Formale Semantik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Folien in Überarbeitung. Englische Teile (ab Woche 7) sind noch von 2007!
Stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Semantik`

Inhalt

Inferenz und Bedeutung

Die folgenden drei Bücher sind die Grundlage des Seminars:

- Chierchia & McConnell-Ginet (2000) | GB-orientiert, nur die Kapitel von Chierchia
- Dowty u. a. (1981) | tolle Montague-Einführung von seinen Schülern
- Partee u. a. (1990) | wichtige Grundlagen (Algebra, Logik), viele Druckfehler

Literatur | weitere Empfehlungen

- Bucher (1998) | lesbare Logik-Einführung auf Deutsch
- Carpenter (1997) | prima Hardcore-Einführung mit Kategorialgrammatik
- Gutzmann (2019) | aktuelle Einführung auf Deutsch

Seminarverlauf

1. 9.10.2023 Diskussion: Wie schlussfolgern wir? Wie hängen unser Schlussfolgerungen mit Semantik zusammen?
2. 26.10.2023 Referentielle Semantik (Folien 2)
3. 02.11.2023 Mengen- und Funktionstheorie (Folien 3)
4. 09.11.2023 Aussagenlogik (Folien 4)
- 16.11.2023 Ausfall wegen Dienstreise
5. 23.11.2023 Prädikatenlogik (Folien 5)
6. 30.11.2023 Quantifikation und modelltheoretische Semantik (Folien 6)
7. 07.12.2023 Einfach getypte höherstufige λ-Sprachen (Folien 7)
8. 14.12.2023 Intensionalität (Folien 8)
9. 21.12.2023 Tempus und Modalität (Folien 9)
- 28.12.2023 Weihnachtsferien
- 04.01.2024 Weihnachtsferien
10. 11.01.2024 Montagues intensionale Logik (Folien 10)
11. 18.01.2024 *The Proper Treatment of Quantification in Ordinary English* (Montague 1973)
12. 25.01.2024 *Generalized Quantifiers and Natural Language* (Barwise & Cooper 1981)
13. 01.02.2024 *The Algebra of Events* (Bach 1986)
- 08.02.2024 Klausurenwoche/Einzelbesprechungen

Prüfungen

Einheitlicher Inhalt für alle Modul- und Examensprüfungen:

1. eine oder zwei inhaltlichen Fragen zu den Themen der *Sprachphilosophie*
   Die Liste der relevanten Texte wird rechtzeitig vor den Prüfungen eingeschränkt.
2. eine Logik-Aufgabe (natürliche Deduktion) – außer in mündlichen Prüfungen
3. eine Semantik-Aufgabe (kompositionale Modellierung eines Satzes)

Hausarbeiten nach Absprache.

Die unausweichliche Frage nach ein paar Wochen | WTF???

„Wozu brauchen wir das denn?“

- Nicht zu leugnende logische Eigenschaften von Sprache
- Kleiner Einblick in deren technisch sehr aufwendige Beschreibung
- Wichtige Lernziele
  - Realistische Einschätzung eigener semantischer Intuitionen
  - Erkennen der Grenzen der Möglichkeiten von Logik in der Analyse von Sprache
  - Für zukünftige Forschende | Grundausbildung in formaler Semantik unabdinglich

Was folgt logisch?

Fallen Ihnen logische Schlussfolgerungen aus diesen Aussagen ein?

- Das Semester hat begonnen.
- Olha hat einen sehr leichten ukrainischen Akzent.
- Entweder regnet es gerade, oder die Wasserleitung ist gebrochen.
- Es regnet, oder die Wasserleitung ist gebrochen. Es regnet seit zwei Stunden.
- Falls der Dänemark-Urlaub ausfällt, fahre ich eine Woche zu meinen Eltern. Der Dänemark-Urlaub fällt aus.
- Wenn es regnet, wird die Straße nass. Die Straße ist nicht nass.
- Es ist nicht der Fall, dass der WANG PC keine Festplatten unterstützt hat.

Folgt B aus A?

- A: Ein blauer Renault fährt auf der A9 Richtung Berlin.
  B: Ein Renault fährt auf der A9 Richtung Berlin.
- A: Ich finde Geranien abstoßend.
  B: Ich habe schon mindestens einmal mindestens eine Geranie gesehen.
- A: Der WANG PC ist nicht IBM-kompatibel.
  B: Es existiert mindestens ein WANG PC.
- A: Alle Menschen sind intelligent.
  B: Horst Lichter ist intelligent.
- A: Krister hat mir seinen Volvo Amazon verkauft.
  B: Irgendjemand hat seinen Volvo Amazon verkauft.

Folgt B aus A?

- A: Entweder regnet es, oder die Wasserleitung im Bad ist gebrochen, und die Wasserleitung im Bad ist gebrochen.
  B: Es regnet nicht.
- A: Michelle hat uns den Dobermann für eine Woche zur Pflege überlassen.
  B: Der Dobermann wurde uns für eine Woche zur Pflege überlassen.
- A: Jan glaubt, dass seine Sendung nicht abgesetzt wird.
  B: Jan glaubt nicht, dass seine Sendung abgesetzt wird.
- A: Falls Dr. Kohl jetzt wieder Kanzler der BRD ist, gibt es vermutlich jeden Tag Pfälzer Saumagen zum Dinner.
  B: Es gibt einen Kanzler der BRD.
- A: Ein Mensch betritt den Raum.
  B: Es gibt mindestens einen Menschen.
- A: Ein Mensch, der die Bibel gelesen hat, begeht im Durchschnitt nicht weniger Straftaten als andere.
  B: Es gibt mindestens einen Menschen.
- A: *We don’t need no education.*
  B: Yes, you do! You just used a double negative.

Folgt B aus A?

- A: Herr Keydana fährt einen Golf. Alles, was einen Golf fährt, ist entweder menschlich oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt.
  B: Es gibt mindestens einen Menschen.
- A: Es gibt an der Uni Göttingen mindestens einen Dozenten, der einen Golf fährt. Götz ist Dozent an der Uni Göttingen und Radsportler. Sein Auto ist gerade in der Werkstatt. Jeder Dozent an der Uni Göttingen fährt entweder einen Golf oder ist kein Radsportler, falls sein Auto in der Werkstatt ist.
  B: Götz fährt einen Golf.

Versuchen Sie, eine Definition des Begriffs logische Schlussfolgerung zu geben.

Wann folgt eine Aussage aus einer oder mehreren anderen Aussagen?

Inferenz | Abduktion

Entspricht oft der „Alltagslogik“. Suche nach spontan plausiblen Ursachen.

- A: Der Verdächtige hat kein Alibi und ein Motiv.
  B: Der Verdächtige ist der Täter.
- Ich habe so einen komischen Husten, und die Infektionszahlen steigen wieder.
  B: Oh mein Gott, ich habe Covid!
- A: Es soll eine Impfpflicht eingeführt werden.
  B: George Soros und Bill Gates wollen uns Mikrochips einpflanzen.
- A: In Mikes Büro ist um 22 Uhr noch Licht.
  B: Mike bereitet seine Lehrveranstaltung für morgen vor.

Hochgradig gefährlich, weil nicht formalisierbar und sehr bequem.
Gleichzeitig im Alltag unentbehrlich.

Die meisten „logischen“ Schlussfolgerungen von Vulkaniern sind im besten Fall Abduktionen.

Suche nach allgemeingültigen Aussagen aus Partikularereignissen.

- A_1: Im Zentrum der Galaxis befindet sich ein supermassives schwarzes Loch.
  A_2: Die Galaxis ist eine Galaxie.
  B: Im Zentrum jeder Galaxie befindet sich ein supermassives schwarzes Loch.
- A: Im Zentrum von 1200 Galaxien befindet sich ein supermassives schwarzes Loch.
  B: Im Zentrum jeder Galaxie befindet sich ein supermassives schwarzes Loch.
- A: Aus dieser Einmündung kam noch nie ein Auto von rechts.
  B: Aus dieser Einmündung wird in drei Sekunden kein Auto von rechts kommen.

„Besser“ als Abduktion, vor allem je mehr Partikularereignisse zugrundeliegen.

Kann trotzdem gewaltig daneben gehen.

Spielt in der Wissenschaft eine große Rolle, aber ist fundamental nicht ausreichend.

Prämissen (egal, wo diese herkommen) und formale Schlussregeln

- A_1: Götz ist ein Dozent an der Uni Göttingen.
  A_2: Jeder Dozent an der Uni Göttingen ist ein Mensch.
  B: Götz ist ein Mensch.
- A_1: Entweder (wurde die Welt von einem Gebrauchtwagenhändler erschaffen) oder (Rewe verkauft keine Weetabix).
  A_2: Rewe verkauft keine Weetabix.
  B: Die Welt wurde von einem Gebrauchtwagenhändler erschaffen.

Nur Deduktion ist Logik. Nur darum geht es in diesem Semester.
Für die Logik menschlicher Sprache entfällt das Problem absurder Prämissen.

Ganz trivial ist das nicht ...

