

Statistik

03. Nichtparametrische Verfahren

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Deutsche-Syntax>

- 1 Testverfahren für Zähldaten
 - Vierfelder- χ^2 -Unterschiedstest
 - Fisher-Exakt-Test
 - Effektstärke: Cramér's v und ϕ

- Chancenverhältnis
- Binomialtest

- 2 Nächste Woche | Überblick

Zähldaten

- Unterschiede in Zähldaten
- Signifikanz und Effektstärke
- Unterschiede bei Ja/Nein-Experimenten

- Gravetter & Wallnau 2007
- Bortz & Lienert 2008

Beobachtungen von zwei **kategorialen Variablen**.

Auxiliarwahl beim Perfekt: haben, sein

Herkunft des Belegs: nord, sued

Fall	Aux	Region
1	haben	nord
2	haben	nord
3	sein	nord
4	sein	sued
5	sein	sued
6	haben	nord
7	haben	sued
8	haben	sued

	Aux	
Region	haben	sein
nord	3	1
sued	2	2

Kreuztabelle mit Randsummen

Spaltensumme für Spalte i : $\sum_k x_{ik}$

Zeilensumme für Zeile j : $\sum_k x_{kj}$

	haben	sein	Zeilensummen
nord	3	1	4
sued	2	2	4
Spaltensummen	5	3	8

Beobachtete vs. erwartete Häufigkeiten

$n=100$

50 mal *haben*, 50 mal *sein* (= Spaltensummen)

50 mal Norden, 50 mal Süden (= Zeilensummen)

- erwartete Häufigkeiten unter Annahme der H_0
= kein Zusammenhang zwischen Hilfsverb und Region?

	haben	sein	Zeilensummen
nord	25	25	50
sued	25	25	50
Spaltensummen	50	50	100

Beobachtete vs. erwartete Häufigkeiten

$n=100$

50 mal *haben*, 50 mal *sein* (= Spaltensummen)

30 mal Norden, 70 mal Süden (= Zeilensummen)

- erwartete Häufigkeiten unter Annahme der H_0 ?

	haben	sein	Zeilensummen
nord	15	15	30
sued	35	35	70
Spaltensummen	50	50	100

Beobachtete vs. erwartete Häufigkeiten

n=100

30 mal Norden, 70 mal Süden

40 mal *haben*, 60 mal *sein*

	haben	sein	Zeilensummen
nord	12	18	30
sued	28	42	70
Spaltensummen	40	60	100

Allgemein: erwartete Häufigkeit für Zellen: $\frac{\text{Spaltensumme} \cdot \text{Zeilensumme}}{n}$

$$\text{bzw.: } EH(x_{ij}) = \frac{\sum_k x_{ik} \cdot \sum_k x_{kj}}{n}$$

Beobachtete vs. erwartete Häufigkeiten

beobachtete Häufigkeiten für eine DeReKo-Stichprobe (*geschwebt*):

	haben	sein	Zeilensummen
nord	27	33	60
sued	3	34	37
Spaltensummen	30	67	97

erwartete Häufigkeiten:

	haben	sein	Zeilensummen
nord	18.56	41.44	60
sued	11.44	25.56	37
Spaltensummen	30	67	97

- Beobachtete und erwartete Häufigkeit weichen ab.
- H_0 : kein Zusammenhang zwischen Region und Aux.
- Ab wann ist der Unterschied „signifikant“?
- Ein gemessener Unterschied ist **signifikant**, wenn er angesichts der Stichprobengröße groß genug ist, dass wir das im Experiment gefundene Ergebnis nur sehr selten (typischerweise in unter 5% der Fälle) erwarten würden, wenn er gar nicht bestünde.
- Diese 5% (als **Anteil** 0.05) sind das **Signifikanzniveau**.
- In Fishers Philosophie abgekürzt *sig*, nicht wie oft zu lesen „ α -Niveau“.

