

Formale Semantik

03. Mengen und Funktionen

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Achtung: Folien in Überarbeitung. Englische Teile sind noch von 2007!
Stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Semantik>

1 Mengen und Funktionen

2 Funktionen und Relationen

3 Mehr über Relationen und Mengen

Mengen und Funktionen

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe
- Wörter
- ...
- nicht unbedingt zweckgebunden
- jedes Objekt maximal einmal in jeder Menge

Das Wesentliche von heute in Partee u. a. (1990: Kapitel 1–4)

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition {}, Elementstatus \in

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)
- $N_1 = \{\text{'my book'}\}$ (einelementige Menge, enthält eine NP)
 - ▶ vs. $N_2 = \{\text{my book}\}$ (einelementige Menge, enthält mein Buch)
 - ▶ vs. $N_3 = \{\text{'my'}, \text{'book'}\}$ (Menge von Wörtern)
- möglich, aber ungewöhnlich: $N_4 = \{\text{'my'}, \text{book}\}$
- definiert über eine Eigenschaft der Elemente (zwei Notationen):
 $M_2 = \{x: x \text{ is one of the first three letters of the alphabet}\}$
 $M_2 = \{x \mid x \text{ is one of the first three letters of the alphabet}\}$
- U : die universelle Menge (alle Objekte)

Zwei Mengen mit exakt den gleichen Elementen sind **identisch**.

- $\{a, b, c\} = \{x: x \text{ is one of the first three letters of the alphabet}\}$
- $\{x: x \text{ is human}\} = \{x: x \text{ is from the Earth, a primate but not an ape}\}$

Teilmenge | Eine Menge N , die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. **Obermenge**).

Teilmenge oder Identität \subseteq

Obermenge oder Identität \supseteq

- $\{a\} \subseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a\} \subseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c\}$
- $\{a,b,c,d\} \not\subseteq \{a,b,c\}$ und $\{a,b,c\} \not\supseteq \{a,b,c,d\}$
- $\{x: x \text{ is human}\} \subseteq \{x: x \text{ is an ape}\}$

Echte Teilmengen und Obermengen

Echte Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist, und die nicht mit M identisch ist.

Echte Teilmenge \subset

Echte Obermenge \supset

- $\{a\} \subset \{a, b, c\}$ und $\{a\} \subset \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c\} \not\subset \{a, b, c\}$ aber $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

- Achtung bei Mengen von Mengen

- ▶ $\{\{a\}\} \not\subset \{a,b,c\}$
- ▶ $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a,b,c\}$
- ▶ $\{\{a\}\} \notin \{a,b,c\}$

- für leere Menge $\{\}$ oder \emptyset

- ▶ $\{\} \subset$ jede anderen Menge
- ▶ $\{\} \notin \{\}$

- Logik mit Mengen
 - ▶ *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.
Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.*
 - ▶ $w = \text{Herr Webelhuth}$
 $E = \{x: x \text{ is professors of English Linguistics}\}$
 $H = \{x: x \text{ is human}\}$
 - ▶ Aus $w \in E$ und $E \subset H$ folgt $w \in H$
- Aber
 - ▶ *Die Anglistikprofessoren sind zahlreich.*
 - ▶ $N = \{x: x \text{ is a set with many members}\}$
 - ▶ Aus $w \in E$ und $E \in N$ folgt nicht $w \in N$
 - ▶ Vergleiche: *Herr Webelhuth ist zahlreich.

Potenzmengen (power sets)

Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M : $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

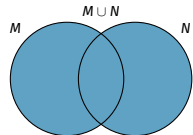
- Beispiel

- ▶ $M = \{a, b, c\}$

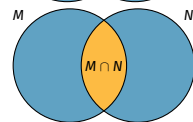
- ▶ $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{\}\}$

- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Vereinigungsmenge und Schnittmenge



Vereinigungsmenge | Für Mengen M und N: $M \cup N = \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$



Schnittmenge | Für Mengen M und N: $M \cap N = \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$

