

# 基于多起点延申与节点合并的树模型构建及其在 Collatz 映射下的收敛性分析

江宇潇

2025 年 11 月 25 日

## 摘要

本文提出一种基于多起点延申分支与节点合并规则的树模型构建方法。模型从无限多个满足约束条件的起点出发，每个起点依照定义的生长函数和分支规则形成分支节点，构成该起点下的分支节点集，起点与分支节点集形成该起点下的延申路径；当分支结果与已有起点重合时，通过连接规则将该分支与重合起点的延申路径自动融合，从而形成一个全局有序、无环且收敛的树状结构。该结构满足五大性质：无循环性、收敛性、节点覆盖性、节点唯一性与父节点唯一性。在此基础上，本文证明了所构建模型为严格意义上的有根有向树（arborescence），并在 Collatz 映射下验证了该模型的收敛完备性。该模型能够完整刻画  $3n+1$  变换的全局收敛关系，为离散动力系统的结构化证明提供了一种自组织、可验证的统一框架。

## 目录

1 引言	4
2 基础定义与预备知识	5
2.1 符号与集合约定	5
2.2 Collatz 映射的标准形式	6
2.3 奇偶分解与“降解—升格”结构	6
2.4 关于 $6n \pm 1$ 的预备结论	6
2.5 树模型的必要性	7
3 起点集合与生长规则	8
3.1 起点集合的定义	8
3.2 生长规则的定义	8
3.3 生长节点的基本性质	9
3.4 结构示例	9

目录	2
<b>4 分支条件与分支节点集</b>	<b>9</b>
4.1 分支条件的定义	9
4.2 分支节点集	10
4.3 三类起点的分支行为	10
4.4 分支节点生成函数	11
4.4.1 (1) $\mathcal{S}_1$ : $s = 6n - 5$ 的分支节点生成函数	11
4.4.2 (2) $\mathcal{S}_5$ : $s = 6n - 1$ 的分支节点生成函数	11
4.4.3 (3) $\mathcal{S}_3$ : $s = 6n - 3$ 不产生分支	11
4.5 示例	12
<b>5 连接规则</b>	<b>12</b>
5.1 连接规则的正式定义	12
5.2 特殊情形 $b = 1$	13
5.3 示例	13
5.4 连接规则的作用	13
<b>6 奇数树模型的正式构造</b>	<b>14</b>
6.1 节点集合	14
6.2 奇数树的边	14
6.3 奇数树模型的定义	15
<b>7 奇数树模型的主定理与严格证明</b>	<b>16</b>
7.1 主定理（奇数树模型完备性与唯一性）	16
7.2 证明结构概述	16
7.3 完备性证明	17
7.4 唯一性证明	18
7.5 父节点唯一性证明	21
7.6 无环性与有限回归性的严格证明	22
7.7 主定理得证	24
<b>8 势函数与节点回归性</b>	<b>24</b>
8.1 势函数构造规则与偶数收纳性	25
8.2 问题设定与记号	25
8.3 关键基本不等式	26
8.4 抬升不可无限: $v_2$ 耗尽论证	26
8.5 势函数（良序对）与单步严格下降的完全穷尽情况	27
8.6 全局终止性与无非平凡环	28
8.7 穷尽情况汇总表（便于引用与实现）	28
8.8 保守全局步数上界	29