A: Herr Keydana fährt einen Golf. Alles, was einen Golf fährt, ist entweder menschlich oder eine AI, die auf Deep Learning basiert. Es gibt keine AI, die auf Deep Learning basiert, die einen Golf fährt.
B: Es gibt mindestens einen Menschen.

Hier ist der Beweis (vgl. Woche 5):

1	$G(k)$	
2	$(\forall x)[(G(x) \rightarrow M(x) \vee A(x)]$	
3	$\neg(\exists y)[A(y) \wedge G(y)]$	$\vdash (\exists z)M(z)$
4	$(\forall y)\neg[A(y) \wedge G(y)]$	3,QN
5	$(\forall y)[\neg A(y) \vee \neg G(y)]$	4,DeM
6	$(\forall y)[G(y) \rightarrow \neg A(y)]$	5,Komm.,Impl.
7	$G(k) \rightarrow \neg A(k)$	6,$-\forall(1)$
8	$\neg A(k)$	1,7,MP
9	$G(k) \rightarrow M(k) \vee A(k)$	2,$-\forall(1)$
10	$M(k) \vee A(k)$	1,9,MP
11	$M(k)$	8,10,DS
12	$(\exists z)M(z)$	11,$+\exists$ $\blacksquare$

Begriffe von „Bedeutung“

Die Bedeutung eines Ausdrucks ist …

- … die Idee, die er vermittelt
- … die mentale Repräsentation, die er erzeugt
- … was mit ihm bewirkt werden soll
- … die Menge der Dinge, auf die er verweist

Mögliche „Semantiken“

Semantik untersucht …

- … intellektuelle Konzepte, die überwiegend introspektiv erforschbar sind
- … die kognitive Verarbeitung und Repräsentation von Bedeutung
- … die Funktion von Ausdrücken in Kommunikationssituationen
- … Beziehungen zwischen Ausdrücken und Objekten und
  die Art der Kombination von Ausdrücken zur komplexeren Ausdrücken

Konkrete Fragen in diesem Seminar

Es dreht sich alles um die Beziehung von Sprache zur Welt!

- Auf welche Klassen von Objekten referieren auf welche Klassen von Ausdrücken?
- Wann sind Sätze wahr? (auch als Phänomen der Referenz!)
- Wie verhält sich die logische Struktur von Sätzen zu ihrem Informationsgehalt?
- Wie können Sätze eindeutig interpretiert werden,
  auch wenn sie mehrere Lesarten haben?

Keine Fragen in diesem Seminar

- Was ist die „Bedeutung“ von Wörtern und Sätzen jenseits ihrer Referenz?
- Wie verarbeitet das Gehirn Bedeutungen?
- Wie sind Diskurse strukturiert?

Sind Sie nun kognitiver Linguist,
der sich für (probabilistische) mentale Kategorien interessiert,

oder glauben Sie daran,
dass Sprache unabhängig vom Menschen logische Eigenschaften hat?

Beides gleichzeitig geht ja nun wirklich nicht!

Programmatisches Schlussbild | Exkurs I

Kognition

- basierend auf Ähnlichkeiten von wahrgenommenen Objekten
- optimiert für schnelle Mustererkennung in allen Bereichen
- unscharfe Klassenbildung und Segmentierung der Ontologie
- parallele Verarbeitung (meistens mehrere Areale beteiligt)

Symbolische Systeme

- diskrete Symbole, wohldefinierte Semantik
- scharf getrennte Klassen von Symbolen
- eindeutige Referenz auf ontologische Objekte
- intrinsische (nicht emergente) logische Eigenschaften
  (Axiomatik, Schlussregeln usw.)
- sequentielle Verarbeitung/statische Deklaration
  (z. B. Python oder PROLOG; parallele Verarbeitung immer linearisierbar)

Klassisches kognitives Modell: Prototypentheorie (Rosch 1973)

Diskretes Symbol: Vogel … und demgegenüber …
Graduelles kognitives Konzept basierend auf Ähnlichkeiten/Prototypen:

 > 

Programmatisches Schlussbild | Antwort

Die ewige Schwachsinnsfrage: Sind Kiwis und Pinguine nun Vögel oder nicht?

Nur getoppt von: Erdbeeren sind gar keine Beeren, sondern Sammelnussfrüchte.

- Kognition | intrinsisch nicht diskret, sondern ähnlichkeitsbasiert und parallel
  - Netzwerkarchitektur
- Symbole = Phone, Morphe, Wörter, Phrasen, ...| intrinsisch diskret und linear
  - akustisches Medium | Sagen Sie mal zwei Wörter gleichzeitig!
  - schriftliches Medium | Lesen Sie mal *Zettels Traum*!

→ Da wir nur akustisch oder über schriftliche Artefakte kommunizieren können, muss das Sprachsystem symbolisch sein.

→ Da es architekturbedingt nur nicht-symbolisch verarbeiten kann, muss das Gehirn symbolische Systeme so gut wie nötig und möglich emulieren.

Programmatisches Schlussbild | Ausführung

Auch nicht-verschriftete Sprache muss medial bedingt logische Eigenschaften haben.
Kulturell bilden sich stärker symbolische Modi aus, vor allem durch Schrift.

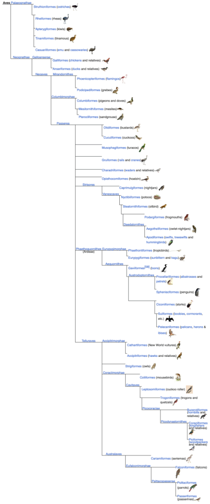
Norm, Selbst- und Fremdkorrektur, Textplanung, intensionale Definitionen, Explizierung, ...

Warum wird das vor allem im Kontext von Schule, Fremdsprache und Bildungssprache diskutiert?

(= spontane Sprachproduktion)	
weniger symbolische Eigenschaften	informelle Alltagssprache
↓	formelle Alltagssprache
↓	Bildungssprache
↓	Wissenschaftssprache
↓	Orthosprache
mehr symbolische Eigenschaften	formales System
(= reflektierte Sprachproduktion)	

Und was ist denn nun mit Kiwis und Pinguinen?

Unser Verständnis der Welt führt zu genaueren und diskreten Kategorisierungen, wo dies nötig ist. Die Sprache folgt diesem Maß an Genauigkeit und Diskretheit!



Letzte Folie

- Viele Missverständnisse in der Linguistik basieren darauf,
  dass das eben Gesagte nicht dem allgemeinen Forschungsprogramm zugrundeliegt.
- Die Doppelnatur von Sprache führt dazu, dass sowohl rein formale Linguistik
  und sogenannte kognitive Linguistik scheinbar erfolgreich sind.
- Im Prinzip läuft aber die Linguistik aktuell weitgehend ins Leere.

- Modelltheoretische Semantik beschreibt einen essentiellen Teil von Sprache!
- Sie modelliert logische Eigenschaften und den Bezug zur realen objektiven Welt.

- Ganz am Rande zu generativer AI …
  - Erfolg | Sie modelliert völlig natürliche Grammatik.
  - … also alle Grammatiker (inkl. Chomsky) bitte setzen!
  - Misserfolg | Sie weiß nichts über die Welt,
    es wirkt nur so wegen des immensen sprachlichen Inputs.
  - … eine Art fancy Papagei.

Referentielle Semantik

Ein neues semiotisches Dreieck

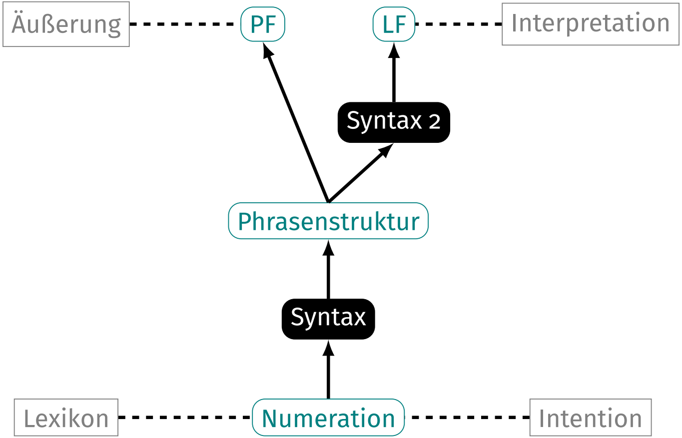
Im Sinn der letzten Woche interessiert uns nur die linke Seite.

Formen

Reale Objekte   Mentale Konzepte

Das Wesentliche von heute in Chierchia & McConnell-Ginet (2000: Kapitel 2)

„Semantik“ im generativen T-Modell



Im klassischen generativen Modell:

(In minimalistischen Modellen herrscht – Chomsky muss es mögen! – sowieso Anarchie.)

- keine echte Interpretation auf LF
- Bewegung nachdem der Satz geäußert wurde
- Herstellung einer logisch interpretierbaren Form auf LF
- Grund | Syntax kann nicht alle Interpretationen abbilden

Klassiker Quantorenskopus

Everybody loves somebody.

