Statistik
05. ANOVA

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Deutsche-Syntax`

Inhalt

ANOVA

Übersicht

- Vergleiche von Mittelwerten zwischen mehr als zwei Gruppen
- Mittelwertvergleiche mit mehreren Unabhängigen
- Warum kann man über Varianzen Mittelwerte vergleichen?

Literatur

- Gravetter & Wallnau (2007)
- Bortz & Schuster (2010)
- indirekt: Maxwell & Delaney (2004)

Mittelwerte und Varianzen

- Einschränkung beim t-test: immer nur 2 Gruppen
- t-Test bei mehr als 2 Gruppen: komplizierte paarweise Vergleiche

- stattdessen ANOVA: ANalysis Of VAriance
- Vergleich von Varianzen zwischen beliebigen Gruppen
- Schluss auf Mittelwerte nur indirekt über die Varianzen

- bei zwei Gruppen: Konvergenz von t-Test und ANOVA

Achtung: Gruppen vs. Faktoren

- ANOVA vergleicht immer mehrere Gruppen
- Gruppen bei der einfaktoriellen ANOVA =
  den Ausprägungen einer unabhängigen Variable (z. B. Text-Register)
- diese Variablen heißen hier Faktoren.

- Einfluss der Faktoren auf eine abhängige (z. B. Satzlänge, Lesezeit)

- bei mehreren Faktoren (z. B. Text-Register und Jahrhundert):
  mehrfaktorielle ANOVA.

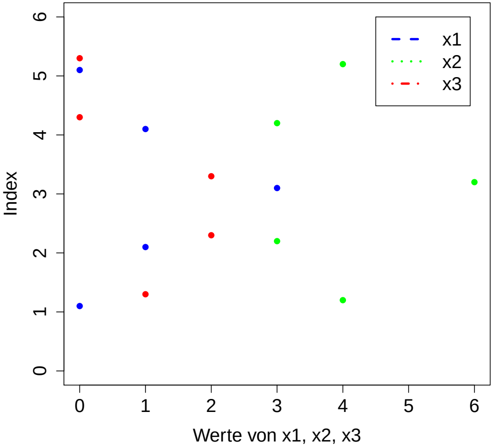
Idee bei ANOVA (z. B. drei Gruppen)

- NULL: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}3$
- aber: Es gibt keinen “Differenzwert” für drei Mittel (also sowas wie den t-Wert).

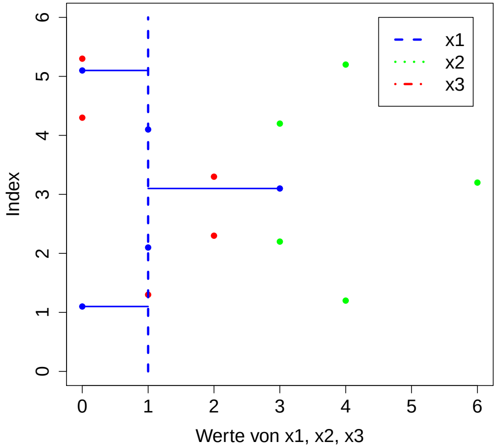
- daher Varianzvergleich
- F-Wert (Verteilung unter NULL bekannt) als Test-Statistik

$$F = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz in den Stichproben}} = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz per Zufall}}$$

