Formale Semantik
03. Mengen und Funktionen

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Achtung: Folien in Überarbeitung. Englische Teile sind noch von 2007!
Stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Semantik`

Inhalt

Mengen und Funktionen

Was ist eine Menge?

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe
- Wörter

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe
- Wörter
- ...

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe
- Wörter
- ...

- nicht unbedingt zweckgebunden

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe
- Wörter
- ...

- nicht unbedingt zweckgebunden
- jedes Objekt maximal einmal in jeder Menge

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe
- Wörter
- ...

- nicht unbedingt zweckgebunden
- jedes Objekt maximal einmal in jeder Menge

Das Wesentliche von heute in Partee u. a. (1990: Kapitel 1–4)

Notation und Beispiele für Mengen

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition $\{\}$, Elementstatus $\in$

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition $\{\}$, Elementstatus $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition $\{\}$, Elementstatus $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)
- $N_1 = \{\text{‘my book’}\}$ (einelementige Menge, enthält eine NP)

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition $\{\}$, Elementstatus $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)
- N_1 = {'my book'} (einelementige Menge, enthält eine NP)
  - vs. N_2 = {my book} (einelementige Menge, enthält mein Buch)

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition {}, Elementstatus $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)
- N_1 = {'my book'} (einelementige Menge, enthält eine NP)
  - vs. N_2 = {my book} (einelementige Menge, enthält mein Buch)
  - vs. N_3 = {'my', 'book'} (Menge von Wörtern)

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition $\{\}$, Elementstatus $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)
- N_1 = {'my book'} (einelementige Menge, enthält eine NP)
  - vs. N_2 = {my book} (einelementige Menge, enthält mein Buch)
  - vs. N_3 = {'my', 'book'} (Menge von Wörtern)
- möglich, aber ungewöhnlich: N_4 = {'my', book}

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition {}, Elementstatus $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)
- $N_1 = \{$'my book'$\}$ (einelementige Menge, enthält eine NP)
  - vs. $N_2 = \{$my book$\}$ (einelementige Menge, enthält mein Buch)
  - vs. $N_3 = \{$'my', 'book'$\}$ (Menge von Wörtern)
- möglich, aber ungewöhnlich: $N_4 = \{$'my', book$\}$
- definiert über eine Eigenschaft der Elemente (zwei Notationen):
  $M_2 = \{$x: x is one of the first three letters of the alphabet$\}$
  $M_2 = \{$x$\|$ x is one of the first three letters of the alphabet$\}$

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition {}, Elementstatus $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)
- N_1 = {'my book'} (einelementige Menge, enthält eine NP)
  - vs. N_2 = {my book} (einelementige Menge, enthält mein Buch)
  - vs. N_3 = {'my', 'book'} (Menge von Wörtern)
- möglich, aber ungewöhnlich: N_4 = {'my', book}
- definiert über eine Eigenschaft der Elemente (zwei Notationen):
  M_2 = {x: x is one of the first three letters of the alphabet}
  M_2 = {x|| x is one of the first three letters of the alphabet}
- U: die universelle Menge (alle Objekte)

Identität von Mengen

Identität von Mengen

Zwei Mengen mit exakt den gleichen Elementen sind identisch.

Identität von Mengen

Zwei Mengen mit exakt den gleichen Elementen sind identisch.

- {a, b, c} = {x: x is one of the first tree letter of the alphabet}

Identität von Mengen

Zwei Mengen mit exakt den gleichen Elementen sind identisch.

- {a, b, c} = {x: x is one of the first tree letter of the alphabet}
- {x: x is human} = {x: x is from the Earth, a primate but not an ape}

Teilmengen und Obermengen

Teilmengen und Obermengen

Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält,
das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. Obermenge).

Teilmengen und Obermengen

Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. Obermenge).

Teilmenge oder Identität $\subseteq$
Obermenge oder Identität $\supseteq$

Teilmengen und Obermengen

Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. Obermenge).

Teilmenge oder Identität $\subseteq$
Obermenge oder Identität $\supseteq$

- $\{a\} \subseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \supseteq \{a\}$

Teilmengen und Obermengen

Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. Obermenge).

