

Statistik

05. ANOVA

Roland Schäfer

Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena

stets aktuelle Fassungen: <https://github.com/rsling/VL-Deutsche-Syntax>

1 ANOVA

- Überblick

- Graphische Einführung
- Einfaktorielle ANOVA
- Zweifaktorielle ANOVA

ANOVA

- Vergleiche von Mittelwerten zwischen mehr als zwei Gruppen
- Mittelwertvergleiche mit mehreren Unabhängigen
- Warum kann man über Varianzen Mittelwerte vergleichen?

- Gravetter & Wallnau (2007)
- Bortz & Schuster (2010)
- indirekt: Maxwell & Delaney (2004)

- Einschränkung beim t-test: immer nur 2 Gruppen
- t-Test bei mehr als 2 Gruppen: komplizierte paarweise Vergleiche
- stattdessen ANOVA: ANalysis Of VAriance
- Vergleich von Varianzen zwischen beliebigen Gruppen
- Schluss auf Mittelwerte nur indirekt über die Varianzen
- bei zwei Gruppen: Konvergenz von t-Test und ANOVA

- ANOVA vergleicht immer **mehrere Gruppen**
- Gruppen bei der einfaktoriellen ANOVA = den Ausprägungen **einer unabhängigen Variable** (z. B. Text-Register)
- diese Variablen heißen hier **Faktoren**.
- Einfluss der Faktoren auf **eine abhängige** (z. B. Satzlänge, Lesezeit)
- bei mehreren Faktoren (z. B. Text-Register und Jahrhundert): **mehrfaktorielle ANOVA**.

Idee bei ANOVA (z. B. drei Gruppen)

- $H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3$
- aber: Es gibt keinen “Differenzwert” für drei Mittel (also sowas wie den t-Wert).
- daher Varianzvergleich
- F-Wert (Verteilung unter H_0 bekannt) als Test-Statistik

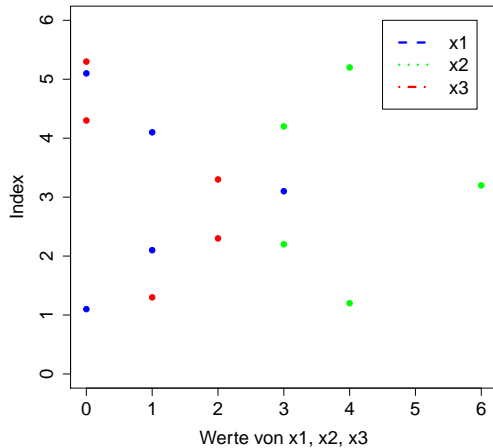
$$F = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz in den Stichproben}} = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz per Zufall}}$$

