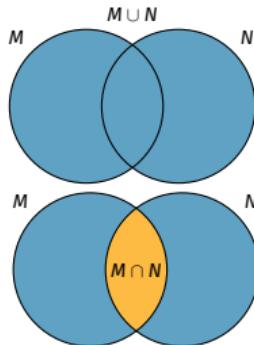
- Logik mit Mengen
  - ▶ Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.  
*Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.*
  - ▶  $w = \text{Herr Webelhuth}$   
 $E = \{x: x \text{ is a professor of English Linguistics}\}$   
 $H = \{x: x \text{ is human}\}$
  - ▶ Aus  $w \in E$  und  $E \subset H$  folgt  $w \in H$
- Aber
  - ▶ Die Anglistikprofessoren sind zahlreich.
  - ▶  $N = \{x: x \text{ is a set with many members}\}$
  - ▶ Aus  $w \in E$  und  $E \in N$  folgt nicht  $w \in N$
  - ▶ Vergleiche: \**Herr Webelhuth ist zahlreich.*

# Potenzmengen (power sets)

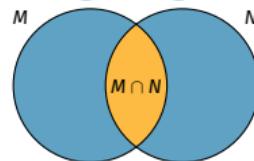
Potenzmenge  $\wp(\cdot)$  | Für jede Menge  $M$ :  $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - ▶  $M = \{a, b, c\}$
  - ▶  $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

# Vereinigungsmenge und Schnittmenge



Vereinigungsmenge | Für Mengen M und N:  $M \cup N = \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$



Schnittmenge | Für Mengen M und N:  $M \cap N = \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$

- Beispiel Vereinigungsmenge

- ▶  $M = \{a, b, c\}$
- ▶  $N = \{a, b, d\}$
- ▶  $M \cup N = \{a, b, c, d\}$

- Beispiel Schnittmenge

- ▶  $M = \{a, b, c\}$
- ▶  $N = \{a, b\}$
- ▶  $M \cap N = \{a, b\}$

# Generalisierte Vereinigungs- und Schnittmenge

$$\bigcup M = \{x : x \in Y \text{ für irgendeine } Y \in M\}$$

$$\bigcap M = \{x : x \in Y \text{ für jede } Y \in M\}$$

- Beispiel generalisierte Vereinigungsmenge

- ▶  $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
  - ▶  $\bigcup M = \{a, b, c\}$

- Beispiel generalisierte Schnittmenge

- ▶  $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
  - ▶  $\bigcap M = \{a\}$

# Differenzmenge und Komplementmenge

Differenzmenge |  $M - N = \{x : x \in M \text{ and } x \notin N\}$

Komplementmenge |  $M \setminus N = \{x : x \in N \text{ and } x \notin M\}$

- Beispiel Differenzmenge

- ▶  $M = \{a, b, c\}$
- ▶  $N = \{a\}$
- ▶  $M - N = \{b, c\}$

- Beispiel Komplementmenge

- ▶  $O = \{a, b, c, k\}$
- ▶  $M \setminus O = \{k\}$

- Universelles Komplement

- ▶ die universelle Menge |  $U = \{x : x \text{ is an object}\}$
- ▶  $M' = \{x : x \in U \text{ and } x \notin M\}$

Idempotenz

$$M \cup M = M$$

$$M \cap M = M$$

Kommutativität

$$M \cup N = N \cup M$$

$$M \cap N = N \cap M$$

Assoziativität

$$(M \cup N) \cup O = M \cup (N \cup O)$$

$$(M \cap N) \cap O = M \cap (N \cap O)$$

Distributivität

$$M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$$

## Komplementgesetze

- $M \cup \emptyset = M$
- $M'' = M$
- $M \cap M' = \emptyset$
- $X \cap U = U$

## DeMorgan

- $(M \cup N)' = M' \cap N'$
- DeMorgan begegnet uns in der Logik wieder.

# Tupel (geordnete Paare, Vektoren)

Mengen | **ungeordnet**  $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$

Tupel | dasselbe, aber **geordnet**  $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$

- Definition ohne neues Primitiv |  $\langle a, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- Rekursive Anwendung |  $\langle a, b, c \rangle = ???$
- in  $\langle a, b \rangle$  |  $a$  **erste** und  $b$  **zweite** Koordinate

# Kartesische Produkte

Mengen von Tupeln |  $\{< a, b >, < a, c >, < b, c >\}$  usw.

Kartesisches Produkt |  $S_1 \times \dots \times S_n = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle : x_i \in S_i \}$

- Für zwei Mengen |  $S_1 \times S_2 = \{ \langle x, y \rangle | x \in S_1 \text{ and } y \in S_2 \}$ 
  - ▶  $S_1 = \{a, b, c\}$
  - ▶  $S_2 = \{1, 2, 3\}$
  - ▶  $S_1 \times S_2 = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle \}$
  - ▶ Achtung |  $\langle 1, a \rangle \notin S_1 \times S_2$  usw.
- Nomenklatur |  $\vec{x}$  für  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$
- n-faches Produkt |  $S^n = \{ \vec{s} : s_i \in S \text{ for } 1 \leq i \leq n \}$ 
  - ▶  $S_1^2 = S_1 \times S_1 = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle \}$

*a sieht b, a wohnt im selben Stockwerk wie b, a macht b Vorwürfe, ...*

- Notationen |  $Rab$ ,  $aRb$ ,  $R(a, b)$ ,  $R(\langle a, b \rangle)$
- Definitionsmenge (domain) A |  $a \in A$
- Zielmenge, Wertemenge (range) B |  $b \in B$
- Zielmenge = Wertemenge A |  $R$  ist eine Relation in A.
- Relation R = eine Menge von Tupeln
- $R \subseteq A \times B$

# Komplement und Umkehrung

Komplement von R |  $R' = (A \times B) - R = R \setminus (A \times B) = \{\langle a, b \rangle \notin R\}$  for  $R \subseteq A \times B$

Umkehrung (inverse) von R |  $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle : \langle a, b \rangle \in R\}$  for  $R \subseteq A \times B$

- Beispiel Komplement

- ▶  $R \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle a, b \rangle : a \text{ ist Lehrer von } b\}$
- ▶  $\langle \text{Herr Webelhuth}, \text{Herr Schäfer} \rangle \in R$
- ▶  $R' = \{\langle a, b \rangle : a \text{ ist nicht Lehrer von } b\}$
- ▶  $\langle \text{Herr Webelhuth}, \text{Frau Klenk} \rangle \notin R$ ,  
 $\langle \text{der Garten meiner Eltern}, \text{Frau Klenk} \rangle \notin R$  usw.

- Beispiel Umkehrung

- ▶  $R^{-1} = \{\langle a, b \rangle : b \text{ ist Lehrer von } a\}$
- ▶  $= \{\langle a, b \rangle : a \text{ ist Schüler von } b\}$
- ▶  $\langle \text{Herr Schäfer}, \text{Herr Webelhuth} \rangle \in R^{-1}$

*a hat Vater b, zugelassenes Auto a hat Kennzeichen b, b ist der Logarithmus von a, ...*

Funktion  $f$  | eine Relation, sodass für jedes  $a \in A$  genau ein  $\langle a, b \rangle \in A \times B$  existiert

- partielle Funktion | Funktion in  $A \times B$  sodass für mindestens ein  $a \in A$  kein  $\langle a, b \rangle \in A \times B$  existiert
- formal meistens |  $\bar{f} \subseteq A \times (B \cup \{\perp\})$  mit  $\perp$  als *undefiniert*

# Funktionskomposition

*b ist die Mutter des Vaters von a (schwed. *farmor*),  
a ist der Kehrwert des Logarithmus von b, ...*

Funktionsverknüpfung (composition) | Für  $F_1 \subseteq A \times B$  und  $F_2 \subseteq B \times C$ :  $F_1 \circ F_2 \subseteq A \times C$

- *farmor* |  $F = \text{Vater} \circ \text{Mutter}$  und  $F \subseteq \text{Menschen} \times \text{Frauen}$ 
  - ▶ Männer = {Ulrich Schäfer, Roland Schäfer, Jan Böhmermann, ...}
  - ▶ Frauen = {Maria Schäfer, Frau Dr. Heide Rezepa-Zabel, ...}
  - ▶ Menschen = Männer  $\cup$  Frauen
  - ▶  $\text{Vater} \subseteq \{\langle \text{Roland Schäfer}, \text{Ulrich Schäfer} \rangle, \langle \text{Frau Dr. Heide Rezepa-Zabel}, \text{Jan Böhmermann} \rangle, \dots\}$
  - ▶  $\text{Mutter} \subseteq \{\langle \text{Ulrich Schäfer}, \text{Maria Schäfer} \rangle, \langle \text{Jan Böhmermann}, \text{Frau Dr. Heide Rezepa-Zabel} \rangle, \dots\}$
  - ▶  $F(\text{Roland Schäfer}) = \text{Vater} \circ \text{Mutter}(\text{Roland Schäfer}) = \text{Maria Schäfer}$

Eine Relation R in A ist ...

- |               |     |  |                                |
|---------------|-----|--|--------------------------------|
| reflexiv      | gdw | für <b>jedes</b> $a \in A$ : $\langle a, a \rangle \in R$    | <i>ist dasselbe Objekt wie</i> |
| irreflexiv    | gdw | für <b>jedes</b> $a \in A$ : $\langle a, a \rangle \notin R$ | <i>ist Vater von</i>           |
| nichtreflexiv | gdw | für <b>ein</b> $a \in A$ : $\langle a, a \rangle \notin R$   | <i>hat gesehen</i>             |

Eine Relation R in A ist ...

symmetrisch

gdw für jedes  $\langle a, b \rangle \in R : \langle b, a \rangle \in R$

hat dasselbe Auto wie

asymmetrisch

gdw für jedes  $\langle a, b \rangle \in R : \langle b, a \rangle \notin R$

hat ein anderes Auto als

nichtsymmetrisch

gdw für ein  $\langle a, b \rangle \in R : \langle b, a \rangle \notin R$

ist Mutter von<sup>1</sup>

antisymmetrisch

gdw für jedes  $\langle a, b \rangle \in R : \langle b, a \rangle \notin R$  oder  $a = b$

$\leq$

<sup>1</sup> Wer hat Dark gesehen?

Eine Relation R in A ist ...

transitiv

gdw  $\langle a, b \rangle \in R \text{ and } \langle b, c \rangle \in R : \langle a, c \rangle \in R$

steht links von  
mag

nichttransitiv

gdw das Obige stimmt manchmal nicht

ist Mutter von

intransitiv

gdw das Obige stimmt nie

Wozu das Ganze?

- Referenzsemantik und Einteilung der Welt in Mengen
- Ausdrücke, die auf Relationen und Funktionen referieren
- andere Grundlage: Logik, denn Sprache=Logik (irgendwie)

# Aufgaben I

1 Sind folgende Mengendefinitionen zulässig?

- 1  $A = \{a, b, d, e, f, g\}$
- 2  $C = \{x: x \text{ ist in keiner Menge enthalten}\}$
- 3  $D = \{\text{Böhmermann, Horst Lichter, } \{\}\}$
- 4  $E = \{a, b, a, d, e, f, g\}$
- 5  $F = \{r: r \text{ ist eine rationale Zahl}\} \cup \mathbb{N}$

2 Sind folgende Aussagen korrekt?

- 1  $\{\} \subseteq \{\text{blau, rot, gelb}\}$
- 2  $\{x : x \in A\} = A$
- 3  $\{\text{Jan, Horst, Heide}\} \neq \{\text{Horst, Jan, Heide}\}$
- 4 Wenn  $A = \{x: x \text{ ist ein Auto}\}$  und  $a \in A$  und außerdem  
 $B = \{x: x \text{ ist eine Menge von Dingen, die die Umwelt belasten}\}$  und  $A \in B$ ,  
dann folgt daraus  $a \in B$ .
- 5 Wenn  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$ , dann folgt  $A = B$ .
- 6 Wenn  $A \subset B$  und  $B \subset A$ , dann folgt  $A \neq B$ .
- 7 Wenn  $a \in A$  und  $a \in B$ , dann folgt  $a \in A \cup B$ .
- 8 Wenn  $a \in A$  und  $a \in B$ , dann folgt  $a \in A \cap B$ .
- 9 Wenn  $a \notin A$  und  $a \notin B$ , dann folgt  $a \in (A \cup B)'$ .

# Aufgaben II

## 3 Beantworten Sie die folgenden Fragen.

- 1 Was ist  $\wp\{\text{Horst, Heide, Jan}\}$ ?
- 2 Beantworten Sie die beiden Fragen auf Folie 77.
- 3 Stimmt es, dass  $\{\text{Horst, Heide}\} \subset \bigcap\{\{\text{Tschernobyl, Harrisburg}\}, \{\text{Horst, Heide, Albert}\}, \{\text{Horst, Webelhuth, Heide, Fukushima}\}\}$ ?
- 4 Stimmt es, dass  $\{\text{Heide, Harrisburg}\} \subseteq \bigcup\{\{\text{Tschernobyl, Harrisburg}\}, \{\text{Horst, Heide, Albert}\}, \{\text{Horst, Webelhuth, Heide, Fukushima}\}\}$ ?
- 5 Stimmt es für nicht-leere Mengen A und B, dass  $A \setminus B = B - A$ ?
- 6 Und für leere Mengen?
- 7 Vervollständigen Sie von Folie 83  $\langle a, b, c \rangle = ???$  (Auflösen von Tupeln in Mengenschreibweise).
- 8 Auch wenn es weh tut, dasselbe bitte für  $\langle a, b, c, d \rangle$ !
- 9 Ist Folgendes korrekt:  $\langle \text{Horst, Heide} \rangle = \langle \text{Heide, Horst} \rangle$ ?
- 10 Ist Folgendes korrekt:  $\{\langle \text{Horst, Heide} \rangle, \langle \text{Jan, Albert} \rangle\} = \{\langle \text{Jan, Albert} \rangle, \langle \text{Horst, Heide} \rangle\}$ ?
- 11 Was muss der Fall sein, damit  $A \circ B = B \circ A$ ?
- 12 Finden Sie ein Beispiel für eine nicht-partielle Funktion von Dingen der realen Welt zu Dingen der realen Welt. Warum ist diese Funktion keine Relation? Finden Sie außerdem ein ähnliches Beispiel für eine partielle Funktion.
- 13 Finden Sie je eine Relationen zwischen Dingen der realen Welt, die reflexiv, irreflexiv, nichtreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, nichtsymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, nichttransitiv und intransitiv ist. Die Relationen müssen nicht mit einem bestimmten natürlichsprachlichen Wort ausdrückbar sein (vergleiche viele der Beispiele auf den Folien). In einigen Fällen ist das recht schwierig. Versuchen Sie es ohne Google, ChatGPT usw., sonst bringt es Ihnen nichts.

# Aussagenlogik

Was leistet eine Aussagenlogik (und was nicht)?

Wann sind und/oder/wenn-dann-Aussagen wahr oder falsch?

Wann sind logische Ausdrücke gleichbedeutend (äquivalent)?

Was darf man aus was folgern?

Texte für heute: Partee u. a. (1990: 87-246), selektiv auch Bucher (1998).

## Wie Logiken funktionieren

- Sammlungen von Aussagen bzw. Propositionen
- Axiome | als wahr angenommene Aussagen
  - ▶ eventuell über Induktion gegeben
  - ▶ oder aus rein theoretischen Überlegungen abgeleitet
- Deduktion | Ableiten von Aussagen aus Axiomen
- in der Wissenschaft damit Voraussagen aus Axiomen

## Status von Aussagen in logischen Beweisen ...

- **Axiome** | atomare Wahrheiten (der Theorie oder des Diskurses)
- **Theorem** | eine Aussage, die bewiesen werden soll oder bewiesen wurde
- **Lemma** | ein nebensächliches bewiesenes Theorem
- **Korollar** | ein minderes Theorem im Rahmen einer Beweisführung

Verständnis von der Welt in eine Form bringen ...

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen
- Schlussregeln zur Ableitung von Theoremen aus Axiomen
- Untersuchung, inwieweit Sprache logischen Prinzipien folgt
- Wissenschaft
  - ▶ Hypothesengenerierung durch Induktion und Abduktion
  - ▶ Hypothesenprüfung durch Deduktion plus Testung
  - ▶ außerdem Prüfen auf Widerspruchsfreiheit

# Warum Logik in der Semantik?

Sprache ist nicht ohne Logik.

- Aussagesätze haben Wahrheitsbedingungen!
- Sprache ist systematisch und kompositionall!
- Natürlichsprachliche Sätze folgen aus anderen Sätzen!  
... wie Theoreme aus Axiomen ...
- Was das Gehirn damit macht, ist – wie gesagt – eine parallele Frage.

## Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - ▶ keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - ▶ Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - ▶ Herr Keydana is a passionate cyclist.:  $k$
- Wahrheitswert | Semantik einer Formel
  - ▶  $\llbracket k \rrbracket \in \{0, 1\}$
  - ▶ Wenn Herr Keydana passionierter Radsportler ist, dann  $\llbracket k \rrbracket = 1$
  - ▶ ... sonst  $\llbracket k \rrbracket = 0$
  - ▶  $k$  ist kontingent | wahr oder falsch je nach Modell
  - ▶ Modell | Spezifikation von Wahrheitsbedingungen

## Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn  $p$  und  $q$  Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - ▶  $\neg p$  | *nicht p* | Negation
  - ▶  $p \vee q$  | *p oder q* | Disjunktion
  - ▶  $p \wedge q$  | *p und q* | Konjunktion
  - ▶  $p \rightarrow q$  | *wenn p dann q* | Konditional
  - ▶  $p \leftrightarrow q$  | *p genau dann wenn q* | Bikonditional
  - ▶ Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | **Funktoren** bezeichnen **Funktionen**

*Es ist nicht der Fall, dass p.*

- Definition gemäß letzter Woche:  $\llbracket \neg \rrbracket = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle\}$
- Typische Definition als Funktion

$$\llbracket \neg \rrbracket = \begin{bmatrix} 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{bmatrix}$$

- Typische Darstellung mit Wahrheitstafel

$\neg$	$p$
0	1
1	0

*Es ist der Fall, dass p, dass q, oder dass p und q.*

$p$	$\vee$	$q$
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

- Herr Keydana is a passionate cyclist **or** we all love logic.
- **kvl**

*Es ist der Fall, dass  $p$ , und dass  $q$ .*

$p$	$\wedge$	$q$
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

- Herr Keydana is a passionate cyclist and we all love logic.
- k $\wedge$ l

Wenn  $q$  gilt, dann gilt  $q$ .