Teilmenge oder Identität $\subseteq$
Obermenge oder Identität $\supseteq$

- {a} $\subseteq$ {a,b,c} und {a,b,c} $\supseteq$ {a}
- {a} $\subseteq$ {a,b,c} und {a,b,c} $\supseteq$ {a}

Teilmengen und Obermengen

Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. Obermenge).

Teilmenge oder Identität $\subseteq$
Obermenge oder Identität $\supseteq$

- {a} $\subseteq$ {a,b,c} und {a,b,c} $\supseteq$ {a}
- {a} $\subseteq$ {a,b,c} und {a,b,c} $\supseteq$ {a}
- {a,b,c} $\subseteq$ {a,b,c}

Teilmengen und Obermengen

Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält,
das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. Obermenge).

Teilmenge oder Identität $\subseteq$
Obermenge oder Identität $\supseteq$

- $\{a\} \subseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a\} \subseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c\}$
- $\{a,b,c,d\} \not\subseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \not\supseteq \{a,b,c,d\}$

Teilmengen und Obermengen

Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. Obermenge).

Teilmenge oder Identität $\subseteq$
Obermenge oder Identität $\supseteq$

- $\{a\} \subseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a\} \subseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c\}$
- $\{a,b,c,d\} \nsubseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \nsupseteq \{a,b,c,d\}$
- {x: x is human} $\subseteq$ {x: is an ape}

Echte Teilmengen und Obermengen

Echte Teilmengen und Obermengen

Echte Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält,
das nicht auch in Menge M enthalten ist, und die nicht mit M identisch ist.

Echte Teilmengen und Obermengen

Echte Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält,
das nicht auch in Menge M enthalten ist, und die nicht mit M identisch ist.

Echte Teilmenge $\subset$
Echte Obermenge $\supset$

Echte Teilmengen und Obermengen

Echte Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält,
das nicht auch in Menge M enthalten ist, und die nicht mit M identisch ist.

Echte Teilmenge $\subset$
Echte Obermenge $\supset$

- $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ und $\{a\} \subset \{a, b, c\}$

Echte Teilmengen und Obermengen

Echte Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist, und die nicht mit M identisch ist.

Echte Teilmenge $\subset$
Echte Obermenge $\supset$

- $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ und $\{a\} \subset \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \not\subset \{a, b, c\}$ aber $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

Elemente vs. Teilmengen

Elemente vs. Teilmengen

- Achtung bei Mengen von Mengen

Elemente vs. Teilmengen

- Achtung bei Mengen von Mengen
  - $\{\{a\}\} \not\subset \{a,b,c\}$

Elemente vs. Teilmengen

- Achtung bei Mengen von Mengen
  - $\{\{a\}\} \not\subset \{a,b,c\}$
  - $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a,b,c\}$

Elemente vs. Teilmengen

- Achtung bei Mengen von Mengen
  - $\{\{a\}\} \not\subset \{a,b,c\}$
  - $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a,b,c\}$
  - $\{\{a\}\} \notin \{a,b,c\}$

Elemente vs. Teilmengen

- Achtung bei Mengen von Mengen
  - $\{\{a\}\} \not\subset \{a,b,c\}$
  - $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a,b,c\}$
  - $\{\{a\}\} \notin \{a,b,c\}$
- für leere Menge $\{\}$ oder $\emptyset$

Elemente vs. Teilmengen

- Achtung bei Mengen von Mengen
  - $\{\{a\}\} \not\subset \{a,b,c\}$
  - $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a,b,c\}$
  - $\{\{a\}\} \notin \{a,b,c\}$
- für leere Menge $\{\}$ oder $\emptyset$
  - $\{\} \subset$ jede anderen Menge

Elemente vs. Teilmengen

- Achtung bei Mengen von Mengen
  - $\{\{a\}\} \not\subset \{a,b,c\}$
  - $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a,b,c\}$
  - $\{\{a\}\} \notin \{a,b,c\}$

- für leere Menge $\{\}$ oder $\emptyset$
  - $\{\} \subset$ jede anderen Menge
  - $\{\} \notin \{\}$