- Beispiel Vereinigungsmenge

- ▶ $M = \{a, b, c\}$
- ▶ $N = \{a, b, d\}$
- ▶ $M \cup N = \{a, b, c, d\}$

- Beispiel Schnittmenge

- ▶ $M = \{a, b, c\}$
- ▶ $N = \{a, b\}$
- ▶ $M \cap N = \{a, b\}$

Generalisierte Vereinigungs- und Schnittmenge

$$\bigcup M = \{x : x \in Y \text{ für irgendeine } Y \in M\}$$

$$\bigcap M = \{x : x \in Y \text{ für jede } Y \in M\}$$

- Beispiel generalisierte Vereinigungsmenge

- ▶ $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- ▶ $\bigcup M = \{a, b, c\}$

- Beispiel generalisierte Schnittmenge

- ▶ $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
- ▶ $\bigcap M = \{a\}$

Differenzmenge und Komplementmenge

Differenzmenge | $M - N = \{x : x \in M \text{ and } x \notin N\}$

Komplementmenge | $M \setminus N = \{x : x \in N \text{ and } x \notin M\}$

- Beispiel Differenzmenge

- ▶ $M = \{a, b, c\}$
- ▶ $N = \{a\}$
- ▶ $M - N = \{b, c\}$

- Beispiel Komplementmenge

- ▶ $O = \{a, b, c, k\}$
- ▶ $M \setminus O = \{k\}$

- Universelles Komplement

- ▶ die universelle Menge | $U = \{x : x \text{ is an object}\}$
- ▶ $M' = \{x : x \in U \text{ and } x \notin M\}$

Triviale Identitäten

Idempotenz	$M \cup M$	$=$	M
	$M \cap M$	$=$	M
Kommutativität	$M \cup N$	$=$	$N \cup M$
	$M \cap N$	$=$	$N \cap M$
Assoziativität	$(M \cup N) \cup O$	$=$	$M \cup (N \cup O)$
	$(M \cap N) \cap O$	$=$	$M \cap (N \cap O)$
Distributivität	$M \cup (N \cap O)$	$=$	$(M \cup N) \cap (M \cup O)$

Komplementgesetze

- $M \cup \emptyset = M$
- $M'' = M$
- $M \cap M' = \emptyset$
- $X \cap U = U$

DeMorgan

- $(M \cup N)' = M' \cap X'$
- DeMorgen begegnet uns in der Logik wieder.

Funktionen und Relationen

How to define an ordered pair

- ...without introducing ordered tuples as a new primitive
- take $S = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- we write: $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- ordered n-tuples defined recursively
- $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$
- first and second coordinate of the tuple

- sets of ordered pairs
- tupling each member of the first argument with each of the second
- $S_1 \times S_2 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in S_1 \text{ and } y \in S_2\}$
- for an arbitrary number of sets: $S_1 \times \cdots \times S_n = \{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \mid x_i \in S_i\}$
- $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ abbreviated \vec{x}
- for $S \times S \times \cdots$: n-fold products
 $S^n = \{\vec{s} \mid s_i \in S \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$

Defintion of relations

- hold between (sets of) objects
- *x kicks y, x lives on the same floor as y, ...*
- formalization: Rab , aRb
- $a \in A$ and $b \in B$: $R \subseteq A \times B$,
R is from A (**domain**) to B (**range**)
- R from A to A is **in** A

- complement $R' = \{\langle a, b \rangle \notin R\}$ for $R \subseteq A \times B$
 - ▶ R = the relation of teacherhood between a and b (the **arguments**)
 - ▶ R' = all pairs $\langle b, a \rangle$ s.t. it is false that the first member is the teacher of the second member
- inverse: $R^{-1} = \{\langle b, a \rangle \mid \langle a, b \rangle \in R\}$ for $R \subseteq A \times B$
 - ▶ R = the relation of teacherhood between a and b :
Herr Webelhuth is the teacher of Herr Schäfer.
 - ▶ R^{-1} = all pairs $\langle b, a \rangle$ where a is the teacher of b :
Herr Schäfer is the inverse-teacher of Herr Webelhuth.

