Statistik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Deutsche-Syntax`

Inhalt

Inferenz

Empirisch, objektiv, realistisch, exakt(?)

- Beobachtbare Phänomene
- Beobachtungen reproduzierbar
- Messbar = beobachtbar (Sinneswahrnehmung an sich irrelevant)

- Realismus | wirkliche Phänomene und ihre Mechanismen
- Keine postmoderne Realitäts- und Objektivitätsverweigerung

- Kontrolliertes Experiment

- Intrinsische Ungenauigkeiten der Messung (Wirkung plus Störeinflüsse)
- Potentiell inadäquate Messung des theoretischen Konstrukts

→ Vermeidung von Fehlschluss auf unechte Ursachen
→ Relevante Ursachen

→ Insgesamt Stärkung der Validität

- Gegenstand: interne (mentale) Grammatik (I-Grammatik)
  universeller und individueller Teil
- I-Grammatik bei jedem Sprecher (leicht) verschieden
- I-Grammatik erlaubt immer binäre Grammatikalitätsentscheidung

→ Linguisten können eigene I-Grammatik untersuchen (Introspektion)!

Das Ergebnis ist die aktuelle Krise der Linguistik.

(Logischer) Positivismus

Formale Ableitung von Wissen (= Theorien) aus Beobachtbarem und irgendeiner Logik. Induktion. Keine Metaphysik. Keine Kreativität erwünscht. (Carnap 1928, ...)

Aber suchen wir wirklich nur nach Mustern, z. B. in Korpusdaten?

- Was ist der zugrundeliegende Mechanismus?
- Wie kommen wir zu erklärenden Theorien von Mustern in Daten?
- Datenaufbereitung (z. B. im Korpus) kann dann nicht theoriegeleitet sein.

- Die ART folgt auch nicht einfach so aus Daten!

Rationalistischer Probativismus

Theorien werden aufgestellt von Menschen, die die Welt beobachten. Theorien werden getestet an Daten, aber nicht logisch aus Daten abgeleitet. Wissenschaft lernt aus Fehlern. (Popper 1962, Mayo 1996, …)

Unter dieser Philosophie werden plötzlich Dinge wichtig …

- Ist eine Stichprobe repräsentativ für das, was man zeigen will?
- Welche Methode der statistischen Analyse wird verwendet?
- Für eine Korpusstudie muss die Datenaufbereitung damit theoriegeleitet sein!
- Liefert die Studie *a serious Argument from Error*?

  There is evidence an error is absent to the extent that a procedure with a very high capability of signalling the error, if and only if it is present, nevertheless detects no error. (Mayo 2018: 16)

Hypothesen

Die konkrete Hypothesen, die in einem Experiment getestet werden, sind nie die Primärhypothesen der Theorie.

- Abgeleitete Partikularhypothesen über konkrete Erwartungen im Experiment
- Einfluss zahlreicher Auxiliarhypothesen, z. B. über Messprozeduren

  Duhem (1914), Quine (1951), Laudan (1990)

- „Interessante" Hypothesen
  - Formulierung relevanter Kausationsbedingung (wenn, dann)
  - Universelle Gültigkeit | ein Sprecher vs. alle Sprecher
  - Also z. B. uninteressant | *Welchen Kasus nimmt wegen?*

Hypothesenprüfung | Probativismus (Falsifikationismus)

Kann die Hypothese weiter angenommen werden,
oder liefert das Experiment starke Evidenz gegen sie?

- Probleme bei Prüfung
  - Falsch abgeleitete Partikularhypothese
  - Falsche Sekundärhypothesen
  - Störeinflüsse, intrinsische Messungenauigkeit
  - Mangelhafte Operationalisierung
  - Zu wenige Daten (oder zu viele Daten?)

Grundgesamtheit

- Von Interesse | allgemeine Gesetzmäßigkeiten
- Also Untersuchungsgegenstand: alle x (Sprecher, Sätze, ...)
- Untersuchbar | kleine Menge von x

Grundgesamtheit | alle x

Datengenerierender Prozess (DGP) | Prozess, der alle x hervorbringt

Stichprobe | eine kleine Menge x, aus der auf Grundgesamtheit bzw. DGP geschlossen werden soll

Stichprobe

Uniform zufällige Stichprobe

Jedes Element der Grundgesamtheit hat die gleiche Chance beim Ziehen.

Stratifizierte Stichprobe

Die Stichprobe ist so zusammengesetzt, dass wichtige Eigenschaften proportional repräsentiert sind.

- Problem bei Letzterem: haufenweise Auxiliarhypothesen

Operationalisierung und Auxiliarhypothesen

- Operationalisierung | präzise Formulierung der Messmethode für ein theoretisches Konstrukt

- Bsp. Konstrukt „Satzlänge“: Wortanzahl? Phonemanzahl? Phrasenanzahl?
- Bsp. Konstrukt „Satztopik“: Oha!?! (Cook & Bildhauer 2013)

- Alle genannten Beispiele abhängig von Auxiliarhypothesen bzw. anderen theoretischen Konstrukten (Wort, Phonem, Phrase, …)

Variablen I

- Uninteressanter Typ Fragestellung | „Wieviel Prozent X haben Eigenschaft A?“
- Fehlen jeglicher Aussagen über kausale Zusammenhänge
- Bsp. | Wie oft wird *wegen* mit Dat bzw. Gen verwendet?

- Besser | „Wie bedingt Eigenschaft B die Wahrscheinlichkeit von A bei X?“
- Bsp. | Per Hypothese nehmen denominale Präpositionen eher den Gen als den Dat.

Konzeptionell:

	denominale P	andere P
Dat	x_1	x_2
Gen	x_3	x_4

Variablen II

Operationalisierte und gemessene Eigenschaften sind Variablen.

- Im Experiment:
  - Kontrolliere für Theorie irrelevante Variablen (Störvariablen) bzw. verlass dich auf deren Zufallsverteilung (Fisher, s. u.).
  - Variiere „Ursachen-Variablen“ (unabhängige Variablen).
  - Beobachte „Wirkung-Variablen“ (abhängige Variablen).

Experiment und Quasi-Experiment

- Problem in Astronomie, Korpuslinguistik usw. | keine Experimente möglich
- Unabhängige Variablen nicht variierbar
- Daten liegen bereits vor bzw. fallen vom Himmel
- Auswahl von Datensätzen, so dass von den unabhängigen Variablen die zur Theorieprüfung nötigen Permutationen im Datensatz vorkommen
- Dabei Zusatzproblem bei Korpuslinguistik: Korpus meist nicht das eigene, wenig Informationen über mögliche Verzerrungen

- Was ist die Grundgesamtheit bzw. der DGP?

Statistische Validität

Gefahren für statistische Schlussverfahren

- Falsches Testverfahren für die gegebene Situation
- Mathematische Vorbedingungen für das Testverfahren nicht
- Zu viele Partikulartests einer übergeordneten Hypothese aus denselben Daten
- Zu kleine Stichprobe
- Zu große Stichprobe
- Zu große Variation in der Grundgesamtheit

Interne Validität

- Irrtum beim Herstellen des Kausalzusammenhangs
- Fiktives Bsp.:
  - Korpora | DWDS-Kernkorpus enthält Texte 1900–2000, DECOW12 Texte nach 2000
  - Hypothese | Im DECOW12 kommt öfter das Pronomen *son* vor als im DWDS Kernkorpus, weil es erst nach 2000 zum eigenständigen Pronomen wurde.
  - Die Hypothese wird bestätigt anhand von Stichproben aus den beiden Korpora.
  - Die wirkliche Ursache sind aber Registerunterschiede.

Validität des Konstrukts

- Korrektheit des theoretischen Konstrukts

- Eigentlich aus der Psychologie
- Aber riesiges Problem in der Linguistik

- Echtes Bsp.
  - Beobachtung | Das Deutsche bewahrt genus-typische Pluralflexion am Substantiv.
  - Konstrukt | Nominalklammer/Klammerprinzip (NP-Kongruenzklammer Art – Subst) (Ronneberger-Sibold 2010)
  - Hypothese (post-hoc zur Beobachtung) | Flexionserhalt stärkt Klammerprinzip
  - Das Konstrukt ist hochgradig beliebig und unterdefiniert, damit nicht testbar.
  - Abhilfe: nur Konstrukte/Hypothesen, die starke Vorhersagen generieren

Externe Validität

- Generalisierbarkeit der Ergebnisse (über Raum, Zeit usw.)
- Problem | zu große Homogenität der Stichprobe
  (was für statistische Validität wiederum gut ist)
- Bezug auf Korpora:
  - Zu spezifische Stratifikation (DeReKo)
  - Verzerrte Stichprobe (Webkorpora)

Ronald A. Fisher (1890–1962)

- Statistik als Teil der rationalen wissenschaftlichen Argumentation, der Interpretation von Experimenten
- Möglichst kein Mathematik-Jargon, eher intuitiv zugängliche mathematische Konzepte
- Eingeschränkte statistische Inferenz als theoriegeleitete Dateninterpretation
- Kontrolle aller unabhängigen Variablen
- Alle anderen (Stör-)Variablen konzeptuell zufallsgebunden

The Tea-Tasting Lady

Muriel Bristow behauptet, sie könne am Geschmack einer Tasse Tee erkennen, ob die Milch oder der Tee zuerst eingeschenkt wurde. Fisher führt ein Experiment durch (acht Tassen, vier mit dem Tee zuerst) und fragt, wie wir entscheiden können, ob das Ergebnis davon zeugt, dass sie diese Fähigkeit wirklich hat.

- Liegt das Ergebnis deutlich über dem per Zufall erwartbaren Niveau?
- Idee vor Fisher | alle Störvariablen kontrollieren und gleich machen, dann ist induktive Inferenz möglich
- Fisher | Das ist prinzipiell unmöglich, umständlich, teuer und unnötig!
- Wenn alle irrelevanten Störvariablen zufallsverteilt sind, dann gilt:
  - Variiere die relevante unabhängige Variable.
  - Vergleiche das Ergebnis mit zufällig erwartbaren Ergebnissen.

Wahrscheinlichkeit

Bayesische Wahrscheinlichkeit (*inverse probability*)

- Für wie wahrscheinlich hält Individuum I das Ereignis E?
- Subjektiv, berücksichtigt vorherige Überzeugung
- Aktualisierung von Überzeugungen
- Basiert auf Bayes Rule (Tomas Bayes 1763)
- Ereignisraum (s. u.) irrelevant!

Frequentistische Wahrscheinlichkeit

- Wie viele mögliche Ereignisse e_i aus E treten ein?
- Zu jedem Experiment gehört ein Ereignisraum (s. u.)!
- Daher objektiv, unabhängig von Überzeugungen
- Wenn ein Ereignis e_i eingetreten ist, wird seine Wahrscheinlichkeit uninteressant.
- Geeignet für rationalistisch-probativistische Wissenschaftsphilosophie

Für ein Experiment gilt:

- Wir beobachten n Messungen (Stichprobe),
  jede Messung wird aus einer definierten Menge von möglichen Messungen.
  - Bsp. | 10 Mal einen Würfel werfen {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
  - Bsp. | Je 10 Akzeptabilitätsurteile unter 2 Bedingungen von 100 Probanden {Ja, Nein}.
- Wir bekommen ein konkretes Ergebnis.
  - Bsp. | 8 von 10 Würfen mehr als drei Augen.
  - Bsp. | „Mehr“ Ja-Antworten unter Bedingung A (schon deutlich komplexeres Design).
- Wir müssen berücksichtigen, wie viele Ergebnisse (und welche) es insgesamt hätte geben können, um zu bewerten, wie unwahrscheinlich das Ergebnis war.
- Ereignisraum (sample space) | Menge der möglichen Ausgänge des Experiments

Warum „war“?

Wir müssen berücksichtigen, wie viele Ergebnisse (und welche) es insgesamt hätte geben können, um zu bewerten, wie unwahrscheinlich das Ergebnis war.

- Jedes eingetretene Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1.
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass Helmut Kohl 1998 abgewählt wurde, ist 1.
  - Die Wahrscheinlichkeit, dass wir 8 Würfe mit mehr als drei Augen hatten, ist 1.
- Nach dem Experiment | P(konkreter Ausgang des Experiments wurde erzielt) = 1
- Vor dem Experiment | P(konkreter Ausgang des Experiments wird erzielt werden) < 1

Die übelsten Fehler in der Bewertung statistischer Ergebnisse rühren daher, dass Menschen diese Sachverhalte vergessen.

Zurück zur Tea-Tasting Lady

Design des Experiments | Muriel Bristow probiert acht Tassen,
(vier mit Milch zuerst, vier mit Tee zuerst) und wählt die vier mit Tee zuerst aus.

- Mit wie vielen richtigen Treffern wären Sie zufrieden?
- Es muss die frequentistische Wahrscheinlichkeit errechnet werden, eine, zwei, drei oder vier Tassen auch per Zufall richtig zu raten.
- Dann können wir beurteilen, ob das Ergebnis *deutlich über dem erwartbaren Niveau* liegt.

Ausgang 1 | Alle vier Tassen korrekt

Allgemein:

$$P(\text{konkreter Ausgang}) = \frac{\text{Anzahl richtiger Zuweisungen}}{\text{Anzahl aller potentiellen Zuweisungen}} \tag{1}$$

Für diesen Ausgang:

$$P(\text{vier Tassen korrekt}) = \frac{1}{\text{Anzahl aller potentiellen Zuweisungen}} \tag{2}$$

Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Wir wählen vier *Tee zuerst*-Tassen (TZ) aus acht Tassen aus:

- erste TZ-Tasse: eine von 8 (bleiben 7)
- zweite TZ-Tasse: eine von 7 (bleiben 6)
- dritte TZ-Tasse: eine von 6 (bleiben 5)
- vierte TZ-Tasse: eine von 5 (bleiben 4)

→ STOPP | alle anderen 4 Tassen automatisch MZ

Also naiv gedacht | $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

Die Reihenfolge

1680 ist zu hoch, denn je nachdem, welche Tasse aus den verbleibenden wir wählen, ergeben sich andere Permutationen (Reihenfolgen) desselben Ergebnisses.

- Bsp. | Auswahl von Tasse 7, 3, 6, 1 identisch zu 3, 1, 6, 7 usw.
- Es gibt von jeder möglichen Auswahl gleich viele Permutationen.
- Und zwar die Anzahl der Möglichkeiten, vier Tassen zu ordnen: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$$\text{Anzahl aller potentiellen Zuweisungen} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1680}{24} = 70 \tag{3}$$

Wenn sie also genau richtig liegt …

Wahrscheinlichkeit, per Zufall genau richtig zu liegen:

$$P(\text{vier Tassen korrekt}) = \frac{1}{70} = 0.014 \tag{4}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Für die Generalisierung der Berechnung

- Eigentlich haben wir es mit Binomialkoeffizienten zu tun.
- „Lotto-Kombinationen“ | *k* aus *n*
  ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{5}$$

Berechnung mit dem Binomialkoeffizienten

- Die drei richtigen aus vier TZ| $\binom{4}{3}$
- Die eine falsche aus vier TZ | $\binom{4}{1}$

$$P(drei\ richtig\ per\ Zufall) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1}}{70} = \frac{16}{70} = 0.229 \tag{6}$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Darstellung als Kreuztabelle

Ausgang 1

		Realität	
		Tee zuerst	**Milch zuerst**
Lady	**Tee zuerst**	4	0
	Milch zuerst	0	4

Ausgang 2

		Realität	
		Tee zuerst	**Milch zuerst**
Lady	**Tee zuerst**	3	1
	Milch zuerst	1	3

Stichprobengröße und Effektstärke

- Unbefriedigendes Ergebnis bei 3 von 4 richtigen Tassen
- Sehr kleine Stichprobe | nur perfektes Ergebnis zufriedenstellend
- Effektstärke | Vielleicht kann MB ca. 75 % aller Tassen richtig erkennen.

Bei größerer Stichprobe | Was ist mit 30 von 40 richtigen Tassen, also insgesamt 80 Tassen?

Das wäre die gleiche Effektstärke, aber eine größere Stichprobe.

Letzte Warnung

Was zeigt man mit so einem Experiment? Und was nicht?

- Der Ausgang war ziemlich unwahrscheinlich,
  bevor das Experiment durchgeführt wurde.
- Daher gehen wir bis auf Weiteres davon aus, dass ein Effekt vorliegt …
- … oder zufällig ein seltenes Ereignis eingetreten ist!!!

- Wenn Sie mit den Geburtsdaten Ihrer Familie im Lotto gewinnen,
  ist ein seltenes Ereignis eingetreten, Sie haben aber nicht gezeigt,
  dass Ihre Geburtsdaten die Lottokugeln beeinflussen!

- Ein solches Ergebnis beweist also nichts!
- Die Logik basiert auf der Annahme einer wiederholten Testung.

→ Wenn wir das Experiment sehr oft machen, und es gibt keinen Effekt,
dann nähert sich die Verteilung der Ergebnisse der Zufallsverteilung an.

Deskriptive Statistik

Übersicht

- Deskriptive Statistik als Aggregation von Daten
- Verteilungen in Stichproben und Grundgesamtheiten:
  - Zentralmaße
  - Streuung (Varianz)
- Theoretische vs. empirische Verteilungen
- Konfidenzintervalle | Genauigkeiten von Schätzungen?

Literatur

- Google, Stackoverflow usw.
- Gravetter & Wallnau (2007)
  Achtung! Vermittelt eine falsche Philosophie bei Anwendung der Tests!
- Bortz & Schuster (2010)

Zweck der deskriptiven Statistik

- Mit unbewaffnetem Auge auf Daten zu blicken, ist meistens zwecklos.
- In Zahlen sehen Menschen nur schlecht Tendenzen und Zusammanhänge.
- Deskriptive Statistik
  - Zusammenfassen
  - Gruppieren
  - Visualisieren

Was will man wissen?

