Statistik
02. Deskriptive Statistik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Statistik`

Inhalt

1. Motivation
2. Skalenniveau
3. Zentraltendenz
4. Empirische Verteilungen und Dispersion
5. Bivariate Statistiken
6. Standardfehler und Konfidenzintervalle
7. Nächste Woche | Überblick

Übersicht

- Deskriptive Statistik als Aggregation von Daten
- Verteilungen in Stichproben und Grundgesamtheiten:
  - Zentralmaße
  - Streuung (Varianz)
- Theoretische vs. empirische Verteilungen
- Konfidenzintervalle | Genauigkeiten von Schätzungen?

Literatur

- Google, Stackoverflow usw.
- Gravetter & Wallnau (2007)
  Achtung! Vermittelt eine falsche Philosophie bei Anwendung der Tests!
- Bortz & Schuster (2010)

Motivation

Zweck der deskriptiven Statistik

- Mit unbewaffnetem Auge auf Daten zu blicken, ist meistens zwecklos.
- In Zahlen sehen Menschen nur schlecht Tendenzen und Zusammanhänge.
- Deskriptive Statistik
  - Zusammenfassen
  - Gruppieren
  - Visualisieren

Was will man wissen?

- Definition der Grundgesamtheit
- Stichprobengröße (n)
  - 200 Sätze aus dem Korpus
  - 1.000 Reaktionen (von 50 Probanden) im Experiment
  - Was sind die elementaren gemessenen Datenpunkte?
- Stichprobenmethode
  - Zufallsstichprobe | Nachweis der uniformen Zufälligkeit
  - Quotenstichprobe | Stratifzierung und Begründung

Skalenniveau

Messvariablen und Skalenniveaus

- dichotom/binär | Menge $\{A, B\}$ | zwei disjunkte Kategorien
  männlich, weiblich ; Präteritum, Perfekt
- nominal/kategorial | Menge $\{A, B, ..\}$ | disjunkte Kategorien
  Parteizugehörigkeit ; NP, AP, VP
- ordinal | Tupel $\langle A, B, ..\rangle$, nicht $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ | disjunkte Kategorien mit Rang
  Schulnoten ; 5- oder 7-Punkt-Skalen für Akzeptabilität
- Verhältnis | $+\mathbb{Q}_0$ | geordnete Werte mit Nullpunkt
  Temperatur in Kelvin ; Lesezeiten
- Intervall | $\mathbb{Q}$ | Wie Verhältnis, aber ohne Nullpunkt
  Temperatur in Celsius

- Zähldaten | Keine beobachtbaren Variablen, sondern
  Aggregation von dichtotomen, nominalen oder ordinalen Variablen

Intervalle vs. Verhältnisse

- Verhältnisskala | Größe von Menschen in cm
  - $200cm = 2 \times 100cm$ usw.
  - Keine Messung unter $0cm$
- Intervallskala | Dasselbe als Abweichung vom Mittel
  - $4cm = 2 \times 2cm$ usw.
  - $184cm \neq 2 \times 182cm$
  - Negative Messungen möglich

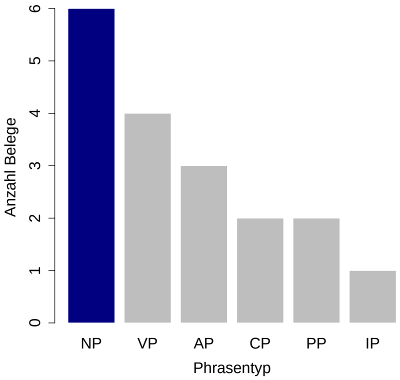
Relevanz der Skalenniveaus

- Bestimmung zulässiger mathematischer Operationen
- Deskriptive Statistiken je nach Skalenniveau
- Zulässigkeit von inferenzstatistischen Tests je nach Skalenniveau