$p$	$\rightarrow$	$q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- If it rains, then the streets get wet.
- $r \rightarrow s$

# Ex falso sequitur quodlibet!

*If it rains, the streets get wet.*  $\vdash ?$  *It doesn't rain, so the streets are dry.*

- it is raining (1) , the streets are wet (1) : 1
- it is raining (1) , the streets are not wet (0) : 0
- it is not raining (0) , the streets are wet (1) : 1
- it is not raining (0) , the streets are not wet (0) : 1
- *Ex falso sequitur quodlibet.* | Modus morons

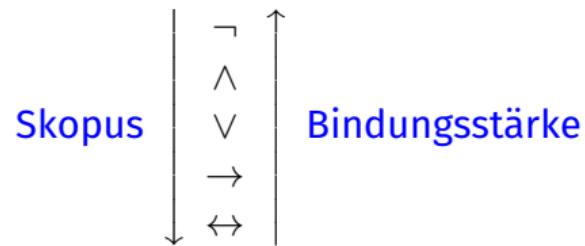
$p$  ist der Fall genau dann, wenn  $q$  der Fall ist.

Wenn  $p$  der Fall ist, dann ist  $q$  der Fall und umgekehrt.

$p$	$\leftrightarrow$	$q$
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

- If and only if your score is above 50, then you pass the semantics exam.
- $s \leftrightarrow p$

## Bindungsstärke der Funktoren



# Hilfreiche überflüssige Klammern

Die folgenden Wffs sind alle äquivalent.

$$p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s$$

$$\equiv p \wedge (\neg q) \vee r \rightarrow (\neg s)$$

$$\equiv (p \wedge (\neg q)) \vee r \rightarrow (\neg s)$$

$$\equiv ((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (\neg s)$$

$$\equiv (((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (\neg s))$$

# Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle |  $2^n$  Zeilen für  $n$  atomare Wffs
- für jede atomare Wff  $W_m$  mit  $m \in \{1,..n\}$ 
  - ▶  $2^{(n-m)}$  Einsen gefolgt von  $2^{(n-m)}$  Nullen
- Beispiel mit vier atomaren Wffs  $p, q, r, s$ 
  - ▶ für  $p$  als  $W_m$  mit  $m = 1$  | alternierende Blöcke von  $2^{4-1} = 2^3 = 8$  Einsen/Nullen
  - ▶ für  $q$  als  $W_m$  mit  $m = 2$  | alternierende Blöcke von  $2^{4-2} = 2^2 = 4$  Einsen/Nullen
  - ▶ für  $r$  als  $W_m$  mit  $m = 3$  | alternierende Blöcke von  $2^{4-3} = 2^1 = 2$  Einsen/Nullen
  - ▶ für  $s$  als  $W_m$  mit  $m = 4$  | alternierende Blöcke von  $2^{4-4} = 2^0 = 1$  Einsen/Nullen

# Ein Beispiel

$p$	$\wedge$	$\neg$	$q$	$\vee$	$r$	$\rightarrow$	$\neg$	$s$
1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1

- Tabelle vorbereiten

- ▶ für  $p$  |  $2^{4-1} = 2^3 = 8$  Einsen/Nullen
- ▶ für  $q$  |  $2^{4-2} = 2^2 = 4$  Einsen/Nullen
- ▶ für  $r$  |  $2^{4-3} = 2^1 = 2$  Einsen/Nullen
- ▶ für  $s$  |  $2^{4-4} = 2^0 = 1$  Einsen/Nullen

- Wahrheitswerte ermitteln  
entsprechend Funktorenskopus

- ▶ für  $\neg q$
- ▶ für  $\neg s$
- ▶ für  $p \wedge \neg q$
- ▶ für  $p \wedge \neg q \vee r$
- ▶ für  $p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s$

# Tautologie, Kontradiktion, Kontingenz

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

- **Tautologie** = immer wahr | Beispiel  $p \vee \neg p$

$p$	$\vee$	$\neg$	$p$
1	1	0	1
0	1	1	0

- **Kontradiktion** = immer falsch | Beispiel  $p \wedge \neg p$

$p$	$\wedge$	$\neg$	$p$
1	0	0	1
0	0	1	0

- **Kontingenz** = je nach Modell wahr oder falsch | Beispiel  $p \wedge p$

$p$	$\wedge$	$p$
1	1	1
0	0	0

# Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.  
Gesetze als Formulierung bekannter Äquivalenzen ( $\equiv$  oder  $\Leftrightarrow$ )

- Wffs mit stets gleicher Interpretation  
 $X \equiv Y$ : X hat dieselben Wahrheitsbedingungen wie Y
- Regeln zum wahrheitswertkonservativen Umschreiben komplexer Wffs
- Parallelen zur Mengenlehre offensichtlich  
(mit den zugrundeliegenden algebraischen Formalisierungen erst recht)
- Alle Funktoren lassen sich aus **einem Funktor** ableiten.

Scheffer-Strich (NAND, *nicht-und*; vgl. auch Peirce-Funktör)

$p$	$q$	$\equiv$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0

# Eher triviale Äquivalenzregeln

Idempotenz

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

Assoziativität

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Kommutativität

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Distributivität

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$P \cup P = P$$

$$P \cap P = P$$

$$(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$$

$$(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$$

$$P \cup Q = Q \cup P$$

$$P \cap Q = Q \cap P$$

$$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$$

DeMorgan

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$$

$$(P \cup Q)' = P' \cap Q'$$

$$(P \cap Q)' = P' \cup Q'$$

Komplementgesetze

- Tautologie

$$p \vee \neg p \equiv \top$$

- Kontradiktion

$$p \wedge \neg p \equiv \bot$$

- Doppelnegation

$$\neg\neg p \equiv p$$

*They talk or they talk.*

*They talk and they talk.*

*(He walks or (she talks) or we walk).*

*(He walks and (she talks) and we walk).*

*Peter walks or Sue snores.  $\equiv$*

*Sue snores or Peter walks.*

*Peter walks and Sue snores.  $\equiv$*

*Sue snores and Peter walks.*

*(Sue snores) and (Peter walks or we talk).  $\equiv$*

*(Sue snores and Peter walks) or*

*(Sue snores and we talk).*

**T** für Tautologie ( $\llbracket \top \rrbracket = 1$ ), **F** für Kontradiktion ( $\llbracket \bot \rrbracket = 0$ )

alternative Notation für DeMorgan:  $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

folgt aus DeMorgan:  $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{\overline{q}} \equiv p \wedge q$

## Implikation (Impl.)

$P$	$\rightarrow$	$Q$	$\equiv$	$\neg$	$P$	$\vee$	$Q$
1	1	1		0	1	1	1
1	0	0		0	1	0	0
0	1	1		1	0	1	1
0	1	0		1	0	1	0

## Kontraposition (Kontr.)

$P$	$\rightarrow$	$Q$	$\equiv$	$\neg$	$Q$	$\rightarrow$	$\neg$	$P$
1	1	1		0	1	1	0	1
1	0	0		1	0	0	0	1
0	1	1		0	1	1	1	0
0	1	0		1	0	1	1	0

## Feste Regeln für Deduktionsschlüsse aus Prämissen

- alle obigen Regeln | Äquivalenzregeln (= Umformungsregeln) für einzelne Wffs
- Schlussregeln
  - ▶ Schließen aus Mengen von Prämissen
  - ▶ kein neues Wissen, aber Erschließen existierenden Wissens
  - ▶ nicht naturgegeben | zahlreiche alternative Logiken

# Modus ponens (MP)

Eine **Implikation** (Antezedens → Konsequenz) und **ihr Antezedens** sind gegeben.

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{\vdash q}$$

Prämissen 1  
Prämissen 2  
Schluss

Beispiel mit natürlichsprachlichem Material

(1) *If it rains, the streets get wet.*

(2) *It is raining.*

$\vdash$  *The streets are getting wet.* 1,2,MP

# Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

$p$	$\rightarrow$	$q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- Prämisse 1 ( $p \rightarrow q$ ) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 für streichen!
- Prämisse 2 ( $p$ ) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 streichen
- Es bleibt nur noch eine Zeile, in der  $\llbracket q \rrbracket = 1$

# Modus tollens (MT)

Eine **Implikation** und die **Negation ihrer Konsequenz** sind gegeben.

$$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\vdash \neg p}$$

Prämissen  
Schluss

Illustration an der Wahrheitstafel

$P$	$\rightarrow$	$Q$	
1	1	1	ausgeschlossen durch Prämisse 2
1	0	0	ausgeschlossen durch Prämisse 1
0	1	1	ausgeschlossen durch Prämisse 2
0	1	0	

# Die Syllogismen

## Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - ▶ *If it rains, the streets get wet.*
  - ▶ *If the streets get wet, it smells nice.*
  - ▶  $\vdash$  *If it rains, it smells nice.*

## Disjunktiver Syllogismus (DS) | Eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Disjunkte

- $p \vee q, \neg p \vdash q$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - ▶ *Either Peter sleeps or Peter is awake.*
  - ▶ *Peter isn't awake.*
  - ▶  $\vdash$  *Peter sleeps.*

- Simplifikation (Simp.):
  - ▶  $p \wedge q \vdash p, q$
  - ▶ *It is raining and the sun is shining.*  $\vdash$  *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):
  - ▶  $p, q \vdash p \wedge q$
  - ▶ *It is raining. The sun is shining.*  $\vdash$  *It is raining and the sun is shining.*
- Addition (Add.):
  - ▶  $p \vdash p \vee q$
  - ▶ *It is raining.*  $\vdash$  *It is raining or the sun is shining.*
  - ▶ Und was ist, wenn  $q$  durch eine andere Prämisse als wahr oder falsch bekannt ist?

## Schritte zur Beweisführung

- 1 Prämissen formalisieren | eine atomare Wff (Buchstabe) pro atomarer Aussage
  - 2 zu beweisende Aussage (Schlussfolgerung) notieren
  - 3 aus den Prämissen und Schlussregeln versuchen, zur Schlussfolgerung zu kommen
- keine exakte Wissenschaft, erfordert Übung und Intuition
  - automatische Schlussverfahren (Tableaux) verfügbar (Partee u. a. 1990)

# Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse |  $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse |  $r$
- Schlussfolgerung |  $\neg s$

1	$r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$	
2	$r$	$\vdash \neg s$
3	$\neg(s \vee \neg b)$	1,2,MP
4	$\neg s \wedge b$	3,DeM
5	$\neg s$	4,Simp. ■

# Aufgaben I

- 1 Versuchen Sie, nur mittels des Scheffer-Strichs (s. Folie 113) die Wahrheitstabellen für  $\neg p$ ,  $p \vee q$ ,  $p \wedge q$  und  $p \rightarrow q$  zu rekonstruieren. Das ergibt nur einen Sinn, wenn Sie es selbst versuchen. Sie haben mehr davon, wenn Sie daran scheitern, als wenn Sie gleich Wikipedia nehmen.

## Aufgaben II

Versuchen Sie sich an folgenden vier Beweisen.

Hinweis: Sie benötigen, soweit ich sehe, nur die folgenden Schlussregeln:

- Simp. | Simplifikation (auch Konjunktionsreduktion o.ä.)
- MT | Modus Tollens
- MP | Modus Ponens
- DS | Disjunktiver Syllogismus
- Konj. | Konjunktionsregel

- 1 Der Beweis ist sophistisch, oder Achilles holt die Schildkröte ein. Wenn Achilles die Schildkröte einholt, dann versagt die Logik. Die Mathematiker haben alles geprüft, und die Logik versagt nicht.  
**Zeigen/Widerlegen Sie: Der Beweis ist sophistisch.**

## Aufgaben II

- 2 Pettenkofer lebte weiter, oder seine Hypothese versagte. Wenn die Hypothese versagte, dann wurde Pettenkofer in der Hygiene abgeschrieben. Er schluckte öffentlich eine Kultur Cholerabakterien und wurde in der Hygiene nicht abgeschrieben. **Zeigen/Widerlegen Sie: Pettenkofer lebte weiter.**
- 3 Der Fischer trinkt gerne Wein, und der Müller singt im Männerchor. Wenn der Veganladenbesitzer Hausbesitzer ist, dann wählt er nicht die Linkspartei. Der Veganladenbesitzer ist Hausbesitzer, oder der Müller singt nicht im Männerchor. **Zeigen/Widerlegen Sie: Der Fischer trinkt gern ein Glas Wein, und der Veganladenbesitzer wählt nicht die Linkspartei.**
- 4 Wenn Schopenhauer so früh aufstand wie Kant, dann hat er ihn in dieser Hinsicht gut nachgeahmt. Schopenhauer war eingebildet, liebte die Demokratie nicht, und er hatte Wutanfälle. In einem Wutausbruch warf er die Näherin die Stiege hinunter. Er stand so früh auf wie Kant, oder er war nicht eingebildet. **Zeigen/Widerlegen Sie: Schopenhauer hat die Näherin die Stiege hinuntergeworfen, und er hat Kant im Frühaufstehen gut nachgeahmt.**

# Prädikatenlogik

Wie macht man Logik **kompositionale**?

Wie schließt man aus quantifizierten Aussagen (*ein* und *all*)?

Was ist die Rolle der **Modelltheorie** Interpretation?

Wann sind prädikatenlogische Ausdrücke **gleichbedeutend**?

Wie **schlussfolgert** man aus prädikatenlogischen Ausdrücken?

Text für heute: Partee u. a. (1990: Kapitel 7 und 8.5)

## Kaum Kompositionalität in der Aussagenlogik

- Kompositionalität beschränkt auf Ebene des Satzes/der Proposition (und größer)
- keine Generalisierungen über Individuen, Eigenschaften und Quantifikation
- offensichtlicher Informationsverlust
  - ▶ *Martin is an expert on inversion and Martin is a good climber.*
  - ▶ wird zu  $e \wedge c$

## Deduktion mit Quantifikation

- alle, einige/mindestens ein, zwei, die meisten, ... Individuen
- einige zu formalisierende Schlüsse
  - ▶ alle  $x$  haben eine Eigenschaft  $\vdash$  einige  $x$  haben diese Eigenschaft
  - ▶ Martin hat eine Eigenschaft  $\vdash$  mindestens ein  $x$  hat diese Eigenschaft

Atome sind nicht mehr automatisch Wffs.

- (Individuen)-Variablen:  $x_1, x_2, y, z, \dots \in V$
- (Individuen-)Konstanten:  $a, b, c, \dots \in C$
- Terme: Variablen und Konstanten  $T = V \cup C$
- Prädikatensymbole:  $A, B, C, \dots \in P$ 
  - ▶ jedes Prädikat mit  $n$  Argumenten ( $n$ -stellige Prädikate)
  - ▶ Mengen  $P^1, \dots, P^n \subset P$
- Quantoren
  - ▶  $\exists$  es gibt mindestens ein \_\_
  - ▶  $\forall$  für alle \_\_ gilt
- plus alle Funktoren der Aussagenlogik

## Wffs aus Prädikaten, Termen und Quantoren

- $P(t_1, \dots, t_n)$  ist eine Wff  
wenn  $P \in P^n$  und  $t_1, \dots, t_n \in T$
- $(\exists x)\phi$  und  $(\forall x)\phi$  sind Wffs  
wenn  $x \in V$  und  $\phi$  eine Wff ist
- Wffs lassen sich mit den Funktoren der Aussagenlogik kombinieren
- Nichts anderes ist eine Wff in PL.  
Hinweis | Eigentlich ist Wff auch als Menge aller Wffs definiert.