beobachtet:

	haben	sein
nord	27	33
sued	3	34

erwartet:

	haben	sein
nord	18.56	41.44
sued	11.44	25.56

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{beobachtet} - \text{erwartet})^2}{\text{erwartet}}$$

$$\text{bzw.: } \chi^2 = \sum_{ij} \frac{(x_{ij} - EH(x_{ij}))^2}{EH(x_{ij})}$$

Berechnung des χ^2 -Werts

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{beobachtet} - \text{erwartet})^2}{\text{erwartet}}$$

beobachtet:

	haben	sein
nord	27	33
sued	3	34

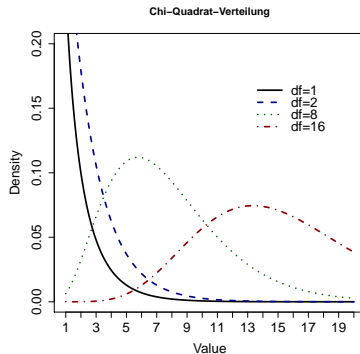
erwartet:

	haben	sein
nord	18.56	41.44
sued	11.44	25.56

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(27-18.56)^2}{18.56} + \frac{(33-41.44)^2}{41.44} + \frac{(3-11.44)^2}{11.44} + \frac{(34-25.56)^2}{25.56} \\ \chi^2 &= 3.84 + 1.72 + 6.23 + 2.79 = 14.58 \end{aligned}$$

Die χ^2 -Verteilung

Die χ^2 -Verteilung für Stichproben
aus Grundgesamtheiten ohne Zusammenhang:



Was sind „Freiheitsgrade“ oder *degrees of freedom* (df)?

- Das kommt später noch ausführlicher.
- Für n-Felder-Tests: $(\text{Zeilenzahl} - 1) \cdot (\text{Spaltenzahl} - 1)$
- Bei Vierfelder-Test also: $df = 1$

- Wahrscheinlichkeit eines bestimmten χ^2 -Werts unter Annahme der H_0 ?
VOR dem Experiment! Nach dem Experiment ist die Wahrscheinlichkeit des gemessenen p-Werts immer 1.
- In Fishers Philosophie Entscheidung nach Signifikanzniveau (*sig*):
Der χ^2 -Wert muss in den extremen *sig*-Anteilen liegen, um die H_0 zu *sig* zurückzuweisen.

In R ähnlich wie bei Normalverteilung:

`> qchisq(0.95, df=1) \Rightarrow 3.84`

- Also ist für $\chi^2 = 14.58$ auf jeden Fall $p < 0.05$ (weil $14.58 > 3.84$).

Mehr oder weniger signifikant?

- Oft liest man etwas von „ α -Niveau“ wie:
 - ▶ 5% („signifikant“)
 - ▶ 1%
 - ▶ 0.1% („hochsignifikant“)
- Diese Niveaus entsprechen einem falsch interpretierten *sig.*
- Die Idee von „mehr oder weniger signifikant“ ist **kompletter Schwachsinn**.
- Entweder ist das gesetzte Niveau akzeptabel, und dann bringt ein kleineres p aber auch nicht mehr.
- Oder es müsste eigtl. ein strengeres *sig*-Niveau gewählt werden, und dann ist $p < 0.05$ schlicht nicht ausreichend (s. Fishers **Sensitivität**).
- Die Entscheidung für ein bestimmtes *sig*-Niveau muss auf Basis konzeptueller/inhaltlicher Gründe gefällt werden.
- **EIN signifikantes Testergebnis alleine sagt nicht viel aus!!!**

Voraussetzungen für χ^2 -Tests

- 1 Die Beobachtungen sind voneinander unabhängig.
- 2 In jeder Zelle ist die erwartete Häufigkeit mindestens 5.
- 3 Keine Beschränkung auf vier Felder!

Mit einer Matrix `my.matrix`:

```
> chisq.test(my.matrix)
```

Eingabe einer einfachen Vierfeldermatrix:

```
> my.matrix <- matrix(c(27,33,3,34), 2, 2, byrow=TRUE)
```

Ausgeben der erwarteten Häufigkeiten:

```
> chisq.test(my.matrix)$expected
```

Der Fisher-Exakt-Test ist eine Alternative zum χ^2 -Test.

