

# Statistik

## 02. Deskriptive Statistik

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Statistik>

1 Motivation

2 Skalenniveau

3 Zentraltendenz

4 Empirische Verteilungen und Dispersion

5 Bivariate Statistiken

6 Standardfehler und Konfidenzintervalle

7 Nächste Woche | Überblick

- Deskriptive Statistik als **Aggregation von Daten**
- Verteilungen in Stichproben und Grundgesamtheiten:
  - Zentralmaße
  - Streuung (Varianz)
- **Theoretische vs. empirische Verteilungen**
- **Konfidenzintervalle** | Genauigkeiten von Schätzungen?

- Google, Stackoverflow usw.
- Gravetter & Wallnau (2007)  
Achtung! Vermittelt eine falsche Philosophie bei Anwendung der Tests!
- Bortz & Schuster (2010)

Motivation

- Mit unbewaffnetem Auge auf Daten zu blicken, ist meistens zwecklos.
- In Zahlen sehen Menschen nur schlecht Tendenzen und Zusammenhänge.
- Deskriptive Statistik
  - Zusammenfassen
  - Gruppieren
  - Visualisieren

- Definition der Grundgesamtheit
- Stichprobengröße ( $n$ )
  - 200 Sätze aus dem Korpus
  - 1.000 Reaktionen (von 50 Probanden) im Experiment
  - Was sind die elementaren gemessenen Datenpunkte?
- Stichprobenmethode
  - Zufallsstichprobe | Nachweis der uniformen Zufälligkeit
  - Quotenstichprobe | Stratifizierung und Begründung

Skalenniveau



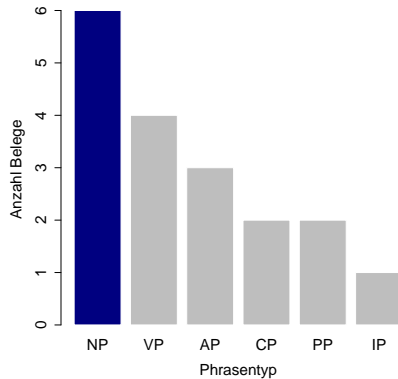
- **dichotom/binär** | Menge  $\{A, B\}$  | zwei disjunkte Kategorien  
männlich, weiblich ; Präteritum, Perfekt
- **nominal/kategorial** | Menge  $\{A, B, \dots\}$  | disjunkte Kategorien  
Parteizugehörigkeit ; NP, AP, VP
- **ordinal** | Tupel  $\langle A, B, \dots \rangle$ , nicht  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{Z}$  | disjunkte Kategorien mit Rang  
Schulnoten ; 5- oder 7-Punkt-Skalen für Akzeptabilität
- **Verhältnis** |  $+\mathbb{Q}_0$  | geordnete Werte mit Nullpunkt  
Temperatur in Kelvin ; Lesezeiten
- **Intervall** |  $\mathbb{Q}$  | Wie Verhältnis, aber ohne Nullpunkt  
Temperatur in Celsius
- **Zählraten** | **Keine** beobachtbaren Variablen, sondern  
Aggregation von dichotomen, nominalen oder ordinalen Variablen

- **Verhältnisskala** | Größe von Menschen in cm
  - $200\text{cm} = 2 \times 100\text{cm}$  usw.
  - Keine Messung unter  $0\text{cm}$
- **Intervallskala** | Dasselbe als **Abweichung vom Mittel**
  - $4\text{cm} = 2 \times 2\text{cm}$  usw.
  - $184\text{cm} \neq 2 \times 182\text{cm}$
  - Negative Messungen möglich

- Bestimmung zulässiger mathematischer Operationen
- Deskriptive Statistiken je nach Skalenniveau
- Zulässigkeit von inferenzstatistischen Tests je nach Skalenniveau

