Statistik
09. Generalisierte Lineare Modelle

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

stets aktuelle Fassungen: `https://github.com/rsling/VL-Deutsche-Syntax`

Inhalt

GLMs

Übersicht

- Generalisierte Lineare Modelle mit Logit-Link = Logistische Regression
- Regression zur Modellierung dichotomer Abhängiger
- Modellselektion für GLMs
- Modellevaluation für GLMs
- Problemlösungen (Ausblick):
  Zufallseffekte (GLMMs), Kreuzvalidierung, Bootstrapping, GAMs

Literatur

- Backhaus u. a. 2011
- Zuur u. a. 2009
- Fahrmeir u. a. 2009

Beispiel für GLM in der Korpuslinguistik

Alternation von Genitiv und Kasusidentität
in der Maßangabe im Deutschen:

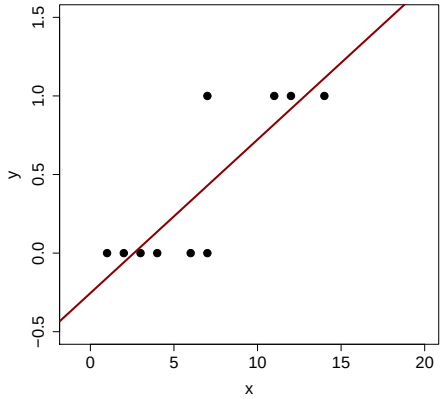
- *Wir trinken eine Flasche guten Wein.* (Agree=1)
- *Wir trinken eine Flasche guten Weines.* (Agree=0)
- Welche Faktoren beeinflussen die Wahl von Agree=1 oder Agree=0?
- Unabhängige hier:
  - Kasus der Maßangabe (Nom, Akk, Dat)
  - Definitheit der NP (0, 1)
  - Maß ist als Zahl geschrieben (0, 1)
- Das Beispiel kommt dann in der R-Session tatsächlich dran.

Problem von LM für kategoriale Abhängige

- LM sagt kontinuierliche Werte voraus
- unplausibel für dichotome Abhängige
- auch als Eintrittswahrscheinlichkeit unplausibel (außerhalb [0,1])
- Normalitätsannahmen nicht erfüllt

Illustration der Probleme

Datenpunkte einer dichotomen Abhängigen *y*
zu einer intervallskalierten Unabhängigen *x*
und lineares Modell *y*~*x*



Logits

- Vorhersage der Eintrittswahrscheinlichkeiten
- lineare Kombination der Regressoren wie beim LM
- Linearkombination ergibt die Logits (z):

$$z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \beta_0$$

Link-Funktion

Die Logits werden transformiert in Eintrittswahrscheinlichkeiten mittels der logistischen Funktion (*e* ist die Euler-Konstante):

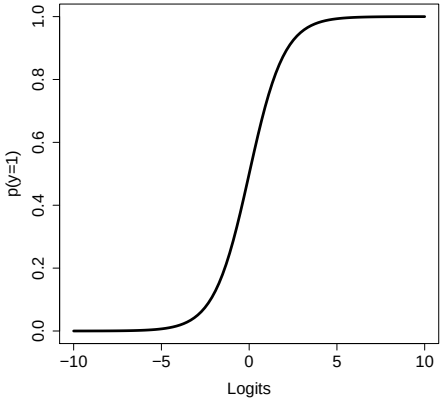
$$\hat{p}(y = 1) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

Bei der binären Vorhersage dann:

$$\hat{y} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \hat{p}(y = 1) \leq 0.5 \\ 1 & \text{wenn } \hat{p}(y = 1) > 0.5 \end{cases}$$

Darstellung des Effekts der Logit-Transformation

Die transformierten Logits als $\hat{p}(y = 1)$:



Interpretation der Koeffizienten

- Interpretation der Koeffizienten nur indirekt möglich
- β_i positiv $\Rightarrow$ positiver Einfluss auf $\hat{p}(y = 1)$
- β_i negativ $\Rightarrow$ negativer Einfluss auf $\hat{p}(y = 1)$
- Stärke des Einflusses: nicht linear
- linearer Einfluss nur auf die Logits, nicht auf $\hat{p}(y = 1)$

Chancen (Odds) des Modells

- Chance (Odds): o(y=1) $= \frac{p(y=1)}{1-p(y=1)}$
- Die Chancen des Modells verteilen sich (zum Glück) einfach:

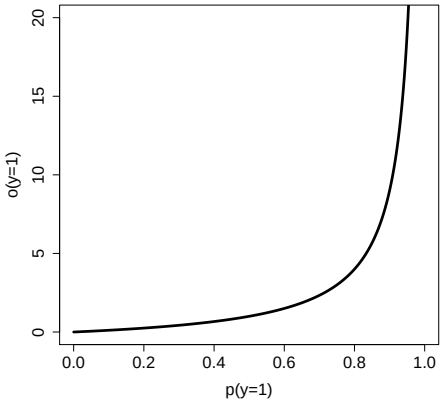
$$\text{o(y=1)} = \frac{p(y=1)}{1-p(y=1)} = e^z$$

Beachte: $ln(e^z) = z = Logits$

- Die Chance liegt offensichtlich in $[0, \infty]$.
- Mit steigender Wahrscheinlichkeit gehen die Odds gegen ∞.
- Bei einem Logit von 3 ist die Chance für $y = 1$ doppelt so hoch wie bei einem Logit von 1.5 usw.

Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeit und Odds

In der Interpretation stellen die Odds die Linearität her,
die den Wahrscheinlichkeiten bei der log. Regression fehlen.



Effekt-Koeffizienten

Für die Interpretation der einzelnen Koeffizienten β_i
im Sinne eines Chancenverhältnisses:

$$or(y = 1|x_i) = e^{\beta_i}$$

In Worten: Steigt x_i (intervallskaliert!) um eine Einheit,
dann steigt die Chance für $y = 1$ um e^{β_i}.

Ein Chancenverhältnis von 1 entspricht einem Koeffizienten 0,
also einem ohne jeglichen Effekt.

Zusammenfassung nach Backhaus et al., S. 437

Beziehungen zwischen den Maßen
sowie ihre Wertebereiche.

Einzel-Koeffizient		**Gesamtmodell**		
Koeffizient	**Chancenverhältnis**	**Logit**	**Chance**	$\widehat{\mathbf{p}}(\mathbf{y}=\mathbf{1})$
$\beta > 0$	$e^{\beta} > 1$	steigt um βx	steigt um $e^{\beta x}$	steigt
$\beta < 0$	$e^{\beta} < 1$	sinkt um βx	sinkt um $e^{\beta x}$	sinkt
$[-\infty, +\infty]$	$[0, +\infty]$	$[-\infty, +\infty]$	$[0.. + \infty]$	$[0, 1]$

Maximum-Likelihood-Schätzung

- Es gibt keine direkte Lösung für die Koeffizientenberechnung.
- Das Schätzverfahren funktioniert iterativ.
- Es kommt der sog. Maximum-Likelihood-Schätzer zum Einsatz.

Maximum Likelihood für Modell I

- Es gibt beliebig viele Modelle = Belegungen für die β-Koeffizienten
- Das wahrscheinlichste Modell angesichts der Beobachtungen ist zu finden.
- In den Beobachtungsdaten für jeden Fall k: $y_k = 1$ oder $y_k = 0$
- Für jeden Beobachtungswert y_k betrachtet man:

$$p_k = \left(\frac{1}{1+e^{-z_k}}\right)^{y_k} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}}\right)^{1-y_k}$$

Maximum Likelihood für Modell II

$$p_k = (\frac{1}{1+e^{-z_k}})^{y_k} \cdot (1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}})^{1-y_k}$$

- z_k ist der Modell-Logit für die zu y_k empirische gemessenen x.
- In den $(\ )$ steht links die vom Model geschätzte Wahrscheinlichkeit $\hat{p}(y_k)$ und rechts jeweils die Gegenwarscheinlichkeit dazu $1 - \hat{p}(y_k)$.
- Wenn der Modellwert nahe an 0 (z. B. 0.1) und $y_k = 0$ ist: $p_k = (0.1)^0 \cdot (0.9)^1 = 1 \cdot 0.9 = 0.9$ („gute“ Approximation)
- Wenn der Modellwert bei gleichen empirischen Daten umgekehrt ist: $p_k = (0.9)^0 \cdot (0.1)^1 = 1 \cdot 0.1 = 0.1$ („schlechte“ Approximation)
- Die p_k messen also die Güte der vom Modell vorhergesagten Wahrscheinlichkeit für jeden beobachteten Datenpunkt.

Maximum Likelihood für Modell III

- Bei unabhängigen Ereignissen $E_{1..n}$ gilt:
  $P(E_1 + E_2 + \cdots + E_n) = \prod_i P(E_i)$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Modells (seine „Likelihood“)
  angesichts aller empirischen Werte y_k ist also:

$$L = \prod_k p_k$$

- Der Maximum Likelihood-Schätzer maximiert L
  für die Belegungen der β-Koeffizienten (= konkurrierende Modelle).