目录	3
8.9 极小反例法的严格补充证明	31
8.10 结论	33
<b>9 完整树模型（含偶数）的构造与性质</b>	<b>33</b>
9.1 完整树模型的定义	33
9.2 完整树包含奇数树作为其骨架	34
9.3 方向性与父节点唯一性保持不变	34
9.4 偶数节点的引入不产生新环	35
9.5 完整树的覆盖性：包含全部正整数	35
9.6 完整树保持奇数树的全部结构性质	35
<b>10 Collatz 映射与树模型的双向对应</b>	<b>36</b>
10.1 正向对应：Collatz 迭代 $\Rightarrow$ 树逆向回归	36
10.2 逆向对应：树逆向路径 $\Rightarrow$ Collatz 迭代	37
10.3 双向对应主定理	38
<b>11 完备性—封闭性—无环性主定理</b>	<b>38</b>
11.1 主定理的逻辑闭包性	40
<b>12 关于可能反驳点的讨论</b>	<b>40</b>
12.1 （1）关于表示唯一性的质疑	40
12.2 （2）关于反向路径可能分叉的质疑	41
12.3 （3）关于可能存在隐藏短周期的质疑	41
12.4 （4）关于“偶数层添加是否破坏无环性”的质疑	41
12.5 （5）关于“是否存在未被覆盖的整数”的质疑	42
12.6 （6）关于 Collatz—树模型对应是否完全的质疑	42
<b>13 结论</b>	<b>42</b>
附录 A：短周期（长度 $\leq 4$ ）的代数穷举	44
附录 B：跨层冲突的完整穷尽证明	46
附录 C：图结构的形式化定义	48

# 1 引言

Collatz 猜想（亦称  $3n + 1$  猜想）自 1937 年提出以来，其核心命题在于证明：对任意正整数  $N$ ，迭代映射

$$T(N) = \begin{cases} N/2, & N \text{ 为偶数}, \\ 3N + 1, & N \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

经过有限步后必然到达 1。尽管该问题具有极其简洁的形式，却在八十余年间抵抗了全部已知的数学工具，成为当代最著名的未解难题之一。传统研究多集中于迭代轨道的统计性质、动力系统特征及可计算复杂度，而缺乏一种能对所有正整数统一建模并具有强代数封闭结构的形式化框架。

本工作提出一个新的研究视角：构造一个覆盖全部正整数的有向树模型（以下简称“完整树模型”），其奇数子结构（“奇数树”）由三个关键组成部分构成：

- **起点集合**：将所有正奇数按模 6 余数划分为三类，从每个奇数起点出发生成其生长序列；
- **生长节点集**：对每个奇数起点反复施加乘 2 的操作，生成其全部偶数后代；
- **分支节点集**：在生长节点上判定是否存在可逆的  $(v - 1)/3$  分支，从而为其他起点提供连接节点。

通过连接规则，将不同起点导出的结构合并，最终形成一个以 1 为根节点的有向树。该树具有如下性质：

1. 其奇数部分覆盖全部正奇数，并具有唯一父节点、无环（除特殊自环）、方向一致等性质；
2. 加入偶数节点后形成的完整树覆盖全部正整数，仍保持上述全部树性结构；
3. 在该树中任意节点都能通过有限步的逆向操作回归根节点 1。

上述树的逆向回归过程与 Collatz 映射的下降过程完全对应：偶数逆向生长对应  $N \mapsto N/2$ ，奇数逆向分支对应  $N \mapsto 3N - 1$ （即 Collatz 奇数映射到偶数的操作）。因此，若证明树模型中任意节点都能回归 1，即可等价证明 Collatz 迭代必然下降到 1。

本研究的核心贡献可总结如下：

1. 构造了一个覆盖全部正整数的代数树模型，并严格证明其结点唯一性、边唯一性、无环性及父节点唯一性；
2. 给出了分支节点集的生成函数，证明其对所有奇数起点的完备性与唯一性；

3. 通过势函数方法证明树中任意节点的逆向回归性，构成证明 Collatz 下落性的关键步骤；
4. 证明 Collatz 映射与树模型逆向回归的严格双向对应关系；
5. 在上述全部结构的基础上，提出“完备性封闭主定理”，说明：若生长与分支系统满足完备性与唯一性，则完整树中无节点可逃离根节点 1，从而等价证明  $T$  的所有轨道必然终止于 1。