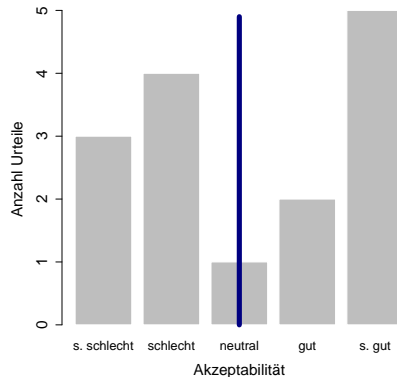
Zentraltendenz

Modus | Der häufigste Wert | Alle Skalenniveaus



# Zentraltendenz II

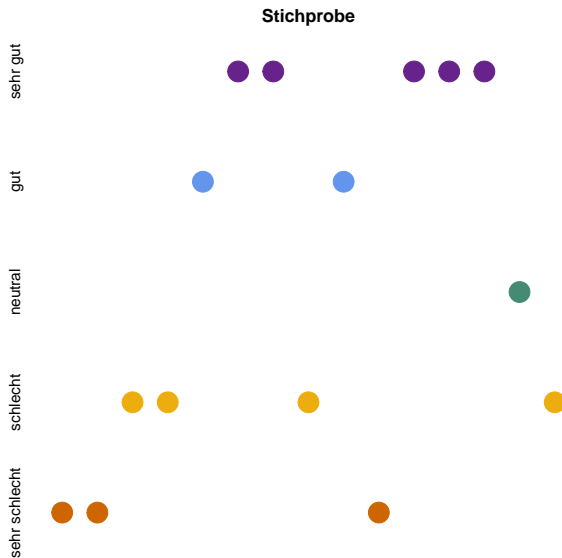
Median | Mitte der sortierten Stichprobe | ab Ordinalskala



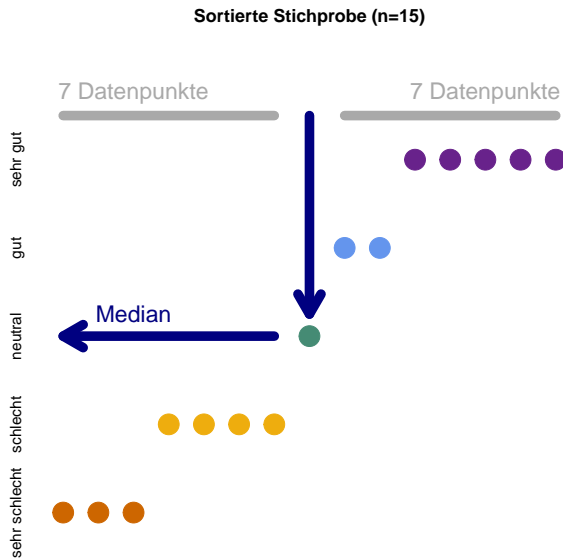
Numerische Messungen | Verschiedene Interpolationsmethoden

[https://en.wikipedia.org/wiki/Quantile#Estimating\\_quantiles\\_from\\_a\\_sample](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantile#Estimating_quantiles_from_a_sample)

# Median bestimmen | Stichprobe

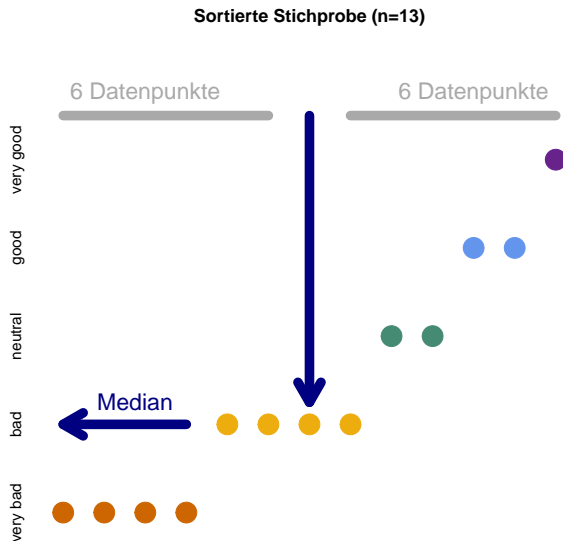


# Median bestimmen | Sortierte Stichprobe



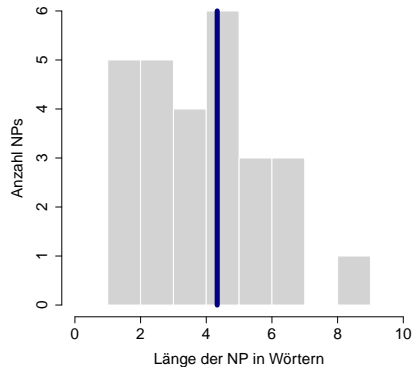


# Median bestimmen | Verzerrente sortierte Stichprobe



Arithmetisches Mittel  $\bar{x}$  | Summe aller Werte geteilt durch  $n$  | ab Intervallskala

