

Statistik

10. Generalisierte Lineare Modelle

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Statistik>

1 Generalisierte Lineare Modelle

- LM und GLM
- GLM Grundlagen
- Maximum Likelihood
- Nominale Unabhängige

- Modellselektion
- Modellevaluation
- Alternativen und Lösungen
- In R

2 Nächste Woche | Überblick

GLMs

- Generalisierte Lineare Modelle mit Logit-Link = Logistische Regression
- Regression zur Modellierung dichotomer Abhängiger
- Modellselektion für GLMs
- Modellevaluation für GLMs
- Problemlösungen (Ausblick):
Zufallseffekte (GLMMs), Kreuzvalidierung, Bootstrapping, GAMs

- Backhaus u. a. 2011
- Zuur u. a. 2009
- Fahrmeir u. a. 2009

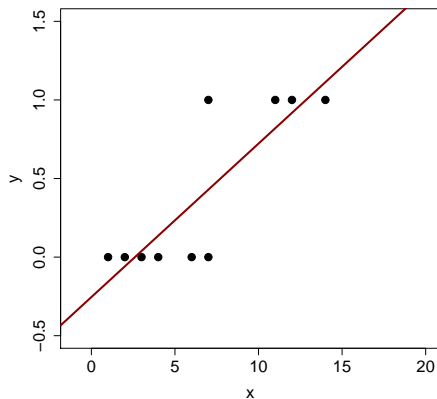
Alternation von Genitiv und Kasusidentität
in der Maßangabe im Deutschen:

- *Wir trinken eine Flasche guten Wein.* (Agree=1)
- *Wir trinken eine Flasche guten Weines.* (Agree=0)
- Welche Faktoren beeinflussen die Wahl von Agree=1 oder Agree=0?
- Unabhängige hier:
 - Kasus der Maßangabe (Nom, Akk, Dat)
 - Definitheit der NP (0, 1)
 - Maß ist als Zahl geschrieben (0, 1)
- Das Beispiel kommt dann in der R-Session tatsächlich dran.

- LM sagt **kontinuierliche Werte** voraus
- unplausibel für dichotome Abhängige
- auch als Eintrittswahrscheinlichkeit unplausibel (außerhalb $[0,1]$)
- **Normalitätsannahmen nicht erfüllt**

Illustration der Probleme

Datenpunkte einer dichotomen Abhängigen y
zu einer intervallskalierten Unabhängigen x
und lineares Modell $y \sim x$



- Vorhersage der Eintrittswahrscheinlichkeiten
- lineare Kombination der Regressoren wie beim LM
- Linearkombination ergibt die Logits (z):

$$z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \beta_0$$

Die Logits werden transformiert in Eintrittswahrscheinlichkeiten mittels der **logistischen Funktion** (e ist die Euler-Konstante):

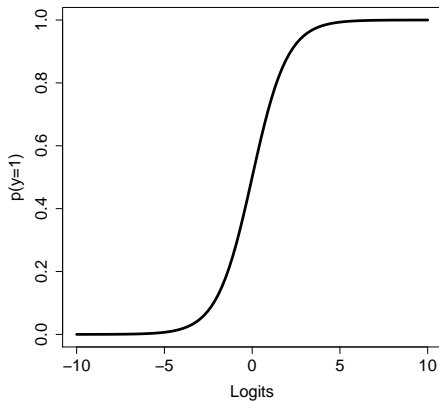
$$\hat{p}(y = 1) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

Bei der **binären Vorhersage** dann:

$$\hat{y} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \hat{p}(y = 1) \leq 0.5 \\ 1 & \text{wenn } \hat{p}(y = 1) > 0.5 \end{cases}$$

Darstellung des Effekts der Logit-Transformation

Die transformierten Logits als $\hat{p}(y = 1)$:



- Interpretation der Koeffizienten nur **indirekt** möglich
- β_i positiv \Rightarrow positiver Einfluss auf $\hat{p}(y = 1)$
- β_i negativ \Rightarrow negativer Einfluss auf $\hat{p}(y = 1)$
- Stärke des Einflusses: **nicht linear**
- linearer Einfluss nur auf die Logits, nicht auf $\hat{p}(y = 1)$

- Chance (Odds): $o(y=1) = \frac{p(y=1)}{1-p(y=1)}$
- Die Chancen des Modells verteilen sich (zum Glück) einfach:

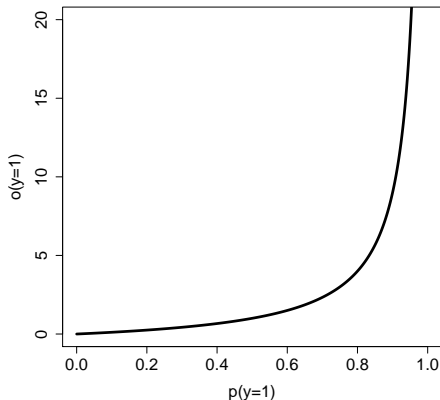
$$o(y=1) = \frac{p(y=1)}{1-p(y=1)} = e^z$$

Beachte: $\ln(e^z) = z = \text{Logits}$

- Die Chance liegt offensichtlich in $[0, \infty]$.
- Mit steigender Wahrscheinlichkeit gehen die Odds gegen ∞ .
- Bei einem Logit von 3 ist die Chance für $y = 1$ doppelt so hoch wie bei einem Logit von 1.5 usw.

Beziehung zwischen Wahrscheinlichkeit und Odds

In der Interpretation stellen die Odds die Linearität her,
die den Wahrscheinlichkeiten bei der log. Regression fehlen.



Für die Interpretation der einzelnen Koeffizienten β_i
im Sinne eines Chancenverhältnisses:

$$or(y = 1 | x_i) = e^{\beta_i}$$

In Worten: Steigt x_i (intervallskaliert!) um eine Einheit,
dann steigt die Chance für $y = 1$ um e^{β_i} .

Ein Chancenverhältnis von 1 entspricht einem Koeffizienten 0,
also einem ohne jeglichen Effekt.

Beziehungen zwischen den Maßen
sowie ihre Wertebereiche.

Einzel-Koeffizient		Gesamtmodell		
Koeffizient	Chancenverhältnis	Logit	Chance	$\hat{p}(y = 1)$
$\beta > 0$	$e^\beta > 1$	steigt um βx	steigt um $e^{\beta x}$	steigt
$\beta < 0$	$e^\beta < 1$	sinkt um βx	sinkt um $e^{\beta x}$	sinkt
$[-\infty, +\infty]$	$[0, +\infty]$	$[-\infty, +\infty]$	$[0, +\infty]$	$[0, 1]$

- Es gibt keine direkte Lösung für die Koeffizientenberechnung.
- Das Schätzverfahren funktioniert iterativ.
- Es kommt der sog. Maximum-Likelihood-Schätzer zum Einsatz.

- Es gibt beliebig viele Modelle = Belegungen für die β -Koeffizienten
- Das **wahrscheinlichste Modell angesichts der Beobachtungen** ist zu finden.
- In den Beobachtungsdaten für jeden Fall k : $y_k = 1$ oder $y_k = 0$
- Für jeden Beobachtungswert y_k betrachtet man:

$$p_k = \left(\frac{1}{1+e^{-z_k}}\right)^{y_k} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}}\right)^{1-y_k}$$

$$p_k = \left(\frac{1}{1+e^{-z_k}} \right)^{y_k} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+e^{-z_k}} \right)^{1-y_k}$$

- z_k ist der Modell-Logit für die zu y_k empirische gemessenen x .
- In den () steht links die vom Model geschätzte Wahrscheinlichkeit $\hat{p}(y_k)$ und rechts jeweils die Gegenwahrscheinlichkeit dazu $1 - \hat{p}(y_k)$.
- Wenn der Modellwert nahe an 0 (z. B. 0.1) und $y_k = 0$ ist:
 $p_k = (0.1)^0 \cdot (0.9)^1 = 1 \cdot 0.9 = 0.9$ („gute“ Approximation)
- Wenn der Modellwert bei gleichen empirischen Daten umgekehrt ist:
 $p_k = (0.9)^0 \cdot (0.1)^1 = 1 \cdot 0.1 = 0.1$ („schlechte“ Approximation)
- Die p_k messen also die Güte der vom Modell vorhergesagten Wahrscheinlichkeit für jeden beobachteten Datenpunkt.

- Bei unabhängigen Ereignissen $E_{1..n}$ gilt:
$$P(E_1 + E_2 + \dots + E_n) = \prod_i P(E_i)$$
- Die Wahrscheinlichkeit eines Modells (seine „Likelihood“) angesichts aller empirischen Werte y_k ist also:

$$L = \prod_k p_k$$

- Der Maximum Likelihood-Schätzer maximiert L für die Belegungen der β -Koeffizienten (= konkurrierende Modelle).