- A function F from A to B is a relation s.t. for every $a \in A$ there is exactly one tuple $\langle a, b \rangle \in A \times B$ s.t. a is the first coordinate.
- partial function from A to B : for some $a \in A$ there is no tuple $\langle a, b \rangle \in A \times B$, F is not *defined* for some a

Injection, surjection, bijection

- B the range of F, F is **into** B
- F from A to B is **onto (a surjection)** B iff there is no $b_i \in B$ s.t. there is no $\langle a, b_i \rangle \in F$
- F from A to B is **one-to-one (an injection)** iff there are no two pairs s.t. $\langle a_i, b_j \rangle \in F$ and $\langle a_k, b_j \rangle \in F$
- one-to-one, onto, and total function: correspondence (bijection)

- One can take the range of a function and make it the domain of another function.
- A function $F_1 : A \rightarrow B$ and a function $F_2 : B \rightarrow C$ can be composed as $B(A(a))$, short $B \circ A$
- the compound function can be empty, it will be total if both A and B are bijections.

Mehr über Relationen und Mengen

A relation R in $A = \{a, b, \dots\}$ is...

	if	(ex.)
reflexive	for every $a \in A$: $\langle a, a \rangle \in R$	is as heavy as
irreflexive	for every $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$	A: physical objects
non-reflexive	for some $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$	is the father of
		has hurt

A relation R in $A = \{a, b, \dots\}$ is...

	if	(ex.)
symmetric	for every $\langle a, b \rangle \in R$: $\langle b, a \rangle \in R$	has the same car as
asymmetric	for every $\langle a, b \rangle \in R$: $\langle b, a \rangle \notin R$	has a different car than
non-symmetric	for some $\langle a, b \rangle \in R$: $\langle b, a \rangle \notin R$	is the sister of
anti-symmetric	for every $\langle a, b \rangle \in R$: $a = b$	beats oneself not every human does

A relation R in $A = \{a, b, \dots\}$ is...

	if	(ex.)
transitive	if $\langle a, b \rangle \in R$ and $\langle b, c \rangle \in R$ then $\langle a, c \rangle \in R$	is to the left of
intransitive	the above is never the case	is the father of
non-transitive	the above is sometimes not the case	likes

A relation R in $A = \{a, b, \dots\}$ is...

	if	(ex.)
connected	for every $a, b \in A, a \neq b$: either $\langle a, b \rangle \in R$ or $\langle b, a \rangle \in R$	$>$ (A : the natural numbers)
non-connected	for some $a, b \in A$ the above is not the case	likes

Equivalence relations

- reflexive ($\langle a, a \rangle \in R$ for every a)
- symmetric ($\langle b, a \rangle \in R$ for every $\langle a, b \rangle$)
- transitive ($\langle a, b \rangle \in R \ \& \ \langle b, c \rangle \in R \rightarrow \langle a, c \rangle \in R$)
- *is as stupid as*
- partition the range into equivalence classes:
 $A = \{a, b, c, d\}$, for example $P_{A_1} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$
- **not** $\{\{a\}, \{b, c\}\}$ or $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$

An ordering relation R in A is ...

- transitive ($\langle a, b \rangle \in R \ \& \ \langle b, c \rangle \in R \rightarrow \langle a, c \rangle \in R$) ...plus ...
- irreflexive and asymmetric: **strict order**
- $A = \{a, b, c, d\}$, $R_1 = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$
- reflexive and anti-symmetric: **weak order**
- $A = \{a, b, c, d\}$, $R_1 = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle, \langle c, c \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}$

Orders: an example

- a strict order: *greater than* ($>$) in \mathbb{N}
- what is the corresponding weak order
- \geq

- **minimal:** x is not preceded
- **least:** x precedes every other element
- **maximal:** x is not succeeded
- **greatest:** x succeeds every other element
- **well-ordering:** total order, every subset has a least element

Partee, Barbara, Alice ter Meulen & Robert E. Wall. 1990. *Mathematical methods in linguistics*. Dordrecht: Kluwer.

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>
roland.schaefer@uni-jena.de

Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.