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$



## Empirische Verteilungen und Dispersion

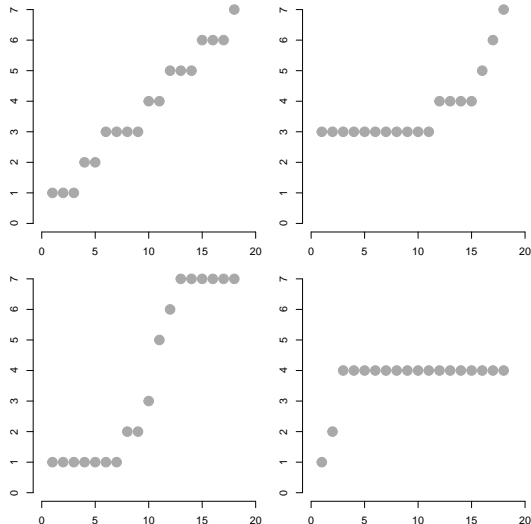
# Warum sind Dispersionsmaße wichtig?

## Dispersion | Streuung der Daten

- **Zentraltendenz** | Orientierung über Tendenzen der Stichprobe
- **Ein Maß für Zentraltendenz** für **beliebig viele Verteilungsformen**
- **Arithmetisches Mittel** | deskriptiv oft **unbrauchbar ohne Betrachtung der Verteilung**
- **Median** | **auch nur bedingt besser**

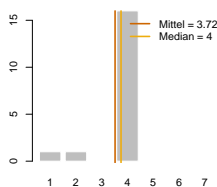
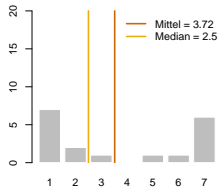
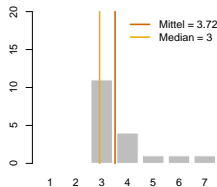
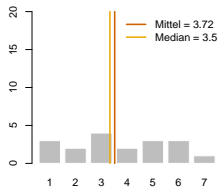
# Vier sortierte Stichproben

Jeder Punkt entspricht einem Datenpunkt/einer Messung!



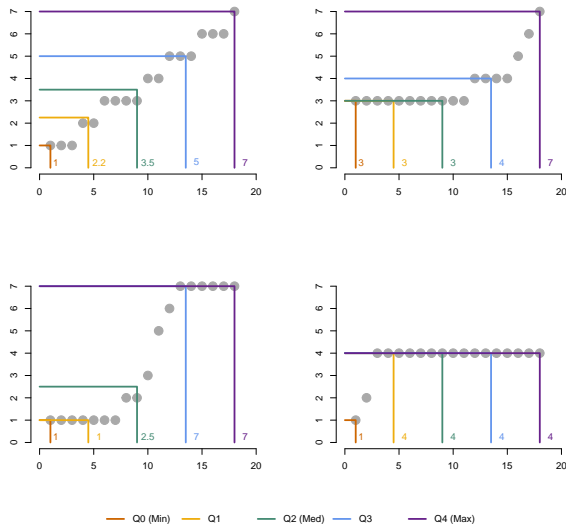
## Histogramme | Vier Stichproben mit $\bar{x} = 3.72$ und $n = 18$

Zum Beispiel 18 Bewertungen eines Probanden auf einer 7-Punkt-Skala



# Quartile

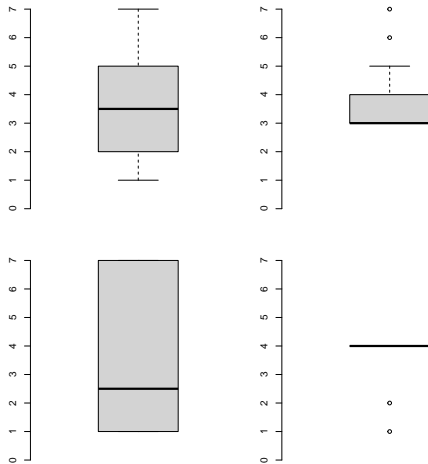
## Quartile | Generalisierung des Medians (bei 25 %, 50 %, 75 %)