本文的结构如下：第二章给出基本定义；第三章给出起点集合与生长规则；第四章介绍分支条件与生成函数；第五章描述连接规则；第六章构造奇数树模型；第七章给出奇数树的主定理与严格证明；第八章讨论势函数与回归性；第九章扩展到完整树模型；第十章建立 Collatz 映射与树模型的双向对应；第十一章给出完备性封闭主定理；第十二章讨论可能的反驳点；第十三章给出结论；附录提供短周期穷举、跨层冲突验证及图结构形式化定义。

本研究的目标不是给出传统意义上的 Collatz 猜想“新技巧”，而是提供一种完全结构化的代数与图论框架，使每一步生成均可形式化验证，从而为最终的全局下降性提供严格的逻辑基础。

## 2 基础定义与预备知识

本节给出证明所需的最基本定义，包括符号体系、整数分解、Collatz 映射的标准形式，以及用于后续树模型构造的若干预备引理。

### 2.1 符号与集合约定

本文默认以下约定：

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  表示正整数集合。
- $\mathbb{N}_{\text{odd}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ 为奇数}\}$ 。
- $\mathbb{N}_{\text{even}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ 为偶数}\}$ 。
- 对于任意  $m \in \mathbb{N}$ ，唯一表示  $m = 2^k t$ ，其中  $t$  为奇数， $k \geq 0$ ，称  $k$  为  $m$  的 2-adic 阶，记为  $\nu_2(m) = k$ 。

若无特别说明，文中所有变量  $n, x, k$  均指正整数。

## 2.2 Collatz 映射的标准形式

Collatz 迭代定义如下的映射  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ :

$$T(n) = \begin{cases} n/2, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 3n + 1, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 定义其轨道为:

$$\mathcal{O}(n) = \{T^k(n) \mid k \geq 0\}.$$

经典 Collatz 猜想断言: 对所有正整数  $n$ , 轨道  $\mathcal{O}(n)$  最终进入循环  $(4, 2, 1)$ 。

## 2.3 奇偶分解与“降解—升格”结构

由于偶数步骤会连续出现, Collatz 轨道可以标准化为:

$$n \xrightarrow{\times 3+1} 3n+1 \xrightarrow{\div 2^{\nu_2(3n+1)}} \text{奇数}.$$

这是对“升格-降解”过程的简化描述: 奇数被  $3n+1$  提升, 然后连续除以 2 下降至下一奇数。

**定义 2.1** (奇数回归映射). 定义奇数间的回归映射  $R : \mathbb{N}_{\text{odd}} \rightarrow \mathbb{N}_{\text{odd}}$ :

$$R(m) = \frac{3m+1}{2^{\nu_2(3m+1)}}.$$

$R$  的迭代等价于 Collatz 迭代 Restricted 在奇数层面的折叠版本。

## 2.4 关于 $6n \pm 1$ 的预备结论

为了构造从奇数开始的树模型, 我们需要以下基本事实。

**引理 2.1** (奇数的模 6 分类). 任意奇数必属于以下三类之一:

$$\mathbb{N}_{\text{odd}} = \{6n-5, 6n-3, 6n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

且表示唯一。

**引理 2.2** (关于  $3m+1$  的 2-进性区分). 对奇数  $m$ , 其  $3m+1$  的 2-adic 阶  $\nu_2(3m+1)$  仅取决于  $m \bmod 6$  的类型。

证明见附录 C 中图结构的形式化描述部分。该事实保证我们在构造生长节点与分支节点时可以保持逻辑的统一性。

## 2.5 树模型的必要性

在从逆向角度研究 Collatz 映射时，需明确「哪一类数可作为分支来源（即满足  $(\cdot - 1)/3$  整除条件）」。在 Collatz 的正向规则中奇数  $u$  经映射得到