A Für alle Personen y gilt, dass es eine Person x gibt, für die gilt: y liebt x | $(\forall y)(\exists x)L(y,x)$

B Es gibt eine Person x, sodass für alle Personen y gilt: y liebt x | $(\exists x)(\forall y)L(y,x)$

Montagues direkte Interpretation

Sprache ist Logik ist Sprache ...

A Entweder ist die Übersetzung in eine LF trivial und äquivalent zur PF/Syntax, oder sie fügt etwas hinzu, das der Sprache an sich fehlt.

B Sätze haben aber auch mit LF-Übersetzung nur die Bedeutungen, die sie sowieso haben (keine Hinzufügung).

→ Also ist die Übersetzung in LF trivial und äquivalent zur PF/Syntax.

→ Wir können Sätze direkt interpretieren (wie sie gesprochen/geschrieben werden).

- Montagues *lf* | direkte Übersetzung von sprachlichen in logische Ausdrücke

Interessante Eigenschaften von Sprache

- Aussagen über die/Teile der Welt
- Ausdrücke bezeichnen/referieren auf Dinge i. w. S.
- Informativität
- objektiv beurteilbar (z. B. Wahrheit von Sätzen)

- Aber welche sprachlichen Einheiten referieren auf was?

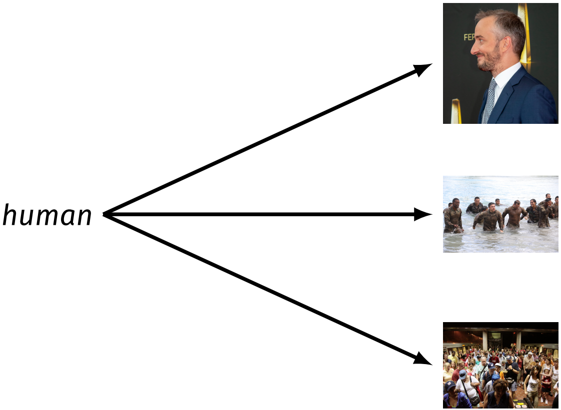
Ein Eigenname → genau ein Objekt in der Welt

Jan Böhmermann ⟶ 

Ein normales Nomen → eine Menge von Objekten in der Welt

soldier →

Ein (intersektives) Adjektiv oder ein Verb → eine Menge von Objekten in der Welt



Ein Satz → in erster Näherung ein Sachverhalt

A humming bird is hovering over a red flower.

Nein! falsche Art von Objekt

(als Individuum)

Freges Prinzip | Das hier wollen wir formalisieren!

Bedeutung ist kompositional!

- *humming bird* → die Menge der Kolibri-Objekte
- *a* → Existenzaussage für ein Element aus einer Menge
- *a humming bird* → Existenzaussage für ein Element x aus der Menge der Kolibri-Objekte
- *is hovering* → die Menge der schwebenden Objekten
- *a humming bird is hovering* → das existierende Kolibri-Objekt x ist auch ein Element der Menge der schwebenden Objekte
- *a red flower* → Existenzaussage für ein Element y aus der Schnittmenge der roten Objekte und der Blumen-Objekte
- *over* → die Relation zwischen Objekten (s. nächste Woche), die sich übereinander befinden
- *A Humming is hovering over a red flower.* → Es gibt ein Objekt x aus der Schnittmenge der Kolibri- und der schwebenden Objekte, und es gibt ein Objekt y aus der Schnittmenge der roten und der Blumen-Objekte, und x befindet sich über y.

Implikation (Entailment)

Mengen von Aussagesätzen implizieren andere Sätze.
Sätze (Implikationen) lassen sich aus anderen Sätzen (Axiome) beweisen.

A *Jan Böhmermann ist ein Mensch.*

B *Jan Böhmermann ist leutselig.*

C *Jan Böhmermann ist ein leutseliger Mensch.*

$A, B \vdash C$ | A und B implizieren C. (C ist beweisbar aus A und B.)

$A \nvdash C$ | A impliziert nicht C.

$B \nvdash C$ | B impliziert nicht C.

$A \vdash A \wedge A$ | *Jan Böhmermann ist ein Mensch und Jan Böhmermann ist ein Mensch.*

D *Irgendetwas ist ein Mensch.*

$A \vdash D$

Tests auf Implikation

Wenn diese Kriterien zutreffen, impliziert A B:

- Wenn A wahr ist, ist B auch immer wahr.
- Eine Situation, die von B beschrieben wird, wird auch von A beschrieben.
- Die Information in B ist vollständig in der Information in A enthalten.
- Man kann unter keinen Umständen sagen: *A ist wahr, aber B ist nicht wahr.*

Übung | Sind das Implikationen?

- Böhmermann ist Showmaster. ⊢ Böhmermann ist menschlich.
- Böhmermann ist nicht sehr groß. ⊢ Irgendjemand ist nicht sehr groß.
- Böhmermann ist nicht sehr groß. ⊢ Irgendjemand ist sehr groß.
- Manche Menschen sind leutselig. ⊢ Böhmermann ist leutselig.
- Ich habe das neue drip-133-Album gehört. ⊢ drip-133 hat ein neues Album veröffentlicht.
- Nachdem ich einen Sherry getrunken habe, habe ich den Kondensator getauscht.
  ⊢ Ich habe einen Sherry getrunken.
- Nachdem Linux nicht mehr startete, habe ich einen weiteren Sherry getrunken.
  ⊢ Linux ist noch nie gestartet.
- Mein ehemaliger Mitbewohner mag Becks.
  ⊢ Mein ehemaliger Mitbewohner könnte Sherry mögen.
- Böhmermann hat das heutige ZDF Magazin beendet.
  ⊢ Das heutige ZDF Magazin wurde beendet.

Präsuppositionen sind schwächer als Implikationen.

A *Willy Brandt ist der gegenwärtige Kanzler Deutschlands.*

B *Wenn Willy Brandt der gegenwärtige Kanzler Deutschlands ist, trägt er eine große Verantwortung.*

C *Willy Brandt ist nicht der gegenwärtige Kanzler Deutschlands.*

D *Willy Brandt lebt.*

E *Es gibt einen Kanzler Deutschlands.*

- A und B präsupponieren D. = D ist eine Voraussetzung für eine erfolgreiche Interpretation von A und B.
- C präsupponiert nicht D.
- A, B und C präsupponieren E.

Tests auf Präsupposition

Die Unterschiede zur Implikation sind relevant.

- Nicht nur Aussagesätze haben Präsuppositionen (Modale, Konditionale, ...)
- Negierte Sätze haben oft gleiche Präsuppositionen wie nicht-negierte.
- Präsuppositionen können negiert werden, und der Ausgangssatz bleibt wahr.
  (Geht nicht mit Implikationen.)

  F *Willy Brandt ist nicht der Kanzler Deutschlands.*
  G *Es gibt einen Kanzler Deutschlands.*
  F präsupponiert G, bleibt aber wahr, wenn G falsch ist.

Synonymie

Synonyme Ausdrücke haben exakt die gleiche Referenz.

- lexikalische Synonymie | *humming bird* $\stackrel{lex}{\equiv}$ *colibri*
- kompositionale Synonymie

  Mulder traf seine entführte Schwester, nachdem er in die geheime Militärbasis eingebrochen war.

  $\equiv$ *Bevor er seine entführte Schwester traf, brach Mulder in die geheime Militärbasis ein.*

- $A \equiv B$ gdw $A \vdash B$ und $B \vdash A$ (gegenseitige Implikation)
- *gdw = genau dann wenn | iff = if and only if*

Referentielle Semantik $\neq$ *einfaches Zeigen auf Objekte durch Sprache*.

Zusätzliche Logik für Fälle wie diesen (und viele andere):

	Die Lieblingsblume meines Kolibris	*ist rot.*
$\vdash$	*Eine Blume*	*ist rot.*

Sätze referieren aus Wahrheitswerte!

Um zu der gewünschten Logik zu kommen, zeigen wir jetzt,
dass Sätze auf Wahrheitswerte referieren.

Wahrheitswerte sind nur *wahr* und *falsch*.

Die Verben *denotieren* und *referieren auf* sind hier erst einmal synonym.

Warten Sie bitte ein paar Wochen, wenn Sie diese Darstellung reduktionistisch finden.

Synonyme NPs

a *colibri*

b *humming bird*

$a \overset{lex}{\equiv} b$

c *a brunette lady*

d *a brown-haired dame*

$c \equiv d$

e *the primates*

f *the apes and humans*

$e \equiv f$

Synonymie von Konstituenten und Sätzen

Synonymie von Konstituenten im Satzkontext → Satzsynonymie

A *A colibri is hovering over a red flower.*

B *A humming bird is hovering over a red flower.*

$A \equiv B$ weil $a \equiv b$ und Satzkontext identisch

$[_A a] \equiv [_B b]$ wenn $a \equiv b$ und $[_A \_] = [_B \_]$

C *Lauren Bacall was a brunette lady.*

D *Lauren Bacall was a brown-haired dame.*

$C \equiv D$ weil $c \equiv d$ und Satzkontext identisch

E *Primates are intelligent.*

F *The apes and humans are intelligent.*

$E \equiv F$ weil $e \equiv f$ und Satzkontext identisch

Zwei Axiome

Referenz/Denotat eines Ausdrucks A als $[\![A]\!]$

$[\![\cdot]\!]$ ist eine Funktion!