Dummy-Kodierung

Wie bei der LM-Variante der ANOVA müssen kategoriale Unabhängige
mit mehr als zwei Ausprägungen als dichotome Dummy-Variablen kodiert werden.

Beispiel für dreiwertige Variable A und Dummy-Regressoren $x_{1..3}$

	$\mathbf{A = 1}$	$\mathbf{A = 2}$	$\mathbf{A = 3}$
$\mathbf{x_1} =$	$\mathbf{1}$	0	0
$\mathbf{x_2} =$	0	$\mathbf{1}$	0
$\mathbf{x_3} =$	0	0	$\mathbf{1}$

Achtung! De facto gibt es für einen kategorialen Regressor mit k Ausprägungen
nur $k - 1$ Dummies (s. Abschnitt zum Intercept).

Nominale Unabhängige in Modellgleichungen

Beispiel für eine als $x_{1..3}$ dummy-kodierte Unabhängige A und eine intervallskalierte Unabhängige x_4:

$$\hat{p}(y = 1) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$\text{mit } z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_0$$

Dabei treten die Werte auf:

- $x_{1..3}$: 0 oder 1
- Wenn $x_1 = 1$, dann $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ usw.

Effekt-Koeffizienten für Nominale

(Wh.:) Für die Interpretation der einzelnen Koeffizienten β_i
im Sinne eines Chancenverhältnisses:

$$or(y = 1|x_i) = e^{\beta_i}$$

In Worten für nominale Regressoren bzw. ihr dichotomen Dummies:

Wenn $x_i = 1$ (x_i ist dichotom skaliert!),
dann ist die Chance $o(y = 1)$ um e^{β_i} höher als bei $x_i = 0$.
Andere Fälle gibt es wegen der dichotomen Skalierung nicht.

Der Intercept in GLMs

- „Intercept“ (β_0) in GLMs $\neq$ Schnittpunkt mit y-Achse

- intervallskalierte Regressoren:
  - einfachstes binomiales GLM: $\hat{p}(y = 1) = \beta_1 x_1 + \beta_0$
  - Wenn $x_1 = 0$, wird β_0 vorhergesagt.

- bei Dummy-Variablen wird eine zur Referenz-Kategorie:
  - GLM mit drei Dummies: $\hat{p}(y = 1) = \beta_{Akk} \cdot x_{Akk} + \beta_{Dat} \cdot x_{Dat} + \beta_{\text{Nom}}$
  - „Alle Regressoren werden 0“ heißt hier, es liegt Nom vor.
  - Die Dummies modellieren
    den Unterschied zwischen Referenz (Nom) und den anderen Fällen.
  - Die Referenzkategorie sollte die häufigste sein, besonders bei Interaktionen.

Interaktionen

- nichts wesentlich anderes als in LM
- vereinte Effekte, die über die Einzeleffekte hinausgehen
- bei Interpretationsschwierigkeiten ggf. nachlesen

Prinzip der Modellauswahl

- Signifikanz wird für das Modell und Koeffizienten bestimmt.
- Allerdings: Signifikanz heißt nicht automatisch Modellgüte.
- Je „weniger signifikant“ ein Regressor,
  desto wahrscheinlicher kann er ohne Güteverlust entfernt werden.
- Modellselektion: Auswahl des einfachsten Modells
  mit der größten Modellgüte.

- Achtung bei dichotomen Dummy-Regressoren:
  Immer alle Dummies im Modell lassen oder herausnehmen,
  die zu einer kategorialen Unabhängigen gehören!

Weglassen von Faktoren: Log-Likelihood-Ratio-Test

1. Weglassen des Regressors mit der geringsten Signifikanz
2. Vergleich des vollen und des reduzierten Modells
3. bei nicht-signifikantem Unterschied: Regressor weglassen
4. von vorne beginnen...

Log-Likelihood-Ratio für Likelihood des vollen (L_f) und reduzierten (L_r) Modells:

$$LR = (-2 \cdot ln(L_r)) - (-2 \cdot ln(L_f))$$

Test: Unter der Ho $L_r = L_f$ ist die LR χ^2-verteilt
mit $df = df_f - df_r$ (df jeweils: Zahl der Regressoren)

Ist die LR größer als der kritische Wert: Regressor im Modell lassen!

