

# Statistik

## o6. Freiheitsgrade und Effektstärken

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Deutsche-Syntax>

- 1 Freiheitsgrade
- 2 Mehr zu Zähltesten
  - Effektstärke für  $\chi^2$ : Cramér's  $v$  und  $\phi$
  - Chancenverhältnis
  - Binomialtest
- 3 Effektstärken bei t-Test und ANOVA
  - Ein-Stichproben-t-Test
  - Zwei-Stichproben-t-Test
  - ANOVA
- 4 Voraussetzungen für t-Test und ANOVA
- 5 Nichtparametrische Alternativen zu t-Test und ANOVA
  - Mann-Whitney U-Test
  - Kruskal-Wallis H-Test
- 6 Nächste Woche | Überblick

Freiheitsgrade

- Beispiel: Schätzung eines Parameters (z. B. Mittel) auf Basis von 1000 gemessenen Werten
- Wenn 999 Werte bekannt sind, steht abhängig vom Mittel der 1000ste Wert fest.
- Für jedes Mittel  $\mu$  einer Stichprobe mit  $n$  Messungen sind also nur  $n - 1$  frei wählbar.

# (Unintuitive) Erweiterung(en)

- generell:  $df = n - |E|$   
wobei  $E$  die zu schätzenden Parameter sind.  $|E|$  ist ihre Anzahl.
- Warum bei  $\chi^2$  dann  $df = (\text{Zeilenzahl} - 1) \cdot (\text{Spaltenzahl} - 1)$ ?
- Bsp.: Tabelle mit  $2 \times 3$  Feldern, also  $df = (2 - 1)(3 - 1) = 1 \cdot 2 = 2...$
- Bei bekannten Randsummen sind aber tatsächlich nur 2 Felder frei wählbar!

	X1	X2	
Y1	$\oplus$		ZS1
Y2	$\oplus$		ZS2
Y3			ZS3
	SQ1	SQ2	

Mehr zu Zählдатentests

Der  $\chi^2$ -Wert sagt nichts über die **Stärke eines Zusammenhangs**!  
Bei höheren absoluten Frequenzen wird auch der  $\chi^2$ -Wert größer.

	haben	sein
nord	27	33
sued	3	34

$$\chi^2 = 12,89$$

	haben	sein
nord	27.84%	34.02%
sued	3.09%	35.05%

	haben	sein
nord	54	66
sued	6	68

$$\chi^2 = 27,46$$

	haben	sein
nord	27.84%	34.02%
sued	3.09%	35.05%

Pearsons  $\phi$ : Maß für die Stärke des Zusammenhangs in  $2 \times 2$ -Tabellen

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

$\phi$  ist eine Zahl zwischen 0 und 1:

Je größer, desto stärker der Zusammenhang zwischen den Variablen.

$$\text{Beispiel: } \phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \sqrt{\frac{12.89}{97}} = 0.3648$$



Cramér's  $v$  for  $n \times n$ -Tables with  $n > 2$  or  $m > 2$

$$v = \sqrt{\frac{\frac{\chi^2}{n}}{\min(s-1, z-1)}}$$

mit:  $s$  die Spaltenzahl und  $z$  die Zeilenzahl

Beachte: für  $2 \times 2$ -Tabellen:  $s - 1 = 1$  und  $z - 1 = 1$ ,

also  $\min(s - 1, z - 1) = 1$

$$\text{daher: } v = \sqrt{\frac{\frac{\chi^2}{n}}{1}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \phi$$

Speichern des Test-Objekts:

```
> my.chi2.test <- chisq.test(my.matrix)
```

Speichern des  $\chi^2$ -Werts mit:

```
> my.chi2.value <- as.numeric(my.chi2.test$statistic)
```

Speichern von  $n$ :

```
> my.n <- sum(my.matrix)
```

Also Effektstärke (mit Ausgabe):

```
> my.phi <- sqrt( my.chi2.value / my.n ); my.phi
```

- Die **Chance (odds)**  $o$  setzt die Wahrscheinlichkeit  $p$  eines Ereignisses  $E$  in Relation zur Gegenwahrscheinlichkeit:

$$o(E) = \frac{p(E)}{1-p(E)}$$

und damit

$$p(E) = \frac{o(E)}{1+o(E)}$$

- Ein Ereignis ist in Korpusstudien i. d. R. das Auftreten einer **Variablenausprägung**.
- Die Information in den Maßen Wahrscheinlichkeit und Chance ist dieselbe (s. Umrechenbarkeit ineinander).