$x_1 = [0, 1, 3, 1, 0]$
$x_2 = [4, 3, 6, 3, 4]$
$x_3 = [1, 2, 2, 0, 0]$

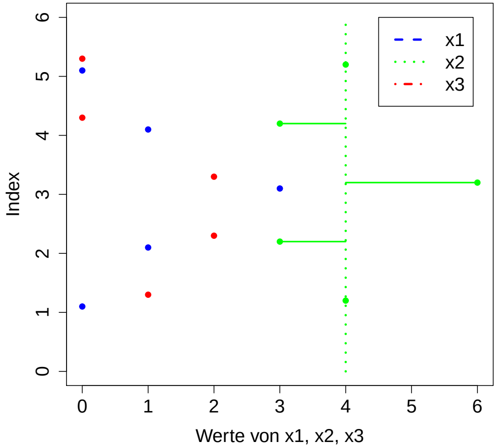


Komponenten der Varianz von x_1



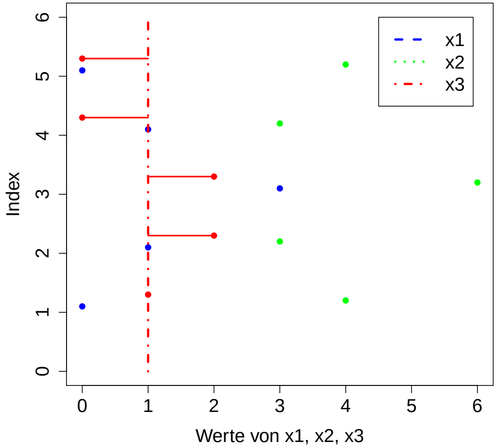
$$s^2(x_1) = 1.5$$

Komponenten der Varianz von x_2



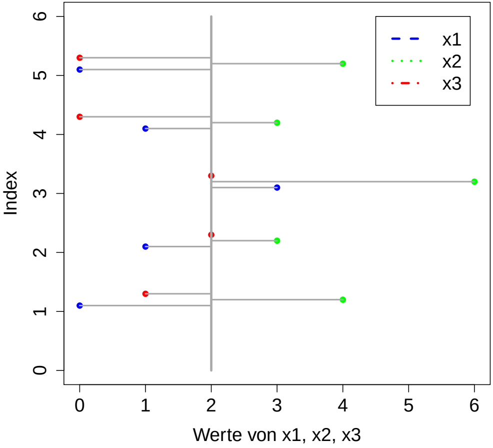
$$s^2(x_2) = 1.5$$

Komponenten der Varianz von x_3



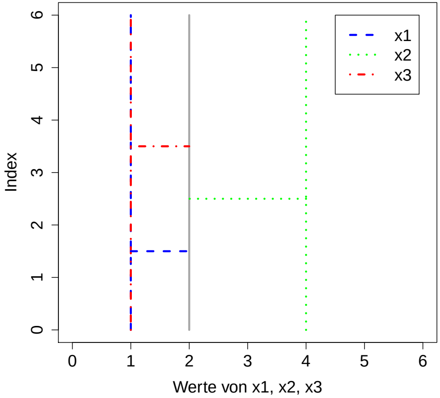
$$s^2(x_3) = 1$$

Varianz in der zusammengefassten Stichprobe X



$$s^2(X) = 3.29$$

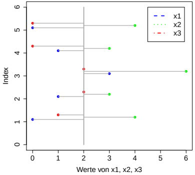
Varianz zwischen den drei Gruppen



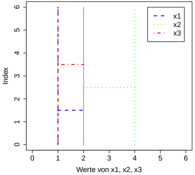
$$s^2([\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]) = 1.33$$

Achtung: Bei unterschiedlichen Stichprobengrößen
ist das nicht ganz so einfach!

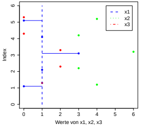
Es gilt bezüglich der Varianzen

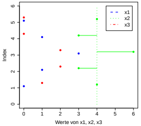


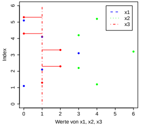
=



+



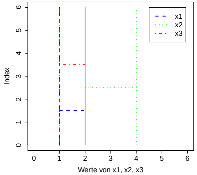




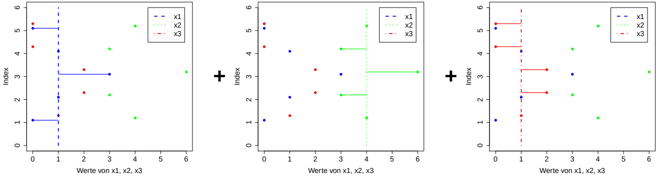
$$s^2(X) = s^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + s^2(x_1) + s^2(x_2) + s^2(x_3)$$

Wenn man den Abstand zwischen den Mitteln verschiebt,
muss die Gesamtvarianz größer werden!

$$F = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz in den Stichproben}} = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz per Zufall}}$$



$F =$ ———



Wenn man den Abstand zwischen den Mitteln verschiebt, **muss** die Gesamtvarianz größer werden!

Wie funktioniert der F-Wert

- $F = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz in den Stichproben}}$

- Warum?
- $F = \frac{\text{Unterschied durch Effekt} + \text{Unterschiede durch restliche Varianz}}{\text{Unterschied durch restliche Varianz}}$

- Unter Annahme der Null gibt es keinen Effekt, ...
- also $Unterschied\ durch\ Effekt = 0$

- dann: $F = \frac{0 + \text{Unterschiede durch restliche Varianz}}{\text{Unterschied durch restliche Varianz}} = 1$

Notation, fast wie in Gravetter & Wallnau, Kap. 13

- Anzahl der Gruppen x_i: k
- Größe der Gruppen: n_i
- Größe der Gesamtstichprobe X: N
- Summen der Gruppen: T_i
- Gesamtsumme: G
- Mittel (anders als G&W): $\bar{x}_i$, $\bar{X}$
- Summe der Quadrate (=Zähler der Varianz): $SQ(x_i)$, $SQ(X)$