**Modell** | Die (Beschreibung der) Welt, relativ zu der Wffs ausgewertet werden

- **Model**  $\mathcal{M}$  | enthält **Diskursuniversum**  $D$  = nicht-leere Menge aller Individuen
- Beispiel |  $\mathcal{M}_1$  enthält  $D = \{\text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Scully}\}$
- **Valuationsfunktion** |  $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$  enthält eine Funktion in  $T \times D$
- Beispiel für ein Model  $\mathcal{M}_1$ 
  - ▶ für  $m, k, s \in C$  und  $\text{Martin}, \text{Kilroy}, \text{Scully} \in D$
  - ▶  $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Martin}$
  - ▶  $\llbracket k \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Kilroy}$
  - ▶  $\llbracket s \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Scully}$

## Bedeutung von Prädikaten | Relationen (Mengen von Tupeln)

- Erinnerung | n-stellige Relationen als **n-Tupel**, hier Teil des Modells
  - ▶ *schläft* |  $R_1 = \{\text{Martin, Kilroy, Biden}, \dots\}$
  - ▶ *Staatsoberhaupt von* |  $R_2 = \{\langle \text{Biden, USA} \rangle, \langle \text{Xi, China} \rangle, \langle \text{Carl Gustaf, Schweden} \rangle, \dots\}$
  - ▶ *jagt* |  $R_3 = \{\langle \text{Kilroy, Martin} \rangle, \langle \text{Scully, Kilroy} \rangle\}$
- Menge  $R$  der Relationen ( $R^n$  für n-stellige)
- Semantik eines Prädikats: Relation |  $\llbracket \cdot \rrbracket^{\mathcal{M}}$  enthält eine Funktion in  $P \times \{0, 1\}$
- $\llbracket P(t_1) \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}}) = 1 \text{ iff } \llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}} \in \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}$   
Äquivalente Formulierung mit n-Tupeln für n-stellige Prädikate
  - ▶ *Martin (m) schläft (R<sub>1</sub>)*:  $\llbracket R_1(m) \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = 1$  weil  $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Martin}$  und  $\text{Martin} \in \llbracket R_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1}$
  - ▶ *Martin (m) jagt (R<sub>3</sub>) Kilroy (k)*:  $\llbracket R_3(m, k) \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = 0$  weil  
 $\llbracket m \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Martin}$  und  $\llbracket k \rrbracket^{\mathcal{M}_1} = \text{Kilroy}$  und  $\langle \text{Martin, Kilroy} \rangle \notin \llbracket R_3 \rrbracket^{\mathcal{M}_1}$

Synkategorematische Ausdrücke | Modifizieren Bedeutungen, haben aber keine eigene

- wie in AL
  - ▶  $\neg\phi$
  - ▶  $\phi_1 \vee \phi_2$  und  $\phi_1 \wedge \phi_2$
  - ▶  $\phi_1 \rightarrow \phi_2$  und  $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$
- Allquantor |  $\llbracket (\forall x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$  gdw  $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$  für alle  $c \in C$ , eingesetzt anstelle aller Vorkommen von  $x$  in  $\phi$
- Existenzquantor |  $\llbracket (\exists x)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$  gdw  $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$  für mindestens ein  $c \in C$ , eingesetzt anstelle aller Vorkommen von  $x$  in  $\phi$
- eigentlich ein Algorithmus, der alle Individuenkonstanten durchgeht
- Quantorenskopos von außen nach innen
- extrem enger Skopos über die nächstkleinsten Wff (also Klammern!)

Wie werden normale Sätze mit Appellativa und Verben formalisiert?

- *Alle Menschen feiern.*
  - ▶ zwei Prädikate: *Mensch* ( $M$ ) und *feiern* ( $F$ )
  - ▶  $(\forall x)[M(x) \rightarrow F(x)]$
  - ▶ Was würde  $(\forall x)[M(x) \wedge F(x)]$  bedeuten?
- *Martin schenkt Scully einen Außerirdischen.*
  - ▶ zwei Individuenkonstanten:  $m$  ,  $s$
  - ▶ zwei Prädikate: *S*, *A*
  - ▶ ein Quantor (mit einer Variable):  $\exists x$
  - ▶  $(\exists x)[A(x) \wedge S(m, s, x)]$
  - ▶ Was würde  $(\exists x)[A(x) \rightarrow S(m, s, x)]$  bedeuten?

- Vertauschbarkeit von Quantoren

- $(\forall x)(\forall y)\phi \equiv (\forall y)(\forall x)\phi$
- $(\exists x)(\exists y)\phi \equiv (\exists y)(\exists x)\phi$
- Sowie  $(\exists x)(\forall y)\phi \vdash (\forall y)(\exists x)\phi$   
aber  $(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$

- Widersprüche (Kontradiktionen)

- $(\exists x)[P(x) \wedge \neg P(x)]$  | so wie  $P(m) \wedge \neg P(m)$
- $(\forall x)[W(x) \wedge \neg W(x)]$  |  $\forall$  sucht eine leere Menge

- Typische Fehler | Diese Formeln sind falsch!

- Prädikate direkt am Quantor |  $(\forall M) \dots$  falsch für: *für alle Menschen gilt*
- Negierte Quantoren |  $(\neg \forall x)M(x)$  falsch für: *nicht für alle x gilt*
- Funktoren vor Termen |  $(\exists x)M(x) \wedge F(\neg x)$  falsch für: *Ein Mensch feiert nicht.*
- Mehrfache Variablenbindung |  $(\forall x \exists x)P(x)$
- Klammern vergessen, ungebundene Variable |  $(\forall x)P(x) \rightarrow Q(x)$  statt:  $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

## Äquivalente Ausdrücke in unterschiedlichen Schreibweisen

- Schreibweisen für Quantoren und ihre Skopus

- ▶  $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
- ▶  $\forall x.\exists y.P(x, y)$
- ▶  $\forall x\exists y.P(x, y)$
- ▶  $\forall x\exists y[P(x, y)]$

- Schreibweisen für Prädikate und ihre Argumente

- ▶  $P(x), P(x, y)$
- ▶  $P(x), P(\langle x, y \rangle)$
- ▶  $Px, Pxy$
- ▶  $Px, xPy$

# Quantorennegation (QN)

In Beweisen oft praktische Äquivalenzen mit negierten Quantoren

- $\neg(\forall x)Px \equiv (\exists x)\neg Px$

*Nicht alle Dinge sind Parkscheiben.*  $\equiv$  *Es gibt mindestens ein Ding, das keine Parkscheibe ist.*

- $\neg(\exists x)Px \equiv (\forall x)\neg Px$

*Es gibt keine Parkscheibe.*  $\equiv$  *Alle Dinge sind keine Parkscheiben.*

- $\neg(\forall x)\neg Px \equiv (\exists x)Px$

*Nicht alle Dinge sind keine Parkscheibe.*  $\equiv$  *Es gibt eine Parkscheibe.*

- $\neg(\exists x)\neg Px \equiv (\forall x)Px$

*Es gibt nichts, das keine Parkscheibe ist.*  $\equiv$  *Alle Dinge sind Parkscheiben.*

# Distributivgesetze (Distr.)

- Allquantordistribution

$$(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \equiv (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

- Existenzquantordistribution

$$(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \equiv (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

- Warum hingegen

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \text{ } \textcolor{green}{\vdash} \text{ } (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$$

aber

$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \text{ } \textcolor{red}{\not\vdash} \text{ } (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

# Quantorenbewegung – Nein, nicht in (Spec,CP)!

Wünschenswert: alle Quantoren ganz am Anfang

- Quantorenbewegung aus dem Antezedens von Konditionalen

$$(\exists x)P(x) \rightarrow \phi \equiv (\forall x)[P(x) \rightarrow \phi]$$

$$(\forall x)\underline{P(x)} \rightarrow \phi \equiv (\exists x)\underline{[P(x) \rightarrow \phi]}$$

- Quantorenbewegung aus Konjunktionen, Disjunktionen und Konsequenzen von Konditionalen: einfach nach vorne bewegen!

►  $(\exists x)P(x) \rightarrow (\exists y)F(y) \equiv (\forall x)(\exists y)[P(x) \rightarrow F(y)]$

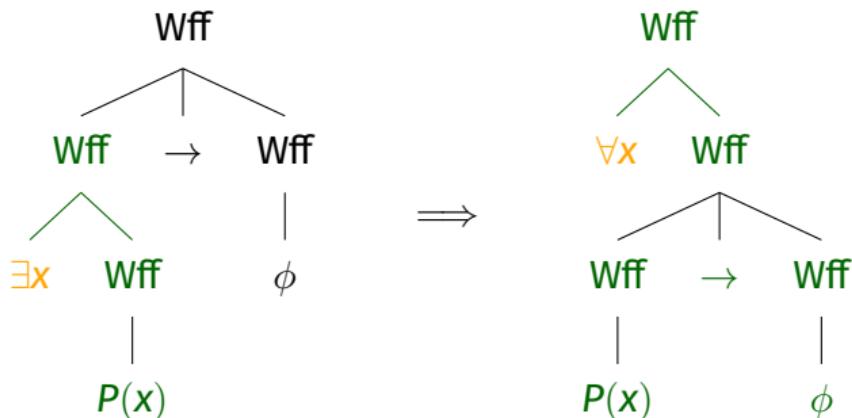
*Wenn es eine Parkscheibe gibt, gibt es einen Falk-Plan.  $\equiv$  Für alle Dinge x gilt, dass es ein Ding y gibt, sodass y ein Falk-Plan ist, wenn x eine Parkscheibe ist.*

►  $S(m) \vee (\exists x)P(x) \equiv (\exists x)[S(m) \vee P(x)]$

*Martin schläft oder es gibt eine Parkscheibe.  $\equiv$  Es gibt ein Ding x, sodass entweder Martin schläft oder dieses Ding eine Parkscheibe ist.*

- Bei Bewegung des Quantors von x darf x in der restlichen Formel nicht frei sein!

# Quantorenbewegung mit Bäumen



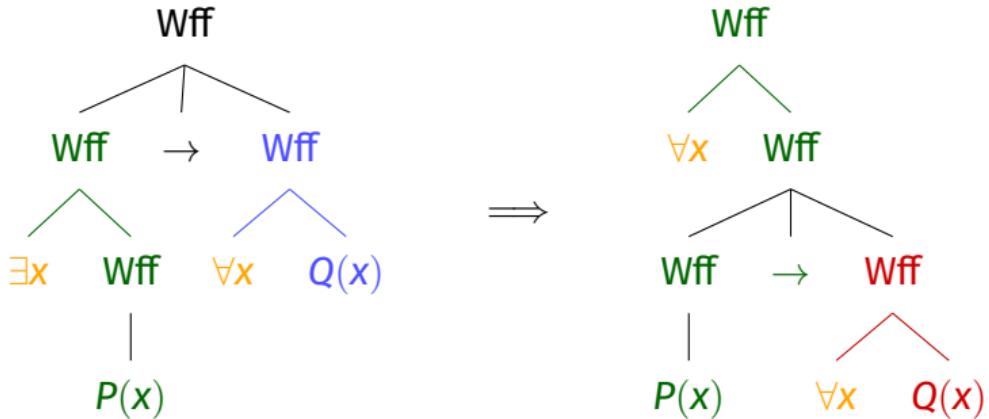
Bewegung = Ausweitung des Skopus

Wenn man möchte, kann man jetzt von c-Kommando reden.

Pränexe Normalform | Allen Quantoren maximalen Skopus geben

# Quantorenbewegung | Obacht auf die Variablen

Was steckt in  $\phi$ ?



Links | Unabhängig ausgewertete **quantifizierte**  $x$  mit **unabhängigem Skopus**  
Rechts | Problem! Das  $x$  im **roten Teilbaum** ist doppelt gebunden.

# Formalisieren üben

- drip-133 ist Musiker und mit Dan Bell befreundet.
- Wenn es Einhörner gibt, muss Jan singen.
- Er hat einen Netzfilter repariert, und nicht alle Komponenten waren verfügbar.
- Alle Fernsehpersönlichkeiten sind Menschen, und Heide ist eine Fernsehpersönlichkeit.
- Einige Fernsehpersönlichkeiten sind keine Musiker.
- Manche sind weder eine Fernsehpersönlichkeit, noch kennen sie Dan Bell.

# Universelle Instanziierung und Generalisierung

Schließen von **Allaussagen** auf **Individualaussagen** und umgekehrt

- Universelle Instanziierung  $\neg\forall$ 
  - ▶  $(\forall x)P(x) \vdash P(a)$   
*Wenn alle Dinge Eigenschaft P haben, hat Individuum a diese Eigenschaft.*
  - ▶ Für  $a$ : frische oder bereits verwendete Individuenkonstanten
- Universelle Generalisierung  $\forall$ 
  - ▶  $P(a) \vdash (\forall x)P(x)$
  - ▶ Nur, wenn  $a$  durch  $\neg\forall$  eingeführt wurde!
- Beispiel ... Substanzielles wird an Individuen bewiesen.

1 $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$	Alles ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.
2 $\neg P(m)$	Martin ist keine Parkscheibe.
<hr/> 3 $P(m) \vee Q(m)$	Martin ist entweder eine Parkscheibe oder besteht aus Quarks.
4 $Q(m)$	Martin besteht aus Quarks.
5 $(\forall x)Q(x)$	Alles besteht aus Quarks.

# Existenzielle Generalisierung und Instanziierung

Schließen von Individualaussagen auf Existenzaussagen und umgekehrt

- Existenzielle Generalisierung  $+ \exists$

- ▶  $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$

*Wenn ein benanntes Individuum Eigenschaft P hat, hat irgendein Individuum diese Eigenschaft.*

- ▶ Für x: nur frische Individuenvariablen

- Existenzielle Instanziierung  $- \exists$

- ▶  $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$

*Wir geben dem minimalen Träger der Eigenschaft einen Namen.*

- ▶ Für a: nur frische Individuenkonstanten

- Beispiel

1	$(\exists x)Q(x)$	<i>Es gibt ein Ding, das aus Quarks besteht.</i>
2	$(\forall y)[Q(y) \rightarrow P(y)]$	<i>Alles, was aus Quarks besteht, ist ein physikalisches Objekt.</i>
3	$Q(h)$	$1, -\exists$ <i>Ein Objekt, das wir jetzt Hoxnoxno nennen, besteht aus Quarks.</i>
4	$Q(h) \rightarrow P(h)$	$2, -\forall$ <i>Wenn Hoxnoxno aus Quarks besteht, ist Hoxnoxno ein physikalisches Objekt.</i>
5	$P(h)$	$3, 4, MP$ <i>Hoxnoxno ist ein physikalisches Objekt.</i>
6	$(\exists z)P(z)$	$5, +\exists$ <i>Es gibt physikalische Objekte.</i>

# Beispielaufgabe

(1) Herr Keydana fährt einen Golf. (2) Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt. **Zeigen oder widerlegen Sie: B: Es gibt mindestens einen Menschen.**

- 1  $G(k)$
- 2  $(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x)]$
- 3  $\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$   
 $(\exists z)M(z)$

# Der Beweis

1	$G(k)$	Herr Keydana fährt einen <u>Golf</u> .
2	$(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x)) \vee A(x)]$	Alles, was einen Golf fährt, ist entweder ein Mensch oder eine AI.
3	$\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$	Es gibt keine AI, die einen Golf fährt. $\vdash$ Es gibt mindestens einen Menschen.
4	$(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$	3, QN
5	$(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$	4, DeM
6	$(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$	5, Komm., Impl.
7	$G(k) \rightarrow \neg A(k)$	6, $\neg\forall(1)$
8	$\neg A(k)$	1, 7, MP
9	$G(k) \rightarrow M(k) \vee A(k)$	2, $\neg\forall(1)$
10	$M(k) \vee A(k)$	1, 9, MP
11	$M(k)$	8, 10, DS
12	$(\exists z)M(z)$	11, + $\exists$ ■

1 Treffen die folgenden Behauptungen zu?

- ①  $\forall x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \neg \exists x \neg(P(x) \leftrightarrow Q(x))$
- ②  $\neg \neg \forall x(R(x) \vee \neg \neg S(x)) \equiv \neg \exists x \neg(R(x) \vee S(x))$
- ③  $\exists x(P(x) \wedge P(x)) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$

2 Versuchen Sie, intuitiv zu formulieren, warum die auf Folie 136 besprochene Einschränkung bei der Quantorenvertauschung besteht. Gemeint ist:

$$(\forall x)(\exists y)\phi \not\vdash (\exists y)(\forall x)\phi$$

- 1 Alle Lügner sind unglaublich. Einige Lügner sind Zugschaffner.  
Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Zugschaffner sind unglaublich.
- 2 Alle Flugzeuge sind Automaten. Einige Automaten sind besorgniserregend.  
Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Flugzeuge sind besorgniserregend.
- 3 Kein Käufer wird betrogen. Einige Käufer sind auch Händler.  
Zeigen/Widerlegen Sie: Einige Händler werden nicht betrogen.

## Quantifikation und Modelltheorie

Wie modelliert man natürliche Sprache als Prädikatenlogik?

Wozu braucht man Quantorenbewegung (LF) in GB-Ansätzen?

Wie sieht eine ausbuchstabierte Modelltheorie aus?

Und wie werden Quantoren und Variablen modelltheoretisch  
interpretiert?

Text für heute: Chierchia & McConnell-Ginet (2000: Kapitel 3)

## Semantik von Fragment F1

- Namen referieren auf spezifische Individuen
- intransitive Verben referieren auf Mengen von Individuen
- mehrstellige Verben referieren auf Mengen von Tupeln von Individuen
- Sätze referieren auf Wahrheitswerte!
- F2 | Integration von Erkenntnissen aus Prädikatenlogik

## Wie situationsabhängige Namen

*This is red.*

- Pronomen *this* | syntaktisch eine NP
- ... und referiert auf **ein spezifisches Objekt** (wie Namen)  
keine Quantifikation bzw. Mengenreferenz
- Aber **nur in gegebener Situation interpretierbar**  
Deixis, im Text auch Anaphorik
- Kein Äquivalent in klassischer Logik

## Ähnlichkeit von Variablen und Pronominalausdrücken

- Rumpf einer quantifizierten Wff | Wff  $P(x)$  aus Wff  $(\forall x)Px$
- Ungebundenes  $x$  in  $P(x)$  **ähnlich wie Pronominalbedeutung**  
Externe Interpretationsvorschrift erforderlich
- Quantoren | Auswertungsalgorithmus  
Für alle möglichen Belegungen von  $x$ ,  $P(x)$
- Pronomina | Kontextuelle Auswertung  
Belegung für  $x$  im gegebenen Kontext

## Als Vorüberlegung | Prädikatenlogik als Phrasenstrukturgrammatik

*a* → *const, var* | Individuausdrücke

*conn* →  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  | Funktoren

*neg* →  $\neg$  | Negation

*Q* →  $\exists, \forall$  | nur zwei Quantoren

*pred*<sup>1</sup> → *P, Q* | einstellige Prädikate

*pred*<sup>2</sup> → *R* | zweistellige Prädikate

*pred*<sup>3</sup> → *S* | dreistellige Prädikate

*const* → *b, c* | nur zwei Individuenkonstanten

*var* → *x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>, … x<sub>n</sub>* | beliebig viele Variablen

- Die Formalisierung ist äquivalent zur mengenbasierten von letzter Woche!