$$3u + 1,$$

该值必为偶数；随后对该偶数连续除以 2 得到下一个奇数。因此在逆向构造中我们应把注意力放在这类中间的 \*\* 偶数 \*\* 上，而非任意整数上。

为此做出以下定义：

- 记某中间偶数为  $m$ 。若存在奇数  $u$  使  $m = 3u + 1$ ，则  $m$  必为偶数，且可以检查

$$\frac{m-1}{3} = u \in \mathbb{N}.$$

因此“除以 3 再取整”的操作本质上应当作用在这些由某奇数经  $3 \cdot +1$  得到的偶数  $m$  上。

- 在逆向构造中，偶数  $m$  往往出现在某一奇数起点  $s$  的生长链中（即由生长操作  $s \mapsto 2s \mapsto 4s \mapsto \dots$  产生的某一项），因此必须考虑生长链上偶数位置是否满足  $(m-1)/3 \in \mathbb{N}$  且结果为奇数；若满足，则该结果即为一个分支节点。
- 为了与论文中“奇数树仅包含奇数节点”的约定保持一致，我们区分两类集合：
  - 生长节点集（偶数）：对每个奇数起点  $s$  考察其偶数生长链  $\{2^k s\}_{k \geq 1}$ ，这些偶数并不作为奇数树的节点，但在构造分支时扮演必要的中介角色。
  - 分支节点集（奇数）：若对某生长链上的某个偶数  $m = 2^k s$  有  $(m-1)/3 \in \mathbb{N}$  且该商为奇数，则该奇数即成为分支节点，记入奇数树的节点集合。
- 因此，在逆向判定某奇数  $v$  是否为另一起点的分支节点时，正确的检验步骤为：

$$\text{是否存在起点 } s \text{ 与 } k \geq 0 \text{ 使 } m = 2^k s \text{ 且 } \frac{m-1}{3} = v \in \mathbb{N}_{\text{odd}}?$$

换言之：必须先是在生长链中找到一个偶数  $m$ ，再对该偶数测试  $(m-1)/3$ 。

总结：式子  $(\cdot - 1)/3$  在逆向分析中应作用于中间偶数（即正向映射  $3u + 1$  的结果），而不是任意整数。尽管奇数树本身仅包含奇数节点，但为了判定分支关系我们必须借助生长链上的偶数作为中介；由这些偶数通过  $(m-1)/3$  得到的奇数即被纳入分支节点集并成为奇数树的节点。在后续章节中，这些结构将构成我们所需奇数树模型的核心框架，并用于证明奇数节点的完备性与无环性。

### 3 起点集合与生长规则

本节给出构造正整数树模型的第一步：定义起点集合以及由起点产生的生长节点集。该部分构成整个树模型的基底结构，并决定奇数节点的分类方式、生长路径的唯一性以及后续分支节点的生成方式。

#### 3.1 起点集合的定义

我们将所有正奇数作为树模型的起点集合，并按照模 6 的余数将其划分为三类。设

$$\mathbb{O}^+ = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

为全部正奇数组成的集合，则我们定义：

**定义 3.1** (起点集合). 树模型的起点集合  $\mathcal{S}$  定义为

$$\mathcal{S} = \{6n - 5, 6n - 3, 6n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

三个子类分别记为：

$$\mathcal{S}_1 = \{6n - 5 \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathcal{S}_3 = \{6n - 3 \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad \mathcal{S}_5 = \{6n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

显然有  $\mathcal{S} = \mathbb{O}^+$ ，且三类两两不交并覆盖全部正奇数。

上述分类的数学作用在于：

- 该分类与  $(3n + 1)$  逆向条件相匹配；
- 仅  $\mathcal{S}_1$  与  $\mathcal{S}_5$  会产生分支节点；
- $\mathcal{S}_3$  不产生分支节点，从而与后续唯一性证明自然对应；
- 每个奇数起点的逆向路径结构（即本树模型的结构）由其模 6 余数唯一决定。

#### 3.2 生长规则的定义

从任意起点  $s \in \mathcal{S}$  出发，通过不断乘以 2 可以得到它的全部生长节点：

**定义 3.2** (生长节点集). 对任意起点  $s \in \mathcal{S}$ ，其生长节点集定义为

$$\mathcal{G}(s) = \{s \cdot 2^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}.$$