- Definition der Grundgesamtheit
- Stichprobengröße (n)
  - 200 Sätze aus dem Korpus
  - 1.000 Reaktionen (von 50 Probanden) im Experiment
  - Was sind die elementaren gemessenen Datenpunkte?
- Stichprobenmethode
  - Zufallsstichprobe | Nachweis der uniformen Zufälligkeit
  - Quotenstichprobe | Stratifzierung und Begründung

Messvariablen und Skalenniveaus

- dichotom/binär | Menge $\{A, B\}$ | zwei disjunkte Kategorien
  männlich, weiblich ; Präteritum, Perfekt
- nominal/kategorial | Menge $\{A, B, ..\}$ | disjunkte Kategorien
  Parteizugehörigkeit ; NP, AP, VP
- ordinal | Tupel $\langle A, B, ..\rangle$, nicht $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ | disjunkte Kategorien mit Rang
  Schulnoten ; 5- oder 7-Punkt-Skalen für Akzeptabilität
- Verhältnis | $+\mathbb{Q}_0$ | geordnete Werte mit Nullpunkt
  Temperatur in Kelvin ; Lesezeiten
- Intervall | $\mathbb{Q}$ | Wie Verhältnis, aber ohne Nullpunkt
  Temperatur in Celsius

- Zähldaten | Keine beobachtbaren Variablen, sondern
  Aggregation von dichtotomen, nominalen oder ordinalen Variablen

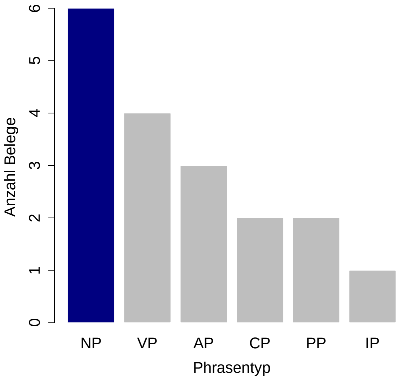
Intervalle vs. Verhältnisse

- Verhältnisskala | Größe von Menschen in cm
  - $200cm = 2 \times 100cm$ usw.
  - Keine Messung unter $0cm$
- Intervallskala | Dasselbe als Abweichung vom Mittel
  - $4cm = 2 \times 2cm$ usw.
  - $184cm \neq 2 \times 182cm$
  - Negative Messungen möglich

Relevanz der Skalenniveaus

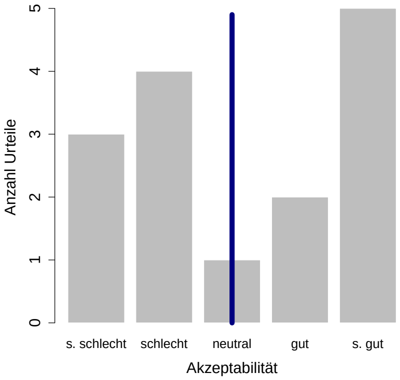
- Bestimmung zulässiger mathematischer Operationen
- Deskriptive Statistiken je nach Skalenniveau
- Zulässigkeit von inferenzstatistischen Tests je nach Skalenniveau

Modus | Der häufigste Wert | Alle Skalenniveaus



Zentraltendenz II

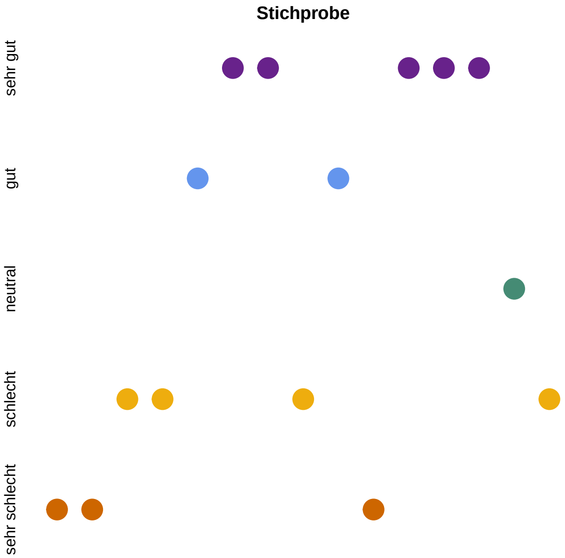
Median | Mitte der sortierten Stichprobe | ab Ordinalskala



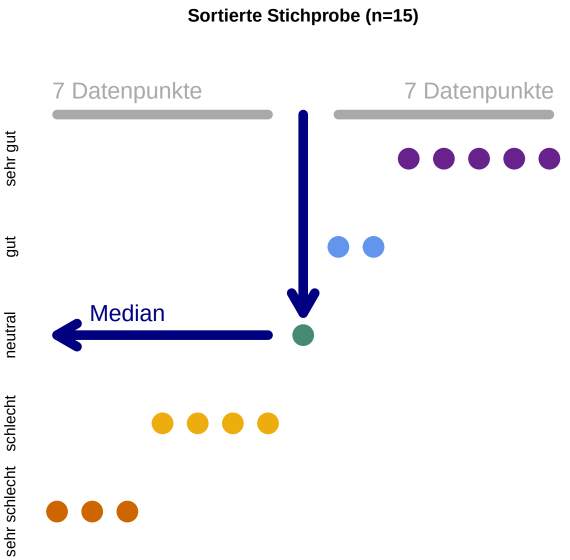
Numerische Messungen | Verschiedene Interpolationsmethoden

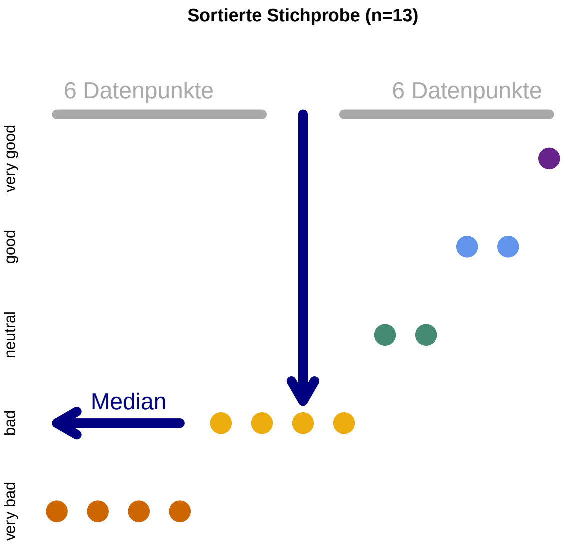
https://en.wikipedia.org/wiki/Quantile#Estimating_quantiles_from_a_sample

Median bestimmen | Stichprobe



Median bestimmen | Sortierte Stichprobe

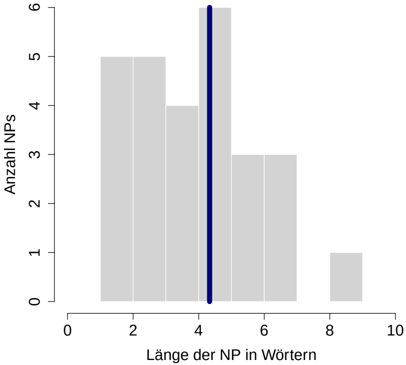



Sortierte Stichprobe (n=13)
6 Datenpunkte
6 Datenpunkte
Median
very good
good
neutral
bad
very bad

Zentraltendenz III

Arithmetisches Mittel $\bar{x}$ | Summe aller Werte geteilt durch n | ab Intervallskala

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$



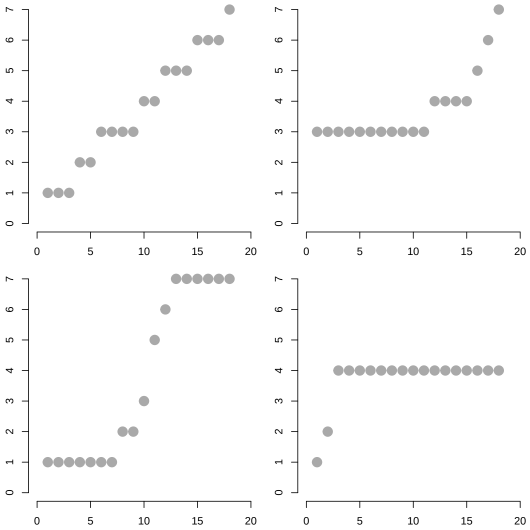
Warum sind Dispersionsmaße wichtig?

Dispersion | Streuung der Daten

- Zentraltendenz | Orientierung über Tendenzen der Stichprobe
- Ein Maß für Zentraltendenz für beliebig viele Verteilungsformen
- Arithmetisches Mittel | deskriptiv oft unbrauchbar ohne Betrachtung der Verteilung
- Median | auch nur bedingt besser

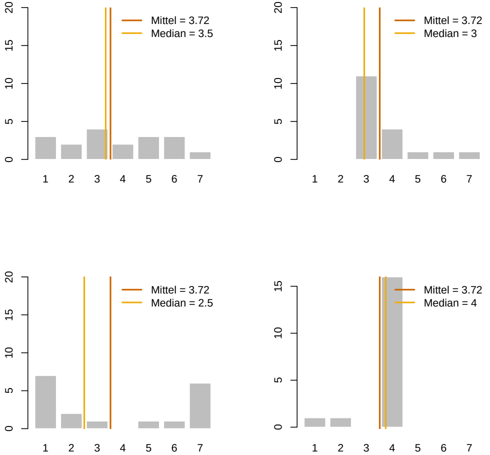
Vier sortierte Stichproben

Jeder Punkt entspricht einem Datenpunkt/einer Messung!

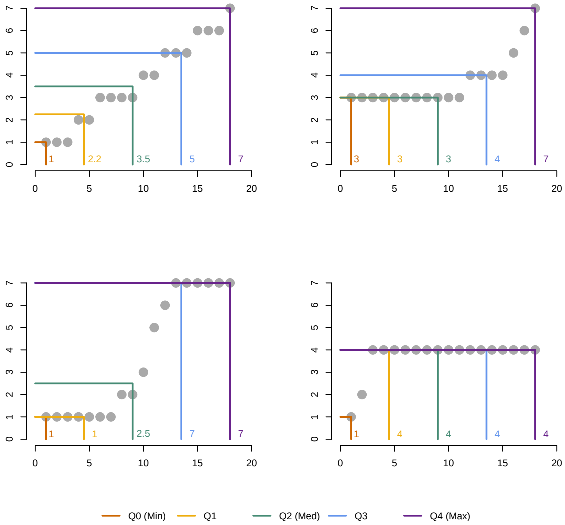


Histogramme | Vier Stichproben mit $\bar{x} = 3.72$ und $n = 18$

Zum Beispiel 18 Bewertungen eines Probanden auf einer 7-Punkt-Skala

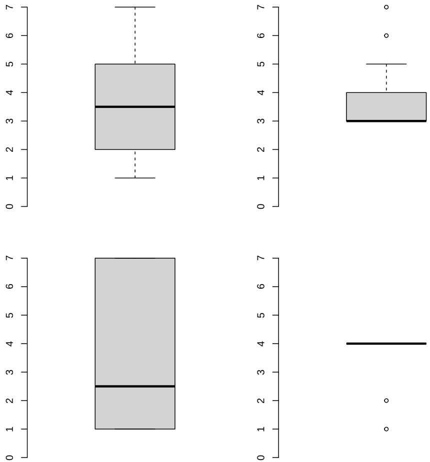


Quartile | Generalisierung des Medians (bei 25 %, 50 %, 75 %)

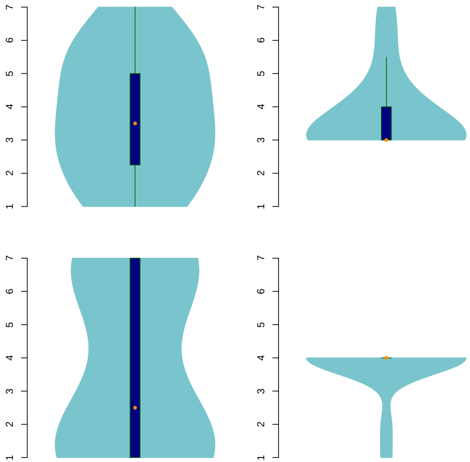


Interquartilbereich, Boxplots und Violinplots

- Interquartilbereich $IQR = Q_3 - Q_1$ | Die mittleren 50 %
- Boxplots
  - Median | Linie in der Mitte
  - Oberes und unteres Quartil | Boxen
  - 1,5-facher Interquartilabstand | gestrichelte Hebel
  - Ausreißer | Punkte
- Violinplots | Zusätzlich Plot der Verteilungsdichte (statt Box)

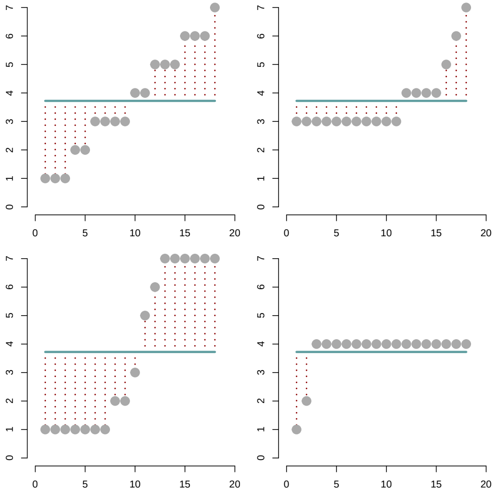

0
1
2
3
4
5
6
7

Violinplots | Die noch bessere Zusammenfassung



Was bestimmt die Varianz?

Die Distanzen der Messwerte zum Mittel sind unterschiedlich groß.



Varianz und Standardabweichung

Varianz s^2 | Quadrierte mittlere Abweichung vom Mittelwert

$$s^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

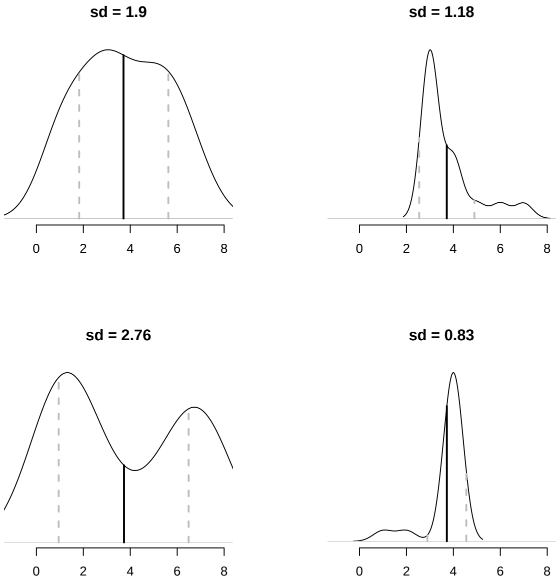
Standardabweichung s | Quadratwurzel der Varianz

$$s(x) = \sqrt{s^2(x)}$$

Summe der Quadrate | Zählerterm der Varianz

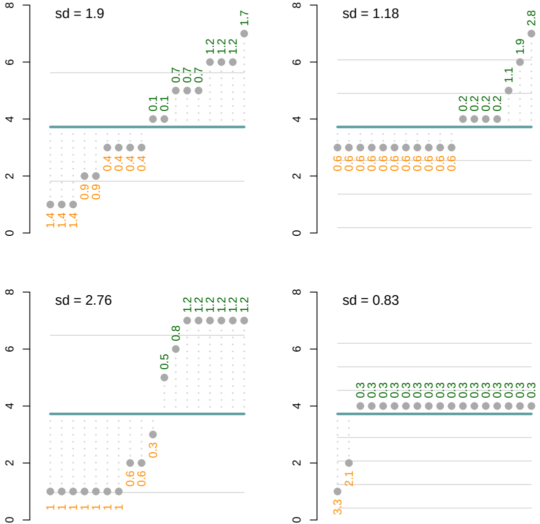
$$SQ(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Unterschiedliche Standardabweichungen



z-Wert

Für jeden Messpunkt x_i | $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s(x)}$



z-Wert | Rechenbeispiel

- Bsp.: x = [3.9, 4.3, 7.2, 8.5, 11.1, 12.1, 14.0, 20.7]
  - $\bar{x}$ =10.225
  - $s^2(x) = \frac{(3.9-10.255)^2+...+(20.7-10.225)^2}{8-1} = \frac{215.495}{7} = 30.785$
  - $s(x) = \sqrt{30.785} = 5.548$
  - $z = [\frac{3.9-10.225}{5.548}, ..., \frac{20.7-10.225}{5.548}] = [-1.140, -1.068, -0.545, -0.311, 0.158, 0.338, 0.680, 1.888]$

Zähldaten von zwei Variablen

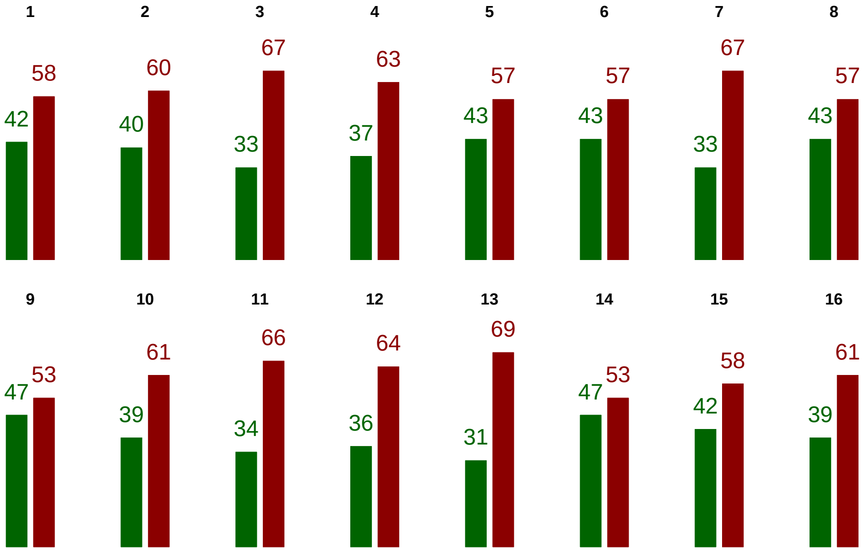
Kreuztabelle | Darstellung der Zähldaten zweier Variablen

	Variable 1 | Wert 1	**Wert2**
Variable 2 | Wert 1	Anzahl x_{11}	Anzahl x_{12}
Wert 2	Anzahl x_{21}	Anzahl x_{22}

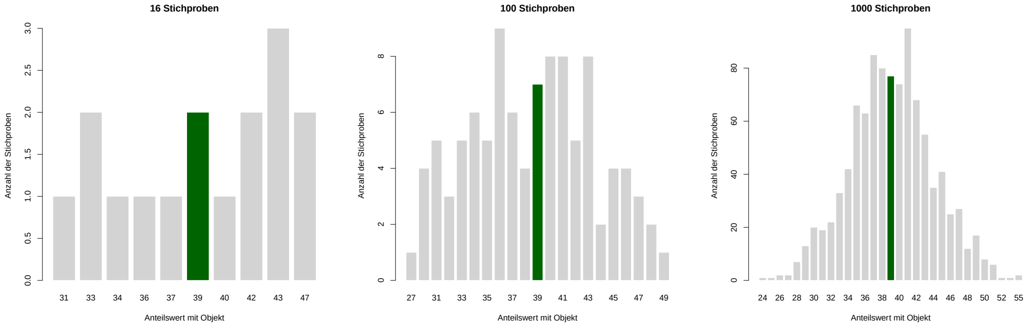
Anteilswerte und Stichproben

- Das Verb *essen* | Manchmal mit, manchmal ohne Akkusativ (direktes Objekt)
- Angenommenes wahres Verhältnis | Mit Objekt 39 %, ohne Objekt 61 %
- Viele Stichproben mit n=100 | Ergebnis nicht immer 39 zu 61
- 95%-Konfidenzintervall | In welchem Bereich liegen 95% aller Messwerte bei n=100?
- Güte von Stichproben einer bestimmten Größe angesichts gegebener Proportionen