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.
  - w = Herr Webelhuth
    E = {x: x is professors of English Linguistics}
    H = {x: x is human}

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.
  - w = Herr Webelhuth
    E = {x: x is professors of English Linguistics}
    H = {x: x is human}
  - Aus $w \in E$ und $E \subset H$ folgt $w \in H$

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.
  - w = Herr Webelhuth
    E = {x: x is professors of English Linguistics}
    H = {x: x is human}
  - Aus $w \in E$ und $E \subset H$ folgt $w \in H$
- Aber

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.
  - w = Herr Webelhuth
    E = {x: x is professors of English Linguistics}
    H = {x: x is human}
  - Aus $w \in E$ und $E \subset H$ folgt $w \in H$

- Aber
  - *Die Anglistikprofessoren sind zahlreich.*

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.
  - w = Herr Webelhuth
    E = {x: x is professors of English Linguistics}
    H = {x: x is human}
  - Aus $w \in E$ und $E \subset H$ folgt $w \in H$

- Aber
  - *Die Anglistikprofessoren sind zahlreich.*
  - N = {x: x is a set with many members}

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.
  - w = Herr Webelhuth
    E = {x: x is professors of English Linguistics}
    H = {x: x is human}
  - Aus $w \in E$ und $E \subset H$ folgt $w \in H$
- Aber
  - *Die Anglistikprofessoren sind zahlreich.*
  - N = {x: x is a set with many members}
  - Aus $w \in E$ und $E \in N$ folgt nicht $w \in N$

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.
  - w = Herr Webelhuth
    E = {x: x is professors of English Linguistics}
    H = {x: x is human}
  - Aus $w \in E$ und $E \subset H$ folgt $w \in H$
- Aber
  - *Die Anglistikprofessoren sind zahlreich.*
  - N = {x: x is a set with many members}
  - Aus $\mathrm{w} \in \mathrm{E}$ und $\mathrm{E} \in \mathrm{N}$ folgt nicht $\mathrm{w} \in \mathrm{N}$
  - Vergleiche: *Herr Webelhuth ist zahlreich.

Potenzmengen (power sets)

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}
  - $\wp(M) = \{\}$

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}
  - $\wp(M) = \{\{a\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}
  - $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}
  - $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}
  - $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}
  - $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}
  - $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}
  - $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - M={a,b,c}
  - $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Union ∪ and intersection ∩

- For any sets M and N: $M \cup N = \{x || x \in M \textbf{ or } x \in N\}$

Union ∪ and intersection ∩

- For any sets M and N: $M \cup N = \{x | | x \in M \textbf{ or } x \in N\}$
- if $M = \{a, b, c\}$ and $N = \{a, b, d\}$ then $M \cup N = \{a, b, c, d\}$

Union $\cup$ and intersection $\cap$

- For any sets M and N: $M \cup N = \{x | | x \in M \textbf{ or } x \in N\}$
- if $M = \{a, b, c\}$ and $N = \{a, b, d\}$ then $M \cup N = \{a, b, c, d\}$
- For any sets M and N: $M \cap N = \{x | | x \in M \textbf{ and } x \in N\}$

Union $\cup$ and intersection $\cap$

- For any sets M and N: $M \cup N = \{x||x \in M \textbf{ or } x \in N\}$
- if $M = \{a, b, c\}$ and $N = \{a, b, d\}$ then $M \cup N = \{a, b, c, d\}$
- For any sets M and N: $M \cap N = \{x||x \in M \textbf{ and } x \in N\}$
- if $M = \{a, b, c\}$ and $N = \{a, b\}$ then $M \cap N = \{a, b\}$

Union ∪ and intersection ∩

- For any sets M and N: $M \cup N = \{x||x \in M \textbf{ or } x \in N\}$
- if $M = \{a, b, c\}$ and $N = \{a, b, d\}$ then $M \cup N = \{a, b, c, d\}$
- For any sets M and N: $M \cap N = \{x||x \in M \textbf{ and } x \in N\}$
- if $M = \{a, b, c\}$ and $N = \{a, b\}$ then $M \cap N = \{a, b\}$
- as a general principle (Consitency): $M \subseteq N$ iff $M \cup N = N$ and $M \subseteq N$ iff $M \cap N = M$