- exakter Test: direkte Berechnung der Wahrscheinlichkeit
- **keine** allgemein bessere Alternative zu χ^2
- robuster bei sehr kleinen Stichproben
- **aber nur für feststehende Randsummen geeignet!**
- ohne feste Randsummen: **Barnards Test**

Fisher-Exakt in R:

```
> fisher.test(my.matrix)
> fisher.test(my.vector.1, my.vector.2)
```

Der χ^2 -Wert sagt nichts über die **Stärke eines Zusammenhangs**!
Bei höheren absoluten Frequenzen wird auch der χ^2 -Wert größer.

	haben	sein
nord	27	33
sued	3	34

$$\chi^2 = 12,89$$

	haben	sein
nord	27.84%	34.02%
sued	3.09%	35.05%

	haben	sein
nord	54	66
sued	6	68

$$\chi^2 = 27,46$$

	haben	sein
nord	27.84%	34.02%
sued	3.09%	35.05%

Pearsons ϕ : Maß für die Stärke des Zusammenhangs in 2×2 -Tabellen

$$\phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}$$

ϕ ist eine Zahl zwischen 0 und 1:

Je größer, desto stärker der Zusammenhang zwischen den Variablen.

$$\text{Beispiel: } \phi = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \sqrt{\frac{12.89}{97}} = 0.3648$$

Cramér's v for $n \times n$ -Tables with $n > 2$ or $m > 2$

$$v = \sqrt{\frac{\frac{\chi^2}{n}}{\min(s-1, z-1)}}$$

mit: s die Spaltenzahl und z die Zeilenzahl

Beachte: für 2×2 -Tabellen: $s - 1 = 1$ und $z - 1 = 1$,

also $\min(s - 1, z - 1) = 1$

$$\text{daher: } v = \sqrt{\frac{\frac{\chi^2}{n}}{1}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}} = \phi$$

Speichern des Test-Objekts:

```
> my.chi2.test <- chisq.test(my.matrix)
```

Speichern des χ^2 -Werts mit:

```
> my.chi2.value <- as.numeric(my.chi2.test$statistic)
```

Speichern von n :

```
> my.n <- sum(my.matrix)
```

Also Effektstärke (mit Ausgabe):

```
> my.phi <- sqrt( my.chi2.value / my.n ); my.phi
```

- Die **Chance (odds)** o setzt die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses E in Relation zur Gegenwahrscheinlichkeit:

$$o(E) = \frac{p(E)}{1-p(E)}$$

und damit

$$p(E) = \frac{o(E)}{1+o(E)}$$

- Ein Ereignis ist in Korpusstudien i. d. R. das Auftreten einer **Variablenausprägung**.
- Die Information in den Maßen Wahrscheinlichkeit und Chance ist dieselbe (s. Umrechenbarkeit ineinander).

Aux	Anzahl
haben	27
sein	33

$$p(\text{haben}) = \frac{27}{27+33} = \frac{27}{60} = 0.45 \text{ (Wahrscheinlichkeit)}$$

$$1 - p(\text{haben}) = p(\neg\text{haben}) = \frac{33}{27+33} = \frac{33}{60} = 0.55 \text{ (Gegenwahrscheinlichkeit)}$$

$$\text{Beachte: } p(\text{haben}) + p(\neg\text{haben}) = 1$$

$$o(\text{haben}) = \frac{\frac{27}{60}}{\frac{33}{60}} = \frac{27}{60} \cdot \frac{60}{33} = \frac{27}{33} = 0.82$$

$$\text{allgemein: } p(E) = \frac{\text{Anzahl}(E)}{\text{Anzahl}(E) + \text{Anzahl}(\neg E)} \text{ und } o(E) = \frac{\text{Anzahl}(E)}{\text{Anzahl}(\neg E)}$$

- Das Chancenverhältnis (odds ratio) gibt das Verhältnis an, wie sich die Chancen einer Variablenausprägung E unter Bedingung A – also $o(E|A)$ – und unter Bedingung B – also $o(E|B)$ – zueinander Verhalten:

$$r(E|A, E|B) = \frac{o(E|A)}{o(E|B)}$$

Beispiel zum Chancenverhältnis (1)