Sechzehn simulierte Stichprobenentnahmen (n=100)



Wiederholte Stichprobenentnahmen (n=100)



Standardfehler

- Die meisten p | Nah am wahren Wert P
- Sehr wenige p | Weit von P entfernt
- Bei unendlich vielen Messungen
  - Mittelwert der gemessenen Anteilswerte gleich P
  - Gemessene Anteilswerte normalverteilt um P
  - Standardabweichung der Messwerte um P bekannt → Standardfehler
- Standarfehler | Standardabweichung der Messwerte
  - Bei gegebener Stichprobengröße n
  - Bei einem bekannten Populationsanteil P

Standardfehler für Anteilswerte | Berechnung

- Für einen wahren Anteilswert P
- Bei Stichprobengröße n

$$SF(P,n) = \sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}$$

Bsp. für $P = 0.39$ und $n = 100$ | $SF(p) = \sqrt{\frac{0.39 \cdot (1-0.39)}{100}} = 0.0488$

Standardfehler | Interpretation

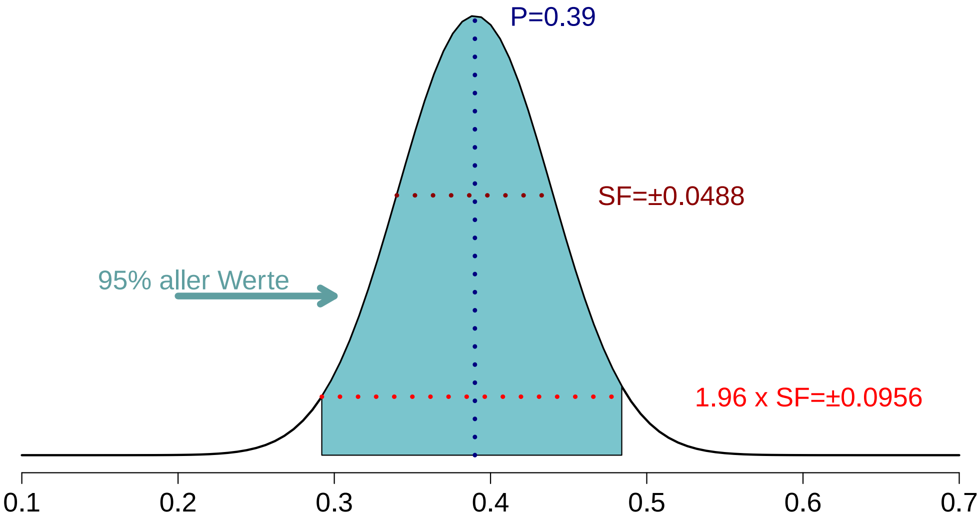
$$SF(P, n) = \sqrt{\frac{P \cdot (1 - P)}{n}}$$

$$\text{Bsp.: } SF(0.39, 100) = \sqrt{\frac{0.39 \cdot (1 - 0.39)}{100}} = 0.0488$$

- Für beliebig viele Stichproben
- Bei Stichprobengröße $n = 100$
- Aus einer Grundgesamtheit mit wahrem Anteilswert $P = 0.39$
- Abweichung der gemessenen Anteile von $P = 0.39$ mit einem $SF = 0.0488$

Normal-/Gaussverteilung | Parameter Mittelwert und Standardabweichung

→ Mathematisch exhaustiv bekannt, Flächen unter der Kurve usw. berechenbar



- Stichproben normalverteilt
- z-Wert | Wie viele Standardfehler definieren 95% der Fläche unter der Kurve?

- Quantilfunktion der Normalverteilung | In R mit `qnorm()` oder Tabelle
- Quantilfunktion | Wie viele Standardabweichungen trennen auf jeder Seite 2.5% ab?
- `qnorm(0.025, lower.tail=FALSE)` → $z(0.95) = 1.96$

Konfidenzintervall | Standardfehler um wahren Anteilswert

- Standardfehler | Standardabweichung der Stichprobenwerte
- Konfidenzbreite | z-Wert multipliziert mit Standardfehler
- 95% der Werte | Intervall Wahrer Anteilswert ± Konfidenzbreite

$$KI(P, n, s) = P \pm z(s) \cdot SF(P, n)$$

Bsp.: $KI(0.39, 100, 0.95) = 0.39 \pm 1.96 \cdot 0.0488 = 0.39 \pm 0.096 = [0.29, 0.49]$

Interpretation

Konfidenzintervall im Beispiel | 0.29 bis 0.49

In 95% aller Stichproben mit $n = 100$ liegt der Messwert
zwischen 0.29 und 0.49 bei einem wahren Anteil von 0.39.

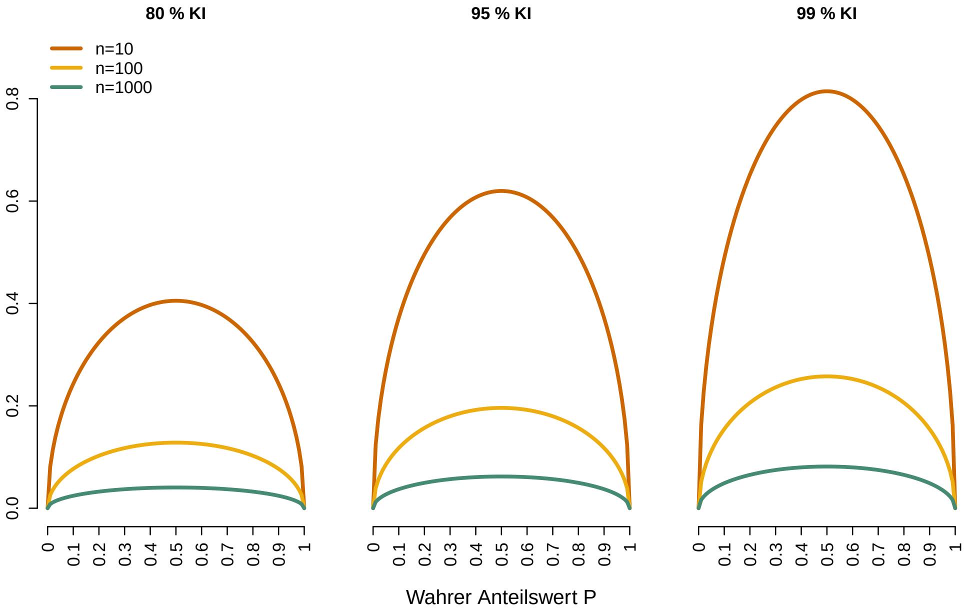
- Praxis | Wahrer Anteil nicht bekannt, daher Schätzung aus Stichprobenanteil p

- Der gemessene Anteil p kann aber eine totale Fehlschätzung sein!
- Die Philosophie bezieht sich auf wiederholte Messungen.

- Entweder liegt der gemessene Wert im Konfidenzintervall,
  oder ein seltenes Ereignis ist eingetreten.

- Wir sind **nicht** zu 95% sicher, dass der wahre Wert zwischen 0.29 und 0.49 liegt!

Konfidenzintervall | Breite bei verschiedenen P, n und Niveaus



z-Test und t-Test

Übersicht

- Wann sind Unterschiede zwischen Mittelwerten signifikant?
- Mittelwerte in Grundgesamtheiten und Stichproben

Literatur

- Gravetter & Wallnau (2007)
- Bortz & Schuster (2010)

- oder eben gleich Fisher (1935)

Tests in Fishers Philosophie

1. Nullhypothese (Null) festlegen: Der theoretisch angenommene Effekt existiert nicht (z. B.: Die Versuchsperson [VP] kann nicht erkennen, ob Tee oder Milch zuerst in der Tasse war).
2. Stichprobengröße und Versuchsaufbau festlegen (z. B. acht Tassen mit vier *Tee zuerst*-Tassen; VP kennt das Verhältnis)
3. Sig-Niveau festlegen: Wie unwahrscheinlich darf das Ergebnis unter Annahme der Null sein, damit wir die Null zurückweisen.
4. Experiment durchführen, Ergebnis messen.
5. p-Wert berechnen: Wie wahrscheinlich war es, dieses Ergebnis oder ein extremeres Ergebnis zu erreichen, wenn die Null die Welt korrekt beschreibt.
6. Wenn $p \leq$ Sig, dann Null zurückweisen: Entweder der Effekt existiert (z. B. die VP kann die Reihenfolge des Einschenkens erkennen) oder ein seltenes Ereignis ist eingetreten.

Einschränkungen und Probleme bei der Interpretation

- Voraussetzung: echte Zufallsstichprobe
- Ergebnis: kein Beweis
- keine Auskunft darüber, wie „wahrscheinlich" der Effekt ist
- keine Auskunft darüber, wie stark wir von der Existenz des Effekts überzeugt sein sollten (= *inverse probability*)
- jede Null-Zurückweisung: nur ein kleinteiliger Hinweis auf einen Effekt
- substantielle theoretische Hypothese oft und hart testen!

- Sensitivity: keine Auskunft über die Stärke des Effekts
  - große Stichprobe → hohe Sensitivität
  - kleine Strichprobe → niedrige Sensitivität
  - je sensitiver desto leichter werden schwache Effekte signifikant
  - Abhilfe bei Neyman-Pearson: Power (Teststärke) vor dem Experiment
  - quasi-kompatibel zu Fisher: Effektstärke nach dem Experiment

Und beim Konfidenzintervall?

Am Beispiel des 95%-Konfidenzintervalls (KI)

- Falsch: Wir können zu 95% sicher sein, dass der wahre Wert im KI liegt.
- Falsch: Der wahre Wert liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit im KI.

- Warum? Wenn der wahre Wert nicht im geschätzten KI liegt, ist die Wahrscheinlichkeit 1, dass er nicht im KI liegt.
- Fakten haben die Wahrscheinlichkeit 1.

- Richtig: Entweder liegt der wahre Wert im KI oder ein seltenes Ereignis ist eingetreten
- „selten“ heißt: nur in 5 von 100 Fällen (im Grenzwert)

Exakter vs. asymptotischer Test

- exakter Test:
  - Die Wahrscheinlichkeitverteilung ist bekannt und wird direkt zugrunde gelegt (= Berechnung der exakten Wahrhscheinlichkeit).
  - Fisher-Test, Binomialtest
  - hohe Sensitivität
  - geeignet für kleine Stichproben
  - oft rechenintensiv

- approximativer oder asymptotischer Test:
  - Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist nicht bekannt (oder kann mathematisch nicht effizient zugrundegelegt werden) und es wird ein Differenzwert berechnet, der asymptotisch eine bekannte Verteilung hat.
  - χ^2-Test, t-Test, ANOVA
  - oft wird Normalverteilung approximiert
  - wegen asymptotischer Natur weniger sensitiv (= größere Stichprobe)

Parametrische und nichtparametrische Tests

- parametrischer Test:
  - Messung eines Parameters/mehrerer Parameter der Grundgesamtheit
  - (Parameter entsprechen in der Messung einer Variable)
  - zum Beispiel Mittelwert oder Varianz
  - Voraussetzung: bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Variable
  - z. B. t-Test (mittel), ANOVA (Varianz)
- nichtparametrischer Test:
  - keine direkte Messung eines zufallsverteilten Parameters
  - zum Beispiel Ränge oder Zähldaten
  - keine Verteilungsannahmen (auch: *verteilungsfreier Test*)
  - z. B. χ^2, Binomialtest, H-Test, U-Test

Fragestellung beim z-Test und beim Einstichproben-t-Test

- Mittel μ über X in der Grundgesamtheit bekannt (z. B. mittlere Satzlänge im Korpus).
- Stichprobe (z. B. der Grundriss von PE) zeigt gemessenes Mittel $\bar{x}$.
- Reicht das für ein signifikantes Testergebnis?
- NULL: $\bar{x} = \mu$

z-Test

Wäre die Varianz der GG als $s^2(X)$ bekannt:

- SF(X) bei Stichprobengröße n ausrechnen, und...
- mit $z = \frac{\bar{x}-\mu}{SF(X)}$ einen Signifikanztest über Normalverteilung rechnen

- Problem aber leider: $SF(X) = \frac{s(X)}{\sqrt{n}}$
- und $s^2(X)$ meist nicht bekannt!

Aufgabe: Mit Ihrer Stichprobe aus NaB und $\mu = 6.8$ sowie $s^2(X) = 10.8$ z-Test rechnen. (Bzw. erstmal die nötigen Werte ausrechnen. Wir besprechen dann die Interpretation als Test.)

Annahme beim t-Test mit einer Stichprobe

- Wir kennen μ oder haben eine Hypothese (z. B. $\mu = 0.5$).
- Wir haben eine Stichprobe x mit n und bekannten $\bar{x}$ und $s^2(x)$.

- anders als bei z-Test: Wir schätzen $SF(X) \approx SF(x)$!

t-Formel

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{SF(x)}$$

Bitte rechnen für Satzlängen (in Wörtern):

$\mu = 7.3$

$x = [6, 3, 12, 16, 8, 15, 9, 9, 2, 11]$

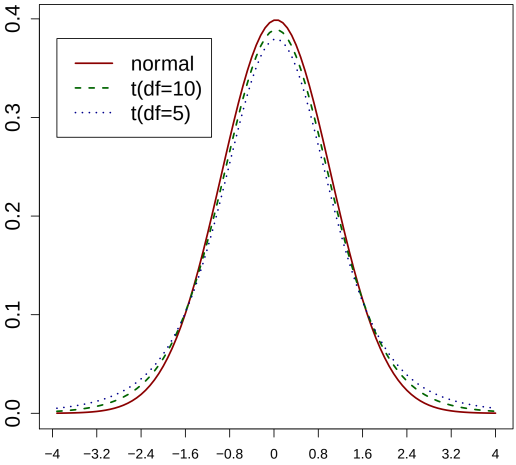
Lösung

1. $\bar{x} = 9.1$
2. $s^2(x) = 21.43$
3. $s(x) = 4.63$
4. $SF(x) = \frac{4.63}{\sqrt{10}} = 1.464$
5. $t = \frac{9.1-7.3}{1.464} = 1.229$

Und was sagt uns $t = 1.229$?

t-Verteilung

Während die z-Werte normalverteilt sind,
flacht die Verteilung der t-Werte durch die Schätzung
je nach df verglichen mit der Normalverteilung ab.



df und Signifikanz

- $df = n - 1$ ($\bar{x}$ muss für $s^s(x)$ bekannt sein)
- Welche t-Werte machen $1 - \alpha$ der Werte aus?
- `> qt(c(0+0.05/2, 1-0.05/2), df=9)`
  $\Rightarrow$ 2.262157.. – 2.262157
- Der errechnete t-Wert ist nicht signifikant.
- NULL: $\mu = \bar{x}$ nicht zurückgewiesen.

Effektstärke

- Signifikanz ≠ starker Effekt
- Effektstärke beim t-Test für Stichprobe x:

$$\text{Cohens } d = \frac{\bar{x}-\mu}{s(x)}$$

- Herleitung/Erklärung: Gravetter & Wallnau, Kap. 9

Erklärung der Varianz

- ähnlich der Effektstärke:
  Welcher Anteil der Varianz in den Daten
  wird durch die Unabhängige erklärt?

$$\text{Cohens } r^2 = \frac{t^2}{t^2 + df}$$

- Herleitung/Erklärung: Gravetter & Wallnau, Kap. 9

Zwei-Stichproben t-Test

- zwei Grundgesamtheiten (z. B. dt. Sätze im 19. und im 20. Jh.)
- dazu: zwei Stichproben (je eine) mit einem Mittelwert (z. B. Länge)
- Interesse: anhand der zwei Stichproben zeigen,
  dass sie (sehr wahrscheinlich) aus zwei Grundgesamtheiten kommen
- Null: $\mu_1 - \mu_0 = 0$
- hier also: eine unabhängige Variable (Jahrhundert)
  und eine abhängige Variable (Satzlänge), gemessen als Mittel

Genereller Ansatz

Allgemein funktioniert der t-Test immer so:

$$t = \frac{Stichprobenwert - Grundgesamtheitswert}{Standardfehler}$$

Jetzt geht man per Hypothese von zwei GG und zwei Stichproben aus, also:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SF(x_1 - x_2)}$$

- Wir testen also auf die Differenz der Unterschiede.
- Per Null wird gesetzt: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Schätzung des Standardfehlers

Für gleichgroße Stichproben:

$$SF(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sqrt{\frac{s^2(x_1)}{n_1} + \frac{s^2(x_2)}{n_2}}$$

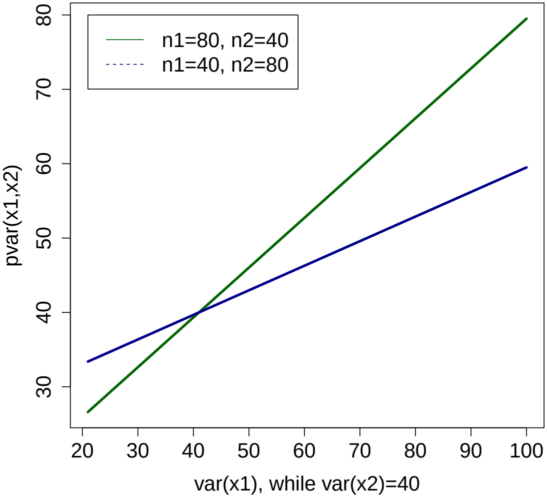
- Problem: Beitrag zum SF von beiden Stichproben gleich.
- Besser: zusammengefasste Varianz, und daraus dann SF.

$$s_p^2(x_1, x_2) = \frac{(\sum_{i=1}^{n}(x_{1,i}-\bar{x}_1)^2)+(\sum_{i=1}^{n}(x_{2,i}-\bar{x}_2)^2)}{(n_1-1)+(n_2-1)} = \frac{SQ(x_1)+SQ(x_2)}{(n_1-1)+(n_2-1)}$$

$$SF(x_1 - x_2) = \sqrt{\frac{s_p^2(x_1,x_2)}{n_1} + \frac{s_p^2(x_1,x_2)}{n_2}}$$

Mehr: Gravetter & Wallnau, Kap. 10

Illustration der zusammengefassten Varianz



t-Wert

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{SF(x_1 - x_2)} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{SF(x_1 - x_2)} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SF(x_1 - x_2)}$$

Freiheitsgrade

$$df = df(x_1) + df(x_2) = (n_1 - 1) + (n_2 - 1)$$

Effektstärke

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2}}$$

Erklärung der Varianz

$$r^2 = \frac{t^2}{t^2 + df}$$

Bitte „von Hand in `R`“ t-Test für folgende zwei Stichproben bei $\alpha = 0.05$ rechnen:

$$x_1 = [11, 11, 8, 8, 11, 9, 8, 11, 9, 8]$$
$$x_2 = [10, 14, 14, 13, 11, 14, 10, 14, 12, 10]$$

Und überprüfen mit:

```
> t.test(x1, x2)
```

Voraussetzungen prüfen I

Die GGs müssen normalerverteilt sein:

```
shapiro.test(x)
```

Wenn $p \leq 0.05$ wird die Nullhypothese des Shapiro-Wilk-Tests verworfen –
NULL: Die Werte stammen aus einer normalverteilten GG.