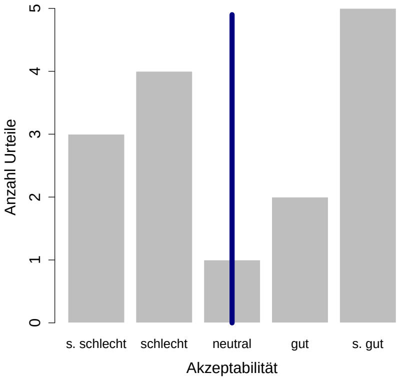
Zentraltendenz

Zentraltendenz I

Modus | Der häufigste Wert | Alle Skalenniveaus



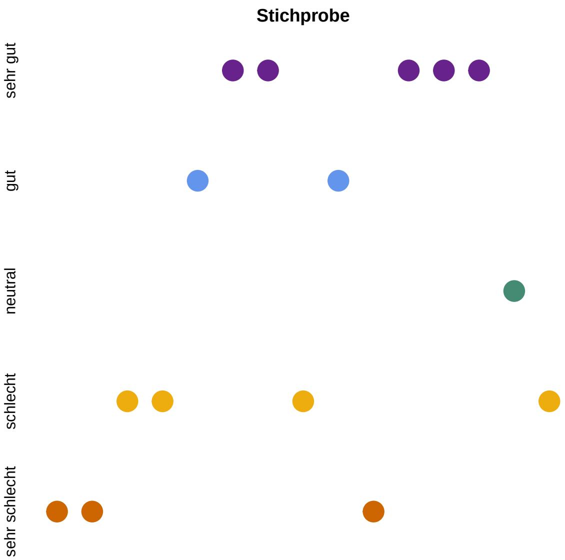
Median | Mitte der sortierten Stichprobe | ab Ordinalskala



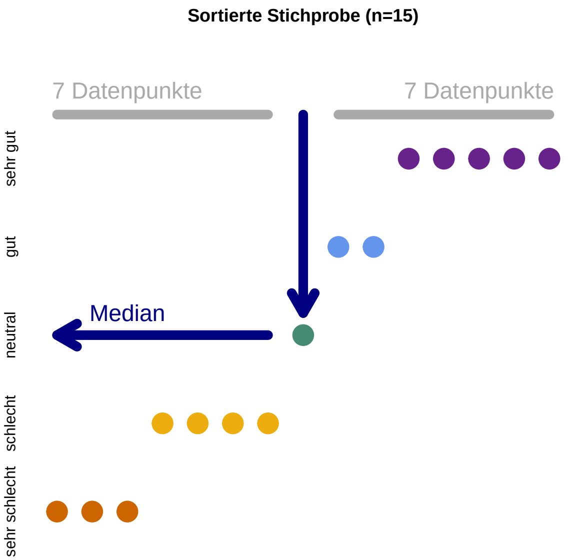
Numerische Messungen | Verschiedene Interpolationsmethoden

https://en.wikipedia.org/wiki/Quantile#Estimating_quantiles_from_a_sample

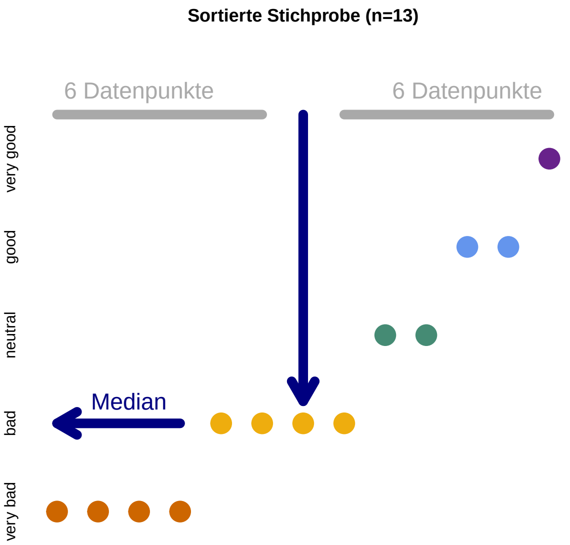
Median bestimmen | Stichprobe



Median bestimmen | Sortierte Stichprobe

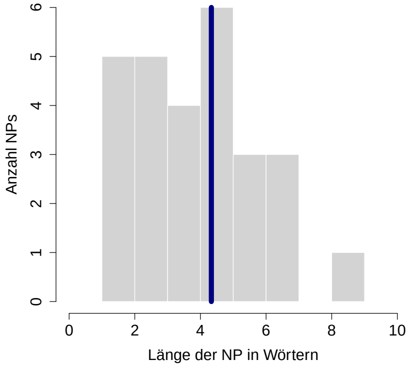


Median bestimmen | Verzerrtere sortierte Stichprobe



Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ | Summe aller Werte geteilt durch n | ab Intervallskala