Drei Stichproben

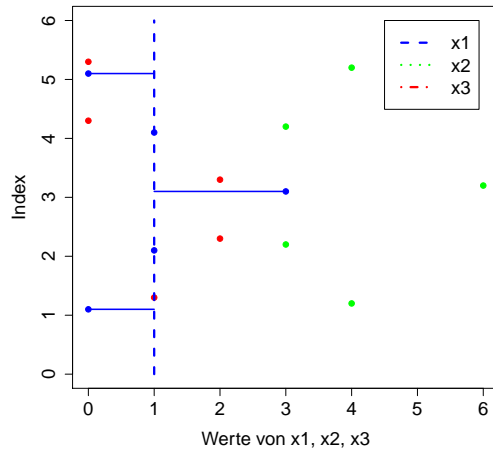
$$x_1 = [0, 1, 3, 1, 0]$$

$$x_2 = [4, 3, 6, 3, 4]$$

$$x_3 = [1, 2, 2, 0, 0]$$

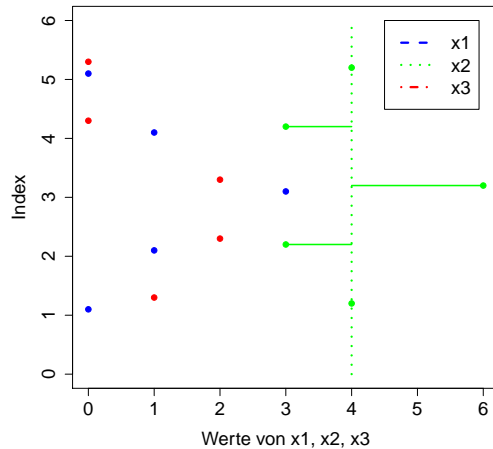


Komponenten der Varianz von x_1



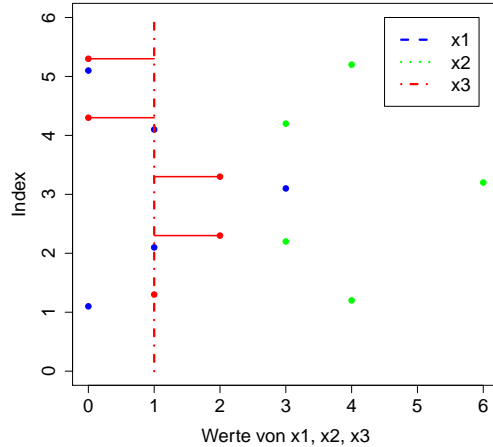
$$s^2(x_1) = 1.5$$

Komponenten der Varianz von x_2



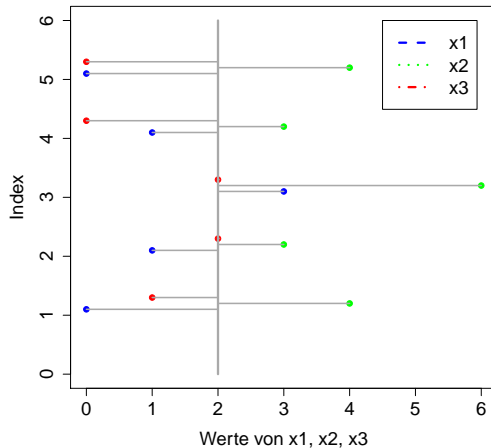
$$s^2(x_2) = 1.5$$

Komponenten der Varianz von x_3



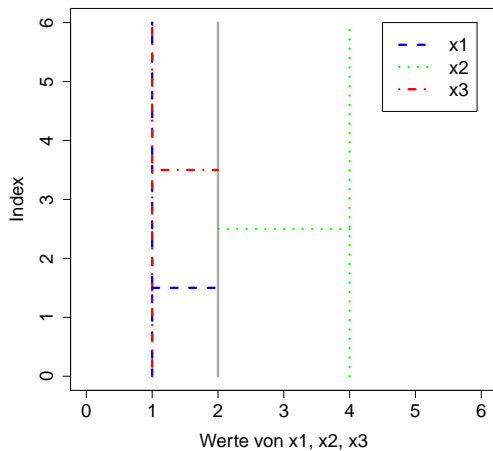
$$s^2(x_3) = 1$$

Varianz in der zusammengefassten Stichprobe X



$$s^2(X) = 3.29$$

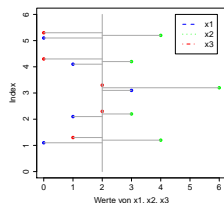
Varianz zwischen den drei Gruppen



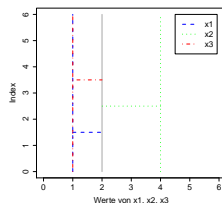
$$s^2([\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]) = 1.33$$

Achtung: Bei unterschiedlichen Stichprobengrößen

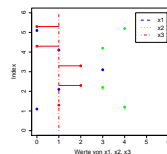
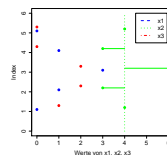
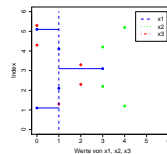
Es gilt bezüglich der Varianzen