Wie bei der LM-Variante der ANOVA müssen kategoriale Unabhängige mit mehr als zwei Ausprägungen als dichotome Dummy-Variablen kodiert werden.

Beispiel für dreiwertige Variable A und Dummy-Regressoren $x_{1..3}$

	A = 1	A = 2	A = 3
$x_1 =$	1	0	0
$x_2 =$	0	1	0
$x_3 =$	0	0	1

Achtung! De facto gibt es für einen kategorialen Regressor mit k Ausprägungen nur $k - 1$ Dummies (s. Abschnitt zum Intercept).

Beispiel für eine als $x_{1..3}$ dummy-kodierte Unabhängige A und eine intervallskalierte Unabhängige x_4 :

$$\hat{p}(y = 1) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$\text{mit } z = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_0$$

Dabei treten die Werte auf:

- $x_{1..3}$: 0 oder 1
- Wenn $x_1 = 1$, dann $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ usw.

(Wh.:) Für die Interpretation der einzelnen Koeffizienten β_i im Sinne eines Chancenverhältnisses:

$$or(y = 1 | x_i) = e^{\beta_i}$$

In Worten für nominale Regressoren bzw. ihr dichotomen Dummies:

Wenn $x_i = 1$ (x_i ist dichotom skaliert!),
dann ist die Chance $o(y = 1)$ um e^{β_i} höher als bei $x_i = 0$.
Andere Fälle gibt es wegen der dichotomen Skalierung nicht.

- „Intercept“ (β_0) in GLMs \neq Schnittpunkt mit y-Achse
- **intervallskalierte Regressoren:**
 - ▶ einfachstes binomiales GLM: $\hat{p}(y = 1) = \beta_1 x_1 + \beta_0$
 - ▶ Wenn $x_1 = 0$, wird β_0 vorhergesagt.
- bei **Dummy-Variablen** wird eine zur Referenz-Kategorie:
 - ▶ GLM mit drei Dummies: $\hat{p}(y = 1) = \beta_{Akk} \cdot x_{Akk} + \beta_{Dat} \cdot x_{Dat} + \beta_{Nom}$
 - ▶ „Alle Regressoren werden 0“ heißt hier, es liegt Nom vor.
 - ▶ Die Dummies modellieren den **Unterschied zwischen Referenz (Nom) und den anderen Fällen**.
 - ▶ Die Referenzkategorie sollte die häufigste sein, besonders bei Interaktionen.

- nichts wesentlich anderes als in LM
- vereinte Effekte, die über die Einzeleffekte hinausgehen
- bei Interpretationsschwierigkeiten ggf. nachlesen

- Signifikanz wird für das Modell und Koeffizienten bestimmt.
- Allerdings: Signifikanz heißt nicht automatisch Modellgüte.
- Je „weniger signifikant“ ein Regressor, desto wahrscheinlicher kann er ohne Güteverlust entfernt werden.
- Modellselektion: Auswahl des **einfachsten Modells** mit der **größten Modellgüte**.
- Achtung bei dichotomen Dummy-Regressoren:
Immer **alle** Dummies im Modell lassen oder herausnehmen, die zu einer kategorialen Unabhängigen gehören!

- 1 Weglassen des Regressors mit der geringsten Signifikanz
- 2 Vergleich des vollen und des reduzierten Modells
- 3 bei nicht-signifikantem Unterschied: Regressor weglassen
- 4 von vorne beginnen...

Log-Likelihood-Ratio für Likelihood des vollen (L_f) und reduzierten (L_r) Modells:

$$LR = (-2 \cdot \ln(L_r)) - (-2 \cdot \ln(L_f))$$

Test: Unter der H_0 $L_r = L_f$ ist die LR χ^2 -verteilt
mit $df = df_f - df_r$ (df jeweils: Zahl der Regressoren)

Ist die LR größer als der kritische Wert: Regressor im Modell lassen!