Generalized union $\bigcup$ and intersection $\bigcap$

- $\bigcup M = \{x | | x \in Y \textbf{ for some } Y \in M\}$

Generalized union $\bigcup$ and intersection $\bigcap$

- $\bigcup M = \{x | | x \in Y \textbf{ for some } Y \in M\}$
- (a) if $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ then $\bigcup M = \{a, b, c\}$

Generalized union $\bigcup$ and intersection $\bigcap$

- $\bigcup M = \{x | x \in Y$ **for some** $Y \in M\}$
- (a) if $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ then $\bigcup M = \{a, b, c\}$
- (b) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{a, b\}$, $M_3 = \{a, b, c\}$, $I = \{1, 2, 3\}$; $\bigcup_{i \in I} M = \{a, b, c\}$

Generalized union $\bigcup$ and intersection $\bigcap$

- $\bigcup M = \{x \| x \in Y$ **for some** $Y \in M\}$
- (a) if $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ then $\bigcup M = \{a, b, c\}$
- (b) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{a, b\}$, $M_3 = \{a, b, c\}$, $I = \{1, 2, 3\}$; $\bigcup_{i \in I} M = \{a, b, c\}$
- $\bigcap M = \{x \| x \in Y$ **for every** $Y \in M\}$

Generalized union $\bigcup$ and intersection $\bigcap$

- $\bigcup M = \{x | | x \in Y \textbf{ for some } Y \in M\}$
- (a) if $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ then $\bigcup M = \{a, b, c\}$
- (b) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{a, b\}$, $M_3 = \{a, b, c\}$, $I = \{1, 2, 3\}$; $\bigcup_{i \in I} M = \{a, b, c\}$
- $\bigcap M = \{x | | x \in Y \textbf{ for every } Y \in M\}$
- (a) if $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ then $\bigcap M = \{a\}$

Generalized union $\bigcup$ and intersection $\bigcap$

- $\bigcup M = \{x | | x \in Y$ **for some** $Y \in M\}$
- (a) if $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ then $\bigcup M = \{a, b, c\}$
- (b) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{a, b\}$, $M_3 = \{a, b, c\}$, $I = \{1, 2, 3\}$; $\bigcup_{i \in I} M = \{a, b, c\}$
- $\bigcap M = \{x | | x \in Y$ **for every** $Y \in M\}$
- (a) if $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ then $\bigcap M = \{a\}$
- (b) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{a, b\}$, $M_3 = \{a, b, c\}$, $I = \{1, 2, 3\}$; $\bigcap_{i \in I} M = \{a\}$

Difference - and complement $\setminus$ and $'$

- For any two sets M and N: $M - N = \{x||x \in M \text{ and } x \notin N\}$

Difference - and complement $\setminus$ and $'$

- For any two sets M and N: $M - N = \{x || x \in M \text{ and } x \notin N\}$
- $M = \{a, b, c\}$, $N = \{a\}$, $M - N = \{b, c\}$

Difference - and complement \ and ′

- For any two sets M and N: $M - N = \{x | | x \in M \text{ and } x \notin N\}$
- $M = \{a, b, c\}$, $N = \{a\}$, $M - N = \{b, c\}$
- For any two sets M and N: $M \backslash N = \{x | | x \in N \text{ and } x \notin M\}$

Difference - and complement \ and ′

- For any two sets M and N: $M - N = \{x | | x \in M \text{ and } x \notin N\}$
- $M = \{a, b, c\}$, $N = \{a\}$, $M - N = \{b, c\}$
- For any two sets M and N: $M \backslash N = \{x | | x \in N \text{ and } x \notin M\}$
- $O = \{a, b, c, k\}$ $M \backslash O = \{k\}$

Difference - and complement \ and ′

- For any two sets M and N: $M - N = \{x | | x \in M \text{ and } x \notin N\}$
- $M = \{a, b, c\}$, $N = \{a\}$, $M - N = \{b, c\}$
- For any two sets M and N: $M \backslash N = \{x | | x \in N \text{ and } x \notin M\}$
- $O = \{a, b, c, k\}$ $M \backslash O = \{k\}$
- the universal complement: $M' = \{x | | x \in U \text{ and } x \notin M\}$
  (U the universal set)

Trivial equalities

- Idempotency: $M \cup M = M$, $M \cap M = M$

Trivial equalities

- Idempotency: $M \cup M = M$, $M \cap M = M$
- Commutativity for $\cup$ and $\cap$: $M \cup N = N \cup M$ ...