=



+

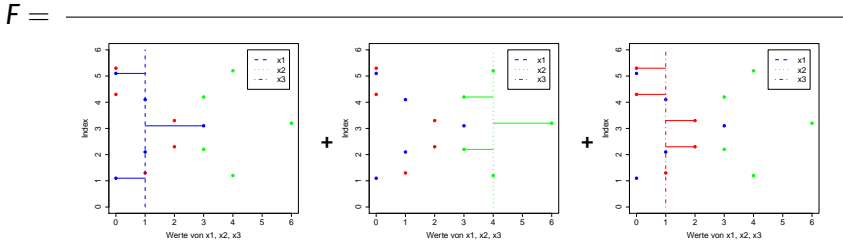
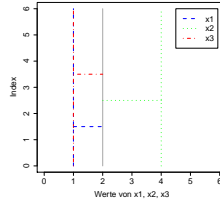


$$s^2(X) = s^2(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) + s^2(x_1) + s^2(x_2) + s^2(x_3)$$

Wenn man den Abstand zwischen den Mitteln verschiebt

Graphische Verdeutlichung des F-Werts

$$F = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz in den Stichproben}} = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz per Zufall}}$$



Wenn man den Abstand zwischen den Mitteln verschiebt,
muss die Gesamtvarianz größer werden!

Wie funktioniert der F-Wert

- $F = \frac{\text{Varianz zwischen Stichprobenmitteln}}{\text{Varianz in den Stichproben}}$
- Warum?
- $F = \frac{\text{Unterschied durch Effekt} + \text{Unterschiede durch restliche Varianz}}{\text{Unterschied durch restliche Varianz}}$
- Unter Annahme der H_0 gibt es keinen Effekt, ...
- also $\text{Unterschied durch Effekt} = 0$
- dann: $F = \frac{0 + \text{Unterschiede durch restliche Varianz}}{\text{Unterschied durch restliche Varianz}} = 1$

- Anzahl der Gruppen x_i : k
- Größe der Gruppen: n_i
- Größe der Gesamtstichprobe X : N
- Summen der Gruppen: T_i
- Gesamtsumme: G
- Mittel (anders als G&W): \bar{x}_i, \bar{X}
- Summe der Quadrate (=Zähler der Varianz): $SQ(x_i), SQ(X)$

Zur Erinnerung: $s^2(x) = \frac{\sum(x-\bar{x})}{n-1} = \frac{SQ(x)}{df(x)}$

Varianz ist Varianz beim F-Wert

$$F = \frac{\text{Varianz zwischen den Gruppen}}{\text{Varianz in den Gruppen}} = \frac{s_{\text{zwischen}}^2}{s_{\text{in}}^2} = \frac{\frac{SQ_{\text{zwischen}}}{df_{\text{zwischen}}}}{\frac{SQ_{\text{in}}}{df_{\text{in}}}}$$

denn

$$s^2(x) = \frac{SQ(x)}{df(x)}$$

Am einfachsten unter Beachtung von:

$$SQ_{gesamt} = SQ_{zwischen} + SQ_{in}$$

$$\text{Es gilt: } SQ_{gesamt} = SQ(X) = \sum (X - \bar{X})^2$$

$$\text{Außerdem: } SQ_{in} = \sum SQ(x_i)$$

$$\text{Damit: } SQ_{zwischen} = SQ_{gesamt} - SQ_{in}$$

SQ_{zwischen} kann man auch direkt ausrechnen:

$$SQ_{\text{zwischen}} = \sum_i \left(\frac{T_i^2}{n_i} \right) - \frac{G^2}{N}$$

$$\mathbf{x}_1 = [0, 1, 3, 1, 0]$$

$$\mathbf{x}_2 = [4, 3, 6, 3, 4]$$

$$\mathbf{x}_3 = [1, 2, 2, 0, 0]$$

Bitte alle SQ ausrechnen, inkl. SQ_{zwischen} direkt.