Erinnerung: Synonymität von Sätzen ist gegenseitige Implikation.

Ax1 Synonyme Ausdrücke (NPs, Verben, Sätze, ...) haben dieselbe Referenz.

Formal: $A \equiv B \leftrightarrow [\![A]\!] = [\![B]\!]$

Ax2 Wenn wir in Ausdruck C einen Ausdruck A durch
einen synonymen Ausdruck B ersetzen, behält C seine Referenz.

Formal: $[\![A]\!] = [\![B]\!] \rightarrow [\![[_C\ A]]\!] = [\![[_C\ B]]\!]$

Zwei wahre Sätze

Wahrheitswert von A und B | 1 bzw. *wahr* bzw. *true* oder *T*

- A *Lauren Bacall was a brunette lady.*
- B *My humming bird's favourite flower is red.*

Diese Sätze haben außer ihrem Wahrheitswert semantisch nichts gemein!

Erste Schlussfolgerung

Einsetzen von A und B in Satzkontext T bzw. $[_{T}\_]$ (Aussage über Wahrheitswert)

T *The truth value of '_' is 1.*

$[_{T}A]$ *The truth value of 'Lauren Bacall was a brunette lady.' is 1.*

$[_{T}B]$ *The truth value of 'My humming bird's favourite flower is red.' is 1.*

Da aus A $[_{T}A]$ folgt und umgekehrt: $A \equiv [_{T}A]$ und $B \equiv [_{T}B]$
und daher mit Ax1 $[\![A]\!] = [\![[_{T}A]]\!]$ und $[\![B]\!] = [\![[_{T}B]]\!]$

Bitte bedenken: A und $[_{T}A]$ haben auch intuitiv „denselben Inhalt".

Zweite Schlussfolgerung

In $[_{\mathrm{T}}A]$ und $[_{\mathrm{T}}B]$ sind A und B jeweils in einer NP eingebettet.

- $[\![$the truth value of A$]\!] = [\![$the truth value of B$]\!] = 1$
  mit Ax2 $[\![[_{\mathrm{T}}\mathrm{A}]]\!] = [\![[_{\mathrm{T}}\mathrm{B}]]\!]$
  damit $[\![\mathrm{A}]\!] = [\![[_{\mathrm{T}}\mathrm{A}]]\!] = [\![[_{\mathrm{T}}\mathrm{B}]]\!] = [\![\mathrm{B}]\!] = 1$
- Sätze referieren auf Wahrheitswerte.
  (Denn man kann das mit zwei beliebigen wahren Sätzen machen.)
- Achtung | Wahrheitswerte sind auch nur realweltliche Objekte.

Adäquatheit von Wahrheitswerten als Satzreferenten

Nicht so sinnlos, schwachsinnig, inhaltsleer, … wie oft vermutet

- Referentielle Semantik
  - Analyse der Referenten verschiedener Typen von Ausdrücken
  - Komposition von Sätzen
  - deduktive Logik für Sätze
  - Benennen der Wahrheitsbedingungen (→ Modelltheorie)
- minimale Gemeinsamkeit aller Sätze
- gut formal berechenbar (Binarität)
- reichhaltigere Semantik später (basierend auf Wahrheitswerten)

Grammatik- und Semantikfragmente

Konstruktive, schrittweise Annäherungen an sprachliche Modellierung

- Grammatikfragment | Ausschnitt einer Gesamtgrammatik
- erwünschte schrittweise Erweiterung von Fragmenten (vgl. HPSG)

- Konstruktion eines Semantik-Fragments
  - grammatische Kategorien und Referenzen von Wörtern
  - Grammatikmechanismen und zugehörige Bedeutungskonstruktion
  - Ergebnis | Semantik von Sätzen und Beitrag aller Konstituenten dazu

- T-Sätze
  - L eine Sprache, S ein Satz, v ein Sachverhalt, p eine Aussage über Wahrheitsbedingungen
  - S aus L ist wahr in v gdw p.

Das Lexikon

Die folgenden simplexen Ausdrücke sind Teil von F_1.
Kein anderer simplexer Ausdruck ist Teil von F_1.

1. N $\rightarrow$ *Herr Webelhuth, Frau Klenk, the Turm-Mensa*
2. V_i $\rightarrow$ *is relaxed, is creative, is stupid*
3. V_t $\rightarrow$ *prefers*
4. conj $\rightarrow$ *and, or*
5. neg $\rightarrow$ *it is not the case that*

Die Phrasenstrukturgrammatik von F_1

Folgende Kompositionsregeln sind Teil von F_1.
Keine andere Kompositionsregel ist Teil von F_1.

1. $S \rightarrow N\ VP$
2. $S \rightarrow S\ conj\ S$
3. $S \rightarrow neg\ S$
4. $VP \rightarrow V_i$
5. $VP \rightarrow V_t\ N$

Referenz simplexer Ausdrücke

- $[\![$Herr Webelhuth$]\!]$ = Herr Webelhuth
- $[\![$Frau Klenk$]\!]$ = Frau Klenk
- $[\![$the Turm-Mensa$]\!]$ = the Turm-Mensa
- $[\![$is relaxed$]\!]$ = $\{x : x \textit{ is relaxed}\}$
- $[\![$is creative$]\!]$ = $\{x : x \textit{ is creative}\}$
- $[\![$is stupid$]\!]$ = $\{x : x \textit{ is stupid}\}$
- $[\![$prefers$]\!]$ = $\{\langle x, y\rangle : x \textit{ prefers } y\}$

Referenz von Funktionswörtern

Funktionswörter referieren auf Funktionen.

- $[\![\mathit{neg}]\!] = \begin{bmatrix} 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{bmatrix}$
- $[\![\mathit{and}]\!] = \begin{bmatrix} \langle 1,1 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle 1,0 \rangle \rightarrow 0 \\ \langle 0,1 \rangle \rightarrow 0 \\ \langle 0,0 \rangle \rightarrow 0 \end{bmatrix}$
- $[\![\mathit{or}]\!] = \begin{bmatrix} \langle 1,1 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle 1,0 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle 0,1 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle 0,0 \rangle \rightarrow 0 \end{bmatrix}$

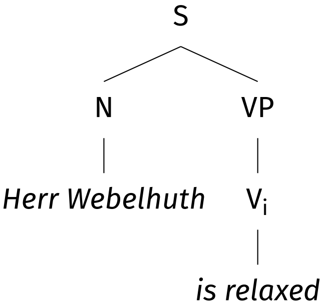
T-Sätze für F_1

- $[\![[_S \text{ N VP}]]\!]$ = 1 iff $[\![\text{N}]\!] \in [\![\text{VP}]\!]$, else 0
- $[\![[_S \text{ S1 conj S2}]]\!]$ = $[\![\text{conj}]\!](\langle[\![\text{S1}]\!], [\![\text{S2}]\!]\rangle)$
- $[\![[_S \text{ neg S}]]\!]$ = $[\![\text{neg}]\!]([\![\text{S}]\!])$
- $[\![[_{VP} \text{ V}_t \text{ N}]]\!]$ = $\{x : \langle x, [\![\text{N}]\!]\rangle \in [\![\text{V}_t]\!]\}$
- für einen nicht verzweigenden Knoten K und seine Tochter D: $[\![[_K D]]\!] = [\![D]\!]$
- Das geht alles eleganter. Bitte etwas Geduld!

Ist folgendes ein Satz aus F_1? *Herr Webelhuth is relaxed.*

- $[_N$ *Herr Webelhuth*$]$ mit Lexikonregel 1
- $[_{V_i}$ *is relaxed*$]$ mit Lexikonregel 2
- $[_{VP}$ $[_{V_i}$ *is relaxed*$]]$ mit Syntaxregel 4
- $[_S$ $[_N$ *Herr Webelhuth*$]$ $_{VP}$ $[_{V_i}$ *is relaxed*$]]$ mit Syntax 1

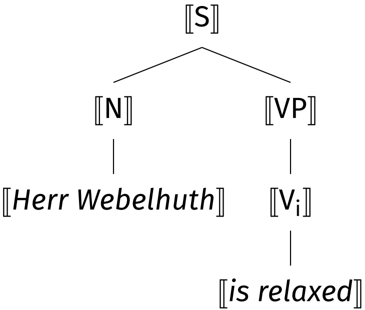
Syntax als Baum

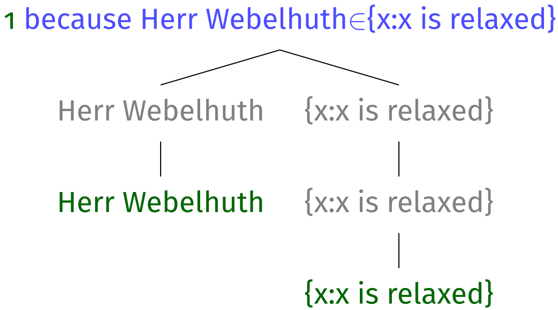


v (Sachverhalt) | Herr Webelhuth (das ontologische Objekt) $\in \{x : x \textit{ is relaxed}\}$