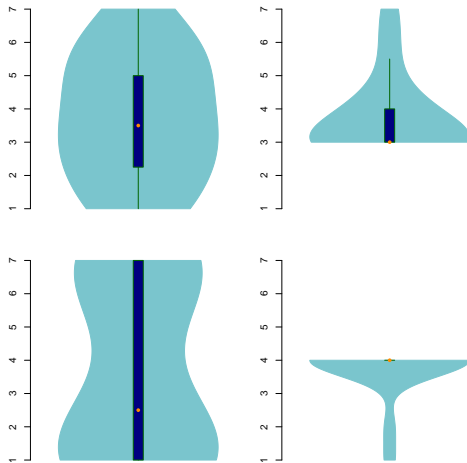
- Interquartilbereich  $IQR = Q_3 - Q_1$  | Die mittleren 50 %
- Boxplots
  - ▶ Median | Linie in der Mitte
  - ▶ Oberes und unteres Quartil | Boxen
  - ▶ 1,5-facher Interquartilabstand | gestrichelte Hebel
  - ▶ Ausreißer | Punkte
- Violinplots | Zusätzlich Plot der Verteilungsdichte (statt Box)



# Boxplots | Die bessere Zusammenfassung

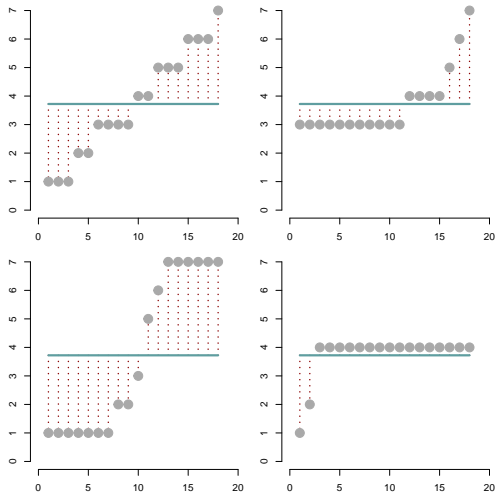


# Violinplots | Die noch bessere Zusammenfassung



# Was bestimmt die Varianz?

Die **Distanzen der Messwerte zum Mittel** sind unterschiedlich groß.



Varianz  $s^2$  | Quadrierte **mittlere Abweichung** vom Mittelwert

$$s^2(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Standardabweichung  $s$  | Quadratwurzel der Varianz

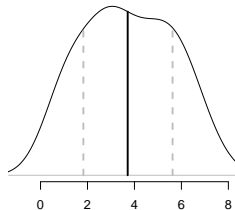
$$s(x) = \sqrt{s^2(x)}$$

Summe der Quadrate | Zählerterm der Varianz

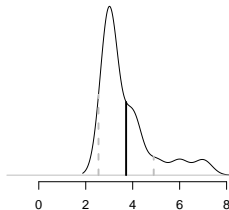
$$SQ(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

# Unterschiedliche Standardabweichungen

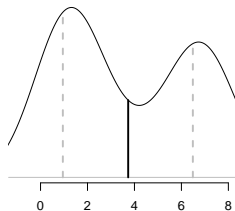
**sd = 1.9**



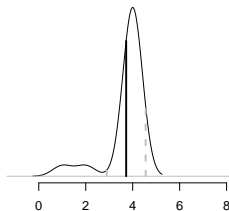
**sd = 1.18**



**sd = 2.76**

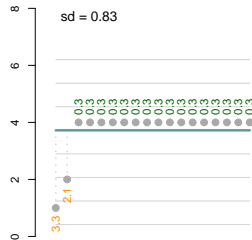
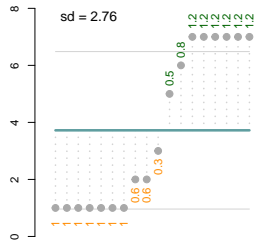
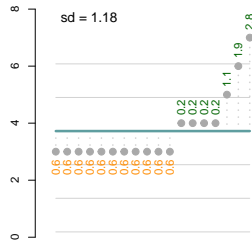
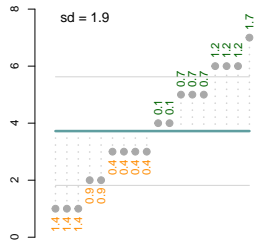