Tipp: Sie brauchen als Vorwissen **nur**
den Stoff der ersten Statistik-Sitzung:

- arithmetisches Mittel
- SQ

Es gilt auch hier, ähnlich wie bei den SQ:

$$df_{gesamt} = df_{zwischen} + df_{in}$$

$$df_{gesamt} = N - 1$$

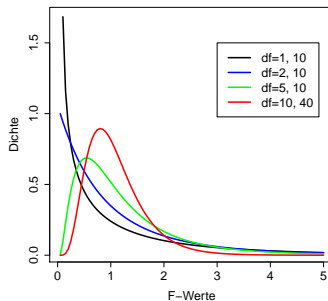
$$df_{zwischen} = k - 1$$

$$df_{in} = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = (N - 1) - (k - 1)$$

$$F = \frac{s^2_{\text{zwischen}}}{s^2_{\text{in}}} = \frac{\frac{SQ_{\text{zwischen}}}{df_{\text{zwischen}}}}{\frac{SQ_{\text{in}}}{df_{\text{in}}}}$$

Bitte ausrechnen für o. g. Beispiel.

F-Verteilung:



In R für $df_{\text{zwischen}} = 2$ und $df_{\text{in}} = 12$ bei $\text{sig}=0.05$:

`> qf(0.95, 2, 12) ⇒ 3.885294`

$$\eta^2 = \frac{SQ_{zwischen}}{SQ_{gesamt}}$$

(wieder ein r^2 -Maß)

- Problem: Welche Gruppen unterscheiden sich denn nun?
- Lösung: Post(-Hoc)-Tests, z. B. Scheffé-Test:
 - ▶ paarweise ANOVA
 - ▶ aber: k wird gesetzt wie bei ursprünglicher ANOVA
 - ▶ dadurch Vermeidung kumulierten Alpha-Fehlers (Vorteil ggü. paarweisen t-Tests)
 - ▶ weiterer Vorteil: paarweise Post-Tests nur erforderlich, wenn Omnibus-ANOVA bereits Signifikanz gezeigt hat
 - ▶ und: Generalisierbarkeit zu mehrfaktorieller ANOVA (geht mit t-Test nicht)

Bitte ausrechnen für die oben gerechnete ANOVA.

Wozu mehrfaktorielle Designs

Oft vermutet man den Einfluss **mehrerer Unabhängiger** auf eine Abhängige.
Beispiel: Satzlängen

		Textsorte		
		Fiktion	Zeitung	Wissenschaft
Jahrhundert	19	X_{11}	X_{12}	X_{13}
	20	X_{21}	X_{22}	X_{23}

Hier also: $2 \cdot 3 = 6$ Gruppen

Ablauf der zweifaktoriellen ANOVA

- 1 erste ANOVA zwischen Zeilen
- 2 zweite ANOVA zwischen Spalten
- 3 dritte ANOVA für **Interaktionen** zwischen Zeilen und Spalten
- 4 Interaktion: Ungleichverteilung in Gruppen, die nicht durch die Spalten- und Zeileneffekte erklärt werden kann
- 5 Alle drei ANOVAs sind **unabhängig** voneinander!

- **Gesamtvarianz** = Varianz zwischen Gruppen + Varianz in den Gruppen
- **Varianz zwischen den Gruppen** =
Haupt-Faktoren-Varianz + **Interaktions-Varianz**
- **Haupt-Faktoren-Varianz** =
Varianz zwischen Faktor A-Gruppen +
Varianz zwischen Faktor B-Gruppen

Schritt 1(1): SQ/df zwischen den Gruppen

Jede Zelle der Tabelle ist eine Gruppe.

$$SQ_{\text{zwischen}} = \sum_i \left(\frac{T_i^2}{n_i} \right) - \frac{G^2}{N}$$
$$df_{\text{zwischen}} = k - 1 \text{ (k = Anzahl der Zellen/Gruppen)}$$

Beachte: Keine Änderung verglichen mit einfaktorieller ANOVA!

Schritt 1(2): SQ/df in den Gruppen

Jede Zelle der Tabelle ist eine Gruppe.

$$\begin{aligned}SQ_{in} &= \sum SQ(x_i) \\ df_{in} &= \sum df(x_i)\end{aligned}$$

Beachte: **Keine** Änderung verglichen mit einfaktorieller ANOVA!