Regressoren-Selektion auf Basis des **Akaike Information Criterion**:

- Ablauf wie bei LR-Test
- Maß für Modellvergleich ist das AIC
- Informationstheoretisches Maß:
Distanz des Modells zur (geschätzten) absoluten Realität
- Je kleiner das AIC, desto besser das Modell.
- Achtung: Nur zum Vergleich **eingebetteter Modelle** verwenden, also bei gleichem Datensatz, und wenn das reduzierte Modell eine Teilmenge der Regressoren des vollen enthält.

- Signifikanzbestimmung für einzelne Regressoren
- wie bei LM: **Standardfehler** für jeden Regressor
- darauf basierend: **z-Wert** für jeden Regressor...
- und **z-Test** auf Basis der Normalverteilung

- Log-Likelihood-Ratio-Test für Gesamtheit aller Regressoren
- volles Modell (ggf. nach Eliminierung von Koeffizienten)
- **Nullmodell**, das nur einen konstanten Term zur Vorhersage nutzt
- ähnlich den Modellvergleichen im Kapitel „ANOVA als LM“

- auch Vergleich des vollen Modells und Nullmodells
- Interpretation wie gewohnt: Varianzerklärung

$$\text{Cox \& Snell: } R_C^2 = 1 - \left(\frac{L_0}{L_f}\right)^{\frac{2}{n}}$$

Problem: Geht nicht bis 1!

$$\text{Nagelkerke: } R_N^2 = \frac{R_C^2}{R_{max}^2}$$

$$\text{mit } R_{max}^2 = 1 - (L_0)^{\frac{2}{n}}$$

- gutes GLM \Rightarrow gute Vorhersagen
- einfache Vorhersagegüte: Anteil der richtigen Vorhersagen
- instruktiv: Vergleich mit „Baseline“
(= Anteil der richtigen Vorhersagen bei Vorhersage der modalen Kategorie)
- Problem wie bei Fehlerreduktion:
auch bei starkem Effekt nicht unbedingt Umkehrung der modalen Kategorie

- zugrundegelegte Verteilung: **Binomialverteilung**
- Überdispersion: Varianz ist größer als für Binomialverteilung angenommen
- mögliche Gründe:
 - ▶ unbeobachtete Heterogenität (fehlende erklärende Variablen)
 - ▶ Gruppenbildung (= Beobachtungen nicht unabhängig)

Schätzung des **Dispersionsparameters**:

$$\hat{\phi} = \sum \left(\frac{R_p}{df_R} \right)^2$$

wobei: R_p ist das **Pearson-Residual** (hier nicht behandelt) und

df_R die **Residual-Freiheitsgrade** $n - p$, p die Anzahl der Modellparameter

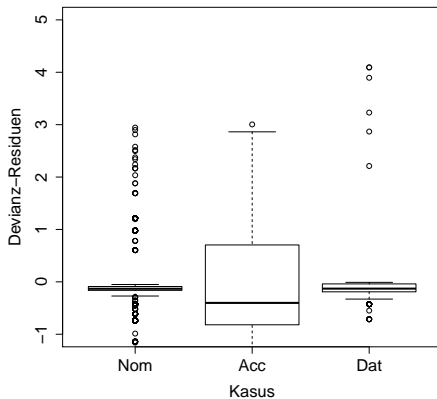
- Problem: $\hat{\phi}$ deutlich über 1
- Lösung: Schätzung der Parameter bleibt (im Ergebnis) gleich
- aber für die Evaluation der Koeffizienten:
 - ▶ Signifikanzschätzung mit größeren Standardfehlern
 - ▶ t-Verteilung statt Normalverteilung (z-Werte)
- Ein „Quasi-Likelihood-Modell“ folgt im Wesentlichen dieser Strategie.

- (Multi-)kollinearität: Abhängigkeit zwischen Regressoren
- Probleme: β -Fehler, Überanpassung, ungenaue Koeffizientenschätzung
- Test: Varianzinflations-Faktoren (nicht im Detail behandelt)
- Lösungen z. B.: mehr Daten, Regressoren weglassen
- Test des Modells auf Robustheit trotz Kollinearität (z. B. Kreuzvalidierung)

Varianzhomogenität

Die Residuen werden im GLM zwar anders berechnet, sind aber trotzdem ein Maß für die Varianz.

Die Varianz sollte nicht mit den Regressorausprägungen variieren!