Aux	Anzahl
haben	27
sein	33

$$p(\text{haben}) = \frac{27}{27+33} = \frac{27}{60} = 0.45 \text{ (Wahrscheinlichkeit)}$$

$$1 - p(\text{haben}) = p(\neg\text{haben}) = \frac{33}{27+33} = \frac{33}{60} = 0.55 \text{ (Gegenwahrscheinlichkeit)}$$

$$\text{Beachte: } p(\text{haben}) + p(\neg\text{haben}) = 1$$

$$o(\text{haben}) = \frac{\frac{27}{60}}{\frac{33}{60}} = \frac{27}{60} \cdot \frac{60}{33} = \frac{27}{33} = 0.82$$

$$\text{allgemein: } p(E) = \frac{\text{Anzahl}(E)}{\text{Anzahl}(E) + \text{Anzahl}(\neg E)} \text{ und } o(E) = \frac{\text{Anzahl}(E)}{\text{Anzahl}(\neg E)}$$

- Das Chancenverhältnis (odds ratio) gibt das Verhältnis an, wie sich die Chancen einer Variablenausprägung  $E$  unter Bedingung  $A$  – also  $o(E|A)$  – und unter Bedingung  $B$  – also  $o(E|B)$  – zueinander Verhalten:

$$r(E|A, E|B) = \frac{o(E|A)}{o(E|B)}$$

# Beispiel zum Chancenverhältnis (1)

- Wir haben Texte aus Süddeutschland und Norddeutschland auf das Auftreten des Perfektauxiliars *haben* und *sein* bei bestimmten Verben untersucht.
- Die Kreuztabelle:

	nord	sued
haben	27	3
sein	33	34

## Beispiel zum Chancenverhältnis (2)

	nord	sued
haben	27	3
sein	33	34

- $o(haben|nord) = \frac{27}{33} = 0.82$
- $o(haben|sued) = \frac{3}{34} = 0.09$
- Verhältnis zwischen den Chancen:  $or = \frac{0.82}{0.09} = 9.11$
- D. h. die Chance von *haben* ist 9.11 mal größer, wenn *Region nord* ist.
- Ersatz für Effektstärke bei Fisher-Test

- binäre Daten: Ereignis vs. Nicht-Ereignis bzw. Ja/Nein
- Vgl. Behauptung: „Gen/Dat alternieren frei bei *wegen*.“
  - ▶ „frei alternieren“ = beide Kasus haben die gleiche Chance.
  - ▶ Grundgesamtheit per Hypothese: 50% Genitive und 50% Dative
- Korpusstichprobe:  $F(\text{Genitiv})=41$  und  $F(\text{Dativ})=59$
- Passt das zur Hypothese bei  $\text{sig}=0.05$ ?



- $H_0$ : Es gibt keine Abweichung von der erwarteten Wahrscheinlichkeit.
- $H_0: p(\text{Dativ}) = 0.5$

Benötigte Größen:

- Stichproben der Größe  $n$
- Ho-Wahrscheinlichkeit  $p$  (hier  $p = 0.5$ )
- Anzahl der beobachteten Ereignisse:  $X$  (hier  $X(\text{Dativ}) = 59$ )

- Wenn  $p \cdot n > 10$  und  $(1 - p) \cdot n > 10$   
approximiert die Binomialverteilung die Normalverteilung.
- Es gilt dann (unter Annahme der Ho!) für die Normalverteilung:
  - ▶ Mittel:  $\mu = p \cdot n$
  - ▶ Standardabweichung:  $s = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
  - ▶ Wir können für den gemessenen Wert den z-Wert ausrechnen.

$$z = \frac{X - \mu}{s} = \frac{X - p \cdot n}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

$$z = \frac{59 - (0.5 \cdot 100)}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = \frac{59 - 50}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5} = 1.8$$

- Der gemessene Wert liegt 1.8 Standardabweichungen vom Ho-Mittel entfernt.
- Wir kennen bereits die kritischen Werte für Normalverteilungen und  $\text{sig}=0.05$ :  $-1.96..1.96$
- Die Ho kann also nicht zurückgewiesen werden bei  $\text{sig}=0.05$ .
- Interpretation: Wir haben keine Evidenz dafür, dass die Variation in der Grundgesamtheit von einer 50:50-Verteilung abweicht.
- Falsche Interpretation: Wir haben Evidenz dafür, dass die Verteilung in der Grundgesamtheit 50:50 ist.

```
> binom.test(59, 100, 0.5)
```

Exact binomial test

data: 59 and 100

number of successes = 59, number of trials = 100, p-value = 0.08863

alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5

95 percent confidence interval:

0.4871442 0.6873800 sample estimates:

probability of success 0.59

## Effektstärken bei t-Test und ANOVA

- Signifikanz  $\neq$  starker Effekt
- Effektstärke beim t-Test für Stichprobe x:

$$\text{Cohens } d = \frac{\bar{x} - \mu}{s(x)}$$

- Herleitung/Erklärung: Gravetter & Wallnau, Kap. 9

- ähnlich der Effektstärke:  
Welcher Anteil der Varianz in den Daten  
wird durch die Unabhängige erklärt?

$$\text{Cohens } r^2 = \frac{t^2}{t^2 + df}$$

- Herleitung/Erklärung: Gravetter & Wallnau, Kap. 9



Effektstärke

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2}}$$

Erklärung der Varianz

$$r^2 = \frac{t^2}{t^2 + df}$$

$$\eta^2 = \frac{SQ_{zwischen}}{SQ_{gesamt}}$$

(wieder ein  $r^2$ -Maß)

Entsprechend sind **drei**  $\eta^2$  auszurechnen:

$$\eta_A^2 = \frac{SQ_A}{SQ_{gesamt} - SQ_B - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta_B^2 = \frac{SQ_B}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta_{A \times B}^2 = \frac{SQ_{A \times B}}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_B}$$

Wir fragen jeweils, welchen Anteil an der Varianz, die die anderen beiden Faktoren **nicht** erklären, der jeweilige dritte Faktor hat.

## Voraussetzungen für t-Test und ANOVA

Bedingung für **alle** Tests:  
**Unabhängigkeit** der Messungen

Wenn bei t-Test oder ANOVA also gepaarte Stichproben vorliegen  
(Messung derselben Proband\*innen unter Bedingung 1 und 2 usw.):  
**Besondere Versionen für geparte Stichproben nehmen!**

Details hier nicht besprochen.

Die GGs müssen normalverteilt sein:

```
shapiro.test(x)
```

Wenn  $p \leq 0.05$  wird die Nullhypothese des Shapiro-Wilk-Tests verworfen.  
Ho: Die Werte stammen aus einer normalverteilten GG.

Die Varianzen müssen homogen sein:

```
var.test(x1, x2)
```

Auch hier:  $p \leq 0.05$  weist die Ho zurück.  
Ho: Die Varianzen von x1 und x2 sind homogen.

Solche Tests sind umstritten, weil sie angeblich zu empfindlich reagieren.  
Zuur u. a. 2009 empfehlen z. B. grafische Methoden. Ich nicht.

Wenn Voraussetzungen nicht erfüllt sind:

- steigt das Risiko für Typ 1-Fehler
- nicht-parametrische Alternative nehmen
- Daten transformieren (Logarithmus für Normalverteilung)
- sich über Robustheit des Test ggü. verletzten Annahmen informieren (oft schwer zugängliche und kontroverse Spezialliteratur)

Alternativen



- Alternativen, wenn Bedingungen für t-Test und ANOVA nicht erfüllt sind (Normalverteilung, Varianzhomogenität)
- Prinzip: **Umrechnen von Werten in Ränge**
- nicht-parametrische Tests

- Bortz & Lienert 2008
- Gravetter & Wallnau 2007

- Mann-Whitney U-Test: Alternative zum t-Test mit zwei Stichproben
- Kruskal-Wallis H-Test: Alternative zur einfaktoriellen ANOVA

- Intervallskalierung der Abhängigen
- Normalität der Abhängigen
- Varianzhomogenität der Abhängigen in den Gruppen
- Unabhängigkeit der Messungen

Alle bis auf die letzte entfallen beim Mann-Whitney U-Test.

Gruppen/Stichproben (Messwerte):

$$x_1 = [9, 8, 12, 16]$$

$$x_2 = [4, 11, 7, 13]$$

Ränge in der **zusammengelegten** Stichprobe:

$$X = [4, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16]$$

$$R(x_1) = [4, 3, 6, 8]$$

$$R(x_2) = [1, 5, 2, 7]$$

Addiere für jeden Wert beider Gruppen die Anzahl der **niedrigeren Ränge (=höhere Rangzahl!)** in der anderen Gruppe:

$$U(x_1) = 2 + 2 + 1 + 0 = 5$$

$$U(x_2) = 4 + 2 + 4 + 1 = 11$$

$$U = \min(U_{x_1}, U_{x_2}) = U_{x_1} = 5$$

$$U(x_\alpha) = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_\alpha(n_\alpha+1)}{2} - \sum R(x_\alpha)$$