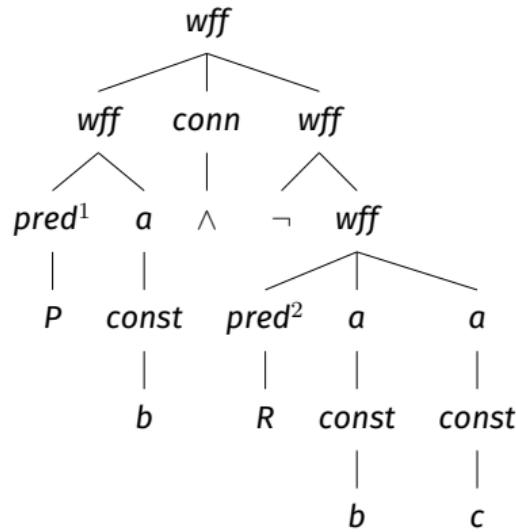
Wir nehmen eine Prädikatsnotation ohne Klammern |  $Px$  statt  $P(x)$  usw.

- $wff \rightarrow pred^1 a_1 \dots a_n$  | n-stellige Prädikate und ihre Argumente
- $wff \rightarrow neg\ wff$  | Applikation von Negation auf Wffs
- $wff \rightarrow wff\ conn\ wff$  | Applikation von anderen Funktoren auf Wffs
- $wff \rightarrow Q\ var\ wff$  | Quantifikation

# Eine Wff ohne Quantoren

Zum Beispiel: Ben (b) paddelt (P) und ( $\wedge$ ) Ben rudert (R) nicht ( $\neg$ ) mit Chris (c).

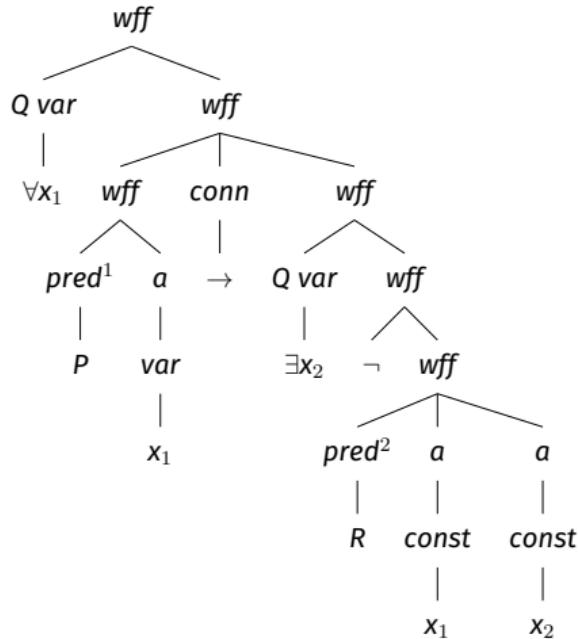
In PL:  $Pb \wedge \neg Rbc$



# Eine Wff mit Quantoren

Zum Beispiel: *Als Paddler hat man immer jemanden, mit dem man nicht rudert.*

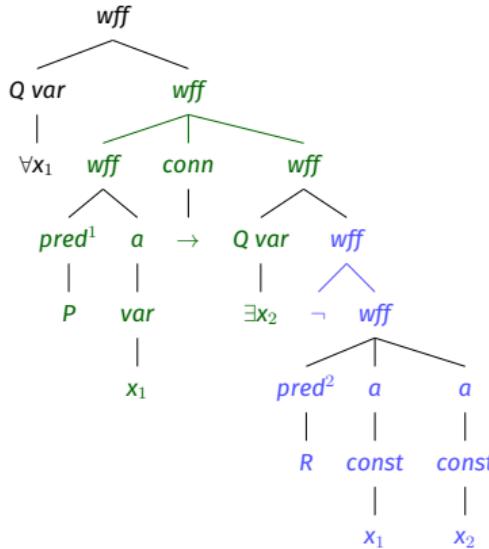
In PL:  $\forall x_1 [Px_1 \rightarrow \exists x_2 \neg Px_1 x_2]$



# Skopus und c-Kommando

Skopus in konfigurationaler Logik-Syntax: c-Kommando

Variablen als gebunden vom nächsten c-kommmandierenden koindizierten Quantor



Skopus/c-Kommando-Domäne von  $\exists x_2$  | Skopus/c-Kommando-Domäne von  $\forall x_1$  (zgl. derer von  $\exists x_2$ )

Ziel (zur Erinnerung) | T-Sätze der Form  $S$  aus  $L$  ist wahr in  $v$  gdw ...

- **Modell  $\mathcal{M}$**  | zugängliches Diskursuniversum (bzw. dessen Beschreibung)
- **Menge  $D_n$**  | Zugängliche Individuen (*domain*) in  $\mathcal{M}_n$
- **Funktion  $V_n$**  | Valuation – Zuweisung von
  - ▶ Namen zu Individuen in  $\mathcal{M}_n$
  - ▶ Predikaten zu Tupeln von Individuen
- $\mathcal{M}_n = \langle D_n, V_n \rangle$
- **Funktion  $g_n$**  | Zuweisung von Variablen zu Individuen in  $\mathcal{M}_n$
- **Allgemeine Evaluation in  $\mathcal{M}_n$**  |  $\llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}_n, g_n}$   
Lies: Die Extension von Ausdruck  $\alpha$  relativ zu  $\mathcal{M}_n$  und  $g_n$

## Feste und variable Denotation

- $V_n$  evaluiert **statisch** im Modell.

Wenn das Modell einmal feststeht, evaluiert  $V_n$  jede Konstante stets gleich.

- Variablen (gebunden durch Quantoren) werden **volatile interpretiert**.
- **Iteration** durch Universum  $D_n$  durch  $g_n$
- Eine Modifikation der Belegung pro Iteration
  - ▶ Modifizierte *assignment function*  $g_n[d_i/x_m]$   
Lies: *relativ zu  $g_n$ , wobei die Referenz von Variable  $x_m$  auf Individuum  $d_i$  gesetzt wird*

# Evaluation von Variablen

$D_1 = \{Herr\ Webelhuth, Frau\ Klenk, Turm - Mensa\}$  | Individuen in  $\mathcal{M}_1$

$V_1(P) = \{Herr\ Webelhuth, Frau\ Klenk, Turm - Mensa\}$  | Prädikat  $P$  (z. B. ist ein physikalisches Objekt) in  $\mathcal{M}_1$

Evaluiere  $\llbracket \forall x_1 P x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1} = 1$  weil keiner Belegung  $\llbracket P x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1} = 0$

- Initiale Belegung  $\llbracket x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1} = Herr\ Webelhuth$

$$g_1 = \begin{bmatrix} x_1 \rightarrow Herr\ Webelhuth \\ x_2 \rightarrow Herr\ Webelhuth \\ x_3 \rightarrow Herr\ Webelhuth \end{bmatrix}$$

$$\llbracket P x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1} = 1$$

- $\llbracket x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Klenk/x_1]} = Frau\ Klenk$

$$g_1 = \begin{bmatrix} x_1 \rightarrow Frau\ Klenk \\ x_2 \rightarrow Herr\ Webelhuth \\ x_3 \rightarrow Herr\ Webelhuth \end{bmatrix}$$

$$\llbracket P x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Klenk/x_1]} = 1$$

- $\llbracket x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Turm-Mensa/x_1]} = Turm - Mensa$

$$g_1 = \begin{bmatrix} x_1 \rightarrow Turm - Mensa \\ x_2 \rightarrow Herr\ Webelhuth \\ x_3 \rightarrow Herr\ Webelhuth \end{bmatrix}$$

$$\llbracket P x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Mensa/x_1]} = 1$$

# Evaluation mit zwei Variablen

$D_1 = \{Herr\ Webelhuth, Frau\ Klenk, Turm - Mensa\} \mid$  Individuen in  $\mathcal{M}_1$

$V_1(Q) = \{\langle Webelhuth, Klenk \rangle, \langle Webelhuth, Mensa \rangle, \langle Klenk, Webelhuth \rangle\} \mid$  Prädikat  $Q$  (z. B.  $x$  besucht  $y$ ) in  $\mathcal{M}_1$

Evaluiere  $\llbracket \forall x_1 \exists x_2 Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1} = 0$  weil nicht für jede Belegung von  $x_1$  mindestens einmal 1

- Initiale Belegung  $\llbracket x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1} = Frau\ Klenk$ 
  - ▶  $\llbracket Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1} = 0$
  - ▶  $\llbracket Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Klenk/x_2]} = 0$
  - ▶  $\llbracket Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Webelhuth/x_2]} = 1$
- $\llbracket x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Turm - Mensa/x_1]} = Turm - Mensa$ 
  - ▶  $\llbracket Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Turm - Mensa/x_1]} = 0$
  - ▶  $\llbracket Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Turm - Mensa/x_1, Klenk/x_2]} = 0$
  - ▶  $\llbracket Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Turm - Mensa/x_1, Webelhuth/x_2]} = 0$   
**Abbruch!**
- $\llbracket x_1 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Webelhuth/x_1]} = Herr\ Webelhuth$ 
  - ▶  $\llbracket Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Webelhuth/x_1]} = 1$
  - ▶  $\llbracket Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Webelhuth/x_1, Klenk/x_2]} = 1$
  - ▶  $\llbracket Qx_1 x_2 \rrbracket^{\mathcal{M}_1, g_1[Webelhuth/x_1, Webelhuth/x_2]} = 0$

Wie quantifiziert *meist*?

- Kleineres Problem |  $\exists$  sowohl *mindestens ein* als auch *einige*
- Grundsätzliches Problem | *meist* (und andere)
  - Die meisten Patienten sind zufrieden.*
  - ▶ Hypothetischer Quantor  $W$  |  $WxPx \rightarrow Zx$   
Für die meisten Objekte gilt, dass sie zufrieden sind, wenn sie Patienten sind.
  - ▶ **Falsche Interpretation** | Domäne =  $\llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}_1} \{x : x \text{ ist Patient}\}$ , nicht  $D_1$
- Korrekte Lösung | Generalisierte Quantoren (am Ende des Seminars)

In PL ist Skopus klar geregelt, in natürlicher Sprache nicht.

- c-Kommando für Skopus nicht adäquat
- Natürliche Sprache ohne pränexe Normalform (PNF), Quantor in situ
- Außerdem Ambiguität = mehrere Lesarten
  - ▶ *Everybody loves somebody.* (ELS)
  - ▶  $\forall x_1 \exists x_2 Lx_1 x_2$
  - ▶  $\exists x_2 \forall x_1 Lx_1 x_2$
- Für eine strukturelle Modellierung (c-Kommando) | LF-Bewegung
- Beispiele für andere Lösungen, mehr in Montagues lf-Tradition
  - ▶ Cooper Storage (implementiert in HPSG)
  - ▶ Unterspezifikation (implementiert in HPSG; kognitiv recht plausibel)
  - ▶ Hypothetische Beweise (implementiert in Kategorialgrammatik)

Relevante syntaktische Erweiterung zu  $F_1$  | Quantifier Raising (QR) Rule

$$[s X NP Y] \implies [s' NP_i [s X t_i Y]]$$

- Phrasenstruktur als Input und Output (= Skopus in Syntax, LF als Syntax)
- Koindizierung und Linksadjunktion an S beide Teil einer Regel
- Kein wesentlicher Unterschied, falls CP oder IP statt S
- Außerdem |  $\text{Det} \rightarrow \text{every, some}$  and  $\text{NP} \rightarrow \text{Det } N^{\text{count}}$
- Syntax-Problem | Völlig unnötig eine kontextsensitive Regel
- Semantik-Probleme bei Chierchia
  - ▶ Einführung syntaktischer Typen wird skizzenhaft (s. Montague)
  - ▶ Definition zulässiger Modelle unterschlagen (s. Montague)

$$\llbracket [[\text{every } \beta]_i S] \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = 1 \text{ iff for all } d \in D : \\ \text{if } d \in \llbracket \beta \rrbracket^{\mathcal{M}, g} \text{ then } \llbracket S \rrbracket^{\mathcal{M}, g[u/t_i]}$$

A sentence containing the trace  $t_i$  with an adjoined  $NP_i$  (which consists of *every* plus the common noun  $\beta$ ) extends to 1 iff for each individual  $d$  in the universe  $D$  which is in the set referred to by the common noun  $\beta$ ,  $S$  denotes 1 with  $d$  assigned to the pronominal trace  $t_i$ .  $g$  is modified iteratively to check that.

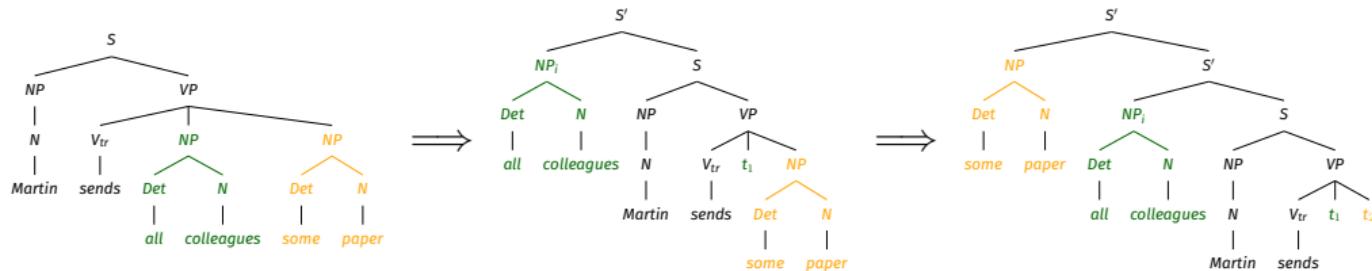
## Semantik für QR-Regel mit *some*

$$\llbracket [ [a \beta]_i S ] \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = 1 \text{ iff for some } u \in U : \\ u \in \llbracket \beta \rrbracket^{\mathcal{M}, g} \text{ and } \llbracket S \rrbracket^{\mathcal{M}, g[u/t_i]}$$

Die Interpretation erfolgt nach ähnlichem Schema.

*Martin sends all colleagues some paper.*

This is the  $\exists\forall$  reading:



# Aufgaben I

Erweitern Sie das Fragment  $D_1$  des Deutschen aus Woche 2 zu  $D_2$ , um folgende Sätze modellieren zu können. Das Fragment soll Quantorenanhebung als Transformationsregel beinhalten. Sie dürfen bei der Morphologie und der V2/VL-Syntax wieder „schummeln“ und so tun, als wäre Deutsch einfacher, als es ist. Geben Sie außerdem ein minimales Modell an, in dem mindestens einer der Sätze wahr und mindestens einer der Sätze falsch ist.

Wenn Sie den Unterschied zwischen *Linguistin* und *Linguist* berücksichtigen wollen, überlegen Sie wie das zugehörige Modell aussieht, und was sich eventuell an den Wahrheitswerten der Sätze ändert, wenn sie eins der beiden Wörter als „generisch“ annehmen.

- Ein Aktivist ist auch Linguist.
- Mindestens ein Mensch ist Linguist.
- Ein Aktivist läuft.
- Alle Linguisten laufen und eine Linguistin ist kreativ.

## Aufgaben II

- 1 Überlegen Sie, wie die Auswertung einfacher quantifizierter Sätze mit der Zuweisungsfunktion  $g$  funktionieren müsste, wenn Quantoren mit den Interpretationen folgender natürlichsprachlicher Ausdrücke hinzugefügt würden:
  - 1 *genau zwei*
  - 2 *mindestens drei*
  - 3 *weniger als drei*
  - 4 *höchstens vier*
  - 5 *eine große Anzahl von*
  - 6 *einige* im Gegensatz zu *ein* bzw. *mindestens ein*
  - 7 *viel wie* in *viel Mehl*
  - 8 *500g wie* in *500g Mehl*
  - 9 *die wenigsten*
- 2 Überlegen Sie (ggf. über unser einfaches Quantifikationsmodell hinaus), was der Unterschied zwischen *alle* und *jeder* im Deutschen bzw. *each*, *every* und *all* im Englischen ist.
- 3 Was ist das Problem für den bisherigen Ansatz, wenn Sie quantifizierende Ausdrücke wie *einmal*, *ofters*, *ab und zu* usw. modellieren möchten.

## Aufgaben III

Das Deutsche funktioniert etwas anders als das Englische, was Quantorenlesarten angeht. Denken Sie über die Quantoren-Lesarten folgender Sätze nach. Die Einbettung in das assertive Fragment dient nur dazu, Vorfeldeffekte auszuschalten.

- 1 *Alle Kollegen haben ein Buch gelesen.*
- 2 *Ein Buch haben alle Kollegen gelesen.*
- 3 *Zwei Kollegen sind mit drei Autos gefahren.*
- 4 *Mit drei Autos sind zwei Kollegen gefahren.*
- 5 *Zwei Kolleginnen haben allen Kollegen ein Buch gegeben.*
- 6 *Allen Kollegen haben zwei Kolleginnen ein Buch gegeben.*
- 7 *Ein Buch haben zwei Kolleginnen allen Kollegen gegeben.*
- 8 *Zwei Kolleginnen haben ein Buch allen Kollegen gegeben.*

## Getypte höherstufige $\lambda$ -Sprachen

Wie unterscheidet sich Montagues System von GB-Semantik?

Welche Rolle spielen **Typen**?

Was sind  **$\lambda$ -Sprachen**?

Und woher kennen Sie den  $\lambda$ -Operator eigentlich schon?

Texte für heute: Dowty u. a. (1981: Kapitel 4) | Chierchia & McConnell-Ginet 2000: Kapitel 7

Es geht wie immer auch ohne Bewegung.