**sd = 0.83**



## z-Wert

Für jeden Messpunkt  $x_i$  |  $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s(x)}$



- Bsp.:  $x = [3.9, 4.3, 7.2, 8.5, 11.1, 12.1, 14.0, 20.7]$ 
  - ▶  $\bar{x} = 10.225$
  - ▶  $s^2(x) = \frac{(3.9-10.225)^2 + \dots + (20.7-10.225)^2}{8-1} = \frac{215.495}{7} = 30.785$
  - ▶  $s(x) = \sqrt{30.785} = 5.548$
  - ▶  $z = \left[ \frac{3.9-10.225}{5.548}, \dots, \frac{20.7-10.225}{5.548} \right] = [-1.140, -1.068, -0.545, -0.311, 0.158, 0.338, 0.680, 1.888]$

## Bivariate Statistiken



# Zähldaten von zwei Variablen

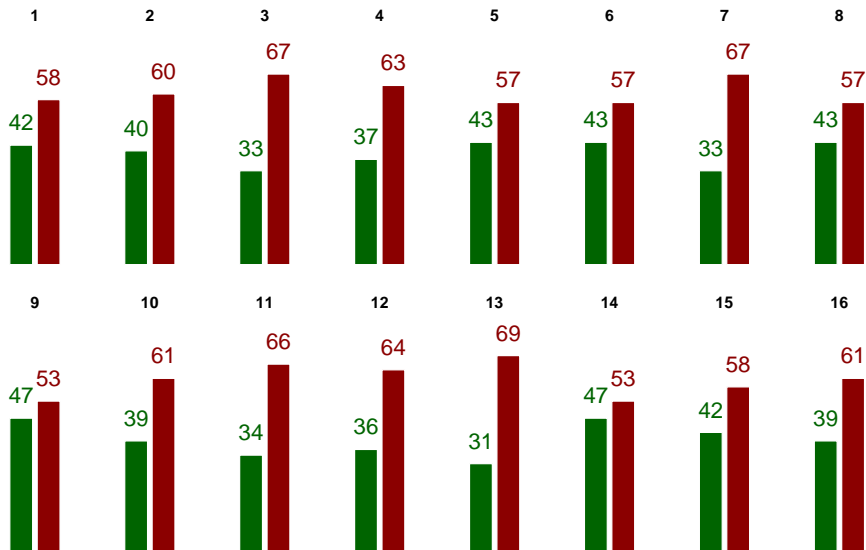
**Kreuztabelle** | Darstellung der Zähldaten zweier Variablen

	<hr/>	
	<b>Variable 1   Wert 1</b>	<b>Wert2</b>
<hr/>	<hr/>	
<b>Variable 2   Wert 1</b>	Anzahl $x_{11}$	Anzahl $x_{12}$
<b>Wert 2</b>	Anzahl $x_{21}$	Anzahl $x_{22}$
	<hr/>	

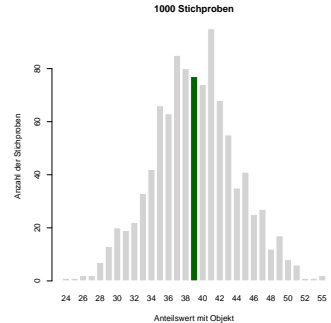
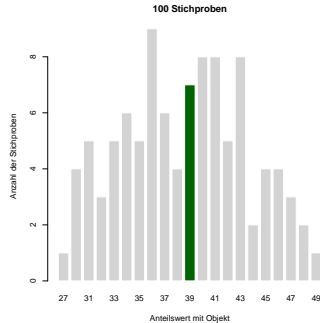
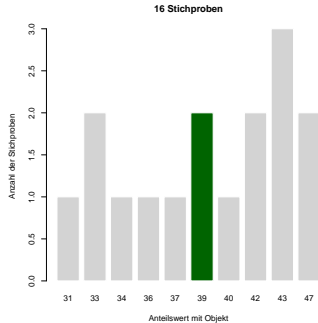
## Standardfehler und Konfidenzintervalle