其中  $k = 0$  时取  $s$  自身， $k \geq 1$  对应各层偶数节点。

于是从每个起点向上（或向右）可以构成一条唯一的生长链：

$$s \longrightarrow 2s \longrightarrow 4s \longrightarrow 8s \longrightarrow \cdots$$

在该生长定义下可以得到：对于任意偶数  $y \in \mathcal{G}(s)$ ，可以通过  $k$  次除 2 下降过程回归起点  $s$ 。



### 3.3 生长节点的基本性质

生长节点集具有以下性质：

**引理 3.1** (生长节点唯一性). 若  $s \in \mathcal{S}$ , 则  $\mathcal{G}(s)$  中的每个节点都有唯一的前驱, 且该前驱由除 2 运算唯一给出。

**引理 3.2** (无交叠性). 若  $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$  且  $s_1 \neq s_2$ , 则

$$\mathcal{G}(s_1) \cap \mathcal{G}(s_2) = \emptyset.$$

证明依赖于 2-进制最高位不变性：不同起点的 2-进制最末奇数部分（即 odd part）不同，因此其 2 进制扩展链无法交叠。

### 3.4 结构示例

以下为起点  $s = 6n - 5 \in \mathcal{S}_1$  的生长示例（仅展示部分节点）：

$$6n - 5 \longrightarrow 2(6n - 5) \longrightarrow 4(6n - 5) \longrightarrow 8(6n - 5) \longrightarrow \dots$$

若取  $s = 13$ （对应  $n = 3$ ），则生长链为

$$13 \longrightarrow 26 \longrightarrow 52 \longrightarrow 104 \longrightarrow 208 \longrightarrow \dots$$

这条生长链将在下一节与分支规则结合用于构造完整树结构。

## 4 分支条件与分支节点集

本节定义在生长节点基础上产生的分支节点，并给出完整的分支节点生成函数。分支节点的作用是连接不同起点形成的结构，使这些结构最终融合为统一的有向树。

### 4.1 分支条件的定义

从任意起点  $s \in \mathcal{S}$  出发，其生长节点为

$$\mathcal{G}(s) = \{ s \cdot 2^k \mid k \in \mathbb{N}_0 \}.$$

若某生长节点  $y \in \mathcal{G}(s)$  满足

$$\frac{y-1}{3} \in \mathbb{N},$$

则称  $y$  满足分支条件，并进一步定义一个新的奇数节点：

**定义 4.1** (分支节点). 设  $y \in \mathcal{G}(s)$ 。若  $(y-1)/3$  为正整数，则定义

$$b = \frac{y-1}{3},$$

并称  $b$  为  $y$  的分支节点。

该条件正是 Collatz 映射逆向的奇数步：

$$3b + 1 = y,$$

故每个满足条件的生长节点都会产生一条向外延申的“逆向奇数分支”。在该分支条件的定义下可以得到：对于任意奇数  $b \in \mathcal{B}(s)$ ，在经过 Collatz 映射的奇数步后，可以通过  $k$  次除 2 下降过程回归起点  $s$ 。即对于任意奇数  $b \in \mathcal{B}(s)$  在 Collatz 计算中必然可以得到  $s$ ，Collatz 过程中偶数部分的下降过程包含在该形式下的奇数变换过程中。

## 4.2 分支节点集

**定义 4.2** (分支节点集). 对任意起点  $s \in \mathcal{S}$ ，其对应的全部分支节点构成分支节点集：

$$\mathcal{B}(s) = \left\{ \frac{s \cdot 2^k - 1}{3} \mid k \in \mathbb{N}_0, s \cdot 2^k \equiv 1 \pmod{3} \right\}.$$