- für N: $[\![$*Herr Webelhuth*$]\!]$ = Herr Webelhuth (das ontologische Objekt)
- für VP (und V_i): $[\![$*is relaxed*$]\!]$ = $\{x : x \textit{ is relaxed}\}$ (enthält Herrn Webelhuth)
- für S: $[\![[_S \text{ N VP}]]\!]$ = 1 iff $[\![\text{N}]\!] \in [\![\text{VP}]\!]$, else 0
- in v daher $[\![[_S$ *Herr Webelhuth is relaxed.*$]]\!]$=1

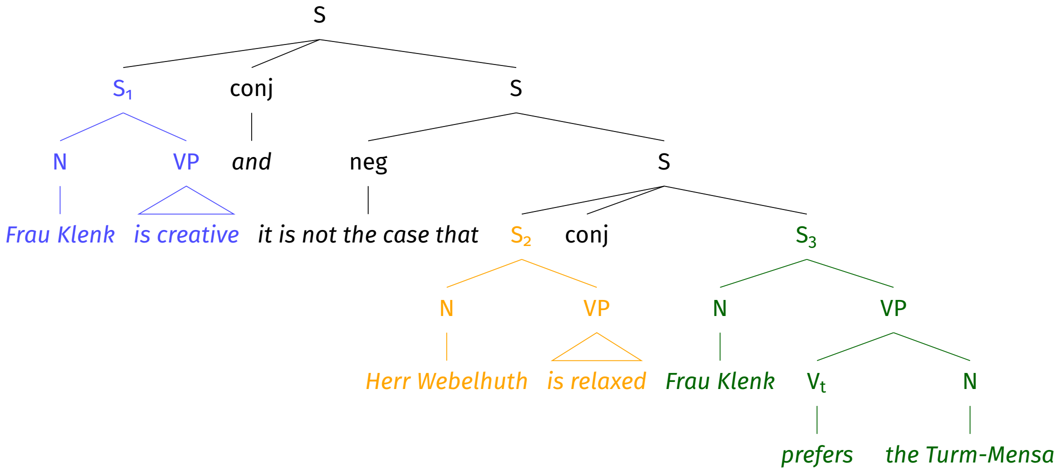
Semantik als Baum





Komplexere Phrasenstrukturen

[$_{S_1}$ *Frau Klenk is creative*] *and it is not the case that* [$_{S_2}$ *Herr Webelhuth is relaxed*] and [$_{S_3}$ *Frau Klenk prefers the Turm-Mensa*].



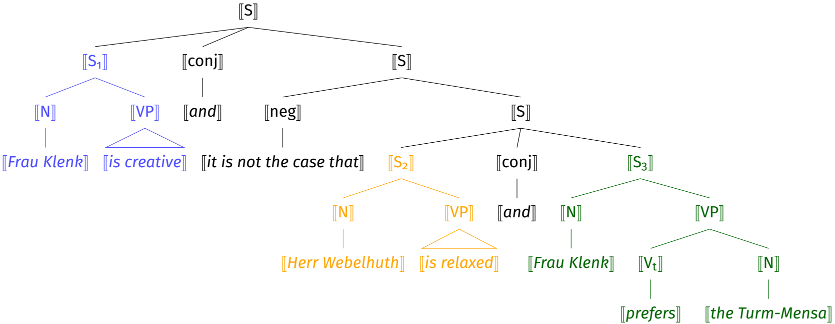
Interpretation

Die Situation/die Umstände v sind:

- Herr Webelhuth $\in \{x : x \text{ is relaxed}\}$
- Frau Klenk $\in \{x : x \text{ is creative}\}$
- $\langle$Frau Klenk, Turm-Mensa$\rangle \notin \{\langle x, y\rangle : x \text{ prefers } y\}$

Die Interpretation komplexerer Phrasenstrukturen ist einfach!

- Herr Webelhuth $\in \{x : x \text{ is relaxed}\}$
- Frau Klenk $\in \{x : x \text{ is creative}\}$
- $\langle$Frau Klenk, Turm-Mensa$\rangle \notin \{\langle x, y\rangle : x \text{ prefers } y\}$



Das war aber nicht alles

Der zuletzt analysierte Satz ist strukturell ambig, und
und mit der strukturellen geht eine semantische Ambiguität einher.

Hausaufgabe: Analysieren Sie die Syntax und Semantik des Satzes
in der anderen Lesart nur mit den Mitteln von F_1.

Zusatzaufgabe

Entwickeln Sie ein ähnliches Fragment D_1 für das Deutsche mit Lexikon, Syntax und Semantik das die folgenden Sätze generiert. Lexikon und Konstituentenstruktur können Sie frei wählen.

Es hat einen guten Grund, dass wir oft Englisch als Objektsprache nehmen. Sie können für dieses Fragment des Deutschen Kasus entweder ignorieren, oder Sie probieren, Kasusunterschiede zu modellieren.

- Herr Müller ist Aktivist.
- Frau Klann ist intelligent.
- Frau Klann begrüßt Herrn Müller.
- Frau Klann hustet.
- Frau Klann schreibt ein gutes Buch.

Mengen und Funktionen

Was ist eine Menge?

Eine frei definierbare ungeordnete Sammlung von diskreten Objekten

- Zahlen
- Menschen
- Schuhe
- Wörter
- ...

- nicht unbedingt zweckgebunden
- jedes Objekt maximal einmal in jeder Menge

Das Wesentliche von heute in Partee u. a. (1990: Kapitel 1–4)

Notation und Beispiele für Mengen

Mengendefinition $\{\}$, Elementstatus $\in$

- $M_1 = \{a, b, c\}$ (Menge von Buchstaben)
- N_1 = {*'my book'*} (einelementige Menge, enthält eine NP)
  - vs. N_2 = {*my book*} (einelementige Menge, enthält mein Buch)
  - vs. N_3 = {*'my', 'book'*} (Menge von Wörtern)
- auch möglich: N_4 = {*'my', book*}
- definiert über eine Eigenschaft der Elemente (zwei Notationen):
  M_2 = {*x: x is one of the first three letters of the alphabet*}
  M_2 = {*x|x is one of the first three letters of the alphabet*}
- U: die universelle Menge (alle Objekte)

Identität von Mengen

Zwei Mengen mit exakt den gleichen Elementen sind identisch.

- $\{a, b, c\}$ = {*x:x is one of the first three letters of the alphabet*}
- {*x: x is human*} = {*x: x is from the Earth, a primate but not an ape*}

Teilmengen und Obermengen

Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält,
das nicht auch in Menge M enthalten ist (umg. Obermenge).

Teilmenge oder Identität $\subseteq$
Obermenge oder Identität $\supseteq$

- $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$ und $\{a, b, c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$ und $\{a, b, c\} \supseteq \{a\}$
- $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b, c, d\} \nsubseteq \{a, b, c\}$ und $\{a, b, c\} \nsupseteq \{a, b, c, d\}$
- $\{x\text{: } x \text{ is human}\} \subseteq \{x\text{: is an ape}\}$

Echte Teilmengen und Obermengen

Echte Teilmenge | Eine Menge N, die kein Element enthält, das nicht auch in Menge M enthalten ist, und die nicht mit M identisch ist.

Echte Teilmenge $\subset$
Echte Obermenge $\supset$

- $\{a\}\subset\{a,b,c\}$ und $\{a\} \subset \{a,b,c\}$
- $\{a,b,c\}\not\subset\{a,b,c\}$ aber $\{a,b,c\}\subseteq\{a,b,c\}$

Elemente vs. Teilmengen

- Achtung bei Mengen von Mengen
  - $\{\{a\}\} \not\subset \{a, b, c\}$
  - $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a, b, c\}$
  - $\{\{a\}\} \notin \{a, b, c\}$
- für leere Menge $\{\}$ oder $\emptyset$
  - $\{\} \subset$ jede anderen Menge
  - $\{\} \notin \{\}$

Logik mit Mengen, Teilmengen und Elementen

- Logik mit Mengen
  - *Alle Anglistikprofessoren sind menschlich.*
    Herr Webelhuth ist Anglistikprofessor.
  - w = Herr Webelhuth
    $E = \{x\text{: } x \text{ is a professor of English Linguistics}\}$
    $H = \{x\text{: } x \text{ is human}\}$
  - Aus $w \in E$ und $E \subset H$ folgt $w \in H$

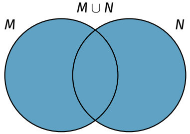
- Aber
  - *Die Anglistikprofessoren sind zahlreich.*
  - $N = \{x\text{: } x \text{ is a set with many members}\}$
  - Aus $\mathrm{w} \in \mathrm{E}$ und $\mathrm{E} \in \mathrm{N}$ folgt nicht $\mathrm{w} \in \mathrm{N}$
  - Vergleiche: **Herr Webelhuth ist zahlreich.*

Potenzmengen (power sets)

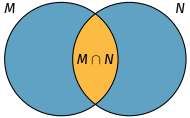
Potenzmenge $\wp(\cdot)$ | Für jede Menge M: $\wp(M) = \{X : X \subseteq M\}$

- Beispiel
  - $M = \{a, b, c\}$
  - $\wp(M) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{\}\}$
- Warum ist die leere Menge in der Potenzmenge jeder Menge?
- Warum ist die leere Menge eine echte Teilmenge jeder Menge?