- bei Problemen: Test auf **Robustheit des Modells**
- Idee bei k -facher Kreuzvalidierung:
 - 1 teile Daten in k Teile
 - 2 Modellanpassung auf $k - 1$ von k Teilen
 - 3 Prüfung der Vorhersage auf verbleibendem Teil
 - 4 Modell ist Robust, wenn die Parameter in der Kreuzvalidierung nicht wesentlich anders geschätzt werden als im Ursprungsmodell
- wenn $k = n$: **Leave-One-Out-Kreuzvalidierung**
- verwandtes Verfahren: **Bootstrapping** (mit Zurücklegen)

Einige typische Anwendungsfälle für nicht-binomiale GLMs:

- Zähldaten: **Poisson**
- Zähldaten mit Überdispersion: **negativ-binomial**
- bestimmte Intervalldaten in $[0, \infty]$: **Gamma**
- viele Nullen: **zero-inflated** Varianten

Das Vademecum, vor allem für R-Benutzer:
Zuur u. a. 2009

- typisches gemischtes Modell: mit Zufallseffekten
- Idee: Varianzunterschiede oder Dispersion durch Gruppen
- mögliche Gruppen in linguistischen Experimenten:
 - Werte von einem Probanden bei Befragung, Rating-Studie
 - Werte zu einem Lexem bei Korpusstudie
 - Werte aus einer Textsorte bei Korpusstudie
- ideal: Gruppeneffekte durch zusätzliche normale Regressoren auflösen
- sonst (vereinfacht): Schätzung eines Intercepts pro Gruppe
- Typisch für Zufallseffekte: In der GG sind vermutlich viel mehr Ausprägungen vorhanden, als gemessen (wie z. B. Sprecher oder Lexeme) wurden.

GAMs oder „nichtparametrische Regression“

$$\hat{y} = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) + \beta_0$$

- f_n : besondere Art von **Funktion**, die geschätzt wird
- Wenn die Funktionen ungefähr linear sind, ist ein GLM genauso gut.
- Interpretation von GAMs: viel schwieriger als GLMs
- letzter Ausweg bei schlechtem GLM

1 Modell-Anpassung:

```
> m <- glm(y ~ x1+x2*y3, data=mydata, family="binomial")  
> summary(m)
```

2 Chancenverhältnisse für Koeffizienten:

```
> exp(coef(m))
```

3 95%-Konfidenzintervalle für Chancenverhältnisse:

```
> exp(confint(m))
```

4 Log-Likelihood extrahieren:

```
> logLik(m)
```

5 Nagelkerke R^2 :

```
> library(fmsb); NagelkerkeR2(m)
```

6 LR-Test:

```
> m0 <- glm(y ~ 1, data=mydata, family="binomial")  
> lr <- (-2*logLik(m0)) - (-2*logLik(m))  
> pchisq(lr, m$rank-m0$rank)
```

- 7 Modellselektion (wenn nicht von Hand):
`> drop1(m)`
- 8 Varianzinflationsfaktoren:
`> library(car); vif(m)`
- 9 Dispersion $\hat{\phi}$ schätzen:
`> sum(resid(m, type="pear")^2 / df.residual(m))`
- 10 Vorhersagegüte:
`> pred <- ifelse(predict(m) <= 0.5, 0, 1)`
`> tab <- table(pred, mydata$response)`
`> sum(diag(tab))/sum(tab)`
- 11 Fehlerrate in Kreuzvalidierung (hier $k = 10$):
`library(boot); cv.glm(mydata, m, K=10)$delta`

Nächste Woche | Überblick

- 1 Inferenz
- 2 Deskriptive Statistik
- 3 Nichtparametrische Verfahren
- 4 z-Test und t-Test
- 5 ANOVA
- 6 Freiheitsgrade und Effektstärken
- 7 Power und Severity
- 8 Lineare Modelle
- 9 Generalisierte Lineare Modelle
- 10 Gemischte Modelle

- Backhaus, Klaus, Bernd Erichson, Wulff Plinke & Rolf Weiber. 2011. *Multivariate Analysemethoden*. 13. Aufl. Berlin etc.: Springer.
- Fahrmeir, Ludwig, Thomas Kneib & Stefan Lang. 2009. *Regression – Modelle, Methoden und Anwendungen*. 2. Aufl. Heidelberg etc.: Springer.
- Zuur, Alain F., Elena N. Ieno, Neil Walker, Anatoly A. Saveliev & Graham M. Smith. 2009. *Mixed effects models and extensions in ecology with R*. Berlin etc.: Springer.

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>
roland.schaefer@uni-jena.de

Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.