- Das Verb *essen* | Manchmal mit, manchmal ohne Akkusativ (direktes Objekt)
- Angenommenes wahres Verhältnis | Mit Objekt 39 %, ohne Objekt 61 %
- Viele Stichproben mit  $n=100$  | Ergebnis nicht immer 39 zu 61
- 95%-Konfidenzintervall | In welchem Bereich liegen 95% aller Messwerte bei  $n=100$ ?
- Güte von Stichproben einer bestimmten Größe angesichts gegebener Proportionen

# Sechzehn simulierte Stichprobenentnahmen (n=100)



# Wiederholte Stichprobenentnahmen (n=100)



- Die meisten  $p$  | Nah am wahren Wert  $P$
- Sehr wenige  $p$  | Weit von  $P$  entfernt
- Bei unendlich vielen Messungen
  - ▶ Mittelwert der gemessenen Anteilswerte gleich  $P$
  - ▶ Gemessene Anteilswerte normalverteilt um  $P$
  - ▶ Standardabweichung der Messwerte um  $P$  bekannt  $\rightarrow$  Standardfehler
- Standardfehler | Standardabweichung der Messwerte
  - ▶ Bei gegebener Stichprobengröße  $n$
  - ▶ Bei einem bekannten Populationsanteil  $P$

- Für einen wahren Anteilswert  $P$
- Bei Stichprobengröße  $n$

$$SF(P, n) = \sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}$$

$$\text{Bsp. für } P = 0.39 \text{ und } n = 100 \mid SF(p) = \sqrt{\frac{0.39 \cdot (1-0.39)}{100}} = 0.0488$$

$$SF(P, n) = \sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}$$

$$\text{Bsp.: } SF(0.39, 100) = \sqrt{\frac{0.39 \cdot (1-0.39)}{100}} = 0.0488$$

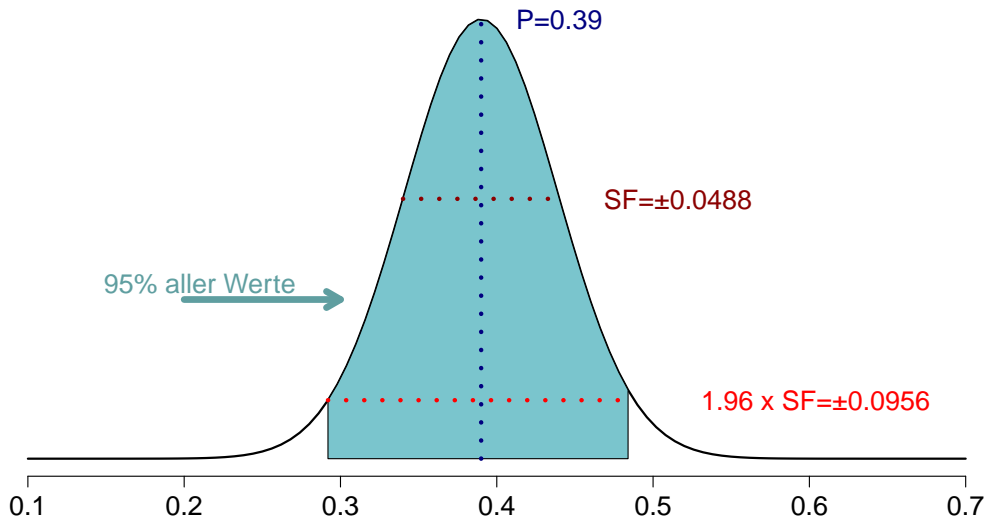
- Für beliebig viele Stichproben
- Bei Stichprobengröße  $n = 100$
- Aus einer Grundgesamtheit mit wahrem Anteilswert  $P = 0.39$
- Abweichung der gemessenen Anteile von  $P = 0.39$  mit einem  $SF = 0.0488$



# Konfidenzintervall | Standardfehler und Normalverteilung

Normal-/Gaussverteilung | Parameter Mittelwert und Standardabweichung

→ Mathematisch exhaustiv bekannt, Flächen unter der Kurve usw. berechenbar



- Stichproben normalverteilt
- z-Wert | Wie viele Standardfehler definieren 95% der Fläche unter der Kurve?
- Quantilfunktion der Normalverteilung | In R mit `qnorm()` oder Tabelle
- Quantilfunktion | Wie viele Standardabweichungen trennen auf jeder Seite 2.5% ab?
- `qnorm(0.025, lower.tail=FALSE)` →  $z(0.95) = 1.96$

