Formale Semantik
04. Aussagenlogik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Folien in Überarbeitung. Englische Teile (ab Woche 7) sind noch von 2007!
Stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Semantik`

Inhalt

Was ist Logik?

Logik

Wie Logiken funktionieren

- Sammlungen von Aussagen bzw. Propositionen
- Axiome | als wahr angenommene Aussagen
  - eventuell über Induktion gegeben
  - oder aus rein theoretischen Überlegungen abgeleitet
- Deduktion | Ableiten von Aussagen aus Axiomen
- in der Wissenschaft damit Voraussagen aus Axiomen

Alles Wesentliche (und viel mehr) in Partee u. a. (1990: 87-246).
Auch gut zur praktischen Logik ist Bucher (1998)..

Status von Aussagen in logischen Beweisen …

- Axiome | atomare Wahrheiten (der Theorie oder des Diskurses)
- Theorem | eine Aussage, die bewiesen werden soll oder bewiesen wurde
- Lemma | ein nebensächliches bewiesenes Theorem
- Korollar | ein minderes Theorem im Rahmen einer Beweisführung

Wozu Logik?

Verständnis von der Welt in eine Form bringen …

- keine neuen Wahrheiten (Informationen) durch Logik
- Verfahren zur Formalisierung von Aussagen
- Schlussregeln zur Ableitung von Theoremen aus Axiomen
- Untersuchung, inwieweit Sprache logischen Prinzipien folgt
- Wissenschaft
  - Hypothesengenerierung durch Induktion und Abduktion
  - Hypothesenprüfung durch Deduktion plus Testung
  - außerdem Prüfen auf Widerspruchsfreiheit

Warum Logik in der Semantik?

Sprache ist nicht ohne Logik.

- Aussagesätze haben Wahrheitsbedingungen!
- Sprache ist systematisch und kompositional!
- Natürlichsprachliche Sätze folgen aus anderen Sätzen!
  ... wie Theoreme aus Axiomen ...
- Was das Gehirn damit macht, ist – wie gesagt – eine parallele Frage.

Aussagenlogik

Atomare Formeln

Aussagenlogik | Formeln als einzige syntaktische Kategorie

- Syntax
  - keine syntaktische Analyse unterhalb der Ebene der Aussagen
  - Atome bzw. atomare Formeln | Aussagen bzw. Propositionen
  - *Herr Keydana is a passionate cyclist.: k*
- Wahrheitswert | Semantik einer Formel
  - $[\![k]\!] \in \{0, 1\}$
  - Wenn Herr Keydana passionierter Radsportler ist, dann $[\![k]\!] = 1$
  - ... sonst $[\![k]\!] = 0$
  - *k* ist kontingent | wahr oder falsch je nach Modell
  - Modell | Spezifikation von Wahrheitsbedingungen

Komplexe (molekulare) Formeln

Syntax aller wohlgeformten Formeln bzw. Wffs

- Syntax | Wenn p und q Wffs sind, dann sind ebenfalls Wffs:
  - $\neg p$ | *nicht p* | Negation
  - $p \vee q$ | *p oder q* | Disjunktion
  - $p \wedge q$ | *p und q* | Konjunktion
  - $p \rightarrow q$ | *wenn p dann q* | Konditional
  - $p \leftrightarrow q$ | *p genau dann wenn q* | Bikonditional
  - Es gibt keine anderen Wffs in AL.
- Semantik | Funktoren bezeichnen Funktionen

Es ist nicht der Fall, dass p.

- Definition gemäß letzter Woche: $[\![\neg]\!] = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle\}$
- Typische Definition als Funktion

$$[\![\neg]\!] = \begin{bmatrix} 1 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{bmatrix}$$

- Typische Darstellung mit Wahrheitstafel

¬	*p*
0	1
1	0

Es ist der Fall, dass p, dass q, oder dass p und q.

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

- *Herr Keydana is a passionate cyclist or we all love logic.*
- $k \vee l$

Konjunktion | Semantik von $\wedge$

Es ist der Fall, dass p, und dass q.

p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

- *Herr Keydana is a passionate cyclist and we all love logic.*
- $k \wedge l$

Wenn q gilt, dann gilt q.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- *If it rains, then the streets get wet.*
- $r \rightarrow s$

Ex falso sequitur quodlibet!