Trivial equalities

- Idempotency: $M \cup M = M$, $M \cap M = M$
- Commutativity for $\cup$ and $\cap$: $M \cup N = N \cup M$ ...
- Associativiy for $\cup$ and $\cap$: $(M \cup N) \cup O = M \cup (N \cup O)$ ...

Trivial equalities

- Idempotency: $M \cup M = M$, $M \cap M = M$
- Commutativity for $\cup$ and $\cap$: $M \cup N = N \cup M$ ...
- Associativiy for $\cup$ and $\cap$: $(M \cup N) \cup O = M \cup (N \cup O)$ ...
- Distributivity for $\cup$ and $\cap$: $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$ ...

Trivial equalities

- Idempotency: $M \cup M = M$, $M \cap M = M$
- Commutativity for $\cup$ and $\cap$: $M \cup N = N \cup M$ ...
- Associativiy for $\cup$ and $\cap$: $(M \cup N) \cup O = M \cup (N \cup O)$ ...
- Distributivity for $\cup$ and $\cap$: $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$ ...
- Identity: $M \cup \emptyset = X$, $M \cup U = U$ ...what about $\cap$

More interesting equalities

- Complement laws: $M \cup \emptyset = M$, $M'' = M$, $M \cap M' = \emptyset$, $X \cap U = U$

More interesting equalities

- Complement laws: $M \cup \emptyset = M$, $M'' = M$, $M \cap M' = \emptyset$, $X \cap U = U$
- DeMorgan: $(M \cup N)' = M' \cap X'$ ...

Funktionen und Relationen

How to define an ordered pair

- …without introducing ordered tuples as a new primitive

How to define an ordered pair

- ...without introducing ordered tuples as a new primitive
- take S=$\{\{a\},\{a,b\}\}$

How to define an ordered pair

- ...without introducing ordered tuples as a new primitive
- take S=$\{\{a\},\{a,b\}\}$
- we write: $\langle a,b\rangle=\{\{a\},\{a,b\}\}$

How to define an ordered pair

- ...without introducing ordered tuples as a new primitive
- take S=$\{\{a\},\{a,b\}\}$
- we write: $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$
- orderend n-tuples defined recursively

How to define an ordered pair

- ...without introducing ordered tuples as a new primitive
- take S=$\{\{a\},\{a,b\}\}$
- we write: $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$
- orderend n-tuples defined recursively
- $\langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle$

How to define an ordered pair

- ...without introducing ordered tuples as a new primitive
- take S=$\{\{a\}, \{a, b\}\}$
- we write: $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- orderend n-tuples defined recursively
- $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$
- first and second coordinate of the tuple

Cartesian products

- sets of ordered pairs

Cartesian products

- sets of ordered pairs
- tupling each member of the first argument with each of the second

Cartesian products

- sets of ordered pairs
- tupling each member of the first argument with each of the second
- $S_1 \times S_2 = \{\langle x, y\rangle | | x \in S_1 \text{ and } y \in S_2\}$

Cartesian products

- sets of ordered pairs
- tupling each member of the first argument with each of the second
- $S_1 \times S_2 = \{\langle x, y \rangle \| x \in S_1 \text{ and } y \in S_2\}$
- for an arbitrary number of sets: $S_1 \times \cdots \times S_n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \| x_i \in S_i\}$

Cartesian products

- sets of ordered pairs
- tupling each member of the first argument with each of the second
- $S_1 \times S_2 = \{\langle x, y \rangle \| x \in S_1 \text{ and } y \in S_2\}$
- for an arbitrary number of sets: $S_1 \times \cdots \times S_n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \| x_i \in S_i\}$
- $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ abbreviated $\vec{x}$