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$



Empirische Verteilungen und Dispersion

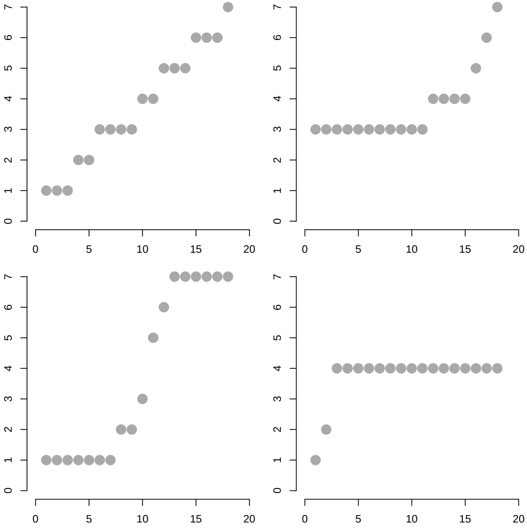
Warum sind Dispersionsmaße wichtig?

Dispersion | Streuung der Daten

- Zentraltendenz | Orientierung über Tendenzen der Stichprobe
- Ein Maß für Zentraltendenz für beliebig viele Verteilungsformen
- Arithmetisches Mittel | deskriptiv oft unbrauchbar ohne Betrachtung der Verteilung
- Median | auch nur bedingt besser

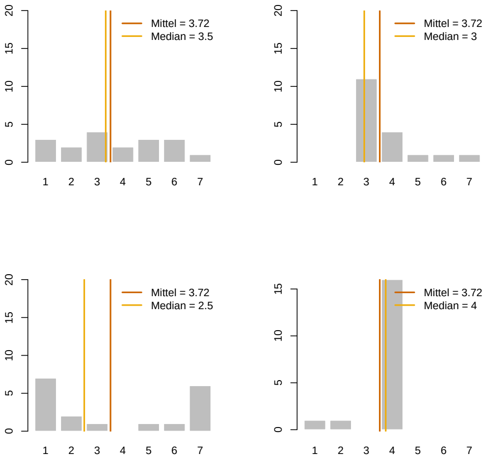
Vier sortierte Stichproben

Jeder Punkt entspricht einem Datenpunkt/einer Messung!



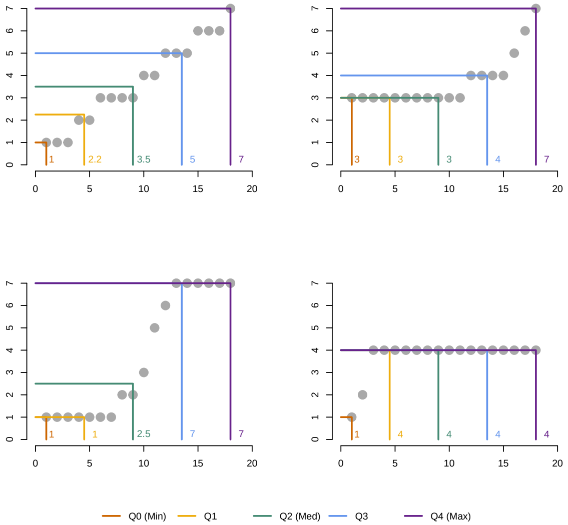
Histogramme | Vier Stichproben mit $\bar{x} = 3.72$ und $n = 18$