Die Varianzen müssen homogen sein:

```
var.test(x1, x2)
```

Auch hier: $p \leq 0.05$ weist die NULL zurück (sehr informell) –
NULL: Die Varianzen von x1 und x2 sind homogen.

Solche Tests sind umstritten, weil sie i. d. R. viel zu empfindlich reagieren.
Zuur u. a. (2009) empfehlen z. B. grafische Methoden (bei linearen Modellen).

Voraussetzungen prüfen II

Wenn Voraussetzungen nicht erfüllt sind:

- steigt das Risiko für Typ 1-Fehler
- nicht-parametrische Alternative nehmen
- Daten transformieren
- sich über Robustheit des Test ggü. verletzten Annahmen informieren (oft schwer zugängliche und kontroverse Spezialliteratur)

Simulationen

ANOVA

Übersicht

- Vergleiche von Mittelwerten zwischen mehr als zwei Gruppen
- Mittelwertvergleiche mit mehreren Unabhängigen
- Warum kann man über Varianzen Mittelwerte vergleichen?

Literatur

- Gravetter & Wallnau (2007)
- Bortz & Schuster (2010)
- indirekt: Maxwell & Delaney (2004)

Mittelwerte und Varianzen

- Einschränkung beim t-test: immer nur 2 Gruppen
- t-Test bei mehr als 2 Gruppen: komplizierte paarweise Vergleiche

- stattdessen ANOVA: ANalysis Of VAriance
- Vergleich von Varianzen zwischen beliebigen Gruppen
- Schluss auf Mittelwerte nur indirekt über die Varianzen

- bei zwei Gruppen: Konvergenz von t-Test und ANOVA

Achtung: Gruppen vs. Faktoren

- ANOVA vergleicht immer mehrere Gruppen
- Gruppen bei der einfaktoriellen ANOVA =
  den Ausprägungen einer unabhängigen Variable (z. B. Text-Register)
- diese Variablen heißen hier Faktoren.

- Einfluss der Faktoren auf eine abhängige (z. B. Satzlänge, Lesezeit)

- bei mehreren Faktoren (z. B. Text-Register und Jahrhundert):
  mehrfaktorielle ANOVA.

Idee bei ANOVA (z. B. drei Gruppen)

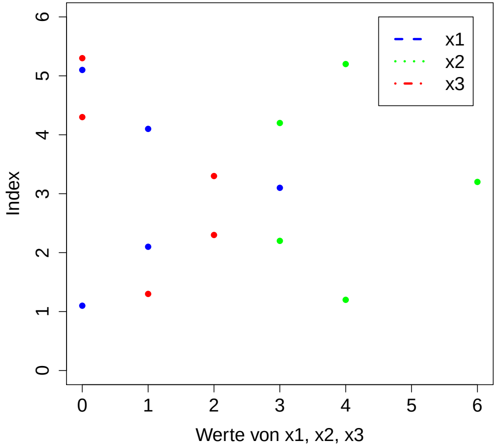
- NULL: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}3$
- aber: Es gibt keinen “Differenzwert” für drei Mittel (also sowas wie den t-Wert).

- daher Varianzvergleich
- F-Wert (Verteilung unter NULL bekannt) als Test-Statistik

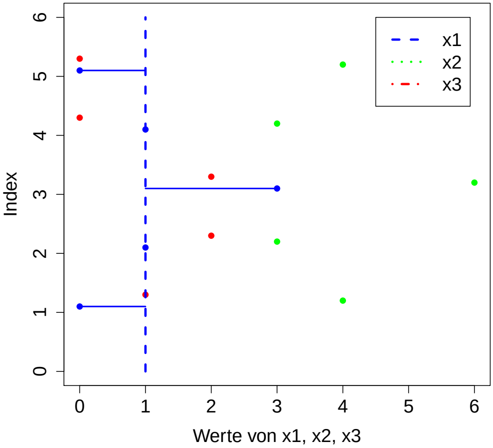
$$F = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz in den Stichproben}} = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz per Zufall}}$$

Drei Stichproben

$x_1 = [0, 1, 3, 1, 0]$
$x_2 = [4, 3, 6, 3, 4]$
$x_3 = [1, 2, 2, 0, 0]$

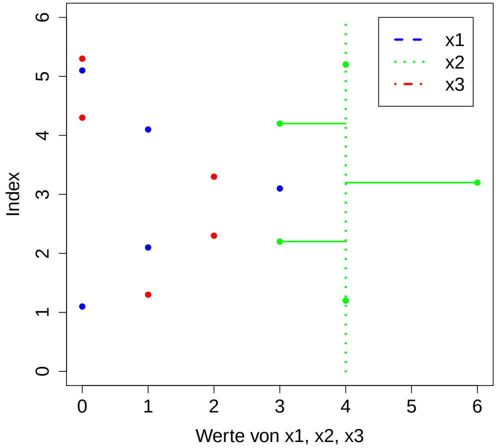


Komponenten der Varianz von x_1



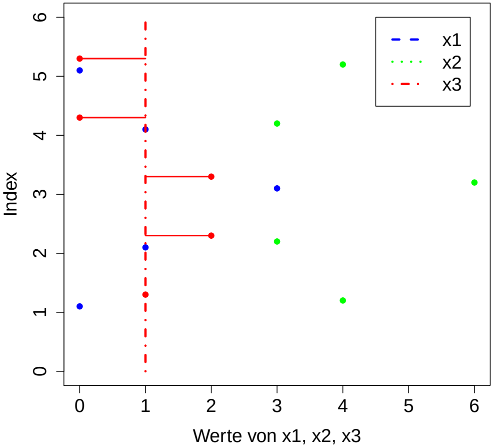
$$s^2(x_1) = 1.5$$

Komponenten der Varianz von x_2



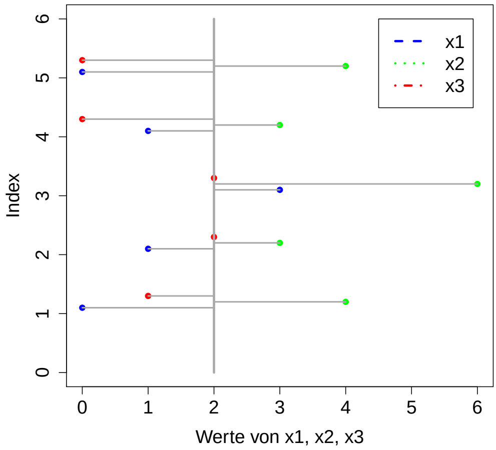
$$s^2(x_2) = 1.5$$

Komponenten der Varianz von x_3

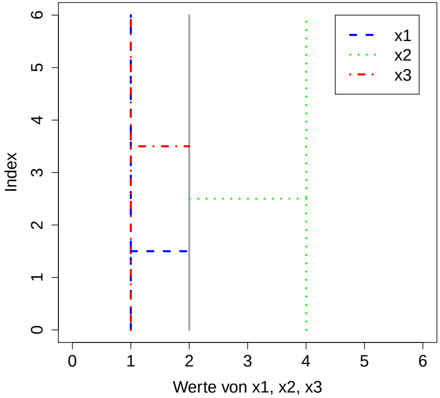


$$s^2(x_3) = 1$$

Varianz in der zusammengefassten Stichprobe X



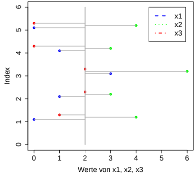
$$s^2(X) = 3.29$$



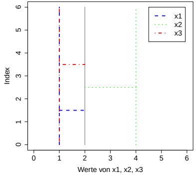
$$s^2([\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]) = 1.33$$

Achtung: Bei unterschiedlichen Stichprobengrößen
ist das nicht ganz so einfach!

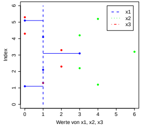
Es gilt bezüglich der Varianzen

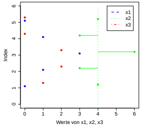


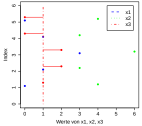
=



+





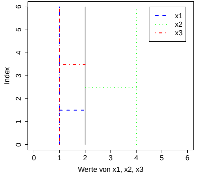


$$s^2(X) = s^2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) + s^2(x_1) + s^2(x_2) + s^2(x_3)$$

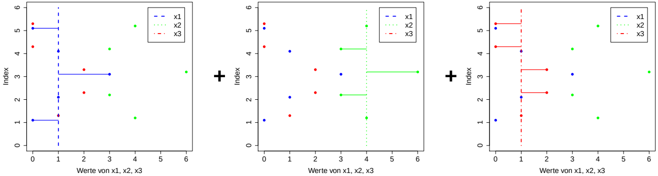
Wenn man den Abstand zwischen den Mitteln verschiebt,
muss die Gesamtvarianz größer werden!

Graphische Verdeutlichung des F-Werts

$$F = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz in den Stichproben}} = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz per Zufall}}$$



$F =$



Wenn man den Abstand zwischen den Mitteln verschiebt, **muss** die Gesamtvarianz größer werden!

Wie funktioniert der F-Wert

- $F = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz in den Stichproben}}$

- Warum?
- $F = \frac{\text{Unterschied durch Effekt}+\text{Unterschiede durch restliche Varianz}}{\text{Unterschied durch restliche Varianz}}$

- Unter Annahme der NULL gibt es keinen Effekt, ...
- also $Unterschied\ durch\ Effekt = 0$

- dann: $F = \frac{0+\text{Unterschiede durch restliche Varianz}}{\text{Unterschied durch restliche Varianz}} = 1$

Notation, fast wie in Gravetter & Wallnau, Kap. 13

- Anzahl der Gruppen x_i: k
- Größe der Gruppen: n_i
- Größe der Gesamtstichprobe X: N
- Summen der Gruppen: T_i
- Gesamtsumme: G
- Mittel (anders als G&W): $\bar{x}_i$, $\bar{X}$
- Summe der Quadrate (=Zähler der Varianz): $SQ(x_i)$, $SQ(X)$

Zur Erinnerung: $s^2(x) = \frac{\sum(x-\bar{x})}{n-1} = \frac{SQ(x)}{df(x)}$

Varianz ist Varianz beim F-Wert

$$F = \frac{Varianz\ zwischen\ den\ Gruppen}{Varianz\ in\ den\ Gruppen} = \frac{s^2_{zwischen}}{s^2_{in}} = \frac{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}}{\frac{SQ_{in}}{df_{in}}}$$

denn

$$s^2(x) = \frac{SQ(x)}{df(x)}$$

Berechnung der SQ

Am einfachsten unter Beachtung von:
$SQ_{gesamt} = SQ_{zwischen} + SQ_{in}$

Es gilt: $SQ_{gesamt} = SQ(X) = \sum(X - \bar{X})$

Außerdem: $SQ_{in} = \sum SQ(x_i)$

Damit: $SQ_{zwischen} = SQ_{gesamt} - SQ_{in}$

$SQ_{zwischen}$ kann man auch direkt ausrechnen:

$$SQ_{zwischen} = \sum_i \left(\frac{T_i^2}{n_i}\right) - \frac{G^2}{N}$$

Aufgabe

$x_1 = [0, 1, 3, 1, 0]$
$x_2 = [4, 3, 6, 3, 4]$
$x_3 = [1, 2, 2, 0, 0]$

Bitte alle SQ ausrechnen, inkl. $SQ_{zwischen}$ direkt.

Tipp: Sie brauchen als Vorwissen nur
den Stoff der ersten Statistik-Sitzung:

- arithmetisches Mittel
- SQ

Freiheitsgrade ausrechnen

Es gilt auch hier, ähnlich wie bei den *SQ*:

$df_{gesamt} = df_{zwischen} + df_{in}$

$df_{gesamt} = N - 1$

$df_{zwischen} = k - 1$

$df_{in} = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = (N - 1) - (k - 1)$

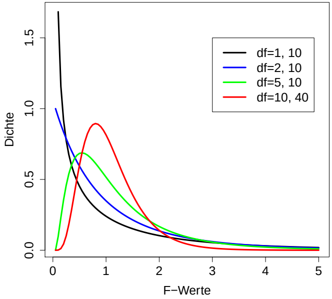
Alles zusammen: F-Wert

$$F = \frac{s^2_{zwischen}}{s^2_{in}} = \frac{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}}{\frac{SQ_{in}}{df_{in}}}$$

Bitte ausrechnen für o. g. Beispiel.

Ermitteln der kritischen Werte

F-Verteilung:



In R für $df_{zwischen} = 2$ und $df_{in} = 12$ bei SIG=0.05:

`> qf(0.95, 2, 12)` ⇒ `3.885294`

Effektstärke

$$\eta^2 = \frac{SQ_{zwischen}}{SQ_{gesamt}}$$

(wieder ein r^2-Maß)

Post-Hoc-Tests

- Problem: Welche Gruppen unterscheiden sich denn nun?
- Lösung: Post(-Hoc)-Tests, z. B. Scheffé-Test:
  - paarweise ANOVA
  - aber: k wird gesetzt wie bei ursprünglicher ANOVA
  - dadurch Vermeidung kumulierten Alpha-Fehlers (Vorteil ggü. paarweisen t-Tests)
  - weiterer Vorteil: paarweise Post-Tests nur erforderlich, wenn Omnibus-ANOVA bereits Signifikanz gezeigt hat
  - und: Generalisierbarkeit zu mehrfaktorieller ANOVA (geht mi t-Test nicht)

Bitte ausrechnen für die oben gerechnete ANOVA.

Wozu mehrfaktorielle Designs

Oft vermutet man den Einfluss mehrerer Unabhängiger auf eine Abhängige.
Beispiel: Satzlängen

		Textsorte		
		Fiktion	**Zeitung**	**Wissenschaft**
Jahrhundert	**19**	x_{11}	x_{12}	x_{13}
	20	x_{21}	x_{22}	x_{23}

Hier also: $2 \cdot 3 = 6$ Gruppen

Ablauf der zweifaktoriellen ANOVA

1. erste ANOVA zwischen Zeilen
2. zweite ANOVA zwischen Spalten
3. dritte ANOVA für Interaktionen zwischen Zeilen und Spalten

4. Interaktion: Ungleichverteilung in Gruppen, die nicht durch die Spalten- und Zeileneffekte erklärt werden kann

5. Alle drei ANOVAs sind unabhängig voneinander!

Komponenten der zweifaktoriellen ANOVA

- Gesamtvarianz = Varianz zwischen Gruppen + Varianz in den Gruppen
- Varianz zwischen den Gruppen =
  Haupt-Faktoren-Varianz + Interaktions-Varianz
- Haupt-Faktoren-Varianz =
  Varianz zwischen Faktor A-Gruppen +
  Varianz zwischen Faktor B-Gruppen

Schritt 1(1): SQ/df zwischen den Gruppen

Jede Zelle der Tabelle ist eine Gruppe.

$$SQ_{zwischen} = \sum_i \left(\frac{T_i^2}{n_i}\right) - \frac{G^2}{N}$$

$df_{zwischen} = k - 1$ (k = Anzahl der Zellen/Gruppen)

Beachte: Keine Änderung verglichen mit einfaktorieller ANOVA!

Schritt 1(2): SQ/df in den Gruppen

Jede Zelle der Tabelle ist eine Gruppe.

$$SQ_{in} = \sum SQ(x_i)$$
$$df_{in} = \sum df(x_i)$$

Beachte: Keine Änderung verglichen mit einfaktorieller ANOVA!

Berechnung nach dem Schema für Zwischen-Gruppen-Varianz

		Textsorte			
		Fiktion	**Zeitung**	**Wissenschaft**	
Jahrhundert	**19**	x_{11}	x_{12}	x_{13}	A_1
	20	x_{21}	x_{22}	x_{23}	A_2

Auch hier keine wesentliche Änderung:

$$SQ_A = \sum_i \left(\frac{T_{A_i}^2}{n_{A_i}}\right) - \frac{G^2}{N}$$

$df_A = k_A - 1$ (k_A = Anzahl der Zeilen)

Schritt 2(2): SQ/df für Gruppe A

Berechnung nach dem Schema für Zwischen-Gruppen-Varianz

		Textsorte		
		Fiktion	**Zeitung**	**Wissenschaft**
Jahrhundert	**19**	x_{11}	x_{21}	x_{31}
	20	x_{12}	x_{22}	x_{32}
		B_1	B_2	B_3

Auch hier keine Änderung:

$$SQ_B = \sum_i \left(\frac{T_{B_i}^2}{n_{B_i}}\right) - \frac{G^2}{N}$$

$df_B = k_B - 1$ (k_B = hier Anzahl der Spalten)

Die Varianz, die auf Kosten der Interaktion geht, ist
die Zwischen-Gruppen-Varianz ohne die Einzelfaktor-Varianz.

$$SQ_{A \times B} = SQ_{zwischen} - SQ_A - SQ_B$$
$$df_{A \times B} = df_{zwischen} - df_A - df_B$$

Alle drei F-Werte ausrechnen

Die zweifaktorielle ANOVA
erfordert wie gesagt drei Einzel-ANOVAs.

$$F_A = \frac{\frac{SQ_A}{df_A}}{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}} = \frac{s_A^2}{s_{zwischen}^2}$$

$$F_B = \frac{\frac{SQ_A}{df_B}}{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}} = \frac{s_B^2}{s_{zwischen}^2}$$

$$F_{A\times B} = \frac{\frac{SQ_{A\times B}}{df_{A\times B}}}{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}} = \frac{s_{A\times B}^2}{s_{zwischen}^2}$$

Effektstärken

Entsprechend sind drei η^2 auszurechnen:

$$\eta^2_A = \frac{SQ_A}{SQ_{gesamt} - SQ_B - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta^2_B = \frac{SQ_B}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta^2_{A \times B} = \frac{SQ_{A \times B}}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_B}$$

Wir fragen jeweils, welchen Anteil an der Varianz, die die anderen beiden Faktoren nicht erklären, der jeweilige dritte Faktor hat.