- Wir haben Texte aus Süddeutschland und Norddeutschland auf das Auftreten des Perfektauxiliars *haben* und *sein* bei bestimmten Verben untersucht.
- Die Kreuztabelle:

	nord	sued
haben	27	3
sein	33	34

Beispiel zum Chancenverhältnis (2)

	nord	sued
haben	27	3
sein	33	34

- $o(haben|nord) = \frac{27}{33} = 0.82$
- $o(haben|sued) = \frac{3}{34} = 0.09$
- Verhältnis zwischen den Chancen: $or = \frac{0.82}{0.09} = 9.11$
- D. h. die Chance von *haben* ist 9.11 mal größer, wenn die Region *nord* ist.
- Ersatz für Effektstärke bei Fisher-Test

- binäre Daten: Ereignis vs. Nicht-Ereignis bzw. Ja/Nein
- Vgl. Behauptung: „Gen/Dat alternieren frei bei *wegen*.“
 - ▶ „frei alternieren“ = beide Kasus haben den gleichen Anteil.
 - ▶ Grundgesamtheit per Null-Hypothese: 50% Genitive und 50% Dative
- Korpusstichprobe: $F(\text{Genitiv})=41$ und $F(\text{Dativ})=59$
- Stimmt das mit der Null überein bei $\text{sig} = 0.05$?

H_0 : Es gibt keine Abweichung
von den erwarteten gleich großen Anteilen.

$H_0: p(\textit{Dativ}) = 0.5$ (p für proportion)

Benötigte Größen:

- Stichproben der Größe n
- Proportion p (hier $p = 0.5$)
- Anzahl der beobachteten Ereignisse: X (hier $X(\text{Dativ}) = 59$)

- Wenn $p \cdot n > 10$ und $(1 - p) \cdot n > 10$
approximiert die Binomialverteilung die Normalverteilung.
- Es gilt dann (unter Annahme der Ho!) für die Normalverteilung:
 - ▶ Mittel: $\mu = p \cdot n$
 - ▶ Standardabweichung: $s = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$
 - ▶ Wir können für den gemessenen Wert den z-Wert ausrechnen.

$$z = \frac{x - \mu}{s} = \frac{x - p \cdot n}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

$$z = \frac{59 - (0.5 \cdot 100)}{\sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = \frac{59 - 50}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5} = 1.8$$

- Der gemessene Wert liegt 1.8 Standardabweichungen vom HO-Mittel entfernt.
- Wir kennen bereits die kritischen Werte für Normalverteilungen und $\text{sig} = 0.05$: $-1.96..1.96$
- Die H_0 kann also nicht zurückgewiesen werden bei $\text{sig} = 0.05$.
- Interpretation: Entweder ist die Variation nicht genau gleich verteilt oder ein seltenes Ereignis ist eingetreten.

```
> binom.test(59, 100, 0.5)
```

Exact binomial test

data: 59 and 100

number of successes = 59, number of trials = 100, p-value = 0.08863

alternative hypothesis: true probability of success is not equal to 0.5

95 percent confidence interval:

0.4871442 0.6873800 sample estimates:

probability of success 0.59

Nächste Woche | Überblick

- 1 Statistik, Inferenz und probabilistische Grammatik
- 2 Deskriptive Statistik
- 3 Nichtparametrische Verfahren
- 4 z-Test und t-Test
- 5 ANOVA
- 6 Freiheitsgrade und Effektstärken
- 7 Power
- 8 Lineare Modelle
- 9 Generalisierte Lineare Modelle
- 10 Gemischte Modelle

Bortz, Jürgen & Gustav Lienert. 2008. *Kurzgefasste Statistik für die klinische Forschung*. Heidelberg: Springer.

Gravetter, Frederick J. & Larry B. Wallnau. 2007. *Statistics for the Behavioral Sciences*. 7. Aufl. Belmont: Thomson.

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>
roland.schaefer@uni-jena.de

Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.