- Chierchia | auf Grundlage von GB-Syntax
  - ▶ Syntax und Semantik in Phrasenstrukturen
  - ▶ Sprache wird zu Logik durch unsichtbare Bewegung.
  - ▶ Semantik als eigene Repräsentationsebene
- Montague | Sprache ist Logik!
  - ▶ Direkte Interpretation von Zeichen als logische Symbole
  - ▶ Logische Form (lf) als Sichtbarmachen logischer Eigenschaften
  - ▶ Keine Übersetzung

## Mengen, über Funktionen definiert

- Große Bedeutung von Mengen in formaler Semantik
- Charakteristische Funktion von Mengen  
 $S(a) = 1 \text{ iff } a \in S, \text{ else } 0$
- CF als Einsortierung in ihre Menge
- CF in Mengendefinitionen  
 $S = \{x : x \bmod 2 = 0\}$   
 $S = f(x)[x \bmod 2 = 0]$
- Äquivalenz von Mengendenotation und CF-Dontation

## Funktionsapplikation als allgemeiner Kompositionsmechanismus

- Etwas umständliche Interpretation mit T-Sätzen  
 $\llbracket [s \ NP \ VP] \rrbracket^{\mathcal{M},g} = 1 \text{ iff } \llbracket NP \rrbracket^{\mathcal{M},g} \in \llbracket VP \rrbracket^{\mathcal{M},g}$
- CF statt Mengen | Funktion appliziert direkt!
  - ▶  $\llbracket Mary \rrbracket^{\mathcal{M},g} = Mary \text{ in } \mathcal{M}$
  - ▶  $\llbracket sleeps \rrbracket^{\mathcal{M},g}$  be the CF of the set of sleepers in  $\mathcal{M}$
  - ▶  $\llbracket S \rrbracket^{\mathcal{M},g} = \llbracket sleeps \rrbracket^{\mathcal{M},g}(\llbracket Mary \rrbracket^{\mathcal{M},g})$
  - ▶ Kein Bedarf an T-Sätzen

Funktionen von Mengen von (Tupeln von) Individuen zu Ausdrücken usw.

- Funktionen **Definitionsbereich**  $S_1 \rightarrow$  **Wertebereich**  $S_2 \mid S_2^{S_1}$   
 $S_2^{S_1} \mid$  Die Menge aller Funktionen von  $S_1$  zu  $S_2$
- Beispiel | Einstellige und Zweistellige Prädikate
  - ▶  $T = \{0, 1\} \mid$  Wahrheitswerte
  - ▶  $D \mid$  Diskursuniversum (Menge aller Individuen)
  - ▶  $D \times D \mid$  Menge aller 2-Tupel von Individuen
  - ▶  $T^D \mid$  Menge aller Funktionen von Individuen zu Wahrheitswerten  
Menge der CFs aller einstelligen Prädikate
  - ▶  $T^{D \times D} \mid$  Menge aller Funktionen von 2-Tupeln von Individuen zu Wahrheitswerten  
Menge der CFs aller zweistelligen Prädikate

# Kein Bedarf an Phrasenkategorien

Logik hat bereits **Typensysteme**, um Syntax zu strukturieren!

- $L_{Type}$  | Prädikatenlogik  $L_1$  plus Typen
- **Typen** | Semantisch fundierte Klassen von Ausdrücken
- Einfache Typen
  - ▶ Terme |  $\langle e \rangle$
  - ▶ Wffs/Formeln |  $\langle t \rangle$  | Ersetzt Startsymbol S der PSG!
- Komplexe/funktionale Typen
  - ▶ Einstellige Prädikate |  $\langle e, t \rangle$
  - ▶ Zweistellige Prädikate |  $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$
- Allgemein |  $\langle \sigma, \tau \rangle$ -Ausdrücke denotieren Funktionen von Denotaten von  $\langle \sigma \rangle$ -Ausdrücken zu Denotaten von  $\langle \tau \rangle$ -Ausdrücken.

Homogenes Diskursuniversum  $D$  (auch  $U$  und bei Dowty u.a. 1981  $A$ )

- Allgemein  $D_\alpha$  | Menge von Denotaten von Ausdrücken des Typs  $\alpha$
- Einfache Typen
  - ▶  $D_{\langle e \rangle} = U$
  - ▶  $D_{\langle t \rangle} = \{0, 1\}$
- Komplexe Typen | Rekursiv definierte Denotate
  - ▶
  - ▶ Allgemein |  $D_{\langle \alpha, \beta \rangle} = D_{\langle \beta \rangle}^{D_{\langle \alpha \rangle}}$
  - ▶ Einstellige Prädikate |  $D_{\langle e, t \rangle} = D_{\langle t \rangle}^{D_{\langle e \rangle}}$
  - ▶ Zweistellige Prädikate |  $D_{\langle e, \langle e, t \rangle \rangle} = (D_{\langle t \rangle}^{D_{\langle e \rangle}})^{D_{\langle e \rangle}}$
- Interpretation weiterhin durch  $V, g$

$\langle\sigma\rangle$ -Ausdrücke saturieren  $\langle\sigma, \tau\rangle$ -Ausdrücke zu  $\langle\tau\rangle$ -Ausdrücken.

- Beispiel für Saturierung durch **Funktionsapplikation (FA)**
  - ▶ Wenn  $P$  vom Typ  $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$ ,  $Q$  vom Typ  $\langle e, t \rangle$  und  $x, y$  vom Typ  $\langle e \rangle$
  - ▶ dann ist  $Q(x)$  vom Typ  $\langle t \rangle$
  - ▶ und  $P(x)$  vom Typ  $\langle e, t \rangle$  sowie  $P(x)(y)$  vom Typ  $\langle t \rangle$
- Funktionale Typen von **Funktoren**
  - ▶ Negation  $\neg$  | Typ  $\langle t, t \rangle$
  - ▶ Andere Funktoren  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  | Typ  $\langle t, \langle t, t \rangle \rangle$

Wirklich keine T-Sätze mehr!

- Semantik für  $\langle e \rangle$ -Typen (Terme)

$$\llbracket a_n \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = \textcolor{blue}{V}(a_n)$$
$$\llbracket x_n \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = \textcolor{blue}{g}(x_n)$$

- Ansonsten nur FA

$$\llbracket \delta(\alpha) \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = \llbracket \delta \rrbracket^{\mathcal{M}, g}(\llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, g})$$

Sprache höherer Ordnung = Sprache mit Variablen über höhere Typen  $\langle\sigma, \tau\rangle$

- Type ist die Menge aller Typen
  - ▶  $\langle e \rangle, \langle t \rangle \in Type$
  - ▶ Wenn  $\langle\sigma\rangle, \langle\tau\rangle \in Type$ , dann  $\langle\sigma, \tau\rangle \in Type$
  - ▶ Nichts sonst ist in Type.
- ME ist die Menge aller bedeutungsvollen Ausdrücke
  - ▶  $ME_\sigma$  ist die Menge der Ausdrücke vom Typ  $\sigma$  |  $ME = \bigcup ME_\sigma$  mit  $\sigma \in Type$
  - ▶ Ty ist eine Funktion von Ausdrücken zu ihren Typen |  $Ty(a) = \sigma$  iff  $a \in ME_\sigma$
- Höhere Ordnung | Variablen über Ausdrücke von funktionalen Typen
  - ▶  $P_{\langle e, t \rangle}$  und  $Q_{\langle e, \langle e, t \rangle \rangle}$  | Bekannte Konstanten höherer (=funktionaler) Typen
  - ▶ Parallel  $v_{n_{\langle e, t \rangle}}$  | Die n-te Variable über einstellige Prädikate
  - ▶ Damit möglich  $M = \{v_{1_{\langle e, t \rangle}} : \llbracket v_{1_{\langle e, t \rangle}}(m) \rrbracket = 1\}$   
Wenn  $\llbracket m \rrbracket = Maria$ , dann ist  $M$  die Menge von Marias Eigenschaften!

Zusammenfassung | Die Semantik reduziert sich auf FA und Variablenauswertung.

- Interpretation von Termen und Funktionsausdrücken
  - ▶ Nicht-logische Konstanten |  $\alpha: \llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = V(\alpha)$
  - ▶ Variablen |  $\alpha: \llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = V(\alpha)$
  - ▶ Wenn  $\alpha \in \langle a, b \rangle$  und  $\beta \in a$  dann  $\llbracket \alpha(\beta) \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = \llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, g}(\llbracket \beta \rrbracket^{\mathcal{M}, g})$
- Logische Konstanten (Typen  $\langle t, t \rangle$  und  $\langle t, \langle t, t \rangle \rangle$ ) denotieren Funktionen in  $\{0, 1\}$ .
- Quantoren
  - ▶ Für Variable  $v_{1_{\langle \alpha \rangle}}$  und Wff  $\phi \in ME_t$  ist  $\llbracket (\forall v_1)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = 1$  gdw für alle  $a \in D_\alpha$   $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}, g[a/v_1]} = 1$
  - ▶ Für Variable  $v_{1_{\langle \alpha \rangle}}$  und Wff  $\phi \in ME_t$  ist  $\llbracket (\exists v_1)\phi \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = 1$  gdw für mindestens ein  $a \in D_\alpha$   $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}, g[a/v_1]} = 1$

# Beispiel | Quantifikation über Prädikate

$$\forall v_{0\langle e,t\rangle} \left[ v_{0\langle e,t\rangle}(j) \rightarrow v_{0\langle e,t\rangle}(d) \right]$$

- Eine quantifizierbare Variable vom Typ  $\langle e, t \rangle$  |  $v_{0\langle e,t\rangle}$
- Zwei Individuenkonstanten |  $j, d \in ME_{\langle e \rangle}$  z. B. John und Dorothy
- Für alle einstelligigen Prädikate gilt: Wenn  $j$  die vom Prädikat beschriebene Eigenschaft hat, hat  $d$  auch diese Eigenschaft.
- Wann ist diese Wff wahr?
  - ▶ Wenn  $j$  und  $d$  alle benennbaren Eigenschaften teilen?
  - ▶ Eine Eigenschaft jedes Objekts |  
CF der Menge  $\{x : x \text{ is the sole member of this set}\}$  (union set)
  - ▶ Einzige Möglichkeit für Wahrheit der Wff also  $j=d$

# Beispiel | Wortbildung mit Präfix *non*

*non* in Sätzen wie *This function is non-continuous.*

- Produktives Suffix im Englischen, wie *nicht-* im Deutschen
- Bedeutungsbeitrag | Invertiert die CF eines Adjektivs
- Komplementbildung der Ursprungsmenge in  $D_{\langle e, t \rangle}$
- Syntax und Semantik von *non*
  - ▶ Adjektiv *continuous* | Typ  $\langle e, t \rangle$
  - ▶ Typ von *non* | In: Adjektiv /Out: Adjektiv |  $\langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle$
  - ▶  $\llbracket \text{non} \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = h$  s.t.  $h \in D_{\langle \langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle}$  and for every  $k \in D_{\langle e, t \rangle}$  and every  $d \in D_{\langle e \rangle}$   
 $(h(k))(d) = 1$  iff  $k(d) = 0$  and  $(h(k))(d) = 0$  iff  $k(d) = 1$

# Beispiel | Argumentunterdrückung

Optionale Argumente wie in *I eat.* oder *Vanity kills.*

- Zweistellige Verben wie *eat* in  $ME_{\langle e, \langle e, t \rangle \rangle}$
- Aus einem zweistelligen Verb ein einstelliges machen
  - ▶ Phonologisch leere lexikalische Konstante |  $R_0 \in ME_{\langle \langle e, \langle e, t \rangle \rangle, \langle e, t \rangle \rangle}$   
Ähnlich wie lexikalische Regeln in HPSG
  - ▶ Semantik |  $\llbracket R_0 \rrbracket^{\mathcal{M}, g} = h$  s.t.  $h \in D_{\langle \langle e, \langle e, t \rangle \rangle, \langle e, t \rangle \rangle}$  and for all  $k \in D_{\langle e, \langle e, t \rangle \rangle}$  and all  $d \in D_{\langle e \rangle}$   
 $(h(k))(d) = 1$  iff there is some  $d' \in D_{\langle e \rangle}$  s.t.  $k(d')(d) = 1$

Was bedeutet  $f(x) = 3x^2 + 5x + 8$  ?

- $3x^2 + 5x + 8$  ist eine Wff mit einer ungebundenen Variable.
- Die Variable wird gebunden und die Wff wird damit zur Funktion  
 $x$  wird zur EingabevARIABLE und muss bei Anwendung durch Eingabewert ersetzt werden.
- Außerdem wird die Funktion  $f$  genannt.

In  $\lambda$ -Notation:  $f \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x [3x^2 + 5x + 8]$

Mit  $\lambda$  bildet man ad hoc anonyme Funktionen.

- Abstraktion über Wffs beliebiger Komplexität
- $\lambda$ -Bindung der Variable | Gebundene Variable als Eingabeveriable der Funktion
- Sehr ähnlich wie Listendefinition
  - ▶ Menge |  $\{x : x \text{ mod } 2 = 0\}$  | allgemein  $\{x : \phi\}$
  - ▶ CF dieser Menge |  $\lambda x [x \text{ mod } 2 = 0]$  | allgemein  $\lambda x [\phi]$

## Nur wenige Erweiterungen in $L_{Type}$

- Für jede Wff  $\phi$  mit  $Ty(\phi) = \langle t \rangle$  und jede  $x \in Var$  und jede  $a \in Con$ 
  - ▶ Abstraktion |  $\phi \implies \lambda x [\phi^{[a/x]}]$   
Definition  $\phi^{[a/x]}$  | Wff  $\phi$  in der alle  $a$  durch  $x$  getauscht wurden
  - ▶ Anwendung der Funktion ( $\lambda$ -Konversion) |  $\lambda x [\phi^{[a/x]}](a) = \phi$
- Es gilt  $\lambda x [\phi^{a/x}](a) \equiv \phi$  für jede Wff  $\phi$ , jede  $a \in Con$  und jede  $x \in Var$
- $x$  kann von einem beliebigen Typ  $\sigma$  sein.
- Es gilt für  $\lambda x [\phi]$  mit  $x \in ME_{\langle \sigma \rangle}$  stets  $\phi \in ME_{\langle t \rangle}$  sowie  $\lambda x [\phi] \in ME_{\langle \sigma, t \rangle}$

# Zwei Beispiele

## Abstraktion über Individuenvariable und Prädikatsvariable

- Individuenvariable  $x_{\langle e \rangle}$  alternativ  $v_{1_{\langle e \rangle}}$ 
  - ▶  $\lambda x_{\langle e \rangle} [L(x)]$
  - ▶ Mit  $L$  z. B. für *laughs*
  - ▶ Die CF der Menge von Individuen  $d \in D_{\langle e \rangle}$  mit Eigenschaft  $L$  (alle Lachenden)
  - ▶ Mengendefinition dazu  $\{x : L(x)\}$
- Prädikatsvariable  $P_{\langle e,t \rangle}$  alternativ  $v_{1_{\langle e,t \rangle}}$ 
  - ▶  $\lambda P_{\langle e,t \rangle} [P(l)]$
  - ▶ Mit  $l$  z. B. für *Horst Lichter*
  - ▶ Die CF aller Eigenschaften  $k \in D_{\langle e,t \rangle}$  von  $l$  (alle Eigenschaften Horst Lichters)
  - ▶ Mengendefinition dazu  $\{P : P(l)\}$

Die vollen Regeln aus Dowty u. a. (1981: 102) (Syn C.10 and Sem 10)

- If  $\alpha \in ME_\alpha$  and  $u \in Var_b$ , then  $\lambda u [\alpha] \in ME_{\langle b, a \rangle}$ .
- If  $\alpha \in ME_a$  and  $u \in Var_b$  then  $\llbracket \lambda u [\alpha] \rrbracket^{\mathcal{M}, g}$  is that function  $h$  from  $D_b$  into  $D_a$  ( $h \in D_a^{D_b}$ ) s.t. for all objects  $k$  in  $D_b$ ,  $h(k)$  is equal to  $\llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, g[k/u]}$ .

## Konversionen/Reduktionen | Arten, $\lambda$ -Ausdrücke umzuschreiben

- $\alpha$ -Konversion | Umbenennung von Variablen
  - ▶  $\lambda x[\phi] \stackrel{\alpha}{=} \lambda y[\phi^{[x/y]}]$  gdw  $y$  in  $\phi$  nicht vorkommt
- $\beta$ -Reduktion | Funktionsapplikation
  - ▶  $\lambda x[\phi](a) \stackrel{\beta}{=} \phi^{[x/a]}$
  - ▶ Ausdrücke mit nicht realisierten, aber möglichen  $\beta$ -Reduktionen:  $\beta$ -Redex
- $\eta$ -Reduktion | Entfernen von leeren Abstraktionen
  - ▶  $\lambda x[F(x)] \stackrel{\eta}{=} F$  gdw  $Ty(F) = Ty(\lambda x[F(x)])$  (und  $x$  nicht frei in  $F$  ist)
  - ▶ Ausdruck mit nicht realisierten, aber möglichen  $\eta$ -Reduktionen:  $\eta$ -Redex
  - ▶ Mäßige Semantiker |  $\eta$ -Redex-Fetisch mit  $\lambda x\lambda y\lambda z[gibt'(x,y,z)]$  usw.

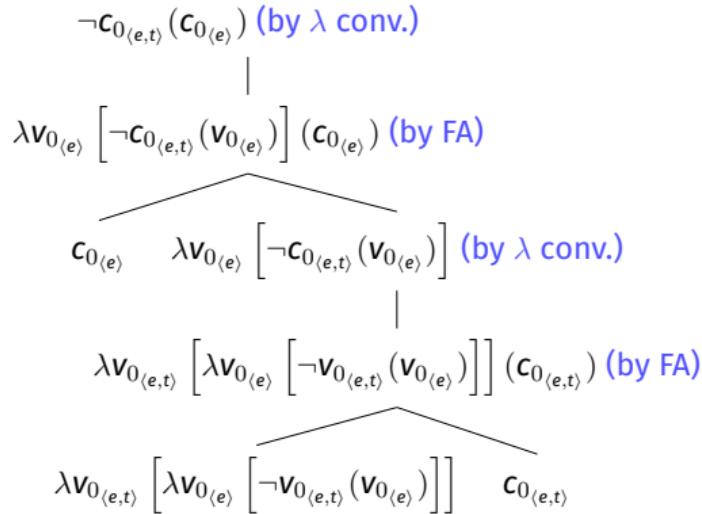
Das können Sie jetzt nachvollziehen!