Weglassen von Faktoren: AIC

Regressoren-Selektion auf Basis des Akaike Information Criterion:

- Ablauf wie bei LR-Test
- Maß für Modellvergleich ist das AIC
- Informationstheoretisches Maß:
  Distanz des Modells zur (geschätzten) absoluten Realität
- Je kleiner das AIC, desto besser das Modell.
- Achtung: Nur zum Vergleich eingebetteter Modelle verwenden, also bei gleichem Datensatz, und wenn das reduzierte Modell eine Teilmenge der Regressoren des vollen enthält.

Evaluation der Koeffizienten

- Signifikanzbestimmung für einzelne Regressoren
- wie bei LM: Standardfehler für jeden Regressor
- darauf basierend: z-Wert für jeden Regressor...
- und z-Test auf Basis der Normalverteilung

Log-Likelihood-Ratio-Test für Modelle

- Log-Likelihood-Ratio-Test für Gesamtheit aller Regressoren
- volles Modell (ggf. nach Eliminierung von Koeffizienten)
- Nullmodell, das nur einen konstanten Term zur Vorhersage nutzt
- ähnlich den Modellvergleichen im Kapitel „ANOVA als LM“

Pseudo-R^2

- auch Vergleich des vollen Modells und Nullmodels
- Interpretation wie gewohnt: Varianzerklärung

$$\text{Cox \& Snell: } R^2_C = 1 - \left(\frac{L_0}{L_f}\right)^{\frac{2}{n}}$$

Problem: Geht nicht bis 1!

$$\text{Nagelkerke: } R^2_N = \frac{R^2_C}{R^2_{max}}$$

$$\text{mit } R^2_{max} = 1 - (L_0)^{\frac{2}{n}}$$

Vorhersagegüte

- gutes GLM $\Rightarrow$ gute Vorhersagen
- einfache Vorhersagegüte: Anteil der richtigen Vorhersagen
- instruktiv: Vergleich mit „Baseline“
  (= Anteil der richtigen Vorhersagen bei Vorhersage der modalen Kategorie)

- Problem wie bei Fehlerreduktion:
  auch bei starkem Effekt nicht unbedingt Umkehrung der modalen Kategorie

Überdispersion

- zugrundegelegte Verteilung: Binomialverteilung
- Überdispersion: Varianz ist größer als für Binomialverteilung angenommen
- mögliche Gründe:
  - unbeobachtete Heterogenität (fehlende erklärende Variablen)
  - Gruppenbildung (= Beobachtungen nicht unabhängig)

Schätzung des Dispersionsparameters:

$$\hat{\phi} = \sum(\frac{R_P}{df_R})^2$$

wobei: R_P ist das Pearson-Redidual (hier nicht behandelt) und

df_R die Residual-Freiheitsgrade $n - p$, p die Anzahl der Modellparameter

Lösung bei Überdispersion

- Problem: $\hat{\phi}$ deutlich über 1
- Lösung: Schätzung der Parameter bleibt (im Ergebnis) gleich
- aber für die Evaluation der Koeffizienten:
  - Signifikanzschätzung mit größeren Standardfehlern
  - t-Verteilung statt Normalverteilung (z-Werte)

- Ein „Quasi-Likelihood-Modell“ folgt im Wesentlichen dieser Strategie.

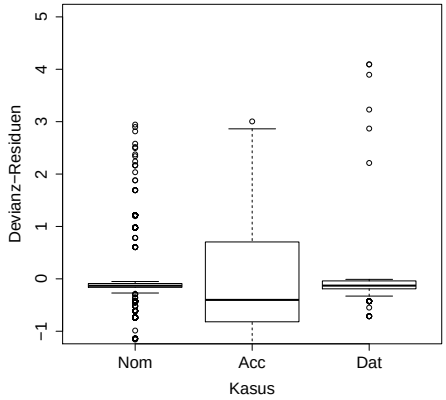
(Multi-)kollinearität

- (Multi-)kollinearität: Abhängigkeit zwischen Regressoren
- Probleme: β-Fehler, Überanpassung, ungenaue Koeffizientenschätzung
- Test: Varianzinflations-Faktoren (nicht im Detail behandelt)
- Lösungen z. B.: mehr Daten, Regressoren wegglassen
- Test des Modells auf Robustheit trotz Kollinearität (z. B. Kreuzvalidierung)

Varianzhomogenität

Die Residuen werden im GLM zwar anders berechnet,
sind aber trotzdem ein Maß für die Varianz.

Die Varianz sollte nicht mit den Regressorausprägungen variieren!