Cartesian products

- sets of ordered pairs
- tupling each member of the first argument with each of the second
- $S_1 \times S_2 = \{\langle x, y\rangle \| x \in S_1 \text{ and } y \in S_2\}$
- for an arbitrary number of sets: $S_1 \times \cdots \times S_n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \| x_i \in S_i\}$
- $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ abbreviated $\vec{x}$
- for $S \times S \times \cdots$: n-fold products
  $S^n = \{\vec{s} \| s_i \in S \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$

Defintion of relations

- hold between (sets of) objects

Defintion of relations

- hold between (sets of) objects
- *x kicks y, x lives on the same floor as y, ...*

Defintion of relations

- hold between (sets of) objects
- *x kicks y, x lives on the same floor as y, ...*
- formalization: Rab, aRb

Defintion of relations

- hold between (sets of) objects
- *x kicks y*, *x lives on the same floor as y*, ...
- formalization: Rab, aRb
- $a \in A$ and $b \in B$: $R \subseteq A \times B$,
  R is from A (**domain**) to B (**range**)

Defintion of relations

- hold between (sets of) objects
- *x kicks y, x lives on the same floor as y, ...*
- formalization: Rab, aRb
- $a \in A$ and $b \in B$: $R \subseteq A \times B$,
  R is from A (**domain**) to B (**range**)
- R from A to A is in A

Complement, inverse

- complement $R' = \{\langle a, b \rangle \notin R\}$ for $R \subseteq A \times B$

Complement, inverse

- complement $R' = \{\langle a, b \rangle \notin R\}$ for $R \subseteq A \times B$
  - R = the relation of teacherhood between a and b (the **arguments**)

Complement, inverse

- complement $R' = \{\langle a, b \rangle \notin R\}$ for $R \subseteq A \times B$
  - R = the relation of teacherhood between a and b (the **arguments**)
  - R′ = all pairs $\langle b, a \rangle$ s.t. it is false that the first member is the teacher of the second member

Complement, inverse

- complement $R' = \{\langle a, b \rangle \ \notin R\}$ for $R \subseteq A \times B$
  - R = the relation of teacherhood between a and b (the **arguments**)
  - R′ = all pairs $\langle b, a \rangle$ s.t. it is false that the first member is the teacher of the second member
- inverse: $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle || \langle a, b \rangle \in R\}$ for $R \subseteq A \times B$

- complement $R' = \{\langle a, b \rangle \ \notin R\}$ for $R \subseteq A \times B$
  - R = the relation of teacherhood between a and b (the **arguments**)
  - R′ = all pairs $\langle b, a \rangle$ s.t. it is false that the first member is the teacher of the second member
- inverse: $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle || \langle a, b \rangle \in R\}$ for $R \subseteq A \times B$
  - R = the relation of teacherhood between a and b:
    Herr Webelhuth is the teacher of Herr Schäfer.

- complement $R' = \{\langle a, b \rangle \ \not\in R\}$ for $R \subseteq A \times B$
  - R = the relation of teacherhood between a and b (the **arguments**)
  - R′ = all pairs $\langle b, a \rangle$ s.t. it is false that the first member is the teacher of the second member
- inverse: $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle || \langle a, b \rangle \in R\}$ for $R \subseteq A \times B$
  - R = the relation of teacherhood between a and b:
    Herr Webelhuth is the teacher of Herr Schäfer.
  - R^{-1} = all pairs $\langle b, a \rangle$ where *a* is the teacher of *b*:
    Herr Schäfer is the inverse-teacher of Herr Webelhuth.

Functions

- A function F from A to B is a relation s.t. for every $a \in A$ there is exactly on tuple $\langle a, b \rangle \in A \times B$ s.t. a is the first coordinate.