Das jetzt alles zusammen

Bitte vollständige zweifaktorielle ANOVA
bei Sig=0.05 und Sig=0.01 rechnen:

	B1	**B2**	**B3**
A1	1, 3, 1, 4	4, 3, 3, 6	8, 6, 8, 10
A2	8, 6, 6, 8	1, 6, 8, 1	1, 4, 1, 4

Nichtparametrische Verfahren

Übersicht

- Unterschiede in Zähldaten
- Signifikanz und Effektstärke
- Unterschiede bei Ja/Nein-Experimenten

Literatur

- Gravetter & Wallnau 2007
- Bortz & Lienert 2008

Kreuztabelle

Beobachtungen von zwei kategorialen Variablen.
Auxiliarwahl beim Perfekt: haben, sein
Herkunft des Belegs: nord, sued

Fall	**Aux**	**Region**
1	haben	nord
2	haben	nord
3	sein	nord
4	sein	sued
5	sein	sued
6	haben	nord
7	haben	sued
8	haben	sued

	Aux	
Region	haben	sein
nord	3	1
sued	2	2

Kreuztabelle mit Randsummen

Spaltensumme für Spalte i: $\sum_k x_{ik}$

Zeilensumme für Zeile j: $\sum_k x_{kj}$

	haben	sein	Zeilensummen
nord	3	1	4
sued	2	2	4
Spaltensummen	5	3	**8**

Beobachtete vs. erwartete Häufigkeiten

n=100
50 mal *haben*, 50 mal *sein* (= Spaltensummen)
50 mal Norden, 50 mal Süden (= Zeilensummen)

- erwartete Häufigkeiten unter Annahme der Null
  = kein Zusammenhang zwischen Hilfsverb und Region?

	haben	sein	Zeilensummen
nord	25	25	50
sued	25	25	50
Spaltensummen	50	50	**100**

Beobachtete vs. erwartete Häufigkeiten

n=100
50 mal *haben*, 50 mal *sein* (= Spaltensummen)
30 mal Norden, 70 mal Süden (= Zeilensummen)

- erwartete Häufigkeiten unter Annahme der NULL?

	haben	sein	Zeilensummen
nord	15	15	30
sued	35	35	70
Spaltensummen	50	50	**100**

Beobachtete vs. erwartete Häufigkeiten

n=100
30 mal Norden, 70 mal Süden
40 mal *haben*, 60 mal *sein*

	haben	sein	Zeilensummen
nord	12	18	30
sued	28	42	70
Spaltensummen	40	60	**100**

Allgemein: erwartete Häufigkeit für Zellen: $\frac{Spaltensumme \cdot Zeilensumme}{n}$

bzw.: $EH(x_{ij}) = \frac{\sum_k x_{ik} \cdot \sum_k x_{kj}}{n}$

Beobachtete vs. erwartete Häufigkeiten

beobachtete Häufigkeiten für eine DeReKo-Stichprobe (*geschwebt*):

	haben	sein	Zeilensummen
nord	27	33	60
sued	3	34	37
Spaltensummen	30	67	**97**

erwartete Häufigkeiten:

	haben	sein	Zeilensummen
nord	18.56	41.44	60
sued	11.44	25.56	37
Spaltensummen	30	67	**97**

Problem

- Beobachtete und erwartete Häufigkeit weichen ab.
- NULL: kein Zusammenhang zwischen Region und Aux.
- Ab wann ist der Unterschied „signifikant“?

- Ein gemessener Unterschied ist siginifikant, wenn er angesichts der Stichprobengröße groß genug ist, dass wir das im Experiment gefundene Ergenbis nur sehr selten (typischwerweise in unter 5% der Fälle) erwarten würden, wenn er gar nicht bestünde.

- Diese 5% (als Anteil 0.05) sind das Signifikanzniveau.
- In Fishers Philosophie abgekürzt SIG, nicht wie oft zu lesen „α-Niveau“.

χ^2-Unterschiedstest

beobachtet:

	haben	sein
nord	27	33
sued	3	34

erwartet:

	haben	sein
nord	18.56	41.44
sued	11.44	25.56

$$\chi^2 = \sum \frac{(beobachtet - erwartet)^2}{erwartet}$$

bzw.: $\chi^2 = \sum_{ij} \frac{(x_{ij} - EH(x_{ij}))^2}{EH(x_{ij})}$

Berechnung des χ^2-Werts

$$\chi^2 = \sum \frac{(beobachtet - erwartet)^2}{erwartet}$$

beobachtet:

	haben	sein
nord	27	33
sued	3	34

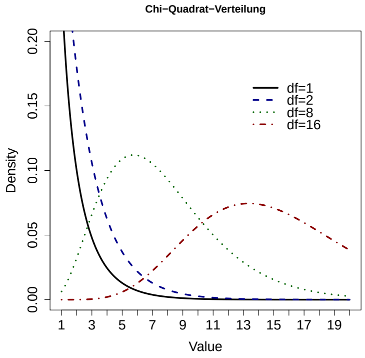
erwartet:

	haben	sein
nord	18.56	41.44
sued	11.44	25.56

$$\chi^2 = \frac{(27-18.56)^2}{18.56} + \frac{(33-41.44)^2}{41.44} + \frac{(3-11.44)^2}{11.44} + \frac{(34-25.56)^2}{25.56}$$

$$\chi^2 = 3.84 + 1.72 + 6.23 + 2.79 = 14.58$$

Die χ^2-Verteilung für Stichproben
aus Grundgesamtheiten ohne Zusammenhang:



Freiheitsgrad?

Was sind „Freiheitsgrade“ oder *degrees of freedom (df)*?

- Das kommt später noch ausführlicher.
- Für n-Felder-Tests: (Zeilenzahl−1)·(Spaltenzahl−1)
- Bei Vierfelder-Test also: $df = 1$

Die χ^2-Verteilung II

- Wahrscheinlichkeit eines bestimmten χ^2-Werts unter Annahme der NULL?
  VOR dem Experiment! Nach dem Experiment ist die Wahrscheinlichkeit des gemessenen p-Werts immer 1.

- In Fishers Philosophie Entscheidung nach Signifikanzniveau (SIG):
  Der χ^2-Wert muss in den extremen SIG-Anteilen liegen,
  um die NULL zu SIG zurückzuweisen.

In R ähnlich wie bei Normalverteilung:

`> qchisq(0.95, df=1)` ⇒ `3.84`

- Also ist für $\chi^2 = 14.58$ auf jeden Fall $p < 0.05$ (weil $14.58 > 3.84$).

Mehr oder weniger signifikant?

- Oft liest man etwas von „α-Niveaus“ wie:
  - 5% („signifikant“)
  - 1%
  - 0.1% („hochsignifikant“)
- Diese Niveaus entsprechen einem falsch interpretierten SIG.
- Die Idee von „mehr oder weniger signifikant“ ist kompletter Schwachsinn.
- Entweder ist das gesetzte Niveau akzeptabel,
  und dann bringt ein kleineres p aber auch nicht mehr.
- Oder es müsste eigtl. ein strengeres SIG-Niveau gewählt werden,
  und dann ist $p < 0.05$ schlicht nicht ausreichend (s. Fishers Sensitivität).
- Die Entscheidung für ein bestimmtes SIG-Niveau muss
  auf Basis konzeptueller/inhaltlicher Gründe gefällt werden.
- EIN signifikantes Testergebnis alleine sagt nicht viel aus!!!

Voraussetzungen für χ^2-Tests

1. Die Beoabachtungen sind voneinander unabhängig.
2. In jeder Zelle ist die erwartete Häufigkeit mindestens 5.
3. Keine Beschränkung auf vier Felder!

Mit einer Matrix `my.matrix`:

```
> chisq.test(my.matrix)
```

Eingabe einer einfachen Vierfeldermatrix:

```
> my.matrix <- matrix(c(27,33,3,34), 2, 2, byrow=TRUE)
```

Ausgeben der erwarteten Häufigkeiten:

```
> chisq.test(my.matrix)$expected
```

Wann und wie Fisher-Exakt?

Der Fisher-Exakt-Test ist eine Alternative zum χ^2-Test.

- exakter Test: direkte Berechnung der Wahrscheinlichkeit
- keine allgemein bessere Alternative zu χ^2
- robuster bei sehr kleinen Stichproben
- aber nur für feststehende Randsummen geeignet!
- ohne feste Randsummen: Barnards Test

Fisher-Exakt in R:

```
> fisher.test(my.matrix)
> fisher.test(my.vector.1, my.vector.2)
```

Effektstärke

Der χ^2-Wert sagt nichts über die Stärke eines Zusammenhangs!
Bei höheren absoluten Frequenzen wird auch der χ^2-Wert größer.

	haben	sein
nord	27	33
sued	3	34

$\chi^2 = 12{,}89$

	haben	sein
nord	27.84%	34.02%
sued	3.09%	35.05%

	haben	sein
nord	54	66
sued	6	68

$\chi^2 = 27{,}46$

	haben	sein
nord	27.84%	34.02%
sued	3.09%	35.05%

Effektstärke II

Pearsons ϕ: Maß für die Stärke des Zusammenhangs in 2×2-Tabellen

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

ϕ ist eine Zahl zwischen 0 und 1:
Je größer, desto stärker der Zusammenhang zwischen den Variablen.

Beispiel: $\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \sqrt{\frac{12.89}{97}} = 0.3648$

Cramérs v

Cramérs v für $n \times n$-Tabellen mit $n > 2$ oder $m > 2$

$$v = \sqrt{\frac{\frac{\chi^2}{n}}{min(s-1, z-1)}}$$

mit: s die Spaltenzahl und z die Zeilenzahl

Beachte: für 2×2-Tabellen: $s - 1 = 1$ und $z - 1 = 1$,

also $min(s - 1, z - 1) = 1$

daher: $v = \sqrt{\frac{\frac{\chi^2}{n}}{1}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \phi$

Speichern des Test-Objekts:

```
> my.chi2.test <- chisq.test(my.matrix)
```

Speichern des χ^2-Werts mit:

```
> my.chi2.value <- as.numeric(my.chi2.test$statistic)
```

Speichern von n:

```
> my.n <- sum(my.matrix)
```

Also Effektstärke (mit Ausgabe):

```
> my.phi <- sqrt( my.chi2.value / my.n ); my.phi
```

- Die Chance (odds) o setzt die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses E in Relation zur Gegenwahrscheinlichkeit:

$$o(E) = \frac{p(E)}{1-p(E)}$$

und damit

$$p(E) = \frac{o(E)}{1+o(E)}$$

- Ein Ereignis ist in Korpusstudien i. d. R. das Auftreten einer Variablenausprägung.
- Die Information in den Maßen Wahrscheinlichkeit und Chance ist dieselbe (s. Umrechenbarkeit ineinander).

Chance und Wahrscheinlichkeit und Zähldaten

Aux	Anzahl
haben	27
sein	33

$p(haben) = \frac{27}{27+33} = \frac{27}{60} = 0.45$ (Wahrscheinlichkeit)

$1 - p(haben) = p(\neg haben) = \frac{33}{27+33} = \frac{33}{60} = 0.55$ (Gegenwahrscheinlichkeit)

Beachte: $p(haben) + p(\neg haben) = 1$

$o(haben) = \frac{\frac{27}{60}}{\frac{33}{60}} = \frac{27}{60} \cdot \frac{60}{33} = \frac{27}{33} = 0.82$

allgmein: $p(E) = \frac{Anzahl(E)}{Anzahl(E)+Anzahl(\neg E)}$ und $o(E) = \frac{Anzahl(E)}{Anzahl(\neg E)}$

Chancenverhältnis (odds ratio)

- Das Chancenverhältnis (odds ratio) gibt das Verhältnis an, wie sich die Chancen einer Variablenausprägung E unter Bedingung A – also $o(E|A)$ – und unter Bedingung B – also $o(E|B)$ – zueinander Verhalten:

$$r(E|A, E|B) = \frac{o(E|A)}{o(E|B)}$$

Beispiel zum Chancenverhältnis (1)

- Wir haben Texte aus Süddeutschland und Norddeutschland auf das Auftreten des Perfektauxiliars *haben* und *sein* bei bestimmten Verben untersucht.
- Die Kreuztabelle:

	nord	sued
haben	27	3
sein	33	34

Beispiel zum Chancenverhältnis (2)

	nord	sued
haben	27	3
sein	33	34

- $o(haben|nord) = \frac{27}{33} = 0.82$
- $o(haben|sued) = \frac{3}{34} = 0.09$
- Verhältnis zwischen den Chancen: $or = \frac{0.82}{0.09} = 9.11$
- D. h. die Chance von *haben* ist 9.11 mal größer, wenn die Region *nord* ist.
- Ersatz für Effektstärke bei Fisher-Test

Bernoulli-Experimente

- binäre Daten: Ereignis vs. Nicht-Ereignis bzw. Ja/Nein
- Vgl. Behauptung: „Gen/Dat alternieren frei bei *wegen*.“
  - „frei alternieren“ = beide Kasus haben den gleichen Anteil.
  - Grundgesamtheit per Null-Hypothese: 50% Genitive und 50% Dative
- Korpusstichprobe: F(Genitiv)=41 und F(Dativ)=59
- Stimmt das mit der Null überein bei $sig = 0.05$?

Binomial-Test

NULL: Es gibt keine Abweichung
von den erwarteten gleich großen Anteilen.

NULL: $p(Dativ) = 0.5$ (p für proportion)

Binomialtest im Einzelnen

Benötigte Größen:

- Stichproben der Größe n
- Proportion p (hier $p = 0.5$)
- Anzahl der beobachteten Ereignisse: X (hier $X(Dativ) = 59$)

Unter Annahme der NULL...

- Wenn $p \cdot n > 10$ und $(1 - p) \cdot n > 10$
  approximiert die Binomialverteilung die Normalverteilung.
- Es gilt dann (unter Annahme der NULL!) für die Normalverteilung:
  - Mittel: $\mu = p \cdot n$
  - Standardabweichung: $s = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
  - Wir können für den gemessenen Wert den z-Wert ausrechnen.

$$z = \frac{X - \mu}{s} = \frac{X - p \cdot n}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

Ausrechnen des Beispiels und Signifikanz

$$z = \frac{59-(0.5\cdot 100)}{\sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0.5}} = \frac{59-50}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5} = 1.8$$

- Der gemessene Wert liegt 1.8 Standardabweichungen vom Null-Mittel entfernt.
- Wir kennen bereits die kritischen Werte für Normalverteilungen und $sig = 0.05$: $-1.96..1.96$
- Die Null kann also nicht zurückgewiesen werden bei $sig = 0.05$.

- Interpretation: Entweder ist die Variation nicht genau gleich verteilt oder ein seltenes Ereignis ist eingetreten.

```
> binom.test(59, 100, 0.5)

     Exact binomial test

data: 59 and 100
number of successes = 59, number of trials = 100, p-value = 0.08863
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
  0.4871442  0.6873800 sample estimates:
probability of success 0.59
```

Freiheitsgrade und Effektstärken

Freiheitsgrade „intuitiv“

- Beispiel: Schätzung eines Parameters (z. B. Mittel) auf Basis von 1000 gemessenen Werten
- Wenn 999 Werte bekannt sind, steht abhängig vom Mittel der 1000ste Wert fest.
- Für jedes Mittel μ einer Stichprobe mit n Messungen sind also nur $n-1$ frei wählbar.

(Unintuitive) Erweiterung(en)

- generell: $df = n - |E|$
  wobei E die zu schätzenden Parameter sind. $|E|$ ist ihre Anzahl.
- Warum bei χ^2 dann $df = (Zeilenzahl - 1) \cdot (Spaltenzahl - 1)$?

- Bsp.: Tabelle mit 2×3 Feldern, also $df = (2-1)(3-1) = 1 \cdot 2 = 2$...
- Bei bekannten Randsummen sind aber tatsächlich nur 2 Felder frei wählbar!

	X1	X2	
Y1	⊕		ZS1
Y2	⊕		ZS2
Y3			ZS3
	SQ1	SQ2	

Effektstärke

Der χ^2-Wert sagt nichts über die Stärke eines Zusammenhangs!
Bei höheren absoluten Frequenzen wird auch der χ^2-Wert größer.

	haben	sein
nord	27	33
sued	3	34

$\chi^2 = 12{,}89$

	haben	sein
nord	27.84%	34.02%
sued	3.09%	35.05%

	haben	sein
nord	54	66
sued	6	68

$\chi^2 = 27{,}46$

	haben	sein
nord	27.84%	34.02%
sued	3.09%	35.05%

Effektstärke II

Pearsons ϕ: Maß für die Stärke des Zusammenhangs in 2×2-Tabellen

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

ϕ ist eine Zahl zwischen 0 und 1:
Je größer, desto stärker der Zusammenhang zwischen den Variablen.

$$\text{Beispiel: } \phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \sqrt{\frac{12.89}{97}} = 0.3648$$

Cramérs v

Cramérs v für $n \times n$-Tabellen mit $n > 2$ oder $m > 2$

$$v = \sqrt{\frac{\frac{\chi^2}{n}}{min(s-1,z-1)}}$$

mit: s die Spaltenzahl und z die Zeilenzahl

Beachte: für 2×2-Tabellen: $s - 1 = 1$ und $z - 1 = 1$,

also $min(s - 1, z - 1) = 1$

daher: $v = \sqrt{\frac{\frac{\chi^2}{n}}{1}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \phi$

In R

Speichern des Test-Objekts:

```
> my.chi2.test <- chisq.test(my.matrix)
```

Speichern des χ^2-Werts mit:

```
> my.chi2.value <- as.numeric(my.chi2.test$statistic)
```

Speichern von *n*:

```
> my.n <- sum(my.matrix)
```

Also Effektstärke (mit Ausgabe):

```
> my.phi <- sqrt( my.chi2.value / my.n ); my.phi
```

Chance (odds)

- Die Chance (odds) o setzt die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses E in Relation zur Gegenwahrscheinlichkeit:

$$o(E) = \frac{p(E)}{1-p(E)}$$

und damit

$$p(E) = \frac{o(E)}{1+o(E)}$$

- Ein Ereignis ist in Korpusstudien i. d. R. das Auftreten einer Variablenausprägung.
- Die Information in den Maßen Wahrscheinlichkeit und Chance ist dieselbe (s. Umrechenbarkeit ineinander).

Aux	Anzahl
haben	27
sein	33

$p(haben) = \frac{27}{27+33} = \frac{27}{60} = 0.45$ (Wahrscheinlichkeit)

$1 - p(haben) = p(\neg haben) = \frac{33}{27+33} = \frac{33}{60} = 0.55$ (Gegenwahrscheinlichkeit)

Beachte: $p(haben) + p(\neg haben) = 1$

$o(haben) = \frac{\frac{27}{60}}{\frac{33}{60}} = \frac{27}{60} \cdot \frac{60}{33} = \frac{27}{33} = 0.82$

allgmein: $p(E) = \frac{Anzahl(E)}{Anzahl(E)+Anzahl(\neg E)}$ und $o(E) = \frac{Anzahl(E)}{Anzahl(\neg E)}$

Chancenverhältnis (odds ratio)

- Das Chancenverhältnis (odds ratio) gibt das Verhältnis an, wie sich die Chancen einer Variablenausprägung E unter Bedingung A – also $o(E|A)$ – und unter Bedingung B – also $o(E|B)$ – zueinander Verhalten:

$$r(E|A, E|B) = \frac{o(E|A)}{o(E|B)}$$

Beispiel zum Chancenverhältnis (1)

- Wir haben Texte aus Süddeutschland und Norddeutschland auf das Auftreten des Perfektauxiliars *haben* und *sein* bei bestimmten Verben untersucht.
- Die Kreuztabelle:

	nord	sued
haben	27	3
sein	33	34

Beispiel zum Chancenverhältnis (2)

	nord	sued
haben	27	3
sein	33	34

- $o(haben|nord) = \frac{27}{33} = 0.82$
- $o(haben|sued) = \frac{3}{34} = 0.09$
- Verhältnis zwischen den Chancen: $or = \frac{0.82}{0.09} = 9.11$
- D. h. die Chance von *haben* ist 9.11 mal größer, wenn *Region nord* ist.
- Ersatz für Effektstärke bei Fisher-Test

Bernoulli-Experimente

- binäre Daten: Ereignis vs. Nicht-Ereignis bzw. Ja/Nein
- Vgl. Behauptung: „Gen/Dat alternieren frei bei *wegen*."
  - „frei alternieren" = beide Kasus haben die gleiche Chance.
  - Grundgesamtheit per Hypothese: 50% Genitive und 50% Dative
- Korpusstichprobe: F(Genitiv)=41 und F(Dativ)=59
- Passt das zur Hypothese bei sig=0.05?