Zur Erinnerung: $s^2(x) = \frac{\sum(x-\bar{x})}{n-1} = \frac{SQ(x)}{df(x)}$

Varianz ist Varianz beim F-Wert

$$F = \frac{Varianz\ zwischen\ den\ Gruppen}{Varianz\ in\ den\ Gruppen} = \frac{s^2_{zwischen}}{s^2_{in}} = \frac{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}}{\frac{SQ_{in}}{df_{in}}}$$

denn

$$s^2(x) = \frac{SQ(x)}{df(x)}$$

Berechnung der SQ

Am einfachsten unter Beachtung von:

$SQ_{gesamt} = SQ_{zwischen} + SQ_{in}$

Es gilt: $SQ_{gesamt} = SQ(X) = \sum(X - \bar{X})$

Außerdem: $SQ_{in} = \sum SQ(x_i)$

Damit: $SQ_{zwischen} = SQ_{gesamt} - SQ_{in}$

$SQ_{zwischen}$

$SQ_{zwischen}$ kann man auch direkt ausrechnen:

$$SQ_{zwischen} = \sum_i \left(\frac{T_i^2}{n_i}\right) - \frac{G^2}{N}$$

Aufgabe

$x_1 = [0, 1, 3, 1, 0]$
$x_2 = [4, 3, 6, 3, 4]$
$x_3 = [1, 2, 2, 0, 0]$

Bitte alle SQ ausrechnen, inkl. $SQ_{zwischen}$ direkt.

Tipp: Sie brauchen als Vorwissen nur
den Stoff der ersten Statistik-Sitzung:

- arithmetisches Mittel
- SQ

Freiheitsgrade ausrechnen

Es gilt auch hier, ähnlich wie bei den SQ:
$df_{gesamt} = df_{zwischen} + df_{in}$

$$df_{gesamt} = N - 1$$

$$df_{zwischen} = k - 1$$

$$df_{in} = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = (N - 1) - (k - 1)$$

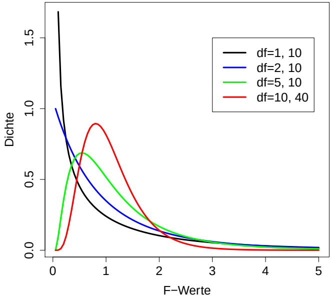
Alles zusammen: F-Wert

$$F = \frac{s^2_{zwischen}}{s^2_{in}} = \frac{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}}{\frac{SQ_{in}}{df_{in}}}$$

Bitte ausrechnen für o. g. Beispiel.

Ermitteln der kritischen Werte

F-Verteilung:



In R für $df_{zwischen} = 2$ und $df_{in} = 12$ bei SIG=0.05:

`> qf(0.95, 2, 12)` ⇒ `3.885294`

Effektstärke

$$\eta^2 = \frac{SQ_{zwischen}}{SQ_{gesamt}}$$

(wieder ein r^2-Maß)

Post-Hoc-Tests

- Problem: Welche Gruppen unterscheiden sich denn nun?
- Lösung: Post(-Hoc)-Tests, z. B. Scheffé-Test:
  - paarweise ANOVA
  - aber: k wird gesetzt wie bei ursprünglicher ANOVA
  - dadurch Vermeidung kumulierten Alpha-Fehlers (Vorteil ggü. paarweisen t-Tests)
  - weiterer Vorteil: paarweise Post-Tests nur erforderlich, wenn Omnibus-ANOVA bereits Signifikanz gezeigt hat
  - und: Generalisierbarkeit zu mehrfaktorieller ANOVA (geht mi t-Test nicht)

Bitte ausrechnen für die oben gerechnete ANOVA.

Wozu mehrfaktorielle Designs

Oft vermutet man den Einfluss mehrerer Unabhängiger auf eine Abhängige.
Beispiel: Satzlängen

		Textsorte		
		Fiktion	**Zeitung**	**Wissenschaft**
Jahrhundert	**19**	x_{11}	x_{12}	x_{13}
	20	x_{21}	x_{22}	x_{23}

Hier also: $2 \cdot 3 = 6$ Gruppen

Ablauf der zweifaktoriellen ANOVA

1. erste ANOVA zwischen Zeilen
2. zweite ANOVA zwischen Spalten
3. dritte ANOVA für Interaktionen zwischen Zeilen und Spalten

4. Interaktion: Ungleichverteilung in Gruppen, die nicht durch die Spalten- und Zeileneffekte erklärt werden kann

5. Alle drei ANOVAs sind unabhängig voneinander!

Komponenten der zweifaktoriellen ANOVA

- Gesamtvarianz = Varianz zwischen Gruppen + Varianz in den Gruppen
- Varianz zwischen den Gruppen =
  Haupt-Faktoren-Varianz + Interaktions-Varianz
- Haupt-Faktoren-Varianz =
  Varianz zwischen Faktor A-Gruppen +
  Varianz zwischen Faktor B-Gruppen

Jede Zelle der Tabelle ist eine Gruppe.

$$SQ_{zwischen} = \sum_i \left(\frac{T_i^2}{n_i}\right) - \frac{G^2}{N}$$

$$df_{zwischen} = k - 1 \text{ (k = Anzahl der Zellen/Gruppen)}$$

Beachte: Keine Änderung verglichen mit einfaktorieller ANOVA!