- $\forall x \forall v_{0(e,t)} \left[ (\mathbf{non}(v_{0(e,t)}))(x) \leftrightarrow \neg(v_{0(e,t)}(x)) \right]$
- $\forall v_{0(e,t)} \left[ \lambda x \left[ (\mathbf{non}(v_{0(e,t)}))(x) \right] = \lambda x \left[ \neg(v_{0(e,t)}(x)) \right] \right]$
- $\lambda v_{0(e,t)} \left[ \mathbf{non}(v_{0(e,t)}) = \lambda v_{0(e,t)} \left[ \lambda x \left[ \neg(v_{0(e,t)}(x)) \right] \right] \right]$
- $\mathbf{non} = \lambda v_{0(e,t)} \left[ \lambda x \left[ \neg(v_{0(e,t)}(x)) \right] \right]$

# Example with *non*

*Mary is non-belligerent.*

Translate ‘belligerent’ as  $c_{0\langle e,t \rangle}$ , ‘Mary’ as  $c_{0\langle e \rangle}$ , ignore the copula.



Können referentielle und quantifizierte NPs denselben Typ haben?

- Quantoren-NP-Syntax | Wie die referentieller NPs
- Quantoren-NP-Semantik | Wie die von prädikatenlogischen Quantoren
- Erstmal nicht aufregend bzw. erwartbar in  $L_{Type}$ 
  - ▶ Every student walks.:  $\forall v_{0\langle e \rangle} [c_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle}) \rightarrow c_{1\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle})]$
  - ▶ Some student walks.:  $\exists v_{0\langle e \rangle} [c_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle}) \wedge c_{1\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle})]$

## Die Macht höherstufiger $\lambda$ -Sprachen

- Versuchen Sie, diese Ausdrücke zu verstehen
  - ▶  $\lambda v_{0\langle e,t \rangle} \forall v_{0\langle e \rangle} [c_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle}) \rightarrow v_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle})]$
  - ▶  $\lambda v_{0\langle e,t \rangle} \exists v_{0\langle e \rangle} [c_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle}) \wedge v_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle})]$
- Denken Sie daran:
  - ▶  $c_{0\langle e,t \rangle}$  | Das Prädikat für *students*
  - ▶  $\lambda v_{0\langle e,t \rangle}$  | Variable über einstellige Prädikate
  - ▶  $v_{0\langle e \rangle}$  | Variable über Individuen
- Funktionen zweiter Ordnung (Prädikate als Eingabewerte)
- CFs der Mengen von Prädikaten die auf alle/einige Studierende zutreffen

# Kombination mit Prädikat

$$\begin{array}{c} \exists v_{0\langle e \rangle} [c_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle}) \wedge c_{1\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle})] \text{ (by } \lambda \text{ conv.)} \\ | \\ \lambda v_{0\langle e,t \rangle} \exists v_{0\langle e \rangle} [c_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle}) \wedge v_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle})] (c_{1\langle e,t \rangle}) \text{ (by FA)} \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \lambda v_{0\langle e,t \rangle} \exists v_{0\langle e \rangle} [c_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle}) \wedge v_{0\langle e,t \rangle}(v_{0\langle e \rangle})] \quad c_{1\langle e,t \rangle} \end{array}$$

# Aufgaben I

Überlegen Sie, wie die Semantik folgender Sätze in einer  $\lambda$ -Sprache kompositionally modelliert werden kann. Sie können ein vollständiges Fragment entwickeln, müssen es aber nicht. Übersetzen Sie gerne auch einfach einzelne relevante Ausdrücke „plausibel“ in Prädikatenlogik höherer Ordnung mit  $\lambda$ -Abstraktion. Die relevanten Konstituenten, bei denen Sie über die Vorteile einer  $\lambda$ -Sprache nachdenken sollten, sind jeweils farblich hervorgehoben.

- 1 *Martin und Maria laufen.*
- 2 *Maria schwimmt oder taucht.*
- 3 *Eine Linguistin schwimmt und läuft.*
- 4 *Martin macht irgendwas.*
- 5 *Das Buch brennt auf dem Tisch.*
- 6 *Das Buch liegt auf dem Tisch.*
- 7 *Herr Webelhuth legt das Buch auf oder neben den Tisch.*

## Aufgaben II

Versuchen Sie, die Affixe bzw. den Kompositionsvorgang in folgenden Wortpaaren in einer  $\lambda$ -Prädikatenlogik höherer Ordnung zu modellieren. (Das gleiche wie auf der letzten Folie, nur für Wortbildung statt für Syntax.) Das ist längst nicht alles trivial, und einiges wird nicht funktionieren, je nachdem wie genau Sie es nehmen.

1 *Linguist – Linguistin*

mit und ohne „generische“ Form

2 *streichen – rotstreichen*

Versuchen Sie, die temporalen/aspektuellen Besonderheiten irgendwie zu umschiffen.

3 *gehen – begehen*

4 *schreiben – verschreiben*

5 *lesen – Leser*

6 *Leser – Kartenleser*

# Aufgaben III

Wie kann man Passiv in  $L_{Type}$  modellieren?

- 1 Modellieren Sie zunächst die Semantik des passivierten Verbs auf Basis einer Semantik des Aktivverbs.
- 2 Versuchen Sie, für das Deutsche ein minimales Fragment im Stil von  $L_{Type}$  zu bauen, das die folgenden beiden Sätze modelliert:
  - ▶ Maria grüßt Martin.
  - ▶ Martin wird begrüßt.
- 3 Geben Sie ein minimales Modell an, in dem beide Sätze wahr sind.
- 4 Geben Sie ein minimales Modell an, in dem nur der Aktivsatz, nicht aber der Passivsatz wahr ist.

# Intensionalität

Verständnis dafür, dass wir bisher nur über **Extensionen** sprechen.

Wissen um Konstruktionen, in denen das nicht ausreicht.

Definition des intensionalen Kalküls auf Basis des extensionalen.

Nochmals zurück zu Chierchia,  
weil das entsprechende Kapitel wirklich gut ist.

Texte für heute: Chierchia & McConnell-Ginet 2000: Kapitel 5 | Dowty u. a. (1981: Kapitel 5–6)

- Stockhausen *wird* eine andere Oper schreiben.
- *Hätte* Arno Schmidt weniger getrunken, *könnte* er noch leben.
- Gustave Moreau *glaubt*, dass Ästhetizismus toll ist.

- *Stockhausen wird eine andere Oper schreiben.*
- *Hätte Arno Schmidt weniger getrunken, könnte er noch leben.*
- *Gustave Moreau glaubt, dass Ästhetizismus toll ist.*
- Syntax der Ausdrücke | Problemlos mit Einführung von Auxiliaren
- Wahrheitsbedingungen | Nicht angebbar
  - ▶ in eindimensionalen Modellen ohne Tempus
  - ▶ und ohne Modellierung von Möglichkeit und Notwendigkeit  
(Modalverben, modale Adverbiale, *glauben*-Verben)

# Was sind Intensionen?

Extension (Bedeutung) und Intension (Sinn)

Synt. Typ	Bedeutung	Sinn	Beispiele
NP	Individuum	Individuenkonzept	<i>Venus, Helmut Kohl</i>
VP	Menge von Individuen	Eigenschaftskonzept	<i>Kolibri, laufen</i>
S	Wahrheitswert	Proposition (Gedanke)	<i>Ich mag Kolibris.</i>

Noch wissen wir nicht viel über Intensionen. Offensichtliche Eigenschaften:

- Nicht rein wahrheitsfunktional  
„Was ist in der Welt der Fall?“ reicht nicht aus.
- Wissen über die **tatsächlichen**, **vergangenen** und **möglichen** Zustände der Welt  
PSOA = *possible state of affairs*  
Z. B. alle vergangenen SOAs; die PSOAs, die Horst Lichter für möglich hält usw.
- Sowas wie **mehrdimensionale Wahrheitsbedingungen**
- Vermitteln zwischen Wissen über Dinge und Wahrheitswerten

Wir brauchen eine Logik für PSOAs!

- Offensichtliche **logische Beschränkungen** auf PSOAs
- Solche Sätze scheitern nicht nur, weil sie nicht wahr sind:  
*Im Jahr 1985 wird Arno Schmidt planen, „Julia“ bis 1914 fertig zu schreiben.*
- **Inkompatibel** mit unserem Wissen über **zulässige/mögliche** PSOAs

*Maria könnte Arno Schmidt persönlich kennen.*

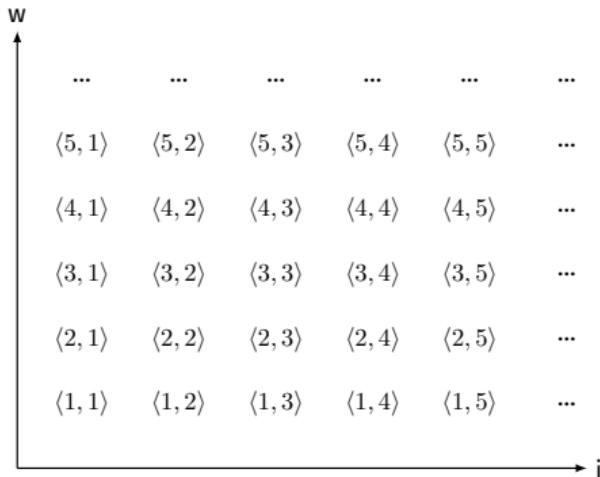
- Realität | Maria wurde nach dem Tod von AS geboren.
- Vorstellbare alternative Realitäten
  - 1 AS ist kein Workaholic, trinkt nicht eine Flasche Korn am Tag und hat daher 1979 keinen Infarkt.
  - 2 Maria wurde zwanzig Jahre früher geboren.
  - 3 AS ist von den Toten auferstanden.
  - 4 Im Prinzip unbegrenzt viele Möglichkeiten

## Basis der Formalisierung

- Annahme einer Menge von PSOAs (= Welten)
- Jeder PSOA | Exhaustiv bestimmt durch die in ihm wahren Propositionen
- Jede Proposition | Zwei-Partitionierung der PSOAs:
  - ▶ Die, in denen sie **wahr** ist
  - ▶ Die, in denen sie **falsch** ist

# Mögliche Welten und Zeiten in Koordinaten

- Für jede Proposition  $p_n$  | Mindestens eine Welt, in der  $\llbracket p_n \rrbracket = 1$  |  $w \in W$
- Für jeden Zeitpunkt | Ein möglicher Zustand jeder Welt |  $i \in I$
- Zeitlich geordnete Welt-Zeit-Koordinaten |  $\langle w, i \rangle \in W \times I$

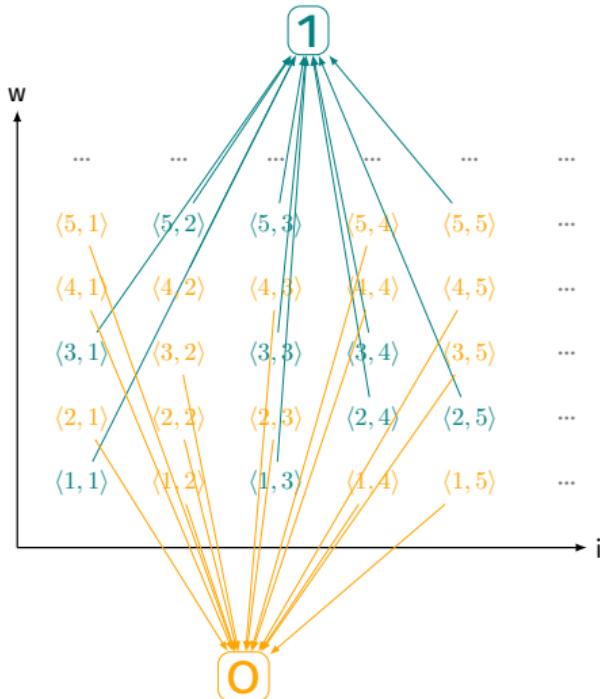


Propositionen sind die Intensionen von Formeln bzw. Sätzen!

- Eine mögliche Welt für jede Proposition als wahr, permutiert mit allen anderen
  - $w_1: p_1$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch
  - $w_{12}: p_1$  und  $p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch
  - $w_2: p_2$  wahr, alle anderen  $p_n$  falsch usw.
- Exhaustive Charakterisierung eines Satzes | Alle Welten, in denen er wahr ist
- Intension eines Satzes | Alle Welten, in denen er wahr ist
- Proposition eines Satzes | Charakteristische Funktion der Menge der Welten, in denen er wahr ist zu den Zeitpunkten, zu denen er wahr ist

# Propositionen als Funktionen

Propositionen sind **Funktionen**  $\{0, 1\}^{W \times I}$



# Überlegen Sie sich das mal ...

Sind solche Propositionen als Intensionen wirklich unbefriedigend?

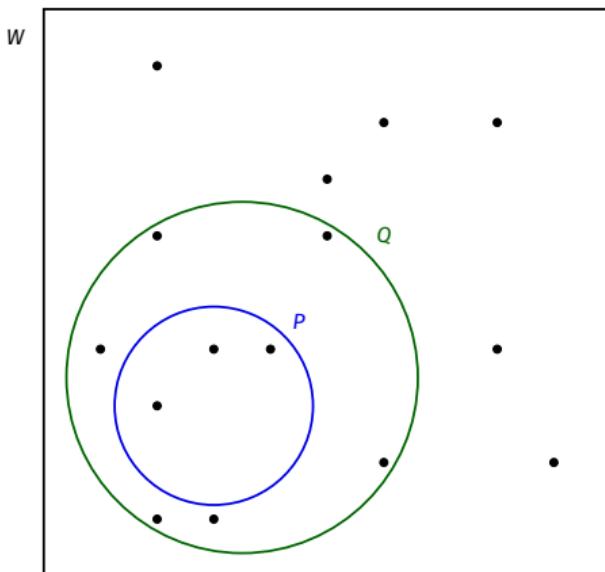
- Wenn wir den aktuellen SOA exhaustiv kennen, wissen wir für jeden Satz, ob er wahr ist.
- Wenn wir wissen, welche Sätze wahr sind, kennen wir den aktuellen SOA exhaustiv.
- Sätze denotieren Wahrheitswerte, und die Wahrheit eines Satzes hängt nur vom aktuellem SOA ab.

Eine Funktion von möglichen Welten zu Wahrheitswerten charakterisiert daher die Semantik eines Satzes umfassend.

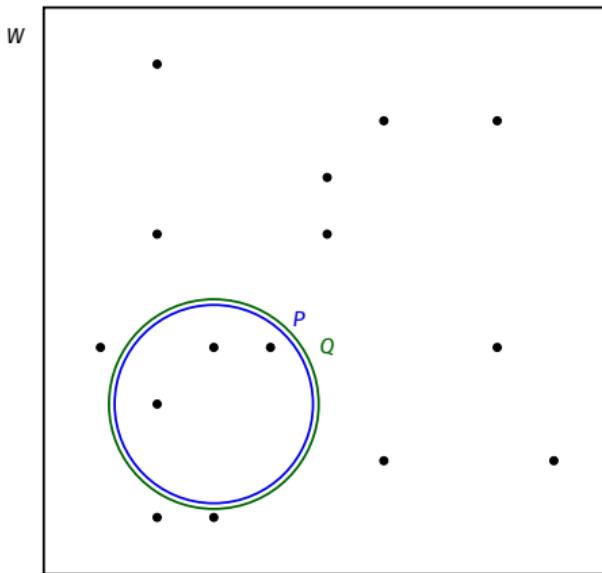
- Was mehr gäbe es über einen Satz zu wissen?
- Sätze mit derselben Intension  $\{0, 1\}^{W \times I}$  sind absolut gleichbedeutend.

Satzintensionen | Charakteristische Funktionen – oder Mengen von  $w$  bzw.  $\langle w, i \rangle$

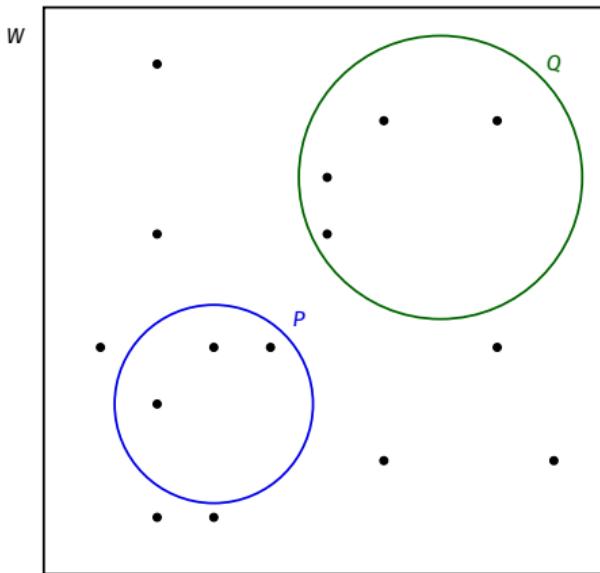
$p \rightarrow q$  entspricht  $P \subseteq Q$ :



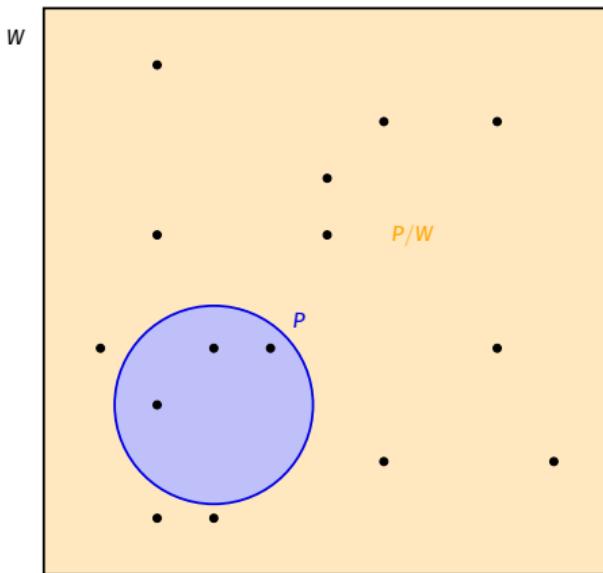
$p \leftrightarrow q$  entspricht  $P = Q$ :



Kontradiktion liegt vor bei  $P \cap Q = 0$ :



$\neg p$  entspricht  $P/W$ :



Was heißt notwendigerweise und möglicherweise?