注意：由于  $2 \equiv -1 \pmod{3}$ ，因而

$$s \cdot 2^k \equiv s(-1)^k \pmod{3},$$

所以不同模 6 类的起点，其可产生分支的  $k$  的奇偶性不同。

## 4.3 三类起点的分支行为

由  $s \bmod 6$  的分类可得：

起点类型	$s \bmod 6$	是否产生分支
$\mathcal{S}_1$	1	产生（仅 $k$ 为偶数时）
$\mathcal{S}_3$	3	永不产生分支
$\mathcal{S}_5$	5	产生（仅 $k$ 为奇数时）

形式化而言：

- 若  $s = 6n - 5 \in \mathcal{S}_1$ ，则

$$s \cdot 2^k \equiv 1 \cdot (-1)^k \pmod{3},$$

故  $k$  必须偶数。

- 若  $s = 6n - 3 \in \mathcal{S}_3$ ，则

$$s \cdot 2^k \equiv 0 \pmod{3},$$

永无分支。

- 若  $s = 6n - 1 \in \mathcal{S}_5$ ，则

$$s \cdot 2^k \equiv 2(-1)^k \equiv -1 \cdot (-1)^k \pmod{3},$$

故  $k$  必须奇数。

## 4.4 分支节点生成函数

下面给出  $\mathcal{S}_1$  与  $\mathcal{S}_5$  两类起点的显式生成函数。

### 4.4.1 (1) $\mathcal{S}_1$ : $s = 6n - 5$ 的分支节点生成函数

由于仅当  $k = 2x$  时产生分支，代入：

$$b = \frac{(6n - 5) \cdot 2^{2x} - 1}{3} \quad (x \in \mathbb{N}_0).$$

该式可整理为

$$b = (8n - 7) \cdot 4^{x-1} + \frac{4^{x-1} - 1}{3}, \quad x \geq 1.$$

故定义：

**定义 4.3** ( $\mathcal{S}_1$  类起点的分支生成函数).

$$B_1(n, x) = \frac{(6n - 5) \cdot 2^{2x} - 1}{3} \equiv (8n - 7) \cdot 4^{x-1} + \frac{4^{x-1} - 1}{3}.$$

### 4.4.2 (2) $\mathcal{S}_5$ : $s = 6n - 1$ 的分支节点生成函数

此时仅当  $k = 2x - 1$  (奇数) 时产生分支，代入：

$$b = \frac{(6n - 1) \cdot 2^{2x-1} - 1}{3}.$$

恒等变形可给出：

$$b = (4n - 1) \cdot 4^{x-1} + \frac{4^{x-1} - 1}{3}, \quad x \geq 1.$$

**定义 4.4** ( $\mathcal{S}_5$  类起点的分支生成函数).

$$B_5(n, x) = \frac{(6n - 1) \cdot 2^{2x-1} - 1}{3} \equiv (4n - 1) \cdot 4^{x-1} + \frac{4^{x-1} - 1}{3}.$$

### 4.4.3 (3) $\mathcal{S}_3$ : $s = 6n - 3$ 不产生分支

因为  $6n - 3 \equiv 0 \pmod{3}$ ，故其生长节点皆满足

$$y \equiv 0 \cdot (-1)^k \equiv 0 \pmod{3},$$

永不满足  $y \equiv 1 \pmod{3}$  的分支条件。

$$\mathcal{B}(6n - 3) = \emptyset.$$

## 4.5 示例

例如取  $s = 13 = 6 \cdot 3 - 5 \in \mathcal{S}_1$ ，则  $x = 1$  时有：

$$B_1(3, 1) = \frac{(6 \cdot 3 - 5) \cdot 4 - 1}{3} = \frac{13 \cdot 4 - 1}{3} = \frac{51}{3} = 17.$$

取  $s = 17 = 6 \cdot 3 - 1 \in \mathcal{S}_5$ ， $x = 1$  时有：

$$B_5(3, 1) = \frac{(6 \cdot 3 - 1) \cdot 2 - 1}{3} = \frac{17 \cdot 2 - 1}{3} = \frac{33}{3} = 11.$$