Functions

- A function F from A to B is a relation s.t. for every $a \in A$ there is exactly on tuple $\langle a, b \rangle \in A \times B$ s.t. a is the first coordinate.
- partial function from A to B: for some $a \in A$ there is no tuple $\langle a, b \rangle \in A \times B$, F is not *defined for* some a

Injection, surjection, bijection

- B the range of F, F is **into** B

Injection, surjection, bijection

- B the range of F, F is **into** B
- F from A to B is **onto (a surjection)** B iff there is no $b_i \in B$ s.t. there is no $\langle a, b_i \rangle \in F$

Injection, surjection, bijection

- B the range of F, F is **into** B
- F from A to B is **onto (a surjection)** B iff there is no $b_i \in B$ s.t. there is no $\langle a, b_i \rangle \in F$
- F from A to B is **one-to-one (an injection)** iff there are no two pairs s.t. $\langle a_i, b_j \rangle \in F$ and $\langle a_k, b_j \rangle \in F$

Injection, surjection, bijection

- B the range of F, F is **into** B
- F from A to B is **onto (a surjection)** B iff there is no $b_i \in B$ s.t. there is no $\langle a, b_i \rangle \in F$
- F from A to B is **one-to-one (an injection)** iff there are no two pairs s.t. $\langle a_i, b_j \rangle \in F$ and $\langle a_k, b_j \rangle \in F$
- one-to-one, onto, and total function: correspondence (bijection)

Composition

- One can take the range of a function and make it the domain of another function.

Composition

- One can take the range of a function and make it the domain of another function.
- A function $F_1 : A \rightarrow B$ and a function $F_2 : B \rightarrow C$ can be composed as $B(A(a))$, short $B \circ A$

Composition

- One can take the range of a function and make it the domain of another function.
- A function $F_1 : A \to B$ and a function $F_2 : B \to C$ can be composed as $B(A(a))$, short $B \circ A$
- the compound function can be empty, it will be total if both A and B are bijections.

Mehr über Relationen und Mengen

Reflexivity

A relation R in $A = \{a, b, \ldots\}$ is...

	if	(ex.)
reflexive	for **every** $a \in A$: $\langle a, a \rangle \in R$	is as heavy as A: physical objects
irreflexive	for **every** $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$	is the father of
non-reflexive	for **some** $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$	has hurt

Symmetry

A relation R in $A = \{a, b, \ldots\}$ is...

	if	(ex.)
symmetric	for every $\langle a, b\rangle \in R$: $\langle b, a\rangle \in R$	has the same car as
asymmetric	for every $\langle a, b\rangle \in R$: $\langle b, a\rangle \notin R$	has a different car than
non-symmetric	for some $\langle a, b\rangle \in R$: $\langle b, a\rangle \notin R$	is the sister of
anti-symmetric	for every $\langle a, b\rangle \in R$: $a = b$	beats oneself not every human does

Transitivity

A relation R in $A = \{a, b, \ldots\}$ is...

	if	(ex.)
transitive	if $\langle a, b\rangle \in R$ and $\langle b, c\rangle \in R$ then $\langle a, c\rangle \in R$	is to the left of
intransitive	the above is never the case	is the father of
non-transitive	the above is sometimes not the case	likes

Connectedness

A relation R in $A = \{a, b, \ldots\}$ is...

	if	(ex.)
connected	for every $a, b \in A$, $a \neq b$: either $\langle a, b \rangle \in R$ or $\langle b, a \rangle \in R$	$>$ (A: the natural numbers)
non-connected	for some $a, b \in A$ the above is not the case	likes

Equivalence relations

- reflexive ($\langle a, a \rangle \in R$ for every a)

Equivalence relations

- reflexive ($\langle a, a\rangle \in R$ for every a)
- symmetric ($\langle b, a\rangle \in R$ for every $\langle a, b\rangle$)

Equivalence relations

- reflexive ($\langle a, a\rangle \in R$ for every a)
- symmetric ($\langle b, a\rangle \in R$ for every $\langle a, b\rangle$)
- transitive ($\langle a, b\rangle \in R$ & $\langle b, c\rangle \in R \rightarrow \langle a, c\rangle \in R$)