Zum Beispiel 18 Bewertungen eines Probanden auf einer 7-Punkt-Skala



Quartile

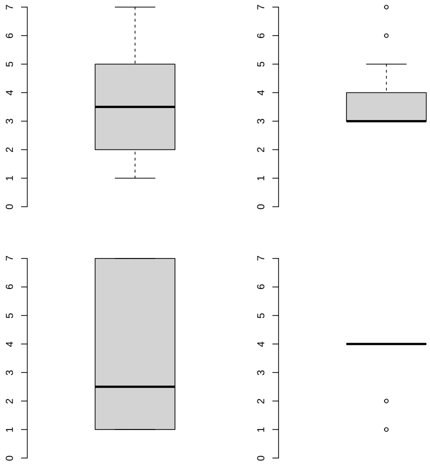
Quartile | Generalisierung des Medians (bei 25 %, 50 %, 75 %)



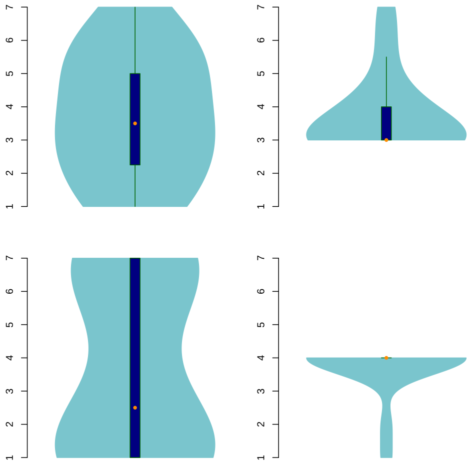
Interquartilbereich, Boxplots und Violinplots

- Interquartilbereich $IQR = Q_3 - Q_1$ | Die mittleren 50 %
- Boxplots
  - Median | Linie in der Mitte
  - Oberes und unteres Quartil | Boxen
  - 1,5-facher Interquartilabstand | gestrichelte Hebel
  - Ausreißer | Punkte
- Violinplots | Zusätzlich Plot der Verteilungsdichte (statt Box)

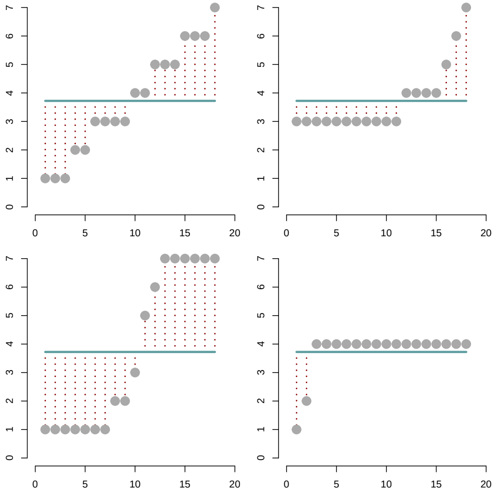
Boxplots | Die bessere Zusammenfassung



Violinplots | Die noch bessere Zusammenfassung



Die Distanzen der Messwerte zum Mittel sind unterschiedlich groß.



Varianz und Standardabweichung

Varianz s^2 | Quadrierte mittlere Abweichung vom Mittelwert

$$s^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

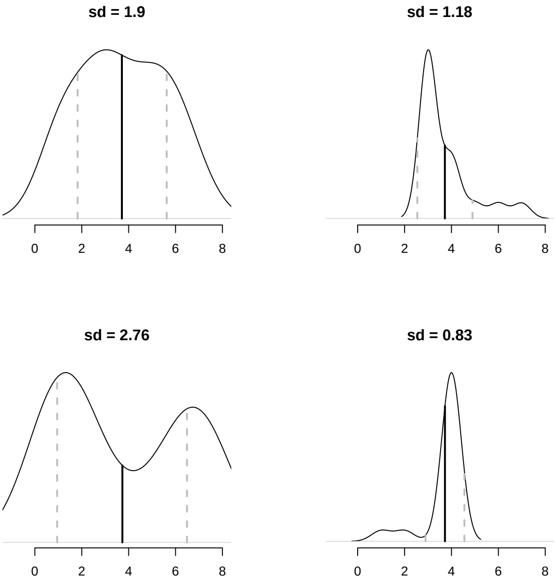
Standardabweichung s | Quadratwurzel der Varianz