Binomialtest

- H0: Es gibt keine Abweichung von der erwarteten Wahrscheinlichkeit.
- H0: $p(Dativ) = 0.5$

Binomialtest im Einzelnen

Benötigte Größen:

- Stichproben der Größe n
- H0-Wahrscheinlichkeit p (hier $p = 0.5$)
- Anzahl der beobachteten Ereignisse: X (hier $X(Dativ) = 59$)

Unter Annahme der H0…

- Wenn $p \cdot n > 10$ und $(1 - p) \cdot n > 10$
  approximiert die Binomialverteilung die Normalverteilung.
- Es gilt dann (unter Annahme der H0!) für die Normalverteilung:
  - Mittel: $\mu = p \cdot n$
  - Standardabweichung: $s = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
  - Wir können für den gemessenen Wert den z-Wert ausrechnen.

$$z = \frac{X - \mu}{s} = \frac{X - p \cdot n}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

Ausrechnen des Beispiels und Signifikanz

$$z = \frac{59-(0.5 \cdot 100)}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = \frac{59-50}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5} = 1.8$$

- Der gemessene Wert liegt 1.8 Standardabweichungen vom H0-Mittel entfernt.
- Wir kennen bereits die kritischen Werte für Normalverteilungen und sig=0.05: $-1.96..1.96$
- Die H0 kann also nicht zurückgewiesen werden bei sig=0.05.

- Interpretation: Wir haben keine Evidenz dafür, dass die Variation in der Grundgesamtheit von einer 50:50-Verteilung abweicht.

- Falsche Interpretation: Wir haben Evidenz dafür, dass die Verteilung in der Grundgesamtheit 50:50 ist.

In R

```
> binom.test(59, 100, 0.5)

	Exact binomial test

data: 59 and 100
number of successes = 59, number of trials = 100, p-value = 0.08863
alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5
95 percent confidence interval:
  0.4871442  0.6873800 sample estimates:
probability of success 0.59
```

Effektstärke Ein-Stichproben-t-Test

- Signifikanz $\neq$ starker Effekt
- Effektstärke beim t-Test für Stichprobe x:

$$\text{Cohens } d = \frac{\bar{x}-\mu}{s(x)}$$

- Herleitung/Erklärung: Gravetter & Wallnau, Kap. 9

Erklärung der Varianz

- ähnlich der Effektstärke:
  Welcher Anteil der Varianz in den Daten
  wird durch die Unabhängige erklärt?

$$\text{Cohens } r^2 = \frac{t^2}{t^2 + df}$$

- Herleitung/Erklärung: Gravetter & Wallnau, Kap. 9

Effektstärke Zwei-Stichproben-t-Test

Effektstärke

$$d = \frac{\bar{x_1} - \bar{x_2}}{\sqrt{s_p^2}}$$

Erklärung der Varianz

$$r^2 = \frac{t^2}{t^2 + df}$$

Effektstärke einfaktorielle ANOVA

$$\eta^2 = \frac{SQ_{zwischen}}{SQ_{gesamt}}$$

(wieder ein r^2-Maß)

Effektstärken bei der zweifaktoriellen ANOVA

Entsprechend sind drei η^2 auszurechnen:

$$\eta^2_A = \frac{SQ_A}{SQ_{gesamt} - SQ_B - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta^2_B = \frac{SQ_B}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta^2_{A \times B} = \frac{SQ_{A \times B}}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_B}$$

Wir fragen jeweils, welchen Anteil an der Varianz,
die die anderen beiden Faktoren nicht erklären,
der jeweilige dritte Faktor hat.

Caveat

Bedingung für alle Tests:
Unabhängigkeit der Messungen

Wenn bei t-Test oder ANOVA also gepaarte Stichproben vorliegen
(Messung derselben Proband*innen unter Bedingung 1 und 2 usw.):
Besondere Versionen für geparte Stichproben nehmen!

Details hier nicht besprochen.

Voraussetzungen prüfen I

Die GGs müssen normalerverteilt sein:

```
shapiro.test(x)
```

Wenn $p \leq 0.05$ wird die Nullhypothese des Shapiro-Wilk-Tests verworfen.
H0: Die Werte stammen aus einer normalverteilten GG.

Die Varianzen müssen homogen sein:

```
var.test(x1, x2)
```

Auch hier: $p \leq 0.05$ weist die H0 zurück.
H0: Die Varianzen von x1 und x2 sind homogen.

Solche Tests sind umstritten, weil sie angeblich zu empfindlich reagieren.
Zuur u. a. 2009 empfehlen z. B. grafische Methoden. Ich nicht.

Voraussetzungen prüfen II

Wenn Voraussetzungen nicht erfüllt sind:

- steigt das Risiko für Typ 1-Fehler

- nicht-parametrische Alternative nehmen
- Daten transformieren (Logarithmus für Normalverteilung)

- sich über Robustheit des Test ggü. verletzten Annahmen informieren
  (oft schwer zugängliche und kontroverse Spezialliteratur)

Übersicht

- Alternativen, wenn Bedingungen für t-Test und ANOVA nicht erfüllt sind (Normalverteilung, Varianzhomogenität)

- Prinzip: Umrechnen von Werten in Ränge
- nicht-parametrische Tests

Literatur

- Bortz & Lienert 2008
- Gravetter & Wallnau 2007

Übersicht

- Mann-Whitney U-Test: Alternative zum t-Test mit zwei Stichproben
- Kruskal-Wallis H-Test: Alternative zur einfaktoriellen ANOVA

Wiederholung: Bedingungen für t-Test

- Intervallskalierung der Abhängigen
- Normalität der Abhängigen
- Varianzhomogenität der Abhängigen in den Gruppen
- Unabhängigkeit der Messungen

Alle bis auf die letzte entfallen beim Mann-Whitney U-Test.

Direkte Berechnung beim MWU

Gruppen/Stichproben (Messwerte):
$x_1 = [9, 8, 12, 16]$
$x_2 = [4, 11, 7, 13]$

Ränge in der zusammengelegten Stichprobe:
$X = [4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16]$
$R(x_1) = [4, 3, 6, 8]$
$R(x_2) = [1, 5, 2, 7]$

Addiere für jeden Wert beider Gruppen die Anzahl der niedrigeren Ränge (=höhere Rangzahl!) in der anderen Gruppe:
$U(x_1) = 2 + 2 + 1 + 0 = 5$
$U(x_2) = 4 + 2 + 4 + 1 = 11$
$U = min(U_{x_1}, U_{x_2}) = U_{x_1} = 5$

Allgemeine Formel

$$U(x_\alpha) = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_\alpha(n_\alpha+1)}{2} - \sum R(x_\alpha)$$

- $\sum R(x_1) = 4 + 3 + 6 + 8 = 21$
- $\sum R(x_2) = 1 + 5 + 2 + 7 = 15$
- $n_1 \cdot n_2 = 4 \cdot 4 = 16$
- $n_1(n_1 + 1) = n_2(n_2 + 1) = 4 \cdot 5 = 20$
- $U(x_1) = 16 + 10 - 21 = 5$
- $U(x_2) = 16 + 10 - 15 = 11$
- $U = 5$

Siginifikanz und Effektstärke

- Signifikanz für kleine Stichproben: Tabelle
- bei großen Stichproben: U ugf. normalverteilt, also z-Test
- in R:

```
> wilcox.test(x1,x2, paired = FALSE)
```

- Effektstärke: Punkt-biserielle Korrelation
- entspricht Pearson-Korrelation, aber Unabhängige ist dichotom
- In R: `cor(c(x1,x2), c(rep(0,4),rep(1,4)))`

- alternativ: „relativer Effekt“ (Bortz & Lienert, S. 142)

Probleme

- Bei sehr vielen gleichen Rängen ist
  der Mann-Whitney U-Test unzuverlässig.
- Bei gleichen Rängen generell: korrigierte Version
  (s. Bortz & Lienert, S. 146).

- Er ist daher nur begrenzt geeignet für Dinge wie 5-Punkt-Skalen.
- generell am stärksten bei gleich großen und
  gleich stark streuenden Stichproben

- letzter Ausweg: Mediantest (Bortz & Lienert, S. 137)

Wie vom t-Test zur ANOVA...

$x_1 = [9, 8, 12, 16]$
$x_2 = [4, 11, 7, 13]$
$x_3 = [13, 12, 5, 15]$

Gleiches Vorgehen wie bei Mann-Whitney über
Rang in der zusammengelegten Stichprobe:

X	4	5	7	8	9	11	12	12	13	13	15	16
R(X)	1	2	3	4	5	6	7.5		9.5		11	12

$R(x_1) = [5, 4, 7.5, 12]$
$R(x_2) = [1, 6, 3, 9.5]$
$R(x_3) = [9.5, 7.5, 2, 11]$

Berechnung des Kruskal-Wallis H-Werts

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_i \frac{(\sum R(x_i))^2}{n_i} - 3(N+1)$$

Am Beispiel:

- Gruppen-Rang-Summen:
  - $R(x_1) = [5, 4, 7.5, 12]$, $\sum R(x_1) = 28.5$
  - $R(x_2) = [1, 6, 3, 9.5]$, $\sum R(x_2) = 19.5$
  - $R(x_3) = [9.5, 7.5, 2, 11]$, $\sum R(x_3) = 30$
- $H = \frac{12}{12 \cdot (12+1)} \cdot (\frac{28.5^2}{4} + \frac{19.5^2}{4} + \frac{30^2}{4}) - 3(12+1) =$
- $0.077 \cdot (203.06 + 95.06 + 225) - 39 = 1.28$

Signifikanztest

- Bei $n > 5$ ist H unter der H0 χ^2-verteilt.
- mit $df = k - 1$ (k ist die Anzahl der Gruppen)

- Effektstärke: tja…
- „relative Effekte“ sind rechenbar (Bortz & Lienert, S. 159)

In R

```
> kruskal.test(c(x1,x2,x3) c(rep(0,4),rep(1,4),rep(2,4)))
```

Rechnen Sie bitte mal die U- und H-Tests von diese Folien
und vergleichen Sie die p-Werte mit denen von t-Test und ANOVA
über die gleichen Daten:

$x_1 = [9, 8, 12, 16]$
$x_2 = [4, 11, 7, 13]$
$x_3 = [13, 12, 5, 15]$

Power und Severity

Lineare Modelle

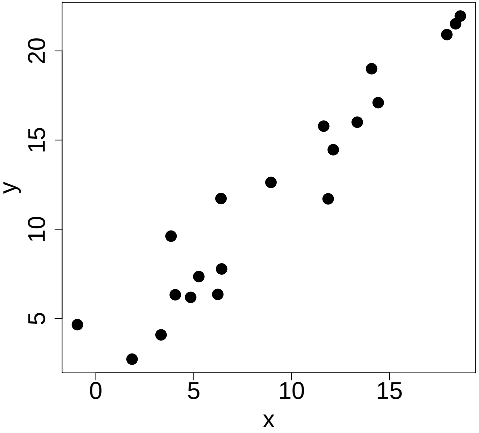
Literatur

- Gravetter & Wallnau 2007
- Zuur u. a. 2009
- Maxwell & Delaney 2004

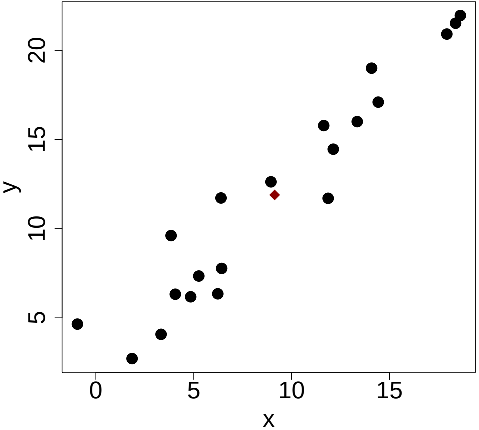
Übersicht

- Pearson-Korrleation (r, r^2)
- Siginifikanztests mit Korrelationen
- Unterschied von Pearsons r zu Spearmans Rang-Korrelation
- Unterschiede zwischen Korrelation und Regression
- Berechnung linearer Regressionsmodelle
- Signifikanztests für Modell und Koeffizienten

Bivariate Korrelationskoeffizienten | ab Ordinalskala

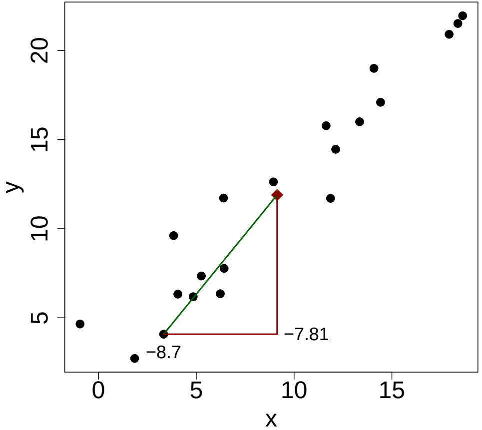


Koordinate von $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ | Mittel der beiden gemessenen Variablen



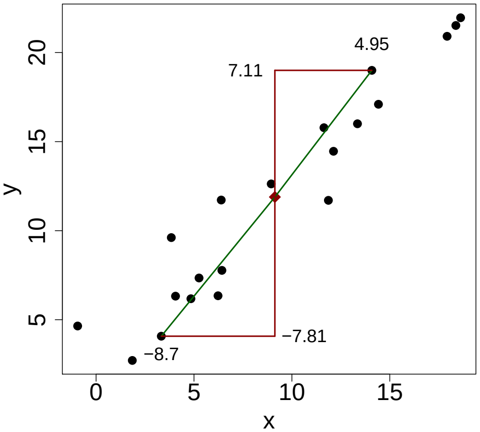
Kovarianz | Illustration 2

Punktvarianzen | $x_3 - \bar{x} = -7.81$ und $y_3 - \bar{y} = -5.80$ | $-7.81 \cdot -5.80 = 45.30$

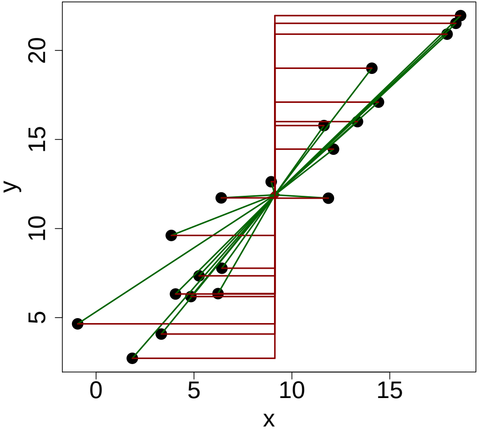


Kovarianz | Illustration 3

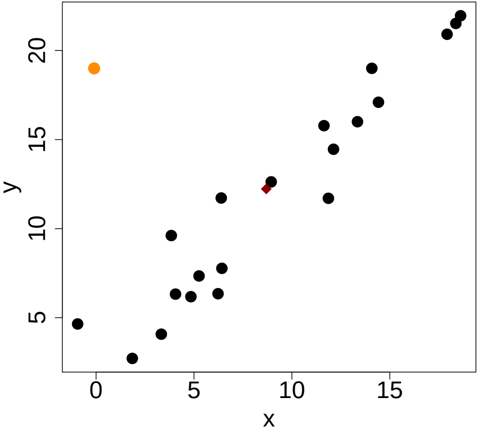
Punktvarianzen | $x_{17} - \bar{x} = 4.95$ und $y_{17} - \bar{y} = 7.11$ | $4.95 \cdot 7.11 = 35.19$



Puntvarianzen für alle $\langle x_i, y_i \rangle$ $cov(x, y) = 34.52$

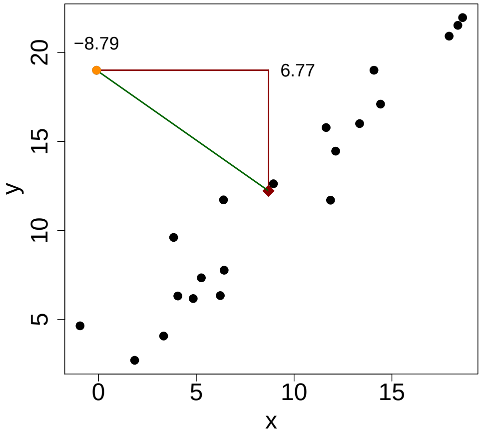


Ausreißer bei ansonsten positiver Kovarianz | Negatives Produkt der Punktvarianzen



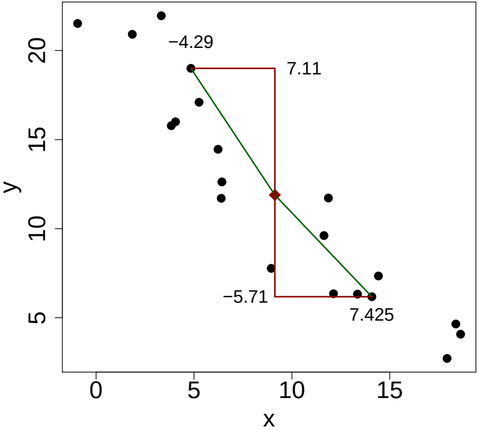
Kovarianz | Illustration 6

Punktvarianzen | $x_{21} - \bar{x} = 6.77$ und $y_{21} - \bar{y} = -8.79$ | $6.77 \cdot -8.79 = -59.51$



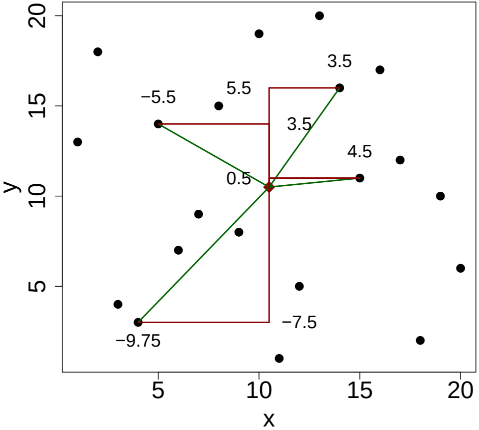
Negative Kovarianz

Tendenziell negative Abhängigkeit | Punktvarianzen überwiegend | $cov(x, y) = -33.77$



Kovarianz nahe Null

Ohne Abhängigkeit | Kovarianz nahe 0 | $cov(x, y) = -1.74$



Kovarianz | Kombination der Abweichung der Messpunkte vom jeweiligen Mittel

$$cov(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{n-1}$$

Summe der Produkte | Der Zählerterm | $SP(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$

- $x_i - \bar{x} > 0$ und $y_i - \bar{y} > 0$ | Beitrag zur Kovarianz positiv
- $x_i - \bar{x} < 0$ und $y_i - \bar{y} < 0$ | Beitrag zur Kovarianz positiv
- $x_i - \bar{x} > 0$ und $y_i - \bar{y} < 0$ | Beitrag zur Kovarianz negativ
- $x_i - \bar{x} < 0$ und $y_i - \bar{y} > 0$ | Beitrag zur Kovarianz negativ

Korrelationskoeffizient | Im Gegensatz zur Kovarianz skalenunabhängig

$$r(x,y) = \frac{cov(x,y)}{s(x) \cdot s(y)}$$

Pearson-Korrelation

r^2 und Siginifikanztests

- Maß der Varianzerklärung durch r: r^2 (vgl. t-Test)
- Signifikanztest möglich: Schluss auf Korrelation in der Grundgesamtheit
- $df_r = n - 2$
- Unter der Null (keine Korrelation) t-verteilt:
  $t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$
- ...oder Tabellen (z. B. G&W, B.6)

Voraussetzungen

- Intervallskalierung
- lineare Abhängigkeit
- bei kleinen n: Normalverteilung für x und y

- wenn nicht: Spearmans Rang-Korrelation

Spearmans Rang-Korrelation

- mathematisch nicht andere als eine Pearson-Korrleation
- vorher: Umrechnung der rohen x,y-Werte in Ränge
- bei gleichen Werten: alle gleichen Werte bekommen Rang-Mittel

Werte in Ränge umrechnen

Ein Beispiel zur Umwandlung in Ränge:

Index:	1	2	3	4	5
Messwerte x:	4	7	3	1	3
Messwerte y:	9	12	11	2	8

Statt der Messwerte arbeitet man mit den Rängen der Messwerte an den jeweiligen Indexen.