Vereinigungsmenge und Schnittmenge



Vereinigungsmenge | Für Mengen M und N: $M \cup N = \{x : x \in M \textbf{ oder } x \in N\}$



Schnittmenge | Für Mengen M und N: $M \cap N = \{x : x \in M \textbf{ und } x \in N\}$

- Beispiel Vereinigungsmenge
  - $M = \{a, b, c\}$
  - $N = \{a, b, d\}$
  - $M \cup N = \{a, b, c, d\}$
- Beispiel Schnittmenge
  - $M = \{a, b, c\}$
  - $N = \{a, b\}$
  - $M \cap N = \{a, b\}$

Generalisierte Vereinigungs- und Schnittmenge

$\bigcup M = \{x : x \in Y$ **für irgendeine** $Y \in M\}$
$\bigcap M = \{x : x \in Y$ **für jede** $Y \in M\}$

- Beispiel generalisierte Vereinigungsmenge
  - $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
  - $\bigcup M = \{a, b, c\}$

- Beispiel generalisierte Schnittmenge
  - $M = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
  - $\bigcap M = \{a\}$

Differenzmenge und Komplementmenge

Differenzmenge | $M - N = \{x : x \in M \text{ and } x \notin N\}$
Komplementmenge | $M \setminus N = \{x : x \in N \text{ and } x \notin M\}$

- Beispiel Differenzmenge
  - $M = \{a, b, c\}$
  - $N = \{a\}$
  - $M - N = \{b, c\}$
- Beispiel Komplementmenge
  - $O = \{a, b, c, k\}$
  - $M \setminus O = \{k\}$
- Universelles Komplement
  - die universelle Menge | $U = \{x\text{: } x \textit{ is an object}\}$
  - $M' = \{x : x \in U \text{ and } x \notin M\}$

Triviale Identitäten

Idempotenz	$M \cup M$	$=$	M
	$M \cap M$	$=$	M
Kommutativität	$M \cup N$	$=$	$N \cup M$
	$M \cap N$	$=$	$N \cap M$
Assoziativität	$(M \cup N) \cup O$	$=$	$M \cup (N \cup O)$
	$(M \cap N) \cap O$	$=$	$M \cap (N \cap O)$
Distributivität	$M \cup (N \cap O)$	$=$	$(M \cup N) \cap (M \cup O)$

Komplementgesetze

- $M \cup \emptyset = M$
- $M'' = M$
- $M \cap M' = \emptyset$
- $X \cap U = U$

DeMorgan

- $(M \cup N)' = M' \cap X'$
- DeMorgan begegnet uns in der Logik wieder.

Tupel (geordnete Paare, Vektoren)

Mengen | ungeordnet $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$

Tupel | dasselbe, aber geordnet $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$

- tion ohne neues Primitiv | $\langle a, b \rangle \stackrel{def}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- Rekursive Anwendung | $\langle a, b, c \rangle =$???
- in $\langle a, b \rangle$ | a erste und b zweite Koordinate

Kartesische Produkte

Mengen von Tupeln | $\{< a, b >, < a, c >, < b, c >\}$ usw.

Kartesisches Produkt | $S_1 \times \cdots \times S_n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle : x_i \in S_i\}$

- Für zwei Mengen | $S_1 \times S_2 = \{\langle x, y \rangle \| x \in S_1$ and $y \in S_2\}$
  - $S_1 = \{a, b, c\}$
  - $S_2 = \{1, 2, 3\}$
  - $S_1 \times S_2 = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$
  - Achtung | $\langle 1, a\rangle \notin S_1 \times S_2$ usw.

- Nomenklatur | $\vec{x}$ für $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

- n-faches Produkt | $S^n = \{\vec{s} : s_i \in S$ for $1 \leq i \leq n\}$
  - $S_1^2 = S_1 \times S_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

Relationen

a sieht b, a wohnt im selben Stockwerk wie b, a macht b Vorwürfe, ...

- Notationen | Rab, aRb, $R(a, b)$, $R(\langle a, b \rangle)$
- Definitionsmenge (domain) A | $a \in A$
- Zielmenge, Wertemenge (range) B | $b \in B$
- Zielmenge = Wertemenge A | *R ist eine Relation in A.*

- Relation R = eine Menge von Tupeln
- $R \subseteq A \times B$

Komplement und Umkehrung

Komplement von R | $R' = (A \times B) - R = R \backslash (A \times B) = \{\langle a, b\rangle \notin R\}$ for $R \subseteq A \times B$
Umkehrung (inverse) von R | $R^{-1} = \{\langle b, a\rangle : \langle a, b\rangle \in R\}$ for $R \subseteq A \times B$

- Beispiel Komplement
  - $R \stackrel{def}{=} \{\langle a, b\rangle : a$ ist Lehrer von b$\}$
  - $\langle$Herr Webelhuth, Herr Schäfer$\rangle \in R$
  - $R' = \{\langle a, b\rangle : a$ ist nicht Lehrer von $b\}$
  - $\langle$Herr Webelhuth, Frau Klenk$\rangle \notin R$,
    $\langle$der Garten meiner Eltern, Frau Klenk$\rangle \notin R$ usw.
- Beispiel Umkehrung
  - $R^{-1} = \{\langle a, b\rangle : b$ ist Lehrer von $a\}$
  - $= \{\langle a, b\rangle : a$ ist Schüler von $\}$
  - $\langle$Herr Schäfer, Herr Webelhuth$\rangle \in R^{-1}$

Funktionen

a hat Vater b, zugelassenes Auto a hat Kennzeichen b, b ist der Logarithmus von a, ...

Funktion f | eine Relation, sodass für jedes $a \in A$ genau ein $\langle a, b \rangle \in A \times B$ existiert

- partielle Funktion | Funktion in $A \times B$ sodass
  für mindestens ein $a \in A$ kein $\langle a, b \rangle \in A \times B$ existiert
- formal meistens | $\bar{f} \subseteq A \times (B \cup \{\perp\})$ mit $\perp$ als *undefiniert*

Funktionskomposition

b ist die Mutter des Vaters von a (schwed. *farmor*),
a ist der Kehrwert des Logarithmus von b, …

Funktionsverknüpfung (composition) | Für $F_1 \subseteq A \times B$ und $F_2 \subseteq A \times C$: $F_1 \circ F_2 \subseteq A \times C$

- farmor | $F = Vater \circ Mutter$ und $F \subseteq Menschen \times Frauen$
  - $\mathit{Männer} = \{\mathit{Ulrich\ Schäfer}, \mathit{Roland\ Schäfer}, \mathit{Jan\ Böhmermann}, \cdots\}$
  - $\mathit{Frauen} = \{\mathit{Maria\ Schäfer}, \mathit{Frau\ Dr.\ Heide}\ \text{Rezepa-Zabel}, \cdots\}$
  - $\mathit{Menschen} = \mathit{Männer} \cup \mathit{Frauen}$
  - $\mathit{Vater} \subseteq \{\langle \mathit{Roland\ Schäfer}, \mathit{Ulrich\ Schäfer}\rangle,$
    $\langle \mathit{Frau\ Dr.\ Heide}\ \text{Rezepa-Zabel}, \mathit{Jan\ Böhmermann}\rangle, \cdots\}$
  - $\mathit{Mutter} \subseteq \{\langle \mathit{Ulrich\ Schäfer}, \mathit{Maria\ Schäfer}\rangle,$
    $\langle \mathit{Jan\ Böhmermann}, \mathit{Frau\ Dr.\ Heide}\ \text{Rezepa-Zabel}\rangle, \cdots\}$
  - $F(\mathit{Roland\ Schäfer}) = \mathit{Vater} \circ \mathit{Mutter}(\mathit{Roland\ Schäfer}) = \mathit{Maria\ Schäfer}$

Reflexivität

Eine Relation R in A ist ...

reflexiv	gdw	für **jedes** $a \in A$: $\langle a, a \rangle \in R$	*ist dasselbe Objekt wie*
irreflexiv	gdw	für **jedes** $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$	*ist Vater von*
nichtreflexiv	gdw	für **ein** $a \in A$: $\langle a, a \rangle \notin R$	*hat gesehen*

Symmetrie

Eine Relation R in A ist ...

symmetrisch	gdw	für jedes $\langle a, b \rangle \in R : \langle b, a \rangle \in R$	*hat dasselbe Auto wie*
asymmetrisch	gdw	für jedes $\langle a, b \rangle \in R : \langle b, a \rangle \notin R$	*hat ein anderes Auto als*
nichtsymmetrisch	gdw	für ein $\langle a, b \rangle \in R : \langle b, a \rangle \notin R$	*ist Mutter von*[1]
antisymmetrisch	gdw	für jedes $\langle a, b \rangle \in R : \langle b, a \rangle \notin R$ **oder** $a = b$	$\leq$

[1] Wer hat *Dark* gesehen?