Schritt 1(2): SQ/df in den Gruppen

Jede Zelle der Tabelle ist eine Gruppe.

$$SQ_{in} = \sum SQ(x_i)$$
$$df_{in} = \sum df(x_i)$$

Beachte: Keine Änderung verglichen mit einfaktorieller ANOVA!

Schritt 2(2): SQ/df für Gruppe A

Berechnung nach dem Schema für Zwischen-Gruppen-Varianz

		Textsorte			
		Fiktion	**Zeitung**	**Wissenschaft**	
Jahrhundert	**19**	x_{11}	x_{12}	x_{13}	A_1
	20	x_{21}	x_{22}	x_{23}	A_2

Auch hier keine wesentliche Änderung:

$$SQ_A = \sum_i \left(\frac{T_{A_i}^2}{n_{A_i}}\right) - \frac{G^2}{N}$$

$df_A = k_A - 1$ (k_A = Anzahl der Zeilen)

Schritt 2(2): SQ/df für Gruppe A

Berechnung nach dem Schema für Zwischen-Gruppen-Varianz

		Textsorte		
		Fiktion	**Zeitung**	**Wissenschaft**
Jahrhundert	**19**	x_{11}	x_{21}	x_{31}
	20	x_{12}	x_{22}	x_{32}
		B_1	B_2	B_3

Auch hier keine Änderung:

$$SQ_B = \sum_i \left(\frac{T_{B_i}^2}{n_{B_i}}\right) - \frac{G^2}{N}$$

$df_B = k_B - 1$ (k_B = hier Anzahl der Spalten)

Die Varianz, die auf Kosten der Interaktion geht, ist
die Zwischen-Gruppen-Varianz ohne die Einzelfaktor-Varianz.

$$SQ_{A\times B} = SQ_{zwischen} - SQ_A - SQ_B$$
$$df_{A\times B} = df_{zwischen} - df_A - df_B$$

Alle drei F-Werte ausrechnen

Die zweifaktorielle ANOVA
erfordert wie gesagt drei Einzel-ANOVAs.

$$F_A = \frac{\frac{SQ_A}{df_A}}{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}} = \frac{s_A^2}{s_{zwischen}^2}$$

$$F_B = \frac{\frac{SQ_A}{df_B}}{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}} = \frac{s_B^2}{s_{zwischen}^2}$$

$$F_{A \times B} = \frac{\frac{SQ_{A \times B}}{df_{A \times B}}}{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}} = \frac{s_{A \times B}^2}{s_{zwischen}^2}$$

Effektstärken

Entsprechend sind drei η^2 auszurechnen:

$$\eta_A^2 = \frac{SQ_A}{SQ_{gesamt} - SQ_B - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta_B^2 = \frac{SQ_B}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta_{A \times B}^2 = \frac{SQ_{A \times B}}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_B}$$

Wir fragen jeweils, welchen Anteil an der Varianz,
die die anderen beiden Faktoren nicht erklären,
der jeweilige dritte Faktor hat.

Das jetzt alles zusammen

Bitte vollständige zweifaktorielle ANOVA
bei SIG=0.05 und SIG=0.01 rechnen:

	B1	**B2**	**B3**
A1	1, 3, 1, 4	4, 3, 3, 6	8, 6, 8, 10
A2	8, 6, 6, 8	1, 6, 8, 1	1, 4, 1, 4

Nächste Woche | Überblick

Einzelthemen

1. Inferenz
2. Deskriptive Statistik
3. Nichtparametrische Verfahren
4. z-Test und t-Test
5. ANOVA
6. Freiheitsgrade und Effektstärken
7. Power und Severity
8. Lineare Modelle
9. Generalisierte Lineare Modelle
10. Gemischte Modelle

Literatur I

Bortz, Jürgen & Christof Schuster. 2010. *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. 7. Aufl. Berlin: Springer.

Gravetter, Frederick J. & Larry B. Wallnau. 2007. *Statistics for the Behavioral Sciences*. 7. Aufl. Belmont: Thomson.

Maxwell, Scott E. & Harold D. Delaney. 2004. *Designing experiments and analyzing data: a model comparison perspective*. Mahwa, New Jersey, London: Taylor & Francis.

Autor

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

https://rolandschaefer.net
roland.schaefer@uni-jena.de

Lizenz

Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/` oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.