$$s(x) = \sqrt{s^2(x)}$$

Summe der Quadrate | Zählerterm der Varianz

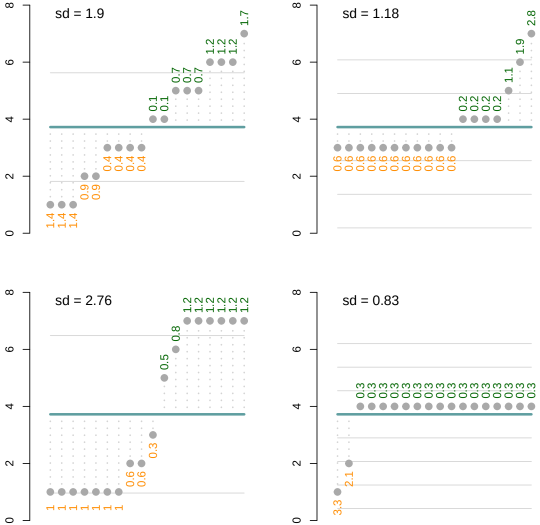
$$SQ(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Unterschiedliche Standardabweichungen



z-Wert

Für jeden Messpunkt x_i | $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s(x)}$



z-Wert | Rechenbeispiel

- Bsp.: x = [3.9, 4.3, 7.2, 8.5, 11.1, 12.1, 14.0, 20.7]
  - $\bar{x}$ =10.225
  - $s^2(x) = \frac{(3.9-10.255)^2+...+(20.7-10.225)^2}{8-1} = \frac{215.495}{7} = 30.785$
  - $s(x) = \sqrt{30.785} = 5.548$
  - $z = [\frac{3.9-10.225}{5.548}, ..., \frac{20.7-10.225}{5.548}] = [-1.140, -1.068, -0.545, -0.311, 0.158, 0.338, 0.680, 1.888]$

Bivariate Statistiken

Zähldaten von zwei Variablen

Kreuztabelle | Darstellung der Zähldaten zweier Variablen

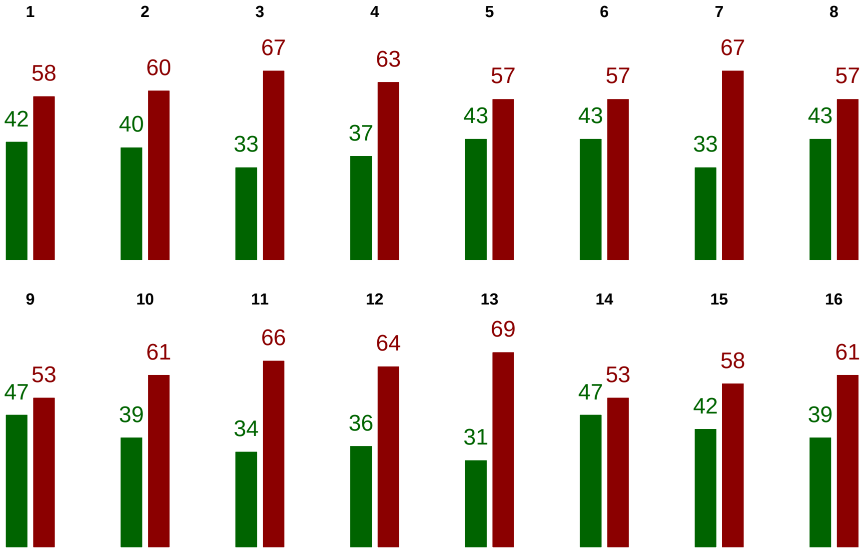
	Variable 1 | Wert 1	**Wert2**
Variable 2 | Wert 1	Anzahl x_{11}	Anzahl x_{12}
Wert 2	Anzahl x_{21}	Anzahl x_{22}