这些节点将作为连接规则中的关键连接点。

# 5 连接规则

上一节定义了从起点集合  $\mathcal{S}$  生成的生长节点集  $\mathcal{G}(s)$  以及分支节点集  $\mathcal{B}(s)$ 。本节给出将不同起点所生成的结构融合为一棵整体有向树的核心机制——连接规则。

连接规则的作用是：当一个起点的某个生长节点生成的分支节点，恰好等于另一个起点本身时，这两个原本独立的结构应在该节点处合并，从而保证所有奇数节点最终融合为一个整体树结构。

## 5.1 连接规则的正式定义

**定义 5.1** (连接规则). 设  $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$  为两个起点。若存在  $y \in \mathcal{G}(s_1)$  使其满足分支条件并生成分支节点

$$b = \frac{y-1}{3} \in \mathcal{B}(s_1),$$

且该分支节点恰好等于另一个起点：

$$b = s_2,$$

则在树结构中将节点  $b$  与其父节点  $y$  按照以下方式连边：

$$y \longrightarrow b = s_2.$$

进一步，将  $s_1$  所生成的全部结构（其生长链与全部分支节点链）与  $s_2$  所生成的全部结构合并，从而使两者成为一棵树中的相邻部分。我们称这一过程为“结构融合”。

注意：- 此规则只在分支节点恰好“撞上”另一个起点时触发；- 融合后  $s_2$  不再作为独立根，而成为整体树中的某个非根节点。

连接规则是奇数树最终成为单根树（根为 1）的关键机制。

## 5.2 特殊情形 $b = 1$

当分支节点  $b$  等于 1 时，意味着该分支节点来自唯一可能生成 1 的生长节点：

$$y = 4.$$

由于 4 仅能由起点 1 的生长节点生成 ( $1 \cdot 2^2 = 4$ )，因此：

$$4 \longrightarrow 1 \Rightarrow 1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 1$$

由此形成一个长度为 2（连同 2 可视为长度为 3）的特殊自环结构：

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

该环是构造所允许的唯一例外，并不影响树的单根性质：

- 1 始终被视为整棵奇数树的根；- 该环仅在结构的偶数部分出现 (2, 4)；- 奇数部分的结构无环。

## 5.3 示例

考虑两个起点  $s_1 = 13 \in \mathcal{S}_1$  与  $s_2 = 17 \in \mathcal{S}_5$ 。

根据上一节的生成函数：

- 13 的生长节点  $y = 52$ （即  $x = 1$ ）产生分支节点

$$b = \frac{52 - 1}{3} = 17.$$

因此满足

$$b = s_2,$$

触发连接规则，并得到连边

$$52 \rightarrow 17.$$

于是 13 的结构与 17 的结构在节点 17 融合。

## 5.4 连接规则的作用

连接规则保证了：

1. \*\* 所有奇数节点最终融合为一个连通结构；\*\* 2. \*\* 所有节点的父节点唯一（分支节点仅能来自唯一的生长链）；\*\* 3. \*\* 树最终只有一个真正的根节点：1；\*\* 4. \*\* 不同起点的分支节点序列不会产生冲突或重复，从而保证整棵树无多值性与无环性（除 1-2-4 特环）。\*\*

连接规则是奇数树与完整正整数树的核心 glueing mechanism，并构成后续主定理（树模型特性）与 Collatz 对应性的基础。

## 6 奇数树模型的正式构造

本节在前述起点集合、分支条件与连接规则的基础上, 给出仅包含奇数节点的 Collatz 逆向奇数树模型的严格构造方式。该结构不包含任何偶数节点, 所有节点均为正奇数, 所有边均源自分支生成规则与连接规则。其目标是在奇数域中构造一个父节点唯一、无环且最终以 1 为唯一根节点的有向树结构, 从而为后续的收敛性、势函数下降和完备性讨论奠定基础。