- Notwendigkeit

- ▶ Es muss so sein, dass  $p$ .
- ▶ In allen möglichen/denkbaren Welten gilt  $p$ .
- ▶  $\Box p \equiv \forall w \in W(\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

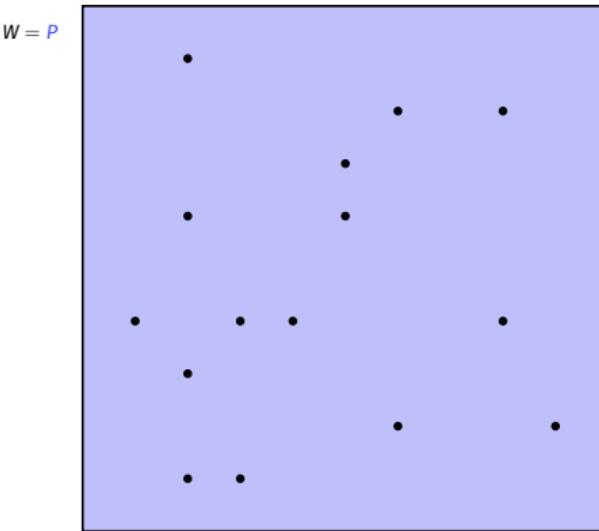
- Möglichkeit

- ▶ Es kann so sein, dass  $p$ .
- ▶ In mindestens einer möglichen/denkbaren Welt gilt  $p$ .
- ▶  $\Diamond p \equiv \exists w \in W(\llbracket p \rrbracket^w = 1)$

- Für alle Wffs  $\phi \in Wff$  sind  $\Box\phi$  und  $\Diamond\phi$  ebenfalls in Wff.

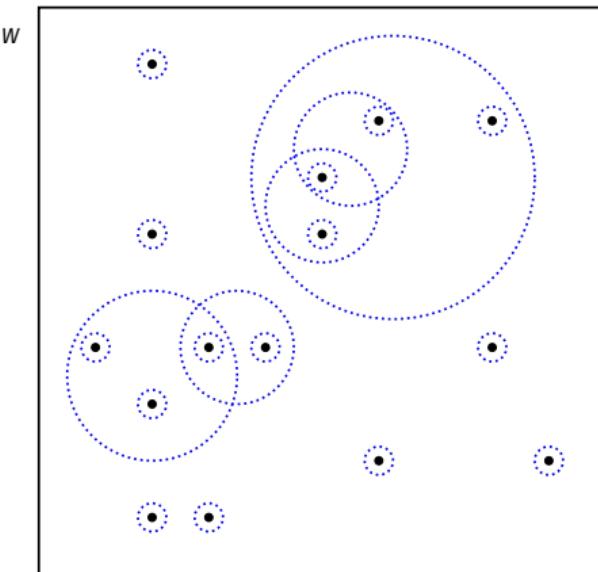
# Notwendigkeit als universelle Quantifikation

$\Box p$  entspricht  $P = W$ :



# Möglichkeit als existenzielle Quantifikation

$\Diamond p$  entspricht  $P \neq \emptyset$  in  $W$  (nur beispielhaft):



Die Modelle werden um Welten  $w$  und Zeitpunkte  $i$  erweitert.

- $\mathcal{M} = \langle W, I, <, U, V \rangle$ 
  - ▶  $W$  | Die Menge der Welten
  - ▶  $I$  | Die Menge der Zeitpunkte/Intervalle
  - ▶  $<$  | Eine Ordnung auf  $I$
  - ▶  $U$  | Die Menge der Individuen/Objekte
  - ▶  $V$  | Eine Auswertungsfunktion für Konstanten jeder Ordnung
- Ein Ausdruck  $\alpha$  wird jetzt evaluiert relativ zu
  - ▶ Dem Modell  $\mathcal{M}$
  - ▶ Einer konkreten Welt  $w$
  - ▶ Einem konkreten Zeitpunkt  $i$
  - ▶ Der Belegungsfunktion  $g$
  - ▶  $\llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$

## Individuenkonzepte als Funktionen von Welten zu Individuen

- *der Präsident der USA, der Papst, Bond*  
(im Sinn von *der Schauspieler, der gerade Bond spielt*)
- Für  $\beta \in \text{Cons}_{\text{ind}}$  ist  $V(\beta)$  eine Funktion aus  $U^{W \times I}$ .  
Eine Funktion, die für jedes Welt-Zeit-Paar sagt, wer Präsident, Papst, Bond usw. ist.

(Grafik fehlt)

Eigenschaftskonzepte als Funktionen von Welten zu Mengen von Tupeln von Individuen

- Konstanten wie *geht*, *kauft*, *gibt* usw. denotieren unterschiedliche Mengen (bzw. CFs) zu unterschiedlichen  $\langle w, i \rangle$ -Koordinaten.
- Für  $\beta \in \text{Cons}_{\text{pred}_n}$  ist  $V(\beta)$  eine Funktion aus  $(\wp U^n)^{W \times I}$ .  
Eine Funktion, die für jedes Welt-Zeit-Paar sagt, wer geht, wer was kauft, wer wem was gibt usw.  
Erinnerung |  $U^n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$

(Grafik fehlt)

Diese umständlichen T-Sätze!

- Wenn  $\beta$  eine Wff der Form  $\delta(t_1, t_2, \dots, t_n)$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \beta \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶  $\langle \llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}, \llbracket t_2 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} \rangle \in \llbracket \delta \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$
  - ▶ Mit  $\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = V(\langle w, i \rangle)(t_1)$

In einer typentheoretischen Sprache wie  $L_{Type}$  wäre Funktionsapplikation möglich.

Hier ändert sich eigentlich nichts ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\forall x\phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶ Für alle  $u \in U$   $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g[u/x]} = 1$
- Und Paralleles für den Existenzquantor

Die modalen Funktoren quantifizieren wie gesagt über Welten ...

- Wenn  $\psi$  eine Wff der Form  $\Box x\phi$  ist
- Dann gilt  $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$  gdw
  - ▶ Für alle  $w' \in W$
  - ▶ Und alle  $i' \in I$
  - ▶  $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}, w', i', g} = 1$
- Und Paralleles für den  $\Diamond$ -Operator mit Existenzquantifikation

# Eine Ähnlichkeit zwischen $\forall$ und $\square$

Möglichkeit distribuiert wie Allquantifikation ...

- Weil  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \vdash [\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)]$   
aber nicht umgekehrt
- Gilt auch  $\square [\psi \rightarrow \phi] \vdash [\square \psi \rightarrow \square \phi]$   
aber nicht umgekehrt

# Einige Implikationen und Äquivalenzen

Beweistheorie für Modallogik ist alles andere als trivial.

Hier nur einige interessante Implikationen und Äquivalenzen ...

	Existenzquantor	Allquantor
<b>Notwendigkeit</b>	$\exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$	$\forall x \Box P(x) \leftrightarrow \Box \forall x P(x)$
<b>Möglichkeit</b>	$\exists x \Diamond P(x) \leftrightarrow \Diamond \exists x P(x)$	$\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$

- Wenn es ein  $x$  gibt, dass notwendigerweise  $P$  ist,  
dann ist es notwendigerweise der Fall, dass es ein  $x$  gibt, dass  $P$  ist.
- Wenn es ein  $x$  gibt, dass möglicherweise  $P$  ist,  
dann ist es möglicherweise der Fall, dass es ein  $x$  gibt, dass  $P$  ist. Und umgekehrt!
- Carnap-Barcan-Formel Wenn alle  $x$  notwendigerweise  $P$  ist,  
dass ist es notwendigerweise der Fall, dass alle  $x P$  sind. Und umgekehrt!
- Wenn alle  $x$  möglicherweise  $P$  sind,  
dann ist es möglicherweise der Fall, dass alle  $x P$  sind.

## Tempus und Modalität

# Targets for this week

- Understand how simple tense logic can be represented by operators shifting  $i$  indices.
- See why tense operators are sentence operators.
- See why a multi-dimensional theory of tenses and a better handling of tense embedding are required.
- See how we restrict (different types of) propositional backgrounds.
- Understand how opaque contexts affect meaning (incl. *believe* type verbs).
- Get a first idea of why we need the *up* operator  $\wedge$ .

- **present:** no operator ( $\phi$  ‘it is the case that  $\phi$ ’)
- **past:**  $P$  ( $P\phi$  ‘it was the case that  $\phi$ ’)
- **future:**  $F$  ( $F\phi$  ‘it will be the case that  $\phi$ ’)
- it will always be the case... ( $G = \neg F \neg \phi$ )
- it was always the case... ( $H = \neg P \neg \phi$ )

# Evaluation

- $\mathbf{PD}(a)$  ‘Arno Schmidt (has?) died.’
- relative to the current  $\langle w, i \rangle$ :  $\llbracket \mathbf{PD}(a) \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$
- ...is true iff there is some  $i'$ ,  $\langle i', i \rangle \in <$  and
- $\llbracket \mathbf{PD}(a) \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i', g} = 1$

# Like it or not...

- tense operators (TOp) are sentence (wff) Op's
- raise it to sentence-scopal position
- TP/IP position is motivated by copular/auxiliary elements
- *He is stupid.* vs. *Kare-wa bakarashi-i.*
- *He was stupid.* vs. *Kare-wa bakarashi-katta.*
- *What<sub>i</sub>; did you expect t<sub>j</sub>?* vs. *Nani-o yokishi-ta-ka.*

# New ps rules

- $T' \rightarrow TVP$  (adds tense to VP)
- $TP \rightarrow NP T'$
- $TP \rightarrow TP \ conj \ TP$
- $TP \rightarrow neg \ TP$
- $[_{TP} \ NP \ T \ VP] \Rightarrow [_{TP} \ T \ NP \ VP]$  (T raising)

# Quantification over instants

- $\llbracket \text{PTP} \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = 1$
- iff among all  $\langle i_n, i \rangle \in <$
- there is **at least one** s.t.  $\llbracket \text{TP} \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i', g} = 1$

- $U$ : domain of quantification
- $V(\beta)$ : non-relativized function for all  $\beta$  which are not a proper name
- $V(\beta)(\langle w, i \rangle)$ :  $V$  evaluates  $\beta$  to a function from world-time pairs to the denotata of the predicate (sets of individuals, tuples of them, etc.)

- NL tenses beyond TOp's:
- *Arno Schmidt had already read Poe when he started writing 'Zettels Traum'.*
- *Gosh, I forgot to feed the cat.*
- shifts of evaluation time

	past (R<S)	present (R,S)	future (S<R)
anterior(E<R)	E<R<S <i>er war gegangen</i>	E<R,S <i>er ist gegangen</i>	S<E<R S,E<R E<S<R <i>er wird gegangen sein</i>
simple(E,R)	E,R<S <i>er ging</i>	E,R,S <i>er geht</i>	S<E,R <i>er wird gehen</i>
posterior(R<E)	R<E<S R<S,E R<S,E R<S<E <i>*er würde gehen</i>	R,S<E <i>er wird gehen</i>	S<R<E <i>*er wird gehen werden</i>

# Embedded tenses and adverbials

- *A man was born who will be king.*
- **P**(a man is born **F**(who be king)) ?
- *Yesterday, Maria woke up happy.*
- **Y(P(Maria wake up happy))** ?

# Types of modal expressions

- tense forms: *I eat up to 100 nachos a minute.*
- mood: *Resonderet alias minus sapienter.*
- modal auxiliaries: *Herr Webelhuth can look like Michael Moore.*
- adverbs: *Maybe Herr Keydana will show up.*
- affixes: *Frau Eckardt is recognizable.*

# The logical form of modal operators

- like tense: **sentence operators**
- modal Aux in English is tense-insensitive (evidence for *Infl*)
- $\Box$  and  $\Diamond$  in intensional predicate calculi (IPC): exploit the full set of possible worlds
- in NL: evaluation of modal expressions against restricted **conversational backgrounds**

# The background

- different sets of possible worlds under consideration for different types of modal expressions
- different types of modality: different sets of admitted possible worlds
- we call the conversationally relevant background **the set of  $\langle w, i \rangle$  pairs relevant to the interpretation of the sentence**

- *Agent Cooper cannot solve the mystery.*
- translated into root modal IPC:  $\neg\Diamond S(c, m)$
- wrong interpretation: Under no possible circumstances can Cooper solve the mystery.
- usually, some **obvious facts constitute the background:**
  - ▶ he could, but some relevant information is missing
  - ▶ he could, but is sick
  - ▶ he could, but ...

- *Leo Johnson must be the murderer of Laura Palmer.*
- in accordance with the **known facts** (e.g., in episode 7 of *Twin Peaks*):
  - ▶ Leo Johnson is a violent person.
  - ▶ Leo smuggles cocaine, Laura was addicted to it.
  - ▶ Leo is connected to Jacques Renault who is the bartender of *One Eyed Jack's* where Laura worked as a prostitute.
  - ▶ ...
- which constitute the epistemic background, the sentence is true
- known facts narrow down the root background

- *Agent Cooper must not solve the mystery.*
- assume:
  - ▶ there is some U.S. law which allows a local sheriff to ask the FBI to keep out of local murder investigations
  - ▶ Sheriff Truman has asked the FBI headquarters to keep out of the Palmer investigation
  - ▶ as a special agent, Cooper is required to obey Bureau policy
- Deontic backgrounds are narrowed down by **normative rules** and **moral ideals**.
- statable in propositional form (ten commandments, law, ...)

# Sets of propositions

- specify the kind of background against which you evaluate under the given situation
- we need:  
a function from  $\langle w, i \rangle$  to the relevant background set of  $\langle w_n, i_m \rangle$
- reuse  $g$ :  
 $g(\langle w, i \rangle) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} = \{\langle w, i \rangle_1, \langle w, i \rangle_2, \dots, \langle w, i \rangle_n\}$
- such that all possible worlds are:  $\bigcap g(\langle w, i \rangle)$

- *that* is a complementizer, it turns a sentence into an argument.
- ps rule:  $CP \rightarrow CIP$
- $[_{IP} Racine believes [_{CP} that [_{IP} theatre rules]]]$
- CP (fully fledged sentence) receives theta role by *believe* under government.

- gerunds:  
 $[_{IP} Stockhausen has plans [_{IP} to write another 29 hour opera]]$
- incomplete embedded IP, no subject
- internal theta role of *has plans*: to IP
- external theta role of *write*: to ?
- PRO, controlled by the subject of *has plans*:  
 $[_{IP} Stockhausen has plans [_{IP} PRO to write another 29 hour opera]]$

# Propositional attitudes

- verbs like *believe*: **propositional attitude verbs**
- content of the believe: a piece of information held to be true by the believer, hence a proposition, a  $\langle w_n, i_m \rangle$
- signalling one element in the background assumed by the believer
- belief:  $\langle w, i \rangle$  is an element of the proposition of CP

## Translating that as $\wedge$

- value of propositional attitude (PA) verbs: functions  $[\langle w, i \rangle \rightarrow \langle u_n, p \rangle]$  with  $u_n \in U$ ,  $p$  a proposition (set of  $\langle w_n, i_m \rangle$ ) and compatible to  $u_n$ 's background
- $up(\wedge\chi)$ : an operator which gives the intension of an expression  $\chi$
- the full logic of  $\wedge$  and  $\neg$  as designed by Montague next week
- $\wedge$  rids us of the problem that the belief content looks truth-conditional (a sentence) but doesn't contribute to the embedding sentence's truth-value. PA verbs take intensions as arguments.

- Quine's story: Ralph knows...
- Bernard J.Ortcutt, the nice guy on the beach.
- He sees a strange guy with a hat in the dark alley - a spy?
- Ortcutt just likes to behave funny on the way to his pub...
- and actually is sinister guy in the alley!
- Only Ralph doesn't know.

# Is Ralph insane?

- What's the truth value of...
- *Ralph believes that the guy from the beach is a spy.*
- true: since Orcutt and the guy in the hat are one individual
- false: since Ralph doesn't know that and in a way 'doesn't believe it'

- the Russelian interpretation for *the* like  $\exists$  with a uniqueness condition (as a GQ):  
$$\lambda Q \lambda P [\exists x [Q(x) \wedge P(x)] \wedge \forall y [Q(y) \leftrightarrow y = x]]$$
- in a raising framework: ambiguity between *THE* and *believe*
- [<sub>IP</sub> the guy from the beach; [<sub>IP</sub> Ralph believes [<sub>CP</sub> that  $x_i$  is a spy]]]
- makes the sentence true: the *de re* reading
- Ralph believes [<sub>CP</sub> that [<sub>IP</sub> the guy from the beach; [<sub>IP</sub>  $x_i$  is a spy]]]
- makes the sentence false: the *de dicto* reading

- *Yuri Gagarin might now have been the first man in space.*
- some Mickey Mouse LFs:
- $\Diamond \text{THE(first-man-in-space)}(\text{not-be-Gagarin})$
- at some  $\langle w_n, i_m \rangle$  the first individual in space is not Y.G.
- $\text{THE(first-man-in-space)}(\Diamond[\text{not-be-Gagarin}])$
- at  $\langle w, i \rangle$  the first individual in space (definitely Y.G.) is not Y.G. in an accessible world
- Names are rigid designators across world-time-pairs, definite descriptions aren't.