Index:	1	2	3	4	5
Ränge der Messwerte x:	4	5	2.5	1	2.5
Ränge der Messwerte y:	3	5	4	1	2

Abkürzung der Berechnung

Wenn $Rang(x_i)$ der Rang für x_i in x ist:

Spearmans Rang-Korrelation:

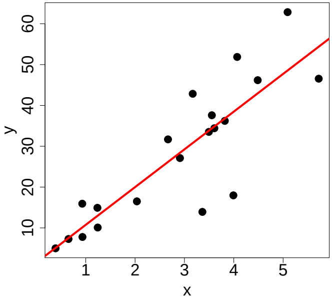
$$r_S = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} (Rang(x_i) - Rang(y_i))^2}{n(n^2 - 1)}$$

Unterschiede zwischen Korrelation und Regression

- Korrelation: Stärke des Zusammenhangs
- Regression: genaue Funktion zur Modellierung des Zusammenhangs

- Korrelation: Diagnostik/Test
- Regression: Vorhersage (und Test)

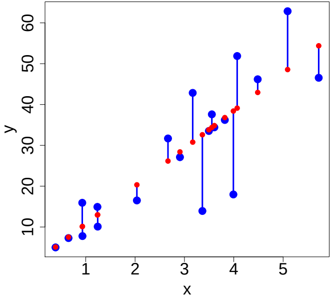
Spezifikation der Funktion für die Regressionsgerade



- Schnittpunkt mit der y-Achse (Intercept): a
- Steigung (Slope): b (b heißt auch Koeffizient)
- Regressiongleichung (=Modell): $\hat{y} = b \cdot x + a$
- Für jeden beobachteten Wert: $y_i = b \cdot x_i + a + e_i$ (e_i als Fehlerterm)

Idee der kleinsten Quadrate

Die vom Modell vorhergesagten Werte (rot, auf der Regressionsgerade) sollen insgesamt einen so geringen Abstand wie möglich zu den Beobachtungen (blau) haben.



Die Summe der quadrierten negativen und positiven Differenzen (blau) soll minimiert werden (=kleinste Quadrate): Minimierung von $E = \sum e^2$

Berechnung der Regressionsgleichung

- Slope/Steigung: $b = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{SP(x,y)}{SQ(x)}$
- Intercept: $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$
- Der Beweis, dass dies die Gerade mit den kleinsten Quadraten schätzt, erfordert bereits erheblichen mathematischen Aufwand, den wir uns sparen.
- Determinationskoeffizient: $r^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$

Standardfehler für die Gleichung

- Wie stark variiert der Fehler für Stichproben einer Größe?
- $SF_{residual} = \sqrt{\frac{\sum e^2}{n-2}}$
- Je kleiner $SF_{residual}$, desto besser das Modell.
- Beachte: n wird größer (größere Stichprobe): $SF_{residual}$ wird kleiner.
- Und: Fehler e werden kleiner: $SF_{residual}$ wird kleiner.

F-Test für Model

- Wie bei ANOVA: $F = \frac{erklaerte\ Varianz}{zufaellige\ Varianz} = \frac{s^2_{regression}}{s^2_{residual}}$
- zufällige Varianz: $s^2_{residual} = \frac{(1-r^2) \cdot SQ(y)}{1}$
- erklärte Varianz: $s^2_{regression} = \frac{r^2 \cdot SQ(y)}{n-2}$
- Freiheitsgrade sind immer $df_1 = 1$ und $df_2 = n - 1$.
- Beachte: r^2 ist in [0..1] und teilt die Varianz von y auf.

Standardfehler und t-Test für Koeffizienten

- Für b und a kann je ein Standardfehler angegeben werden.
- $SF(b) = \frac{\sqrt{\frac{\sum e^2}{n-1}}}{\sqrt{SQ(x)}}$
- Unter der NULL: $b = 0$ ist dann t-verteilt:
  $t = \frac{b}{SF(b)}$

Mehrere unabhängige

- Design bei einfachem LM:
  - eine intervallskalierte Abhängige
  - eine Unabhängige
- wie bei mehrfaktorieller ANOVA:
  - oft interessiert mehrfaktorielle Abhängigkeit

Multivariate Modellgleichung

Mehrere Koeffizienten im allgemeinen linearen Modell:

$$\hat{y} = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 \ldots b_n \cdot x_n + a$$

Konzeptuell bleibt die Berechnung aller Werte und Tests gleich,
die Mathematik wird ungleich komplizierter.

Man schreibt R^2 statt r^2.

Normalitätsannahme

Die Residuen E müssen normalverteilt sein.
(als Diagnostik für: Die Messwerte müssen normalverteilt sein.)

- Missverständnis: Test aller Residuen auf Normalität
- denn: Für jedes x_i müssen die e normalverteilt sein.
- erfordert mehrere Messungen pro x_i oder Intervallbildung
- größere Stichproben, kleinere Probleme
- visuelle Diagnose: Q-Q-Plots (hier nicht behandelt)

Unabhängigkeit

Jedes y_i darf nur von x_i abhängen,
niemals zusätzlich von x_j mit $i \neq j$.

- mathematisch: nicht-lineare Abhängigkeit
- konzeptuell: Zeitserien
- konzeptuell: Sequenzen in Texten
- Lösung: andere Modellspezifikation

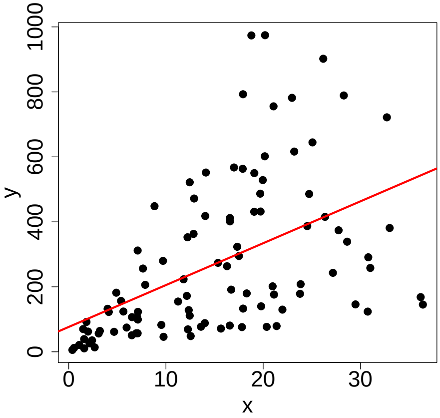
Homoskedastizität

Die Residuen müssen homoskedastisch verteilt sein.

- Bedeutung: Die Varianz der e muss über alle x homogen sein.
- vgl. die Forderung der „Varianzhomogenität“ bei t-Test und ANOVA

Darstellung heteroskedastischer Residuen

Hier wird die Varianz der Residuen mit steigendem x immer größer.
Ein lineares Modell versagt hier wegen verletzter Verteilungsannahmen.



Lösung von LM-Krisen

- mehr Daten ziehen, Daten transformieren
- generalisierte lineare Modelle (GLM)
  legen andere Verteilungsannahmen zugrunde
- (generalisiert) additive Modelle (GAM)
  schätzen Smoothingfunktionen für Koeffizienten

n Gruppen der ANOVA können als *n* dichotome Variablen dargestellt werden:

		ANOVA-Gruppen		
		A_1	A_2	A_3
Regressor	x_1 =	1	0	0
	x_2 =	0	1	0
	x_3 =	0	0	1

Normale Modellspezifikation:

$$\hat{y} = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n + a$$

Da jeweils nur eins der $x_i = 1$ und alle anderen immer 0 werden,
wird einfach der Wert des entsprechenden β_i (plus a) vorhergesagt.

Spearmans Rang-Korrleation in R

Die Funktion `cor()` hat ein Argument `method`,
das als `"spearman"` angegeben werden kann.

```
> cor(x, y, method = "spearman")
```

- Modellformeln: `y~x`
  „y abhängig von x“
- Mehrere Unabhängige: `y~x1+x2`
- Mehrere Unabhängige mit Interaktion: `y~x1*x2`
- Mehrere Unabhängige nur Interaktion: `y~x1:x2`

- Lineares Modell schätzen und speichern:
  ```
  > m <- lm(y~x)
  ```
- Ausgabe Evaluation:
  ```
  > summary(m)
  ```

Ausgabe LM

Interpretieren Sie diese Ausgabe anhand der Folien:

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
Min        1Q    Median       3Q       Max
-20.4298  -2.4920  -0.2625   3.8038  14.2922