- $\sum R(x_1) = 4 + 3 + 6 + 8 = 21$
- $\sum R(x_2) = 1 + 5 + 2 + 7 = 15$
- $n_1 \cdot n_2 = 4 \cdot 4 = 16$
- $n_1(n_1 + 1) = n_2(n_2 + 1) = 4 \cdot 5 = 20$
- $U(x_1) = 16 + 10 - 21 = 5$
- $U(x_2) = 16 + 10 - 15 = 11$
- $U = 5$

- Signifikanz für kleine Stichproben: [Tabelle](#)
- bei großen Stichproben: U ggf. normalverteilt, also [z-Test](#)
- in R:

```
> wilcox.test(x1,x2, paired = FALSE)
```

- Effektstärke: Punkt-biserielle Korrelation
- entspricht Pearson-Korrelation, aber Unabhängige ist dichotom
- In R: `cor(c(x1,x2), c(rep(0,4),rep(1,4)))`
- alternativ: „relativer Effekt“ (Bortz & Lienert, S. 142)

- Bei sehr vielen gleichen Rängen ist der Mann-Whitney U-Test unzuverlässig.
- Bei gleichen Rängen generell: korrigierte Version (s. Bortz & Lienert, S. 146).
- Er ist daher nur begrenzt geeignet für Dinge wie 5-Punkt-Skalen.
- generell am stärksten bei gleich großen und gleich stark streuenden Stichproben
- letzter Ausweg: **Mediantest** (Bortz & Lienert, S. 137)



# Mehr als zwei Gruppen

Wie vom t-Test zur ANOVA...

$$x_1 = [9, 8, 12, 16]$$

$$x_2 = [4, 11, 7, 13]$$

$$x_3 = [13, 12, 5, 15]$$

Gleiches Vorgehen wie bei Mann-Whitney über

Rang in der zusammengelegten Stichprobe:

X	4	5	7	8	9	11	12	12	13	13	15	16
R(X)	1	2	3	4	5	6	7.5		9.5		11	12

$$R(x_1) = [5, 4, 7.5, 12]$$

$$R(x_2) = [1, 6, 3, 9.5]$$

$$R(x_3) = [9.5, 7.5, 2, 11]$$

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_i \frac{(\sum R(x_i))^2}{n_i} - 3(N+1)$$

Am Beispiel:

- Gruppen-Rang-Summen:

- ▶  $R(x_1) = [5, 4, 7.5, 12], \sum R(x_1) = 28.5$

- ▶  $R(x_2) = [1, 6, 3, 9.5], \sum R(x_2) = 19.5$

- ▶  $R(x_3) = [9.5, 7.5, 2, 11], \sum R(x_3) = 30$

- $H = \frac{12}{12 \cdot (12+1)} \cdot \left( \frac{28.5^2}{4} + \frac{19.5^2}{4} + \frac{30^2}{4} \right) - 3(12+1) =$

- $0.077 \cdot (203.06 + 95.06 + 225) - 39 = 1.28$

- Bei  $n > 5$  ist H unter der  $H_0$   $\chi^2$ -verteilt.
- mit  $df = k - 1$  ( $k$  ist die Anzahl der Gruppen)
- Effektstärke:  $\eta^2$ ...
- „relative Effekte“ sind rechenbar (Bortz & Lienert, S. 159)

```
> kruskal.test(c(x1,x2,x3) c(rep(0,4),rep(1,4),rep(2,4)))
```

Rechnen Sie bitte mal die U- und H-Tests von diese Folien  
und vergleichen Sie die p-Werte mit denen von t-Test und ANOVA  
über die gleichen Daten:

$$x_1 = [9, 8, 12, 16]$$

$$x_2 = [4, 11, 7, 13]$$

$$x_3 = [13, 12, 5, 15]$$

Nächste Woche | Überblick

- 1 Inferenz
- 2 Deskriptive Statistik
- 3 Nichtparametrische Verfahren
- 4 z-Test und t-Test
- 5 ANOVA
- 6 Freiheitsgrade und Effektstärken
- 7 Power und Severity
- 8 Lineare Modelle
- 9 Generalisierte Lineare Modelle
- 10 Gemischte Modelle

- Bortz, Jürgen & Gustav Lienert. 2008. *Kurzgefasste Statistik für die klinische Forschung*. Heidelberg: Springer.
- Gravetter, Frederick J. & Larry B. Wallnau. 2007. *Statistics for the Behavioral Sciences*. 7. Aufl. Belmont: Thomson.
- Zuur, Alain F., Elena N. Ieno, Neil Walker, Anatoly A. Saveliev & Graham M. Smith. 2009. *Mixed effects models and extensions in ecology with R*. Berlin etc.: Springer.

## Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer  
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft  
Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Fürstengraben 30  
07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>  
[roland.schaefer@uni-jena.de](mailto:roland.schaefer@uni-jena.de)



## Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.