Transitivität

Eine Relation R in A ist ...

transitiv	gdw	$\langle a, b\rangle \in R$ and $\langle b, c\rangle \in R : \langle a, c\rangle \in R$	*steht links von*
nichttransitiv	gdw	das Obige stimmt manchmal nicht	*mag*
intransitiv	gdw	das Obige stimmt nie	*ist Mutter von*

Einordnung

Wozu das Ganze?

- Referenzsemantik und Einteilung der Welt in Mengen
- Ausdrücke, die auf Relationen und Funktionen referieren
- andere Grundlage: Logik, denn Sprache=Logik (irgendwie)

Aufgaben I

1. Sind folgende Mengendefinitionen zulässig?
    1. $A = \{a, b, d, e, f, g\}$
    2. $C = \{$*x: x ist in keiner Menge enthalten*$\}$
    3. $D = \{$*Böhmermann, Horst Lichter*$, \{\}\}$
    4. $E = \{a, b, a, d, e, f, g\}$
    5. $F = \{$*r: r ist eine rationale Zahl*$\} \cup \mathbb{N}$

2. Sind folgende Aussagen korrekt?
    1. $\{\} \subseteq \{blau, rot, gelb\}$
    2. $\{x : x \in A\} = A$
    3. $\{Jan, Horst, Heide\} \neq \{Horst, Jan, Heide\}$
    4. Wenn $A = \{$*x:x ist ein Auto*$\}$ und $a \in A$ und außerdem $B = \{$*x:x ist eine Menge von Dingen, die die Umwelt belasten*$\}$ und $A \in B$, dann folgt daraus $a \in B$.
    5. Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann folgt $A = B$.
    6. Wenn $A \subset B$ und $B \subset A$, dann folgt $A \neq B$.
    7. Wenn $a \in A$ und $a \in B$, dann folgt $a \in A \cup B$.
    8. Wenn $a \in A$ und $a \in B$, dann folgt $a \in A \cap B$.
    9. Wenn $a \notin A$ und $a \notin B$, dann folgt $a \in (A \cup B)'$.

3. Beantworten Sie die folgenden Fragen.
   1. Was ist $\wp\{Horst, Heide, Jan\}$?
   2. Beantworten Sie die beiden Fragen auf Folie 74.
   3. Stimmt es, dass $\{Horst, Heide\} \subset \bigcap\{\{Tschernobyl, Harrisburg\}, \{Horst, Heide, Albert\}, \{Horst, Webelhuth, Heide, Fukushima\}\}$?
   4. Stimmt es, dass $\{Heide, Harrisburg\} \subseteq \bigcup\{\{Tschernobyl, Harrisburg\}, \{Horst, Heide, Albert\}, \{Horst, Webelhuth, Heide, Fukushima\}\}$?
   5. Stimmt es für nicht-leere Mengen A und B, dass $A \backslash B = B - A$?
   6. Und für leere Mengen?
   7. Vervollständigen Sie von Folie 80 $\langle a, b, c\rangle = ???$ (Auflösen von Tupeln in Mengenschreibweise).
   8. Auch wenn es weh tut, dasselbe bitte für $\langle a, b, c, d\rangle$!
   9. Ist Folgendes korrekt: $\langle Horst, Heide\rangle = \langle Heide, Horst\rangle$?
   10. Ist Folgendes korrekt: $\{\langle Horst, Heide\rangle, \langle Jan, Albert\rangle\} = \{\langle Jan, Albert\rangle, \langle Horst, Heide\rangle\}$?
   11. Was muss der Fall sein, damit $A \circ B = B \circ A$?
   12. Finden Sie ein Beispiel für eine nicht-partielle Funktion von Dingen der realen Welt zu Dingen der realen Welt. Warum ist diese Funktion keine Relation? Finden Sie außerdem ein ähnliches Beispiel für eine partielle Funktion.
   13. Finden Sie je eine Relationen zwischen Dingen der realen Welt, die reflexiv, irreflexiv, nichtreflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, nichtsymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, nichttransitiv und intransitiv ist. Die Relationen müssen nicht mit einem bestimmten natürlichsprachlichen Wort ausdrückbar sein (vergleiche viele der Beispiele auf den Folien). In einigen Fällen ist das recht schwierig. Versuchen Sie es ohne Google, ChatGPT usw., sonst bringt es Ihnen nichts.

Aussagenlogik

Logik

Wie Logiken funktionieren

- Sammlungen von Aussagen bzw. Propositionen
- Axiome | als wahr angenommene Aussagen
  - eventuell über Induktion gegeben
  - oder aus rein theoretischen Überlegungen abgeleitet
- Deduktion | Ableiten von Aussagen aus Axiomen
- in der Wissenschaft damit Voraussagen aus Axiomen

Alles Wesentliche (und viel mehr) in Partee u. a. (1990: 87-246).
Auch gut zur praktischen Logik ist Bucher (1998)..

Beweise

Status von Aussagen in logischen Beweisen …

- Axiome | atomare Wahrheiten (der Theorie oder des Diskurses)
- Theorem | eine Aussage, die bewiesen werden soll oder bewiesen wurde
- Lemma | ein nebensächliches bewiesenes Theorem
- Korollar | ein minderes Theorem im Rahmen einer Beweisführung

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen …

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen
- Schlussregeln zur Ableitung von Theoremen aus Axiomen
- Untersuchung, inwieweit Sprache logischen Prinzipien folgt
- Wissenschaft
  - Hypothesengenerierung durch Induktion und Abduktion
  - Hypothesenprüfung durch Deduktion plus Testung
  - außerdem Prüfen auf Widerspruchsfreiheit

Warum Logik in der Semantik?

Sprache ist nicht ohne Logik.

- Aussagesätze haben Wahrheitsbedingungen!
- Sprache ist systematisch und kompositional!
- Natürlichsprachliche Sätze folgen aus anderen Sätzen!
  … wie Theoreme aus Axiomen …
- Was das Gehirn damit macht, ist – wie gesagt – eine parallele Frage.

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - *Herr Keydana is a passionate cyclist.: k*
- Wahrheitswert | Semantik einer Formel
  - $[\![k]\!] \in \{0, 1\}$
  - Wenn Herr Keydana passionierter Radsportler ist, dann $[\![k]\!] = 1$
  - ... sonst $[\![k]\!] = 0$
  - *k* ist kontingent | wahr oder falsch je nach Modell
  - Modell | Spezifikation von Wahrheitsbedingungen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p* | Negation
  - $p \vee q$ | *p oder q* | Disjunktion
  - $p \wedge q$ | *p und q* | Konjunktion
  - $p \rightarrow q$ | *wenn p dann q* | Konditional
  - $p \leftrightarrow q$ | *p genau dann wenn q* | Bikonditional
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Es ist nicht der Fall, dass p.

- Definition gemäß letzter Woche: $[\![\neg]\!] = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
- Typische Definition als Funktion

$$[\![\neg]\!] = \begin{bmatrix} 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{bmatrix}$$

- Typische Darstellung mit Wahrheitstafel

¬	*p*
0	1
1	0

Es ist der Fall, dass p, dass q, oder dass p und q.

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

- *Herr Keydana is a passionate cyclist or we all love logic.*
- $k \vee l$

Konjunktion | Semantik von $\wedge$

Es ist der Fall, dass p, und dass q.

p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

- *Herr Keydana is a passionate cyclist and we all love logic.*
- $k \wedge l$

Wenn q gilt, dann gilt q.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- *If it rains, then the streets get wet.*
- $r \rightarrow s$

Ex falso sequitur quodlibet!

If it rains, the streets get wet. $\vdash$? It doesn't rain, so the streets are dry.

- it is raining (1) , the streets are wet (1) : **1**
- it is raining (1) , the streets are not wet (0) : **0**
- it is not raining (0) , the streets are wet (1) : **1**
- it is not raining (0) , the streets are not wet (0) : **1**

- *Ex falso sequitur quodlibet.* | Modus morons

p ist der Fall genau dann, wenn q der Fall ist.
Wenn p der Fall ist, dann ist q der Fall und umgekehrt.

p	$\leftrightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

- *If and only if your score is above 50, then you pass the semantics exam.*
- $s \leftrightarrow p$

Bindungsstärke der Funktoren

$$\text{Skopus} \;\; \left\downarrow \begin{array}{c} \neg \\ \wedge \\ \vee \\ \rightarrow \\ \leftrightarrow \end{array} \right\uparrow \;\; \text{Bindungsstärke}$$

Hilfreiche überflüssige Klammern

Die folgenden Wffs sind alle äquivalent.

$$
\begin{aligned}
& p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s \\
\equiv\ & p \wedge (\neg q) \vee r \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\ & (p \wedge (\neg q)) \vee r \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\ & ((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\ & (((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (\neg s))
\end{aligned}
$$