If it rains, the streets get wet. $\vdash$? It doesn't rain, so the streets are dry.

- it is raining (1) , the streets are wet (1) : **1**
- it is raining (1) , the streets are not wet (0) : **0**
- it is not raining (0) , the streets are wet (1) : **1**
- it is not raining (0) , the streets are not wet (0) : **1**

- *Ex falso sequitur quodlibet.* | Modus morons

Bikonditional | Semantik von $\leftrightarrow$

p ist der Fall genau dann, wenn q der Fall ist.
Wenn p der Fall ist, dann ist q der Fall und umgekehrt.

p	$\leftrightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

- *If and only if your score is above 50, then you pass the semantics exam.*
- $s \leftrightarrow p$

Skopus und Klammern

Bindungsstärke der Funktoren

$$\text{Skopus}\ \left\downarrow \begin{array}{c}\neg\\ \wedge\\ \vee\\ \rightarrow\\ \leftrightarrow\end{array}\right\uparrow\ \text{Bindungsstärke}$$

Die folgenden Wffs sind alle äquivalent.

$$
\begin{aligned}
& p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s \\
\equiv\ & p \wedge (\neg q) \vee r \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\ & (p \wedge (\neg q)) \vee r \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\ & ((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (\neg s) \\
\equiv\ & (((p \wedge (\neg q)) \vee r) \rightarrow (\neg s))
\end{aligned}
$$

Große Wahrheitstabellen anlegen

Berechenbarkeit der Länge der Tabelle und volle Abdeckung aller Permutationen

- Länge der Tabelle | 2^n Zeilen für n atomare Wffs
- für jede atomare Wff W_m mit $m \in \{1, ..n\}$
  - $2^{(n-m)}$ Einsen gefolgt von $2^{(n-m)}$ Nullen
- Beispiel mit vier atomaren Wffs p, q, r, s
  - für p als W_m mit $m = 1$ | alternierende Blöcke von $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q als W_m mit $m = 2$ | alternierende Blöcke von $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r als W_m mit $m = 3$ | alternierende Blöcke von $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s als W_m mit $m = 4$ | alternierende Blöcke von $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen

Ein Beispiel

p	$\wedge$	$\neg$	q	$\vee$	r	$\rightarrow$	$\neg$	s
1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0

- Tabelle vorbereiten
  - für p | $2^{4-1} = 2^3 = 8$ Einsen/Nullen
  - für q | $2^{4-2} = 2^2 = 4$ Einsen/Nullen
  - für r | $2^{4-3} = 2^1 = 2$ Einsen/Nullen
  - für s | $2^{4-4} = 2^0 = 1$ Einsen/Nullen
- Wahrheitswerte ermitteln
  entsprechend Funktorenskopus
  - für $\neg q$
  - für $\neg s$
  - für $p \wedge \neg q$
  - für $p \wedge \neg q \vee r$
  - für $p \wedge \neg q \vee r \rightarrow \neg s$

Tautologie, Kontradiktion, Kontingenz

Wann können oder müssen Wffs wahr oder falsch sein?

- Tautologie = immer wahr | Beispiel $p \vee \neg p$

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0

- Kontradiktion = immer falsch | Beispiel $p \wedge \neg p$

p	$\wedge$	$\neg$	p
1	0	0	1
0	0	1	0

- Kontingenz = je nach Modell wahr oder falsch | Beispiel $p \wedge p$

p	$\wedge$	p
1	1	1
0	0	0

Was heißt Gesetze?

Aus Mengenlehre und Arithmetik bekannt: Assoziativität, Kommutativität usw.
Gesetze als Formulierung bekannter Äquivalenzen ($\equiv$ oder $\Leftrightarrow$)

- Wffs mit stets gleicher Interpretation
  $X \equiv Y$: X hat dieselben Wahrheitsbedingungen wie Y
- Regeln zum wahrheitswertkonservativen Umschreiben komplexer Wffs
- Parallelen zur Mengenlehre offensichtlich
  (mit den zugrundeliegenden algebraischen Formalisierungen erst recht)

- Alle Funktoren lassen sich aus einem Funktor ableiten.