- CP has its own subject, to-IPs don't (PRO)
- PRO must be interpreted, in our examples by coindexation with the matrix subject
- infinitive embedding verbs: functions from world-time pairs to sets of individuals which have a certain property, the intension of a predicate  $\hat{P}$
- *John tries to sing.*
- $\text{try}(j, \hat{\text{swim}})$

Montagues intentionale Logik

- $\llbracket \phi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$  and  $\llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$  don't truth conditionally determine  $\llbracket P\phi \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$
- *Iceland was once covered with a glacier.*
- **F, B,  $\diamond$ ,  $\square$**  are not fully truth functional
- Leibnitz Law of identity of individuals for logics containing '=' failing in opaque contexts
- 'former', 'alleged', etc. are not intersective adjectives like 'red'
- Frege: sometimes expressions **denote a sense**
- again: individual concepts (variable function on indices) vs. names (constant)

- intension relative to models

- for a name  $d$ :  $\llbracket d \rrbracket_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}, g} = \begin{bmatrix} \langle w_1, t_1 \rangle & \rightarrow & b \\ \langle w_2, t_1 \rangle & \rightarrow & b \\ \langle w_1, t_2 \rangle & \rightarrow & b \\ \langle w_2, t_2 \rangle & \rightarrow & b \\ \langle w_1, t_3 \rangle & \rightarrow & b \\ \langle w_2, t_3 \rangle & \rightarrow & b \end{bmatrix}$

- for an individual concept denoting expression  $m$ :

$$\bullet \llbracket m \rrbracket_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}, g} = \begin{bmatrix} \langle w_1, t_1 \rangle & \rightarrow & a \\ \langle w_2, t_1 \rangle & \rightarrow & c \\ \langle w_1, t_2 \rangle & \rightarrow & b \\ \langle w_2, t_2 \rangle & \rightarrow & c \\ \langle w_1, t_3 \rangle & \rightarrow & c \\ \langle w_2, t_3 \rangle & \rightarrow & b \end{bmatrix}$$

- for a one place predicate  $B$ :

$$\bullet \llbracket B \rrbracket_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}, g} = \left[ \begin{array}{lcl} \langle w_1, t_1 \rangle & \rightarrow & \{a, b\} \\ \langle w_2, t_1 \rangle & \rightarrow & \{b, c\} \\ \langle w_1, t_2 \rangle & \rightarrow & \{a, c\} \\ \langle w_2, t_2 \rangle & \rightarrow & \{a\} \\ \langle w_1, t_3 \rangle & \rightarrow & \{b, c\} \\ \langle w_2, t_3 \rangle & \rightarrow & \{a, b, c\} \end{array} \right]$$

# Intensions of formulas

- formula  $\phi$ :  $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}, g}$  is a function from indices to truth values

$$\bullet \llbracket B(m) \rrbracket_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}, g} = \begin{bmatrix} \langle w_1, t_1 \rangle & \rightarrow & 1 \\ \langle w_2, t_1 \rangle & \rightarrow & 1 \\ \langle w_1, t_2 \rangle & \rightarrow & 0 \\ \langle w_2, t_2 \rangle & \rightarrow & 0 \\ \langle w_1, t_3 \rangle & \rightarrow & 1 \\ \langle w_2, t_3 \rangle & \rightarrow & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \llbracket B(n) \rrbracket_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}, g} = \begin{bmatrix} \langle w_1, t_1 \rangle & \rightarrow & 0 \\ \langle w_2, t_1 \rangle & \rightarrow & 1 \\ \langle w_1, t_2 \rangle & \rightarrow & 1 \\ \langle w_2, t_2 \rangle & \rightarrow & 0 \\ \langle w_1, t_3 \rangle & \rightarrow & 1 \\ \langle w_2, t_3 \rangle & \rightarrow & 1 \end{bmatrix}$$

- again, the proposition  $\llbracket Bm \rrbracket_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{M}, g}$  is a set of indices  $(\langle w_i, t_j \rangle)$
- from the extension at all indices, compute the intension
- $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{M}, g}(\langle w_i, t_j \rangle) = \llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w_i, t_j, g}$

# Intensions of variables

- constant function on indices
- will play a great role, so remember!
- $\llbracket u \rrbracket_{\mathcal{G}}^{\mathcal{M}, g}(\langle w_i, t_j \rangle) = g(u)$

# What expressions denote

- sometimes expressions denote individuals, sets of individuals, truth values...
- and sometimes **they denote intensions** (functions)
- alternatively: introduce rules which access an expression's extension/intension as appropriate

- Church/Montague: for an extension-denoting expression  $\alpha$ ,  $\hat{\alpha}$  denotes  $\alpha$ 's intension
- $\llbracket \hat{Bm} \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = \llbracket Bm \rrbracket_{\mathcal{G}}^{\mathcal{M}, g}$
- $\alpha$  and  $\hat{\alpha}$  are just **denoting expressions**
- for an intension-denoting expression  $\alpha$ :  $\llbracket \check{\alpha} \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = \llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, g}(\langle w, t \rangle)$

# Down-up and up-down

- observe:  $\llbracket \neg\alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} = \llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$  for any  $\langle w, t \rangle$
- but not always:  $\llbracket \neg\alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g} \neq \llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$  for any  $\langle w, t \rangle$
- can easily be the case for intension-denoting expressions

## Non-equality

- $k'$  intension:  $\llbracket k \rrbracket_{\mathcal{C}}^{\mathcal{M}, g} =$

$\langle w_1, t_1 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_1, t_1 \rangle \rightarrow a$
$\langle w_1, t_2 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_1, t_2 \rangle \rightarrow a$
$\vdots$		
$\langle w_1, t_1 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_1, t_1 \rangle \rightarrow a$
$\langle w_1, t_2 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_1, t_2 \rangle \rightarrow b$
$\langle w_2, t_1 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_2, t_1 \rangle \rightarrow c$
$\langle w_2, t_2 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_2, t_2 \rangle \rightarrow d$
$\vdots$		
$\langle w_1, t_1 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_1, t_1 \rangle \rightarrow c$
$\langle w_1, t_2 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_1, t_2 \rangle \rightarrow b$
$\langle w_2, t_1 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_2, t_1 \rangle \rightarrow d$
$\langle w_2, t_2 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_2, t_2 \rangle \rightarrow a$
$\vdots$		
$\langle w_1, t_1 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_1, t_1 \rangle \rightarrow c$
$\langle w_1, t_2 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_1, t_2 \rangle \rightarrow d$
$\langle w_2, t_1 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_2, t_1 \rangle \rightarrow a$
$\langle w_2, t_2 \rangle$	$\rightarrow$	$\langle w_2, t_2 \rangle \rightarrow b$

# Non-equality

- $k'$  extension (e.g., at  $\langle w_1, t_2 \rangle$ ):  $\llbracket k \rrbracket_{q'}^{\mathcal{M}, g}(\langle w_1, t_2 \rangle) =$

- $\llbracket k \rrbracket^{\mathcal{M}, w_1, t_2, g} = \begin{bmatrix} \langle w_1, t_1 \rangle & \rightarrow & a \\ \langle w_1, t_2 \rangle & \rightarrow & b \\ \langle w_2, t_1 \rangle & \rightarrow & c \\ \langle w_2, t_2 \rangle & \rightarrow & d \end{bmatrix}$

- however:  $\llbracket \neg k \rrbracket^{\mathcal{M}, w_1, t_2, g} = \begin{bmatrix} \langle w_1, t_1 \rangle & \rightarrow & a \\ \langle w_1, t_2 \rangle & \rightarrow & b \\ \langle w_2, t_1 \rangle & \rightarrow & d \\ \langle w_2, t_2 \rangle & \rightarrow & b \end{bmatrix}$

- since:  $\llbracket \neg k \rrbracket^{\mathcal{M}, w_1, t_1, g} = a$

$$\llbracket \neg k \rrbracket^{\mathcal{M}, w_1, t_2, g} = b$$

$$\llbracket \neg k \rrbracket^{\mathcal{M}, w_2, t_1, g} = d$$

$$\llbracket \neg k \rrbracket^{\mathcal{M}, w_2, t_2, g} = b$$

# A typed higher order $\lambda$ language with $=$ and $\wedge / \vee$

- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \Box, =$  (syncategorematically)
- $t, e \in Type$  ( $Con_{type}, Var_{type}$ )
- if  $a, b \in Type$ , then  $\langle a, b \rangle \in Type$
- if  $a \in Type$ , then  $\langle s, a \rangle \in Type$
- $s \notin Type$

# Meaningful expressions

- $ME_{type}$
- abstraction: if  $\alpha \in ME_a$ ,  $\beta \in Var_b$ ,  $\lambda\beta\alpha \in ME_{\langle b,a \rangle}$
- FA: if  $\alpha \in ME_{\langle a,b \rangle}$ ,  $\beta \in ME_a$  then  $\alpha(\beta) \in ME_b$
- if  $\alpha, \beta \in ME_a$  then  $\alpha = \beta \in ME_t$

# Interpretations of $\wedge$ and $\neg$

- if  $\alpha \in ME_a$  then  $\wedge\alpha \in ME_{s,a}$
- if  $\alpha \in ME_{\langle s,a \rangle}$  then  $\neg\alpha \in ME_a$

type	variables	constants
$e$	$x, y, z$	$a, b, c$
$\langle s, e \rangle$	$x, y, z$	—
$\langle e, t \rangle$	$X, Y$	$walk', A, B$
• $\langle \langle s, e \rangle, t \rangle$	$Q$	$rise', change'$
$\langle s, \langle e, t \rangle \rangle$	$P$	—
$\langle e, e \rangle$	$P$	$Sq$
$\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$	$R$	$Gr, K$
$\langle e, \langle e, e \rangle \rangle$	—	$Plus$

# The model

- $\langle A, W, T, <, F \rangle$
- $D_{\langle a,b \rangle} = D_b^{D_a}$
- $D_{\langle s,a \rangle} = D_a^{W \times T}$
- ‘senses’ = **possible** denotations
- actual intensions chosen from the set of senses
- now:  $F(\text{expression}) = \text{intension}$  (itself a function)
- s.t.  $\text{intension(index)} = \text{extention}$
- instead of:  $F(\text{expression})(\text{index}) = \text{extension}$

# Some interpretations

- $\llbracket \lambda u \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$ ,  $u \in \text{Var}_b$ ,  $\alpha \in ME_a$  is a function  $h$  with domain  $D_b$  s.t.  $x \in D_b$ ,  
 $h(x) = \llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w, t, g'}$  with  $g'$  exactly like  $g$  except  $g'(u) = x$
- $\llbracket \hat{\alpha} \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}$  is a function  $h$  from  $W \times T$  to denotations of  $\alpha$ 's type s.t. at every  
 $\langle w', t' \rangle \in W \times T$   $\llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}, w', t', g} = h(\langle w', t' \rangle) = \llbracket \hat{\alpha} \rrbracket^{\mathcal{M}, w, i, g}(\langle w', t' \rangle)$

## Some examples

- $\alpha = \beta$  at  $\langle w, t \rangle$  might be true, but  ${}^\wedge\alpha = {}^\wedge\beta$  need not be 1 at that same index
- on types:
  - ▶  $e$  - individuals
  - ▶  $\langle s, e \rangle$  - individual concepts ('present Queen of England')
  - ▶  $\langle s, \langle e, t \rangle \rangle$  - properties of individuals
  - ▶  $\langle e, t \rangle$  - sets of individuals
  - ▶  $\langle \langle s, e \rangle, t \rangle$  - sets of individual concepts

# Some examples

- on properties:
  - ▶  $\langle s, \langle a, t \rangle \rangle$  - properties of denotations of  $a$ -type expressions
  - ▶  $\langle s, \langle e, t \rangle \rangle$  - properties of individuals
  - ▶  $\langle s, \langle \langle s, t \rangle, t \rangle \rangle$  - properties of propositions
- from relations  $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$  to relations-in-intensions  $\langle s, \langle e, \langle e, t \rangle \rangle \rangle$

- In IL indices are never denoted by expressions!
- Expressions denote functions in the domain of indices.
- hence:  $\langle s, a \rangle$  never applied to some typed argument ( $s$  is not a type!)
- useful thing: We never talk about indices!
- since often  $\mathbf{\tilde{\alpha}}(\beta)$  is needed for  $\alpha \in ME_{\langle s, \langle e, t \rangle \rangle}$  and  $\beta \in ME_e$ , abbr.  $\alpha\{\beta\}$

- former problem with **Nec** as  $\langle t, t \rangle$ : non-compositional extensional interpretation
- $\text{Nec} \in ME_{\langle \langle s, t \rangle, t \rangle} - \{0, 1\}^{(\{0,1\}^{W \times T})}$
- from (from indices to truth values = propositions) to truth values
- we could give  $\Box\phi$  as  $\text{Nec}(\wedge\phi)$

- ‘former’ as in ‘a former member of this club’
- instead of  $\langle\langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle\rangle$
- intensionally:  $\langle\langle s, \langle e, t \rangle \rangle, \langle e, t \rangle\rangle$
- extensions at all indices accessible via intension: those individuals bearing property  $\langle e, t \rangle$  not at current but at some past index qualify
- formally:  $\llbracket \text{For} \rrbracket_{\mathcal{G}}^{\mathcal{M}, g}$  is a func.  $h$  s.t. for any property  $k$ ,  $h(\langle w, t \rangle)(k)$  is the set  $k(\langle w, t' \rangle)$  for all  $t' < t$ .
- So, for any individual  $x$   $h(\langle w, t \rangle)(k)(x) = 1$  iff  $k(\langle w, t' \rangle)(x) = 1$  for some  $t' < t$ .

- relations between individuals and propositions
- $\langle \langle s, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle$
- $\text{Bel}(\wedge(B(m))(j))$  John believes that Miss America is bald.
- take the model from page 134 (Dowty et al.):
- $\llbracket B(m) \rrbracket^{M, w_2, t_1, g} = 1$  since  $\llbracket m \rrbracket^{M, w_2, t_1, g} = \llbracket n \rrbracket^{M, w_2, t_1, g}$
- however:  $\llbracket \wedge(B(m)) \rrbracket^{M, w_2, t_1, g} \neq \llbracket \wedge(B(n)) \rrbracket^{M, w_2, t_1, g}$

- $\text{Bel}(\hat{\cdot}(B(m))(j))$  ‘John believes that Miss America is bald.’
- $\text{Bel}(\hat{\cdot}(B(n))(j))$  ‘John believes that Norma is bald.’
- needn’t be equal: John can take worlds other than  $\langle w_2, t_1 \rangle$  into account where  $\llbracket n \rrbracket \neq \llbracket m \rrbracket$
- $\alpha = \beta \rightarrow [\phi \leftrightarrow \phi^{[\alpha/\beta]}]$  is true iff  $\alpha$  is not in the scope of  $\hat{\cdot}, F, P, \Box$  (oblique contexts)
- however:  $\hat{\alpha} = \hat{\beta} \rightarrow [\phi \leftrightarrow \phi^{[\alpha/\beta]}]$

- like so:  $\lambda x [\text{Bel}(\wedge [B(x)])(j)](m)$
- the above is true at an index  $\langle w, t \rangle$  iff  $[\![\text{Bel}(\wedge [B(x)])(j)]\!]^{w,t} = 1$   
if  $[\![m]\!]^{w,t} = x$ , i.e. if John is in a believe-rel with  $\wedge(B(x))$   
s.t.  $g(x) = m$  (by semantics of  $\lambda$ )
- Why is  $\wedge(B(x))$  not equal to  $\wedge(B(m))$ ?
- constant  $m$ : non-rigid designator relativized to indices
- variable  $x$ : a rigid designator by def. of  $g$  (for the relevant checking case with  $g(x) = \text{MissAmerica}$ )
- the above: a belief about ‘whoever  $m$  is’
- $\lambda$  conversion is restricted in IL!

# Once again

- *John believes that a republican will win.*
- $\exists x [Rx \wedge \text{Bel}(j, \wedge [\text{FW}(x)])]$
- $\text{Bel}(j, \mathbf{F} \exists x [R(x) \wedge W(x)])$

- Bucher, Theodor. 1998. *Einführung in die angewandte Logik*. 2. Aufl. Bd. 2231 (Sammlung Göschen). Berlin: de Gruyter.
- Carpenter, Bob. 1997. *Type-logical semantics*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Chierchia, Gennaro & Sally McConnell-Ginet. 2000. *Meaning and grammar: An introduction to semantics*. 2. Aufl. Cambridge, MA: MIT Press.
- Church, Alonzo. 1948. Review of Rudolf Carnap: Introduction to Semantics. *The Philosophical Review* 52, 298–304.
- Dowty, David R., Robert E. Wall & Stanley Peters. 1981. *Introduction to Montague semantics*. Dordrecht: Kluwer.
- Gutzmann, Daniel. 2019. *Semantik: Eine Einführung*. Stuttgart: Metzler.
- Partee, Barbara, Alice ter Meulen & Robert E. Wall. 1990. *Mathematical methods in linguistics*. Dordrecht: Kluwer.
- Rosch, Eleanor. 1973. Natural categories. *Cognitive Psychology* 4(3), 328–350.

## Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Fürstengraben 30

07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>

[roland.schaefer@uni-jena.de](mailto:roland.schaefer@uni-jena.de)

## Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.