- Standardfehler | **Standardabweichung** der Stichprobenwerte
- **Konfidenzbreite** | **z-Wert** multipliziert mit **Standardfehler**
- 95% der Werte | Intervall **Wahrer Anteilswert  $\pm$  Konfidenzbreite**

$$KI(P, n, s) = P \pm z(s) \cdot SF(P, n)$$

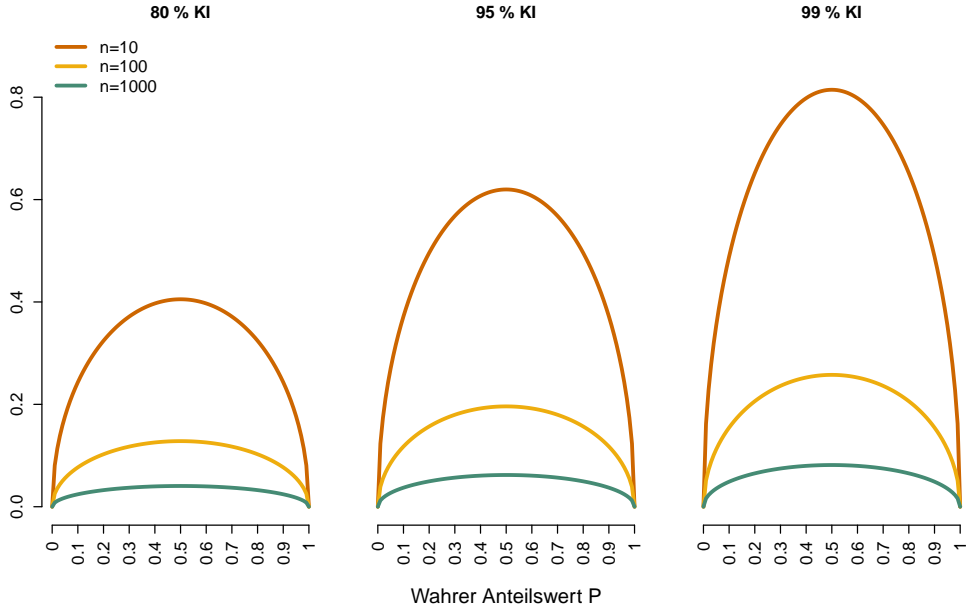
$$\text{Bsp.: } KI(0.39, 100, 0.95) = 0.39 \pm 1.96 \cdot 0.0488 = 0.39 \pm 0.096 = [0.29, 0.49]$$

## Konfidenzintervall im Beispiel | 0.29 bis 0.49

In 95% aller Stichproben mit  $n = 100$  liegt der Messwert zwischen 0.29 und 0.49 bei einem wahren Anteil von 0.39.

- Praxis | Wahrer Anteil nicht bekannt, daher Schätzung aus Stichprobenanteil  $p$
- Der gemessene Anteil  $p$  kann aber eine totale Fehlschätzung sein!
- Die Philosophie bezieht sich auf wiederholte Messungen.
- Entweder liegt der gemessene Wert im Konfidenzintervall, oder ein seltenes Ereignis ist eingetreten.
- Wir sind nicht zu 95% sicher, dass der wahre Wert zwischen 0.29 und 0.49 liegt!

# Konfidenzintervall | Breite bei verschiedenen P, n und Niveaus



Nächste Woche | Überblick

- 1 Inferenz
- 2 Deskriptive Statistik
- 3 Nichtparametrische Verfahren
- 4 z-Test und t-Test
- 5 ANOVA
- 6 Freiheitsgrade und Effektstärken
- 7 Power und Severity
- 8 Lineare Modelle
- 9 Generalisierte Lineare Modelle
- 10 Gemischte Modelle

- Bortz, Jürgen & Christof Schuster. 2010. *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. 7. Aufl. Berlin: Springer.
- Gravetter, Frederick J. & Larry B. Wallnau. 2007. *Statistics for the Behavioral Sciences*. 7. Aufl. Belmont: Thomson.



## Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer  
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft  
Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Fürstengraben 30  
07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>  
[roland.schaefer@uni-jena.de](mailto:roland.schaefer@uni-jena.de)

## Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.