  Scheffer-Strich (NAND, *nicht-und*; vgl. auch Peirce-Funktor)

p	$\mid$	q	$\equiv$	$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$
1	0	1		0	1	1	1
1	1	0		1	1	0	0
0	1	1		1	0	0	1
0	1	0		1	0	0	0

Eher triviale Äquivalenzregeln

Idempotenz	$p \vee p \equiv p$	$P \cup P = P$	*They talk or they talk.*
	$p \wedge p \equiv p$	$P \cap P = P$	*They talk and they talk.*
Assoziativität	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$	*(He walks or (she talks) or we walk).*
	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$	*(He walks and (she talks) and we walk).*
Kommutativität	$p \vee q \equiv q \vee p$	$P \cup Q = Q \cup P$	*Peter walks or Sue snores.* $\equiv$ *Sue snores or Peter walks.*
	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$P \cap Q = Q \cap P$	*Peter walks and Sue snores.* $\equiv$ *Sue snores and Peter walks.*
Distributivität	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$	*(Sue snores) and (Peter walks or we talk).* $\equiv$ *(Sue snores and Peter walks) or (Sue snores and we talk).*
	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$	
DeMorgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$(P \cup Q)' = P' \cap Q'$	
	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$(P \cap Q)' = P' \cup Q'$	
Komplementgesetze			
– Tautologie	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$		
– Kontradiktion	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$		
– Doppelnegation	$\neg\neg p \equiv p$		

T für Tautologie ($[\![\mathbf{T}]\!] = 1$), **F** für Kontradiktion ($[\![\mathbf{F}]\!] = 0$)
alternative Notation für DeMorgan: $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$
folgt aus DeMorgan: $\overline{\overline{p} \vee \overline{q}} \equiv \overline{\overline{p}} \wedge \overline{\overline{q}} \equiv p \wedge q$

Konditionalgesetze

Implikation (Impl.)

P	$\rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	P	$\vee$	Q
1	1	1		0	1	1	1
1	0	0		0	1	0	0
0	1	1		1	0	1	1
0	1	0		1	0	1	0

Kontraposition (Kontr.)

P	$\rightarrow$	Q	$\equiv$	$\neg$	Q	$\rightarrow$	$\neg$	P
1	1	1		0	1	1	0	1
1	0	0		1	0	0	0	1
0	1	1		0	1	1	1	0
0	1	0		1	0	1	1	0

Echte Schlussregeln

Feste Regeln für Deduktionsschlüsse aus Prämissen

- alle obigen Regel | Äquivalenzregeln (= Umformungsregeln) für einzelne Wffs
- Schlussregeln
  - Schließen aus Mengen von Prämissen
  - kein neues Wissen, aber Erschließen existierenden Wissens
  - nicht naturgegeben | zahlreiche alternative Logiken

Modus ponens (MP)

Eine Implikation (Antezedens $\rightarrow$ Konsequenz) und ihr Antezedens sind gegeben.

	$p \rightarrow q$	Prämisse 1
	p	Prämisse 2
$\vdash$	q	Schluss

Beispiel mit natürlichsprachlichem Material

(1)	*If It rains, the streets get wet.*	
(2)	*It is raining.*	
$\vdash$	*The streets are getting wet.*	1,2,MP

Eine Illustration des MP an der Wahrheitstabelle

Prämissen werden immer als wahr angenommen! Sonst wären es keine.

p	$\rightarrow$	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

- Prämisse 1 ($p \rightarrow q$) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 für streichen!
- Prämisse 2 (p) muss wahr sein, ...
- ... also Zeilen mit 0 streichen
- Es bleibt nur noch eine Zeile, in der $[\![q]\!] = 1$

Modus tollens (MT)

Eine Implikation und die Negation ihrer Konsequenz sind gegeben.

	$p \rightarrow q$	Prämisse 1
	$\neg q$	Prämisse 2
$\vdash$	$\neg p$	Schluss

Illustration an der Wahrheitstafel

P	$\rightarrow$	Q	
1	1	1	ausgeschlossen durch Prämisse 2
1	0	0	ausgeschlossen durch Prämisse 1
0	1	1	ausgeschlossen durch Prämisse 2
0	1	0	

Die Syllogismen

Hypothetischer Syllogismus (HS) | Verkettung von zwei Implikationen

- $p \rightarrow q, \;\; q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *If it rains, the streets get wet.*
  - *If the streets get wet, it smells nice.*
  - $\vdash$ *If it rains, it smells nice.*

Disjunktiver Syllogismus (DS) | Eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Disjunkte