Standardfehler und Konfidenzintervalle

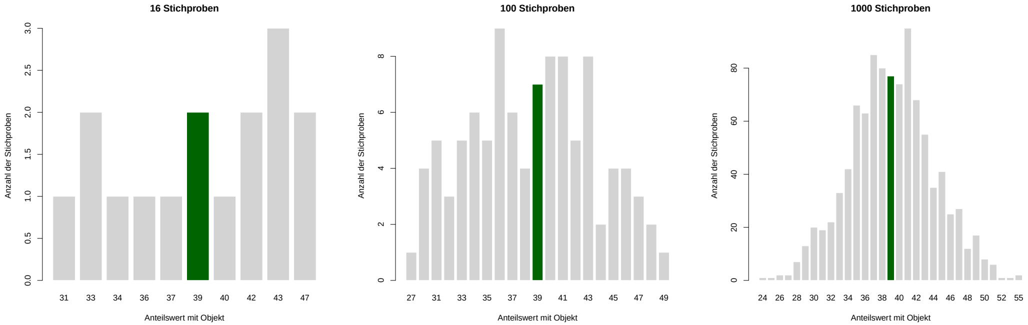
Anteilswerte und Stichproben

- Das Verb *essen* | Manchmal mit, manchmal ohne Akkusativ (direktes Objekt)
- Angenommenes wahres Verhältnis | Mit Objekt 39 %, ohne Objekt 61 %
- Viele Stichproben mit n=100 | Ergebnis nicht immer 39 zu 61
- 95%-Konfidenzintervall
  In welchem Bereich liegen 95% aller Anteilswerte bei n=100?

Sechzehn simulierte Stichprobenentnahmen (n=100)



Wiederholte Stichprobenentnahmen (n=100)



Standardfehler

- Die meisten q | Nah am wahren Wert Q
- Sehr wenige q | Weit von Q entfernt
- Bei unendlich vielen Messungen
  - Mittelwert der gemessenen Anteilswerte gleich Q
  - Gemessene Anteilswerte normalverteilt um Q
  - Standardabweichung der Messwerte um Q bekannt → Standardfehler
- Standardfehler | Standardabweichung der Messwerte
  - Bei gegebener Stichprobengröße n
  - Bei einem bekannten Populationsanteil Q

Standardfehler für Anteilswerte | Berechnung

- Für einen wahren Anteilswert Q
- Bei Stichprobengröße n

$$SF(Q,n) = \sqrt{\frac{Q \cdot (1-Q)}{n}}$$

Bsp. für $Q = 0.39$ und $n = 100$ | $SF(q) = \sqrt{\frac{0.39 \cdot (1-0.39)}{100}} = 0.0488$

Standardfehler | Interpretation

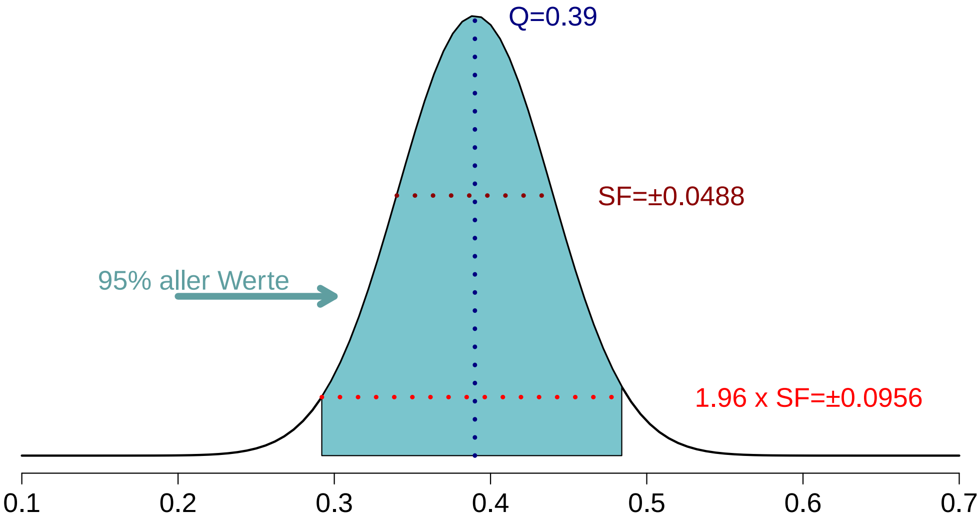
$$SF(Q, n) = \sqrt{\frac{Q \cdot (1-Q)}{n}}$$

$$\text{Bsp.: } SF(0.39, 100) = \sqrt{\frac{0.39 \cdot (1-0.39)}{100}} = 0.0488$$