Kreuzvalidierung

- bei Problemen: Test auf Robustheit des Modells
- Idee bei k-facher Kreuzvalidierung:
  1. teile Daten in k Teile
  2. Modellanpassung auf $k-1$ von k Teilen
  3. Prüfung der Vorhersage auf verbleibendem Teil
  4. Modell ist Robust, wenn die Parameter in der Kreuzvalidierung nicht wesentlich anders geschätzt werden als im Ursprungsmodell
- wenn $k = n$: Leave-One-Out-Kreuzvalidierung
- verwandtes Verfahren: Bootstrapping (mit Zurücklegen)

Andere GLMs

Einige typische Anwendungsfälle für nicht-binomiale GLMs:

- Zähldaten: Poisson
- Zähldaten mit Überdispersion: negativ-binomial
- bestimmte Intervalldaten in $[0, \infty]$: Gamma
- viele Nullen: zero-inflated Varianten

Das Vademecum, vor allem für R-Benutzer:
Zuur u. a. 2009

Gemischte Modelle (GLMMs)

- typisches gemischtes Modell: mit Zufallseffekten
- Idee: Varianzunterschiede oder Dispersion durch Gruppen
- mögliche Gruppen in linguistischen Experimenten:
  - Werte von einem Probanden bei Befragung, Rating-Studie
  - Werte zu einem Lexem bei Korpusstudie
  - Werte aus einer Textsorte bei Korpusstudie
- ideal: Gruppeneffekte durch zusätzliche normale Regressoren auflösen
- sonst (vereinfacht): Schätzung eines Intercepts pro Gruppe
- Typisch für Zufallseffekte: In der GG sind vermutlich viel mehr Ausprägungen vorhanden, als gemessen (wie z. B. Sprecher oder Lexeme) wurden.

Generalisierte Additive Modelle (GAMs)

GAMs oder „nichtparametrische Regression“

$$\hat{y} = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n) + \beta_0$$

- f_n: besondere Art von Funktion, die geschätzt wird
- Wenn die Funktionen ungefähr linear sind, ist ein GLM genauso gut.
- Interpretation von GAMs: viel schwieriger als GLMs
- letzter Ausweg bei schlechtem GLM

1. Modell-Anpassung:
```
> m <- glm(y x1+x2*y3, data=mydata, family="binomial")
> summary(m)
```
2. Chancenverhältnisse für Koeffizienten:
```
> exp(coef(m))
```
3. 95%-Konfidenzintervalle für Chancenverhältnisse:
```
> exp(confint(m))
```
4. Log-Likelihood extrahieren:
```
> logLik(m)
```
5. Nagelkerke R^2:
```
> library(fmsb); NagelkerkeR2(m)
```
6. LR-Test:
```
> m0 <- glm(y 1, data=mydata, family="binomial")
> lr <- (-2*logLik(m0))-(-2*logLik(m))
> pchisq(lr, m$rank-m0$rank)
```

In R II

7. Modellselektion (wenn nicht von Hand):
```
> drop1(m)
```
8. Varianzinflationsfaktoren:
```
> library(car); vif(m)
```
9. Dispersion $\hat{\phi}$ schätzen:
```
> sum(resid(m, type="pear")^2 / df.residual(m))
```
10. Vorhersagegüte:
```
> pred <- ifelse(predict(m) <= 0.5, 0, 1)
> tab <- table(pred, mydata$response)
> sum(diag(tab))/sum(tab)
```
11. Fehlerrate in Kreuzzvalidierung (hier $k = 10$):
```
library(boot); cv.glm(mydata, m, K=10)$delta
```

Nächste Woche | Überblick

Einzelthemen

1. Statistik, Inferenz und probabilistische Grammatik
2. Deskriptive Statistik
3. Nichtparametrische Verfahren
4. z-Test und t-Test
5. ANOVA
6. Freiheitsgrade und Effektstärken
7. Power
8. Lineare Modelle
9. Generalisierte Lineare Modelle
10. Gemischte Modelle

Literatur I

Backhaus, Klaus, Bernd Erichson, Wulff Plinke & Rolf Weiber. 2011. *Multivariate Analysemethoden*. 13. Aufl. Berlin etc.: Springer.

Fahrmeir, Ludwig, Thomas Kneib & Stefan Lang. 2009. *Regression – Modelle, Methoden und Anwendungen*. 2. Aufl. Heidelberg etc.: Springer.

Zuur, Alain F., Elena N. Ieno, Neil Walker, Anatoly A. Saveliev & Graham M. Smith. 2009. *Mixed effects models and extensions in ecology with R*. Berlin etc.: Springer.

Autor

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

https://rolandschaefer.net
roland.schaefer@uni-jena.de

Lizenz