Coefficients:
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    1.513      4.321   0.350     0.73
x              9.242      1.333   6.933 1.77e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 9.008 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7275, Adjusted R-squared:  0.7124
F-statistic: 48.06 on 1 and 18 DF,  p-value: 1.768e-06
```

Äquivalenz von ANOVA und LM

Binäre Kodierung der Gruppenzugehörigkeit
Hier: drei Gruppen von einem Faktor (einfaktorielle ANOVA mit drei Gruppen)

		ANOVA-Gruppen		
		A_1	A_2	A_3
Regressor	$x_1 =$	1	0	0
	$x_2 =$	0	1	0
	$x_3 =$	0	0	1

$$\hat{y} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n + a \tag{7}$$

Volles Modell, Kleinste Quadrate

Kleinste Quadrate | für jeden Koeffizienten b_i jeweils Mittelwert der Gruppe i ($\bar{y}_i$)
Außerdem erstmal $a = 0$ | dann:

$$\hat{y} = \bar{y}_1 x_1 + \bar{y}_2 x_2 + \cdots + \bar{y}_n x_n \tag{8}$$

Allgemeines Mittel als Intercept | $a = \bar{Y}$
Koeffizienten = Abweichung Gruppenmittel vom Gesamtmittel

$$\hat{y} = (\bar{y}_1 - \bar{Y})x_1 + (\bar{y}_2 - \bar{Y})x_2 + \cdots + (\bar{y}_n - \bar{Y})x_n + \bar{\mathbf{Y}} \tag{9}$$

Beispiel für einen Datenpunkt aus Gruppe 2

Entsprechend in ANOVA A_2 | Unabhängige im LM: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 0$
Schätzung für den y-Wert:

$$\begin{aligned}
\hat{y} &= (\bar{y}_1 - \bar{Y})0 + (\bar{\mathbf{y}}_\mathbf{2} - \bar{\mathbf{Y}})\mathbf{1} + \cdots + (\bar{y}_n - \bar{Y})0 + \bar{\mathbf{Y}} \\
&= 0 + (\bar{y}_2 - \bar{Y}) + \cdots + 0 + \bar{Y} \\
&= \bar{y}_2 - \bar{Y} + \bar{Y} \\
&= \bar{y}_2
\end{aligned} \tag{10}$$

Jeder $\hat{y}$-Wert | Mittel der beobachteten y-Werte der Gruppe, zu der er gehört

Das ergibt für ausschließlich nominale Unabhängige in der Tat den Schätzer mit den kleinsten Quadraten (s. Maxwell & Delaney, Kap. 3).

Test über Modell

Kernfrag | Bringen Abweichungen der Gruppenmittel eine Verbesserung der Vorhersage gegenüber dem Gesamt-Mittel?

Methode | Vergleich der Residuen E_f für volles Modell (mit Gruppenmitteln) vs. Residuen E_r für reduziertes Modell (ohne Gruppenmittel)

Gleichung 11 für volles und Gleichung 12 für reduziertes Modell

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{f}} = (\bar{y}_1 - \bar{Y})x_1 + (\bar{y}_2 - \bar{Y})x_2 + \cdots + (\bar{y}_n - \bar{Y})x_n + \bar{Y} \tag{11}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{r}} = \bar{Y} \tag{12}$$

Vergleich von Varianzen = ANOVA | F-Verteilung

$$F = \frac{\frac{E_r - E_f}{df_r - df_f}}{\frac{E_f}{df_f}} = \frac{\text{erklärte Varianz}}{\text{zufällige Varianz}} \quad (13)$$

1. Residuen = Maß für die Varianz
2. Residuen des vollen Modells = Maß für die Varianz, die trotz der Erklärungskraft des vollen Modells bleibt (= unerklärte Varianz)
3. Residuen des reduzierten Modells = Maß für die Gesamtvarianz (Abweichungen vom Gesamt-Mittel)
4. Zähler | trotz der Erklärung verbleibende Varianz – vollen Varianz abgezogen (= erklärte Varianz)
5. Quotient insgesamt | Zählervarianz in Bezug zur Gesamtvarianz (klassischer F-Quotient, s. ANOVA)

Generalisierte Lineare Modelle

Übersicht

- Generalisierte Lineare Modelle mit Logit-Link = Logistische Regression
- Regression zur Modellierung dichotomer Abhängiger
- Modellselektion für GLMs
- Modellevaluation für GLMs
- Problemlösungen (Ausblick):
  Zufallseffekte (GLMMs), Kreuzvalidierung, Bootstrapping, GAMs

Literatur

- Backhaus u. a. 2011
- Zuur u. a. 2009
- Fahrmeir u. a. 2009

Beispiel für GLM in der Korpuslinguistik

Alternation von Genitiv und Kasusidentität
in der Maßangabe im Deutschen:

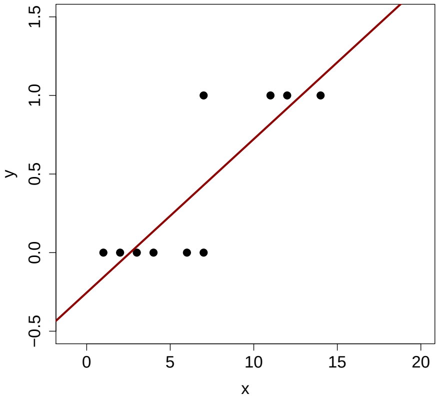
- *Wir trinken eine Flasche guten Wein.* (Agree=1)
- *Wir trinken eine Flasche guten Weines.* (Agree=0)
- Welche Faktoren beeinflussen die Wahl von Agree=1 oder Agree=0?
- Unabhängige hier:
  - Kasus der Maßangabe (Nom, Akk, Dat)
  - Definitheit der NP (0, 1)
  - Maß ist als Zahl geschrieben (0, 1)
- Das Beispiel kommt dann in der R-Session tatsächlich dran.

Problem von LM für kategoriale Abhängige

- LM sagt kontinuierliche Werte voraus
- unplausibel für dichotome Abhängige
- auch als Eintrittswahrscheinlichkeit unplausibel (außerhalb [0,1])
- Normalitätsannahmen nicht erfüllt

Illustration der Probleme

Datenpunkte einer dichotomen Abhängigen *y*
zu einer intervallskalierten Unabhängigen *x*
und lineares Modell *y~x*



Logits

- Vorhersage der Eintrittswahrscheinlichkeiten
- lineare Kombination der Regressoren wie beim LM
- Linearkombination ergibt die Logits (z):

$$z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \beta_0$$

Link-Funktion

Die Logits werden transformiert in Eintrittswahrscheinlichkeiten mittels der logistischen Funktion (e ist die Euler-Konstante):

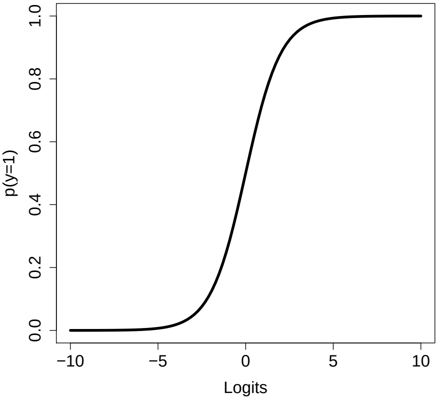
$$\hat{p}(y=1) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

Bei der binären Vorhersage dann:

$$\hat{y} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \hat{p}(y=1) \leq 0.5 \\ 1 & \text{wenn } \hat{p}(y=1) > 0.5 \end{cases}$$

Darstellung des Effekts der Logit-Transformation

Die transformierten Logits als $\hat{p}(y = 1)$:



Interpretation der Koeffizienten

- Interpretation der Koeffizienten nur indirekt möglich
- β_i positiv $\Rightarrow$ positiver Einfluss auf $\hat{p}(y = 1)$
- β_i negativ $\Rightarrow$ negativer Einfluss auf $\hat{p}(y = 1)$
- Stärke des Einflusses: nicht linear
- linearer Einfluss nur auf die Logits, nicht auf $\hat{p}(y = 1)$

Chancen (Odds) des Modells

- Chance (Odds): o(y=1) = $\frac{p(y=1)}{1-p(y=1)}$
- Die Chancen des Modells verteilen sich (zum Glück) einfach:

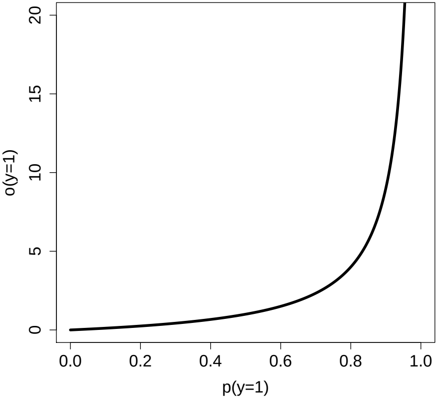
$$o(y{=}1) = \frac{p(y=1)}{1-p(y=1)} = e^z$$

Beachte: $ln(e^z) = z = Logits$

- Die Chance liegt offensichtlich in $[0, \infty]$.
- Mit steigender Wahrscheinlichkeit gehen die Odds gegen ∞.
- Bei einem Logit von 3 ist die Chance für $y = 1$ doppelt so hoch wie bei einem Logit von 1.5 usw.

Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeit und Odds

In der Interpretation stellen die Odds die Linearität her,
die den Wahrscheinlichkeiten bei der log. Regression fehlen.



Effekt-Koeffizienten

Für die Interpretation der einzelnen Koeffizienten β_i
im Sinne eines Chancenverhältnisses:

$$or(y = 1|x_i) = e^{\beta_i}$$

In Worten: Steigt x_i (intervallskaliert!) um eine Einheit,
dann steigt die Chance für $y = 1$ um e^{β_i}.

Ein Chancenverhältnis von 1 entspricht einem Koeffizienten 0,
also einem ohne jeglichen Effekt.

Zusammenfassung nach Backhaus et al., S. 437

Beziehungen zwischen den Maßen
sowie ihre Wertebereiche.

Einzel-Koeffizient		Gesamtmodell		
Koeffizient	**Chancenverhältnis**	**Logit**	**Chance**	$\hat{p}(y = 1)$
$\beta > 0$	$e^{\beta} > 1$	steigt um βx	steigt um $e^{\beta x}$	steigt
$\beta < 0$	$e^{\beta} < 1$	sinkt um βx	sinkt um $e^{\beta x}$	sinkt
$[-\infty, +\infty]$	$[0, +\infty]$	$[-\infty, +\infty]$	$[0.. + \infty]$	$[0, 1]$

Maximum-Likelihood-Schätzung

- Es gibt keine direkte Lösung für die Koeffizientenberechnung.
- Das Schätzverfahren funktioniert iterativ.
- Es kommt der sog. Maximum-Likelihood-Schätzer zum Einsatz.

Maximum Likelihood für Modell I

- Es gibt beliebig viele Modelle = Belegungen für die β-Koeffizienten
- Das wahrscheinlichste Modell angesichts der Beobachtungen ist zu finden.
- In den Beobachtungsdaten für jeden Fall k: $y_k = 1$ oder $y_k = 0$
- Für jeden Beobachtungswert y_k betrachtet man:

$$p_k = \left(\frac{1}{1+e^{-z_k}}\right)^{y_k} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}}\right)^{1-y_k}$$

Maximum Likelihood für Modell II

$$p_k = (\frac{1}{1+e^{-z_k}})^{y_k} \cdot (1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}})^{1-y_k}$$

- z_k ist der Modell-Logit für die zu y_k empirische gemessenen x.
- In den ( ) steht links die vom Model geschätzte Wahrscheinlichkeit $\hat{p}(y_k)$ und rechts jeweils die Gegenwarscheinlichkeit dazu $1 - \hat{p}(y_k)$.
- Wenn der Modellwert nahe an 0 (z. B. 0.1) und $y_k = 0$ ist: $p_k = (0.1)^0 \cdot (0.9)^1 = 1 \cdot 0.9 = 0.9$ („gute“ Approximation)
- Wenn der Modellwert bei gleichen empirischen Daten umgekehrt ist: $p_k = (0.9)^0 \cdot (0.1)^1 = 1 \cdot 0.1 = 0.1$ („schlechte“ Approximation)
- Die p_k messen also die Güte der vom Modell vorhergesagten Wahrscheinlichkeit für jeden beobachteten Datenpunkt.

Maximum Likelihood für Modell III

- Bei unabhängigen Ereignissen $E_{1..n}$ gilt:
  $P(E_1 + E_2 + \cdots + E_n) = \prod_i P(E_i)$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Modells (seine „Likelihood“) angesichts aller empirischen Werte y_k ist also:

$$L = \prod_k p_k$$

- Der Maximum Likelihood-Schätzer maximiert L
  für die Belegungen der β-Koeffizienten (= konkurrierende Modelle).

Dummy-Kodierung

Wie bei der LM-Variante der ANOVA müssen kategoriale Unabhängige mit mehr als zwei Ausprägungen als dichotome Dummy-Variablen kodiert werden.

Beispiel für dreiwertige Variable A und Dummy-Regressoren $x_{1..3}$

	$\mathbf{A = 1}$	$\mathbf{A = 2}$	$\mathbf{A = 3}$
$\mathbf{x_1} =$	1	0	0
$\mathbf{x_2} =$	0	1	0
$\mathbf{x_3} =$	0	0	1

Achtung! De facto gibt es für einen kategorialen Regressor mit k Ausprägungen nur $k - 1$ Dummies (s. Abschnitt zum Intercept).

Beispiel für eine als $x_{1..3}$ dummy-kodierte Unabhängige A
und eine intervallskalierte Unabhängige x_4:

$$\hat{p}(y = 1) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$\text{mit } z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_0$$

Dabei treten die Werte auf:

- $x_{1..3}$: 0 oder 1
- Wenn $x_1 = 1$, dann $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ usw.

Effekt-Koeffizienten für Nominale

(Wh.:) Für die Interpretation der einzelnen Koeffizienten β_i im Sinne eines Chancenverhältnisses:

$$or(y = 1|x_i) = e^{\beta_i}$$

In Worten für nominale Regressoren bzw. ihr dichotomen Dummies:

Wenn $x_i = 1$ (x_i ist dichotom skaliert!),
dann ist die Chance $o(y = 1)$ um e^{β_i} höher als bei $x_i = 0$.
Andere Fälle gibt es wegen der dichotomen Skalierung nicht.

Der Intercept in GLMs

- „Intercept“ (β_0) in GLMs ≠ Schnittpunkt mit y-Achse

- intervallskalierte Regressoren:
  - einfachstes binomiales GLM: $\hat{p}(y = 1) = \beta_1 x_1 + {}_{0}$
  - Wenn $x_1 = 0$, wird β_0 vorhergesagt.

- bei Dummy-Variablen wird eine zur Referenz-Kategorie:
  - GLM mit drei Dummies: $\hat{p}(y = 1) = \beta_{Akk} \cdot x_{Akk} + \beta_{Dat} \cdot x_{Dat} + {}_{\mathrm{Nom}}$
  - „Alle Regressoren werden 0“ heißt hier, es liegt Nom vor.
  - Die Dummies modellieren
    den Unterschied zwischen Referenz (Nom) und den anderen Fällen.
  - Die Referenzkategorie sollte die häufigste sein, besonders bei Interaktionen.

Interaktionen

- nichts wesentlich anderes als in LM
- vereinte Effekte, die über die Einzeleffekte hinausgehen
- bei Interpretationsschwierigkeiten ggf. nachlesen

Prinzip der Modellauswahl

- Signifikanz wird für das Modell und Koeffizienten bestimmt.
- Allerdings: Signifikanz heißt nicht automatisch Modellgüte.
- Je „weniger signifikant“ ein Regressor,
  desto wahrscheinlicher kann er ohne Güteverlust entfernt werden.
- Modellselektion: Auswahl des einfachsten Modells
  mit der größten Modellgüte.

- Achtung bei dichotomen Dummy-Regressoren:
  Immer alle Dummies im Modell lassen oder herausnehmen,
  die zu einer kategorialen Unabhängigen gehören!

Weglassen von Faktoren: Log-Likelihood-Ratio-Test

1. Weglassen des Regressors mit der geringsten Signifikanz
2. Vergleich des vollen und des reduzierten Modells
3. bei nicht-signifikantem Unterschied: Regressor weglassen
4. von vorne beginnen...

Log-Likelihood-Ratio für Likelihood des vollen (L_f) und reduzierten (L_r) Modells:

$$LR = (-2 \cdot ln(L_r)) - (-2 \cdot ln(L_f))$$

Test: Unter der H0 $L_r = L_f$ ist die LR χ^2-verteilt
mit $df = df_f - df_r$ (df jeweils: Zahl der Regressoren)

Ist die LR größer als der kritische Wert: Regressor im Modell lassen!

Weglassen von Faktoren: AIC

Regressoren-Selektion auf Basis des Akaike Information Criterion:

- Ablauf wie bei LR-Test
- Maß für Modellvergleich ist das AIC
- Informationstheoretisches Maß:
  Distanz des Modells zur (geschätzten) absoluten Realität
- Je kleiner das AIC, desto besser das Modell.
- Achtung: Nur zum Vergleich eingebetteter Modelle verwenden, also bei gleichem Datensatz, und wenn das reduzierte Modell eine Teilmenge der Regressoren des vollen enthält.

Evaluation der Koeffizienten

- Signifikanzbestimmung für einzelne Regressoren
- wie bei LM: Standardfehler für jeden Regressor
- darauf basierend: z-Wert für jeden Regressor…
- und z-Test auf Basis der Normalverteilung

Log-Likelihood-Ratio-Test für Modelle

- Log-Likelihood-Ratio-Test für Gesamtheit aller Regressoren
- volles Modell (ggf. nach Eliminierung von Koeffizienten)
- Nullmodell, das nur einen konstanten Term zur Vorhersage nutzt
- ähnlich den Modellvergleichen im Kapitel „ANOVA als LM“

Pseudo-R^2

- auch Vergleich des vollen Modells und Nullmodels
- Interpretation wie gewohnt: Varianzerklärung

$$\text{Cox \& Snell: } R_C^2 = 1 - \left(\frac{L_0}{L_f}\right)^{\frac{2}{n}}$$

Problem: Geht nicht bis 1!

$$\text{Nagelkerke: } R_N^2 = \frac{R_C^2}{R_{max}^2}$$

$$\text{mit } R_{max}^2 = 1 - (L_0)^{\frac{2}{n}}$$

Vorhersagegüte

- gutes GLM ⇒ gute Vorhersagen
- einfache Vorhersagegüte: Anteil der richtigen Vorhersagen
- instruktiv: Vergleich mit „Baseline“
  (= Anteil der richtigen Vorhersagen bei Vorhersage der modalen Kategorie)

- Problem wie bei Fehlerreduktion:
  auch bei starkem Effekt nicht unbedingt Umkehrung der modalen Kategorie

Überdispersion

- zugrundegelegte Verteilung: Binomialverteilung
- Überdispersion: Varianz ist größer als für Binomialverteilung angenommen
- mögliche Gründe:
  - unbeobachtete Heterogenität (fehlende erklärende Variablen)
  - Gruppenbildung (= Beobachtungen nicht unabhängig)

Schätzung des Dispersionsparameters:

$$\hat{\phi} = \sum\left(\frac{R_P}{df_R}\right)^2$$

wobei: R_P ist das Pearson-Redidual (hier nicht behandelt) und

df_R die Residual-Freiheitsgrade $n - p$, p die Anzahl der Modellparameter

Lösung bei Überdispersion

- Problem: $\hat{\phi}$ deutlich über 1
- Lösung: Schätzung der Parameter bleibt (im Ergebnis) gleich
- aber für die Evaluation der Koeffizienten:
  - Signifikanzschätzung mit größeren Standardfehlern
  - t-Verteilung statt Normalverteilung (z-Werte)

- Ein „Quasi-Likelihood-Modell“ folgt im Wesentlichen dieser Strategie.

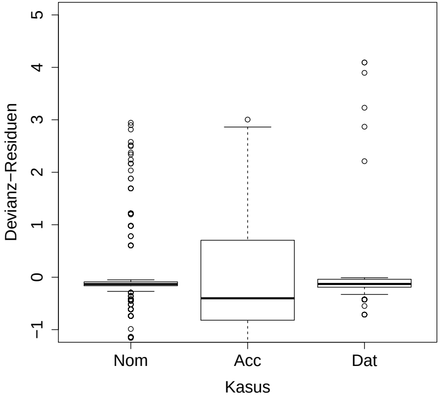
(Multi-)kollinearität

- (Multi-)kollinearität: Abhängigkeit zwischen Regressoren
- Probleme: β-Fehler, Überanpassung, ungenaue Koeffizientenschätzung
- Test: Varianzinflations-Faktoren (nicht im Detail behandelt)
- Lösungen z. B.: mehr Daten, Regressoren weglassen
- Test des Modells auf Robustheit trotz Kollinearität (z. B. Kreuzvalidierung)

Varianzhomogenität

Die Residuen werden im GLM zwar anders berechnet,
sind aber trotzdem ein Maß für die Varianz.

Die Varianz sollte nicht mit den Regressorausprägungen variieren!



Kreuzvalidierung

- bei Problemen: Test auf Robustheit des Modells
- Idee bei k-facher Kreuzvalidierung:
    1. teile Daten in k Teile
    2. Modellanpassung auf $k - 1$ von k Teilen
    3. Prüfung der Vorhersage auf verbleibendem Teil
    4. Modell ist Robust, wenn die Parameter in der Kreuzvalidierung nicht wesentlich anders geschätzt werden als im Ursprungsmodell
- wenn $k = n$: Leave-One-Out-Kreuzvalidierung
- verwandtes Verfahren: Bootstrapping (mit Zurücklegen)

Andere GLMs

Einige typische Anwendungsfälle für nicht-binomiale GLMs:

- Zähldaten: Poisson
- Zähldaten mit Überdispersion: negativ-binomial
- bestimmte Intervalldaten in $[0, \infty]$: Gamma
- viele Nullen: zero-inflated Varianten

Das Vademecum, vor allem für R-Benutzer:
Zuur u. a. 2009

Gemischte Modelle (GLMMs)

- typisches gemischtes Modell: mit Zufallseffekten
- Idee: Varianzunterschiede oder Dispersion durch Gruppen
- mögliche Gruppen in linguistischen Experimenten:
  - Werte von einem Probanden bei Befragung, Rating-Studie
  - Werte zu einem Lexem bei Korpusstudie
  - Werte aus einer Textsorte bei Korpusstudie
- ideal: Gruppeneffekte durch zusätzliche normale Regressoren auflösen
- sonst (vereinfacht): Schätzung eines Intercepts pro Gruppe
- Typisch für Zufallseffekte: In der GG sind vermutlich viel mehr Ausprägungen vorhanden, als gemessen (wie z. B. Sprecher oder Lexeme) wurden.

Generalisierte Additive Modelle (GAMs)

GAMs oder „nichtparametrische Regression“

$$\hat{y} = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n) + \beta_0$$

- f_n: besondere Art von Funktion, die geschätzt wird
- Wenn die Funktionen ungefähr linear sind, ist ein GLM genauso gut.
- Interpretation von GAMs: viel schwieriger als GLMs
- letzter Ausweg bei schlechtem GLM

In R I

1. Modell-Anpassung:

```
> m <- glm(y x1+x2*y3, data=mydata, family="binomial")
> summary(m)
```

2. Chancenverhältnisse für Koeffizienten:

```
> exp(coef(m))
```

3. 95%-Konfidenzintervalle für Chancenverhältnisse:

```
> exp(confint(m))
```

4. Log-Likelihood extrahieren:

```
> logLik(m)
```

5. Nagelkerke R^2:

```
> library(fmsb); NagelkerkeR2(m)
```

6. LR-Test:

```
> m0 <- glm(y 1, data=mydata, family="binomial")
> lr <- (-2*logLik(m0))-(-2*logLik(m))
> pchisq(lr, m$rank-m0$rank)
```

7. Modellselektion (wenn nicht von Hand):
```
> drop1(m)
```
8. Varianzinflationsfaktoren:
```
> library(car); vif(m)
```
9. Dispersion $\hat{\phi}$ schätzen:
```
> sum(resid(m, type="pear")^2 / df.residual(m))
```
10. Vorhersagegüte:
```
> pred <- ifelse(predict(m) <= 0.5, 0, 1)
> tab <- table(pred, mydata$response)
> sum(diag(tab))/sum(tab)
```
11. Fehlerrate in Kreuzzvalidierung (hier $k = 10$):
```
library(boot); cv.glm(mydata, m, K=10)$delta
```

Gemischte Modelle

Literatur I

Backhaus, Klaus, Bernd Erichson, Wulff Plinke & Rolf Weiber. 2011. *Multivariate Analysemethoden*. 13. Aufl. Berlin etc.: Springer.

Bortz, Jürgen & Gustav Lienert. 2008. *Kurzgefasste Statistik für die klinische Forschung*. Heidelberg: Springer.

Bortz, Jürgen & Christof Schuster. 2010. *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. 7. Aufl. Berlin: Springer.

Carnap, Rudolf. 1928. *Der logische Aufbau der Welt*. Berlin: Weltkreis Verlag.

Cook, Philippa & Felix Bildhauer. 2013. Identifying "aboutness topics": two annotation experiments. *Dialogue and Discourse* 4(2), 118–141.

Duhem, Pierre. 1914. *La Théorie Physique: Son Objet et sa Structure*. Marcel Riviera & Cie.

Fahrmeir, Ludwig, Thomas Kneib & Stefan Lang. 2009. *Regression – Modelle, Methoden und Anwendungen*. 2. Aufl. Heidelberg etc.: Springer.

Fisher, Ronald A. 1935. *The Design of Experiments*. London: Macmillan.

Gravetter, Frederick J. & Larry B. Wallnau. 2007. *Statistics for the Behavioral Sciences*. 7. Aufl. Belmont: Thomson.

Laudan, Larry. 1990. Demystifying Underdetermination. In C. Wade Savage (Hrsg.), *Scientific Theories*, 267–297. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Maxwell, Scott E. & Harold D. Delaney. 2004. *Designing experiments and analyzing data: a model comparison perspective*. Mahwa, New Jersey, London: Taylor & Francis.

Literatur II

Mayo, Deborah G. 1996. *Error and the growth of experimental knowledge*. Chicago: University of Chicago Press.

Mayo, Deborah G. 2018. *Statistical Inference as Severe Testing: How to Get Beyond the Statistics Wars*. Cambridge: Cambridge University Press.

Popper, Karl Raimund. 1962. *Conjections and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*. New York: Basic Books.

Quine, Willard Van Orman. 1951. From a Logical Point of View. In 2. Aufl. Cambridge: Harvard University Press. Kap. Two Dogmas of Empiricism, 20–46.

Ronneberger-Sibold, Elke. 2010. Der Numerus – das Genus – die Klammer : die Entstehung der deutschen Nominalklammer im innergermanischen Vergleich. In Antje Dammel, Sebastian Kürschner & Damaris Nübling (Hrsg.), *Kontrastive Germanistische Linguistik. Teilband 2*, Bd. 206/209 (Germanistische Linguistik), 719–748. Hildesheim: Olms.

Zuur, Alain F., Elena N. Ieno, Neil Walker, Anatoly A. Saveliev & Graham M. Smith. 2009. *Mixed effects models and extensions in ecology with R*. Berlin etc.: Springer.

Autor

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

https://rolandschaefer.net
roland.schaefer@uni-jena.de

Lizenz

Creative Commons BY-SA-3.0-DE