- Für beliebig viele Stichproben
- Bei Stichprobengröße $n = 100$
- Aus einer Grundgesamtheit mit wahrem Anteilswert $Q = 0.39$
- Abweichung der gemessenen Anteile von $Q = 0.39$ mit einem $SF = 0.0488$

Normal-/Gaussverteilung | Parameter Mittelwert und Standardabweichung

→ Mathematisch exhaustiv bekannt, Flächen unter der Kurve usw. berechenbar



Verteilungsfunktion der Normalverteilung

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

x ist der Wert, für den die Funktion die Wahrscheinlichkeit angibt. Der graue Term skaliert die Verteilung lediglich, damit die Fläche unter der Kurve 1 ist. Der Kern der Funktion ist e^{-x^2}, weil $-\mu$ lediglich für die mögliche Verschiebung des Modus von 0 benötigt wird und σ die Spreizung der Verteilung modelliert (größere Standardabweichung bedeutet flachere Kurve). Für den Standardnormalfall kann $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ angesetzt werden.
μ und σ sind sogenannte Parameter der Funktion.

Falls Sie mehr wissen möchten:

`https://youtu.be/cy8r7WSuT1I`

Großartiges Video von Grant Sanderson (3blue1brown)

Konfidenzintervall | z-Werte

- Anteilswerte oder Mittelwerte aus Stichproben (wie erwähnt) normalverteilt
- Der z-Wert, zum Beispiel für $\alpha = 0.95$: $z(0.95)$ beantwortet:
  Wie viele Standardfehler definieren 95% der Fläche unter der Kurve?
- Achtung: Dieser z-Wert ist nicht ganz dasselbe wie der rein deskriptive z-Wert von Folie 25

- Quantilfunktion der Normalverteilung | In R mit `qnorm()` oder Tabelle
- Quantilfunktion | Wie viele Standardabweichungen trennen auf jeder Seite 2.5% ab?
- `qnorm(0.025, lower.tail=FALSE)` → $z(0.95) = 1.96$

- Standardfehler | Standardabweichung der Stichprobenwerte
- Konfidenzbreite | z-Wert multipliziert mit Standardfehler
- 95% der Werte | Intervall Anteilswert ± Konfidenzbreite

$$KI(Q,n,\alpha) = Q \pm z(\alpha) \cdot SF(Q,n)$$

Bsp.: $KI(0.39, 100, 0.95) = 0.39 \pm 1.96 \cdot 0.0488 = 0.39 \pm 0.096 = [0.29, 0.49]$