Equivalence relations

- reflexive ($\langle a, a \rangle \in R$ for every a)
- symmetric ($\langle b, a \rangle \in R$ for every $\langle a, b \rangle$)
- transitive ($\langle a, b \rangle \in R$ & $\langle b, c \rangle \in R \rightarrow \langle a, c \rangle \in R$)
- *is as stupid as*

Equivalence relations

- reflexive ($\langle a, a \rangle \in R$ for every a)
- symmetric ($\langle b, a \rangle \in R$ for every $\langle a, b \rangle$)
- transitive ($\langle a, b \rangle \in R$ & $\langle b, c \rangle \in R \rightarrow \langle a, c \rangle \in R$)
- *is as stupid as*
- partition the range into equivalence classes:
  $A = \{a, b, c, d\}$, for example $P_{A_1} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$

Equivalence relations

- reflexive ($\langle a, a \rangle \in R$ for every a)
- symmetric ($\langle b, a \rangle \in R$ for every $\langle a, b \rangle$)
- transitive ($\langle a, b \rangle \in R$ & $\langle b, c \rangle \in R \rightarrow \langle a, c \rangle \in R$)
- *is as stupid as*
- partition the range into equivalence classes:
  $A = \{a, b, c, d\}$, for example $P_{A_1} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$
- not $\{\{a\}, \{b, c\}\}$ or $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$

Defining ordering relations

An ordering relation R in A is ...

- transitive ($\langle a, b\rangle \in R$ & $\langle b, c\rangle \in R \rightarrow \langle a, c\rangle \in R$) ...plus ...

Defining ordering relations

An ordering relation R in A is ...

- transitive ($\langle a, b\rangle \in R$ & $\langle b, c\rangle \in R \rightarrow \langle a, c\rangle \in R$) ...plus ...
- irreflexive and asymmetric: **strict order**

Defining ordering relations

An ordering relation R in A is ...

- transitive ($\langle a, b\rangle \in R$ & $\langle b, c\rangle \in R \rightarrow \langle a, c\rangle \in R$) ...plus ...
- irreflexive and asymmetric: **strict order**
- $A = \{a, b, c, d\}$, $R_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$

Defining ordering relations

An ordering relation R in A is ...

- transitive ($\langle a,b\rangle \in R$ & $\langle b,c\rangle \in R \rightarrow \langle a,c\rangle \in R$) ...plus ...
- irreflexive and asymmetric: **strict order**
- $A = \{a,b,c,d\}$, $R_1 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle a,c\rangle\}$
- reflexive and anti-symmetric: **weak order**

Defining ordering relations

An ordering relation R in A is ...

- transitive ($\langle a, b \rangle \in R$ & $\langle b, c \rangle \in R \rightarrow \langle a, c \rangle \in R$) ...plus ...
- irreflexive and asymmetric: **strict order**
- $A = \{a, b, c, d\}$, $R_1 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$
- reflexive and anti-symmetric: **weak order**
- $A = \{a, b, c, d\}$, $R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$

Orders: an example

- a strict order: *greater than* $(>)$ in $\mathbb{N}$

Orders: an example

- a strict order: *greater than* ($>$) in $\mathbb{N}$
- what is the corresponding weak order

Orders: an example

- a strict order: *greater than* ($>$) in $\mathbb{N}$
- what is the corresponding weak order
- $\geq$

- **minimal**: x is not preceded

- **minimal**: x is not preceded
- **least**: x precedes every other lement

- **minimal**: x is not preceded
- **least**: x precedes every other lement
- **maximal**: x is not succeeded

- **minimal**: x is not preceded
- **least**: x precedes every other lement
- **maximal**: x is not succeeded
- **greatest**: x succeeds every other element

- **minimal**: x is not preceded
- **least**: x precedes every other lement
- **maximal**: x is not succeeded
- **greatest**: x succeeds every other element
- **well-ordering**: total order, every subset has a least element

Literatur I

Partee, Barbara, Alice ter Meulen & Robert E. Wall. 1990. *Mathematical methods in linguistics*. Dordrecht: Kluwer.

Autor

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

`https://rolandschaefer.net`
`roland.schaefer@uni-jena.de`

Lizenz

Creative Commons BY-SA-3.0-DE