- $p \vee q, \neg p \vdash q$
- Beispiel in natürlicher Sprache
  - *Either Peter sleeps or Peter is awake.*
  - *Peter isn't awake.*
  - $\vdash$ *Peter sleeps.*

Triviale Regeln

- Simplifikation (Simp.):
  - $p \wedge q \vdash p, q$
  - *It is raining and the sun is shining.* $\vdash$ *It is raining.*
- Konjunktion (Konj.):
  - $p, q \vdash p \wedge q$
  - *It is raining. The sun is shining.* $\vdash$ *It is raining and the sun is shining.*
- Addition (Add.):
  - $p \vdash p \vee q$
  - *It is raining.* $\vdash$ *It is raining or the sun is shining.*
  - What if Q is instantiated as true or false by another premise?

Ein Beweis

Schritte zur Beweisführung

1. Prämissen formalisieren | eine atomare Wff (Buchstabe) pro atomarer Aussage
2. zu beweisende Aussage (Schlussfolgerung) notieren
3. aus den Prämissen und Schlussregeln versuchen, zur Schlussfolgerung zu kommen

- keine exakte Wissenschaft, erfordert Übung und Intuition
- automatische Schlussverfahren (Tableaux) verfügbar (Partee u. a. 1990)

Ein Beispielbeweis

Wenn es regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Sonne scheint oder der Wind nicht bläst. Es regnet. Zeigen Sie: Die Sonne scheint nicht.

- erste Prämisse | $r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$
- zweite Prämisse | r
- Schlussfolgerung | $\neg s$

1	$r \rightarrow \neg(s \vee \neg b)$	
2	r	$\vdash \neg s$
3	$\neg(s \vee \neg b)$	1,2,MP
4	$\neg s \wedge b$	3,DeM
5	$\neg s$	4,Simp. ■

Aufgaben

Aufgaben I

1. Versuchen Sie, nur mittels des Scheffer-Strichs (s. Folie 19) die Wahrheitstabellen für $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$ und $p \rightarrow q$ zu rekonstruieren. Das ergibt nur einen Sinn, wenn Sie es selbst versuchen. Sie haben mehr davon, wenn Sie daran scheitern, als wenn Sie gleich Wikipedia nehmen.

Aufgaben II

Versuchen Sie sich an folgenden vier Beweisen.

Hinweis: Sie benötigen, soweit ich sehe, nur die folgenden Schlussregeln:

- Simp. | Simplifikation (auch Konjunktionsreduktion o.ä.)
- MT | Modus Tollens
- MP | Modus Ponens
- DS | Disjunktiver Syllogismus
- Konj. | Konjunktionsregel

1. Der Beweis ist sophistisch, oder Achilles holt die Schildkröte ein. Wenn Achilles die Schildkröte einholt, dann versagt die Logik. Die Mathematiker haben alles geprüft, und die Logik versagt nicht. **Zeigen/Widerlegen Sie: Der Beweis ist sophistisch.**

Aufgaben II

2. Pettenkofer lebte weiter, oder seine Hypothese versagte. Wenn die Hypothese versagte, dann wurde Pettenkofer in der Hygiene abgeschrieben. Er schluckte öffentlich eine Kultur Cholerabakterien und wurde in der Hygiene nicht abgeschrieben. **Zeigen/Widerlegen Sie: Pettenkofer lebte weiter.**
3. Der Fischer trinkt gerne Wein, und der Müller singt im Männerchor. Wenn der Veganladenbesitzer Hausbesitzer ist, dann wählt er nicht die Linkspartei. Der Veganladenbesitzer ist Hausbesitzer, oder der Müller singt nicht im Männerchor. **Zeigen/Widerlegen Sie: Der Fischer trinkt gern ein Glas Wein, und der Veganladenbesitzer wählt nicht die Linkspartei.**
4. Wenn Schopenhauer so früh aufstand wie Kant, dann hat er ihn in dieser Hinsicht gut nachgeahmt. Schopenhauer war eingebildt, liebte die Demokratie nicht, und er hatte Wutanfälle. In einem Wutausbruch warf er die Näherin die Stiege hinunter. Er stand so früh auf wie Kant, oder er war nicht eingebildet. **Zeigen/Widerlegen Sie: Schopenhauer hat die Näherin die Stiege hinuntergeworfen, und er hat Kant im Frühaufstehen gut nachgeahmt.**