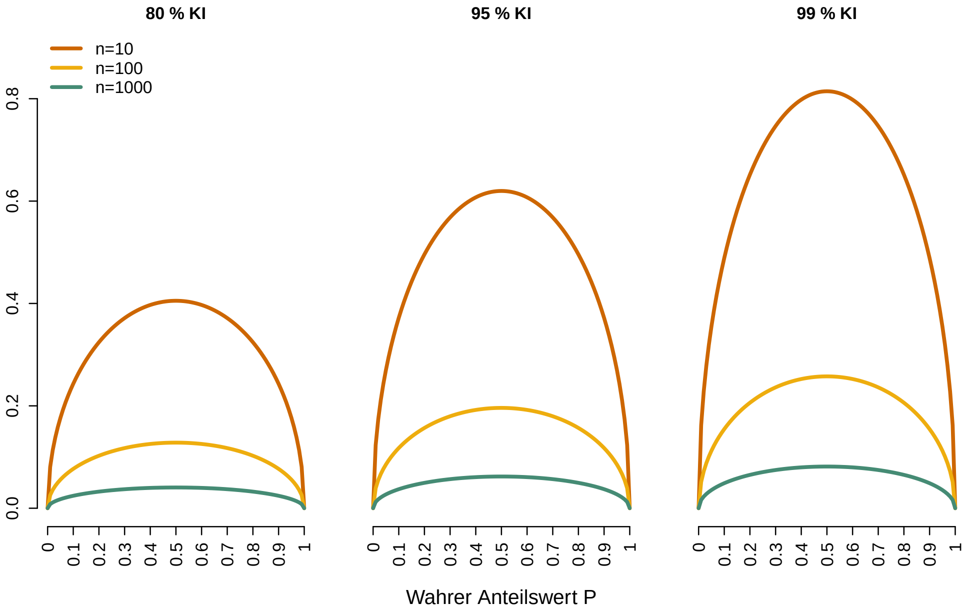
Interpretation

Konfidenzintervall im Beispiel | 0.29 bis 0.49

In 95% aller Stichproben mit $n = 100$ liegt der Messwert zwischen 0.29 und 0.49 bei einem wahren Anteil von 0.39.

- Praxis | Wahrer Anteil nicht bekannt, daher Schätzung aus Stichprobenanteil q
- Der gemessene Anteil q kann aber eine totale Fehlschätzung sein!
- Die Philosophie dahinter geht von wiederholten Messungen aus.
- Entweder liegt der gemessene Wert im Konfidenzintervall,
  oder ein seltenes Ereignis ist eingetreten.
- **Falsche Interpretation**:
  Wir sind zu 95% sicher, dass der wahre Wert zwischen 0.29 und 0.49 liegt.

Konfidenzintervall | Breite bei verschiedenen Q, n und α



Konfidenzintervall für Mittelwerte

Parallel zum KI für Anteilswerte: KI für Mittelwerte mit derselben Formel

Nur der Standardfehler wird anders berechnet:

$$SF(\sigma, n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$KI(\bar{x}, n, \alpha) = \bar{x} \pm z(\alpha) \cdot SF(\sigma, n)$$

Interpretation des KI (95%): Für einen beliebigen Mittelwert $\bar{x}$ und die wahre Standardabweichung der Population σ liegen im Grenzwert exakt 95% aller Stichproben der Größe n im 95%-KI.

Hier wird die wahre Standardabweichung σ ggf. aus der Standardabweichung $s(x)$ Stichprobe geschätzt.

Zur Interpretation des KIs

Schauen Sie sich möglichst mein (sehr altes) Video zur Interpretation von KIs an, auch wenn ich deutlich weniger im Kopf habe als Grant Sanderson.

`https://www.youtube.com/watch?v=TG8Z3RXL4E8X`

Kritische Werte für Normalverteilung

α	$z(\alpha)$	α	$z(\alpha)$
0.99	2.576	0.84	1.405
0.98	2.326	0.83	1.372
0.97	2.170	0.82	1.341
0.96	2.054	0.81	1.311
0.95	1.960	0.80	1.282
0.94	1.881	0.79	1.254
0.93	1.812	0.78	1.227
0.92	1.751	0.77	1.200
0.91	1.695	0.76	1.175
0.90	1.645	0.75	1.150
0.89	1.598		
0.88	1.555		
0.87	1.514		
0.86	1.476		
0.85	1.440		

Nächste Woche | Überblick

Einzelthemen

1. Inferenz
2. Deskriptive Statistik
3. Nichtparametrische Verfahren
4. z-Test und t-Test
5. ANOVA
6. Freiheitsgrade und Effektstärken
7. Power und Severity
8. Lineare Modelle
9. Generalisierte Lineare Modelle
10. Gemischte Modelle

Literatur I

Bortz, Jürgen & Christof Schuster. 2010. *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. 7. Aufl. Berlin: Springer.

Gravetter, Frederick J. & Larry B. Wallnau. 2007. *Statistics for the Behavioral Sciences*. 7. Aufl. Belmont: Thomson.

Autor

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

https://rolandschaefer.net
roland.schaefer@uni-jena.de

Lizenz