Schritt 2(2): SQ/df für Gruppe A

Berechnung nach dem Schema für Zwischen-Gruppen-Varianz

		Textsorte			
		Fiktion	Zeitung	Wissenschaft	
Jahrhundert	19	x_{11}	x_{12}	x_{13}	A_1
	20	x_{21}	x_{22}	x_{23}	A_2

Auch hier keine wesentliche Änderung:

$$SQ_A = \sum_i \left(\frac{T_{A_i}^2}{n_{A_i}} \right) - \frac{G^2}{N}$$

$$df_A = k_A - 1 \quad (k_A = \text{Anzahl der Zeilen})$$

Schritt 2(2): SQ/df für Gruppe A

Berechnung nach dem Schema für Zwischen-Gruppen-Varianz

		Textsorte		
		Fiktion	Zeitung	Wissenschaft
Jahrhundert	19	X_{11}	X_{21}	X_{31}
	20	X_{12}	X_{22}	X_{32}
		B_1	B_2	B_3

Auch hier keine Änderung:

$$SQ_B = \sum_i \left(\frac{T_{B_i}^2}{n_{B_i}} \right) - \frac{G^2}{N}$$

$$df_B = k_B - 1 \quad (k_B = \text{hier Anzahl der Spalten})$$

Schritt 2(3): SQ/df für Interaktion $A \times B$

Die Varianz, die auf Kosten der Interaktion geht, ist
die Zwischen-Gruppen-Varianz ohne die Einzelfaktor-Varianz.

$$\begin{aligned} SQ_{A \times B} &= SQ_{\text{zwischen}} - SQ_A - SQ_B \\ df_{A \times B} &= df_{\text{zwischen}} - df_A - df_B \end{aligned}$$

Alle drei F-Werte ausrechnen

Die zweifaktorielle ANOVA
erfordert wie gesagt drei Einzel-ANOVAs.

$$F_A = \frac{\frac{SQ_A}{df_A}}{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}} = \frac{s_A^2}{s_{zwischen}^2}$$

$$F_B = \frac{\frac{SQ_B}{df_B}}{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}} = \frac{s_B^2}{s_{zwischen}^2}$$

$$F_{A \times B} = \frac{\frac{SQ_{A \times B}}{df_{A \times B}}}{\frac{SQ_{zwischen}}{df_{zwischen}}} = \frac{s_{A \times B}^2}{s_{zwischen}^2}$$

Entsprechend sind **drei** η^2 auszurechnen:

$$\eta_A^2 = \frac{SQ_A}{SQ_{gesamt} - SQ_B - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta_B^2 = \frac{SQ_B}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_{A \times B}}$$

$$\eta_{A \times B}^2 = \frac{SQ_{A \times B}}{SQ_{gesamt} - SQ_A - SQ_B}$$

Wir fragen jeweils, welchen Anteil an der Varianz, die die anderen beiden Faktoren **nicht** erklären, der jeweilige dritte Faktor hat.

Bitte vollständige zweifaktorielle ANOVA
bei $\text{sig}=0.05$ und $\text{sig}=0.01$ rechnen:

	B1	B2	B3
A1	1, 3, 1, 4	4, 3, 3, 6	8, 6, 8, 10
A2	8, 6, 6, 8	1, 6, 8, 1	1, 4, 1, 4

- Bortz, Jürgen & Christof Schuster. 2010. *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. 7. Aufl. Berlin: Springer.
- Gravetter, Frederick J. & Larry B. Wallnau. 2007. *Statistics for the Behavioral Sciences*. 7. Aufl. Belmont: Thomson.
- Maxwell, Scott E. & Harold D. Delaney. 2004. *Designing experiments and analyzing data: a model comparison perspective*. Mahwa, New Jersey, London: Taylor & Francis.

Kontakt

Prof. Dr. Roland Schäfer
Institut für Germanistische Sprachwissenschaft
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fürstengraben 30
07743 Jena

<https://rolandschaefer.net>
roland.schaefer@uni-jena.de

Creative Commons BY-SA-3.0-DE

Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ *Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland* zugänglich. Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/> oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.