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs
- für jede atomare Wff W_m mit $m \in \{1, ..n\}$
  - $2^{(n-m)}$ Einsen gefolgt von $2^{(n-m)}$ Nullen
- Beispiel mit vier atomaren Wffs p, q, r, s
  - für p als W_m mit $m = 1$ | alternierende Blöcke von $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q als W_m mit $m = 2$ | alternierende Blöcke von $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r als W_m mit $m = 3$ | alternierende Blöcke von $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s als W_m mit $m = 4$ | alternierende Blöcke von $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s | $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen
- Wahrheitswerte ermitteln
  entsprechend Funktorenskopus
  - für $\neg q$
  - für $\neg s$
  - für $p \wedge \neg q$
  - für $p \wedge \neg q \vee r$
  - für $p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s$

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

- Tautologie = immer wahr | Beispiel $p \vee \neg p$

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0

- Kontradiktion = immer falsch | Beispiel $p \wedge \neg p$

p	$\wedge$	$\neg$	p
1	0	0	1
0	0	1	0

- Kontingenz = je nach Modell wahr oder falsch | Beispiel $p \wedge p$

p	$\wedge$	p
1	1	1
0	0	0

Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.
Gesetze als Formulierung bekannter Äquivalenzen ($\equiv$ oder $\Leftrightarrow$)

- Wffs mit stets gleicher Interpretation
  $X \equiv Y$: X hat dieselben Wahrheitsbedingungen wie Y
- Regeln zum wahrheitswertkonservativen Umschreiben komplexer Wffs
- Parallelen zur Mengenlehre offensichtlich
  (mit den zugrundeliegenden algebraischen Formalisierungen erst recht)

- Alle Funktoren lassen sich aus einem Funktor ableiten.

  Scheffer-Strich (NAND, *nicht-und*; vgl. auch Peirce-Funktor)

p	$\mid$	q	$\equiv$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$
1	0	1		0	1	1	1
1	1	0		1	1	0	0
0	1	1		1	0	0	1
0	1	0		1	0	0	0

Eher triviale Äquivalenzregeln

Idempotenz	$p \vee p \equiv p$	$P \cup P = P$	*They talk or they talk.*
	$p \wedge p \equiv p$	$P \cap P = P$	*They talk and they talk.*
Assoziativität	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$	*(He walks or (she talks) or we walk).*
	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$	*(He walks and (she talks) and we walk).*
Kommutativität	$p \vee q \equiv q \vee p$	$P \cup Q = Q \cup P$	*Peter walks or Sue snores.* $\equiv$ *Sue snores or Peter walks.*
	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$P \cap Q = Q \cap P$	*Peter walks and Sue snores.* $\equiv$ *Sue snores and Peter walks.*
Distributivität	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$	*(Sue snores) and (Peter walks or we talk).* $\equiv$ *(Sue snores and Peter walks) or (Sue snores and we talk).*
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$	
DeMorgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$(P \cup Q)' = P' \cap Q'$	
	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$(P \cap Q)' = P' \cup Q'$	
Komplementgesetze			
– Tautologie	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$		
– Kontradiktion	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$		
– Doppelnegation	$\neg\neg p \equiv p$		

T für Tautologie ($[\![\mathbf{T}]\!] = 1$), **F** für Kontradiktion ($[\![\mathbf{F}]\!] = 0$)

alternative Notation für DeMorgan: $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

folgt aus DeMorgan: $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{\overline{q}} \equiv p \wedge q$

Konditionalgesetze

Implikation (Impl.)

P	$\rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1	1	1		0	1	1	1
1	0	0		0	1	0	0
0	1	1		1	0	1	1
0	1	0		1	0	1	0

Kontraposition (Kontr.)

P	$\rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	Q	$\rightarrow$	$\neg$	P
1	1	1		0	1	1	0	1
1	0	0		1	0	0	0	1
0	1	1		0	1	1	1	0
0	1	0		1	0	1	1	0

Echte Schlussregeln

Feste Regeln für Deduktionsschlüsse aus Prämissen

- alle obigen Regel | Äquivalenzregeln (= Umformungsregeln) für einzelne Wffs
- Schlussregeln
  - Schließen aus Mengen von Prämissen
  - kein neues Wissen, aber Erschließen existierenden Wissens
  - nicht naturgegeben | zahlreiche alternative Logiken

Modus ponens (MP)

Eine Implikation (Antezedens $\rightarrow$ Konsequenz) und ihr Antezedens sind gegeben.

	$p \rightarrow q$	Prämisse 1
	p	Prämisse 2
$\vdash$	q	Schluss

Beispiel mit natürlichsprachlichem Material

(1)	*If It rains, the streets get wet.*	
(2)	*It is raining.*	
$\vdash$	*The streets are getting wet.*	1,2,MP

Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- Prämisse 1 ($p \rightarrow q$) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 für streichen!
- Prämisse 2 (p) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 streichen
- Es bleibt nur noch eine Zeile, in der $[\![q]\!] = 1$

Modus tollens (MT)

Eine Implikation und die Negation ihrer Konsequenz sind gegeben.

	$p \rightarrow q$	Prämisse 1
	$\neg q$	Prämisse 2
$\vdash$	$\neg p$	Schluss

Illustration an der Wahrheitstafel

P	$\rightarrow$	Q	
1	1	1	ausgeschlossen durch Prämisse 2
1	0	0	ausgeschlossen durch Prämisse 1
0	1	1	ausgeschlossen durch Prämisse 2
0	1	0	

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, \;\; q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*
  - $\vdash$ *If it rains, it smells nice.*

Disjunktiver Syllogismus (DS) | Eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Disjunkte

- $p \vee q, \neg p \vdash q$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *Either Peter sleeps or Peter is awake.*
  - *Peter isn't awake.*
  - $\vdash$ *Peter sleeps.*

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):
  - $p, q \vdash p \wedge q$
  - *It is raining. The sun is shining.* $\vdash$ *It is raining and the sun is shining.*
- Addition (Add.):
  - $p \vdash p \vee q$
  - *It is raining.* $\vdash$ *It is raining or the sun is shining.*
  - What if Q is instantiated as true or false by another premise?

Ein Beweis

Schritte zur Beweisführung

1. Prämissen formalisieren | eine atomare Wff (Buchstabe) pro atomarer Aussage
2. zu beweisende Aussage (Schlussfolgerung) notieren
3. aus den Prämissen und Schlussregeln versuchen, zur Schlussfolgerung zu kommen

- keine exakte Wissenschaft, erfordert Übung und Intuition
- automatische Schlussverfahren (Tableaux) verfügbar (Partee u. a. 1990)

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung | $\neg s$

1	$r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$	
2	r	$\vdash \neg s$
3	$\neg(s \vee \neg b)$	1,2,MP
4	$\neg s \wedge b$	3,DeM
5	$\neg s$	4,Simp. ■

Aufgaben I

1. Versuchen Sie, nur mittels des Scheffer-Strichs (s. Folie 109) die Wahrheitstabellen für $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$ und $p \rightarrow q$ zu rekonstruieren. Das ergibt nur einen Sinn, wenn Sie es selbst versuchen. Sie haben mehr davon, wenn Sie daran scheitern, als wenn Sie gleich Wikipedia nehmen.

Aufgaben II

Versuchen Sie sich an folgenden vier Beweisen.

Hinweis: Sie benötigen, soweit ich sehe, nur die folgenden Schlussregeln:

- Simp. | Simplifikation (auch Konjunktionsreduktion o.ä.)
- MT | Modus Tollens
- MP | Modus Ponens
- DS | Disjunktiver Syllogismus
- Konj. | Konjunktionsregel

1. Der Beweis ist sophistisch, oder Achilles holt die Schildkröte ein. Wenn Achilles die Schildkröte einholt, dann versagt die Logik. Die Mathematiker haben alles geprüft, und die Logik versagt nicht. **Zeigen/Widerlegen Sie: Der Beweis ist sophistisch.**

Aufgaben II

2. Pettenkofer lebte weiter, oder seine Hypothese versagte. Wenn die Hypothese versagte, dann wurde Pettenkofer in der Hygiene abgeschrieben. Er schluckte öffentlich eine Kultur Cholerabakterien und wurde in der Hygiene nicht abgeschrieben. **Zeigen/Widerlegen Sie: Pettenkofer lebte weiter.**
3. Der Fischer trinkt gerne Wein, und der Müller singt im Männerchor. Wenn der Veganladenbesitzer Hausbesitzer ist, dann wählt er nicht die Linkspartei. Der Veganladenbesitzer ist Hausbesitzer, oder der Müller singt nicht im Männerchor. **Zeigen/Widerlegen Sie: Der Fischer trinkt gern ein Glas Wein, und der Veganladenbesitzer wählt nicht die Linkspartei.**
4. Wenn Schopenhauer so früh aufstand wie Kant, dann hat er ihn in dieser Hinsicht gut nachgeahmt. Schopenhauer war eingebildt, liebte die Demokratie nicht, und er hatte Wutanfälle. In einem Wutausbruch warf er die Näherin die Stiege hinunter. Er stand so früh auf wie Kant, oder er war nicht eingebildet. **Zeigen/Widerlegen Sie: Schopenhauer hat die Näherin die Stiege hinuntergeworfen, und er hat Kant im Frühaufstehen gut nachgeahmt.**