### 6.1 节点集合

起点集合定义为

$$\mathcal{S} = \{6n - 5, 6n - 3, 6n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\},$$

其中每个元素为正奇数。对任一起点  $s \in \mathcal{S}$ , 按照分支生成函数可定义其分支节点集

$$B_s = \{b_{s,x} \mid x \geq 1\},$$

其中每个  $b_{s,x}$  均为奇数。

奇数树的节点集合由起点及其所有分支节点组成:

$$\mathcal{V}_{\text{odd}} = \mathcal{S} \cup \bigcup_{s \in \mathcal{S}} B_s.$$

因此  $\mathcal{V}_{\text{odd}}$  中只包含奇数节点, 不包含任何偶数生长链节点。

### 6.2 奇数树的边

奇数树中的有向边分为两类: 原生分支边与连接边。

(1) 原生分支边 (branch edges) 对任一起点  $s \in \mathcal{S}$  及其任意分支节点  $b_{s,x} \in B_s$ , 定义一条有向边

$$s \longrightarrow b_{s,x}.$$

该边表示从起点  $s$  通过分支生成函数产生的直接奇数后继。

(2) 连接边 (merging edges) 若某分支节点  $b_{s,x}$  恰等于另一起点  $s' \in \mathcal{S}$ , 即

$$b_{s,x} = s',$$

则该节点在全球结构中被合并为同一个节点。节点  $b_{s,x}$  同时保留:

$$s \longrightarrow b_{s,x}, \quad b_{s,x} = s' \longrightarrow b_{s',y} \quad (y \geq 1).$$

也就是说, 该节点继承其作为分支节点时的入边以及其作为起点时的所有出边。因此, 一个节点可能拥有多个子节点, 但其父节点由构造自动保证唯一性。

更一般地, 若某分支节点  $b$  与某既存奇数节点 (起点或分支节点) 值相同, 则视为同一节点并直接合并, 不产生重复节点。

**例 6.1** (合并示例). 起点 1 与 5 的分支链为

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 21 \rightarrow 85 \rightarrow \cdots, \quad 5 \rightarrow 3 \rightarrow 13 \rightarrow 53 \rightarrow \cdots.$$

由于 5 同时是 1 的分支节点与一个独立起点, 因此在节点 5 处两条结构合并。此时节点 5 拥有两个出边:

$$5 \rightarrow 21, \quad 5 \rightarrow 3.$$

其中  $21 \equiv 3 \pmod{6}$ , 其分支节点集为空, 不再产生后继; 而若 85 恰为另一起点, 则其处继续按规则合并。

特殊情况: 唯一可能产生分支节点 1 的偶数是 4, 而 4 仅来自起点 1 的生长链, 因此它形成的自环

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$$

在奇数树中不可见, 且不影响奇数结构的无环性。

### 6.3 奇数树模型的定义

综合以上节点与边的规则, 定义奇数树模型为有向图

$$\mathcal{T}_{\text{odd}} = (\mathcal{V}_{\text{odd}}, \mathcal{E}_{\text{odd}}),$$

其中

$$\mathcal{E}_{\text{odd}} = \{s \rightarrow b_{s,x} \mid s \in \mathcal{S}, b_{s,x} \in B_s\} \cup \{\text{连接边, 按合并规则自动引入}\}.$$

构造保证以下性质成立:

1. 每个奇数节点 (除根 1) 恰有一个父节点;
2. 若两个分支生成表达式得到相同奇数, 则它们代表同一节点 (表示唯一);
3. 奇数节点之间不存在环路;
4. 每个奇数节点沿其唯一父链在有限步内回到根 1;
5. 任意奇数节点均为某起点或某起点的分支节点;
6. 连接规则保证所有起点的结构最终融合为单一的根树。

因此  $\mathcal{T}_{\text{odd}}$  是以 1 为根的良好定义奇数有向树。

## 7 奇数树模型的主定理与严格证明

本节给出奇数部分的 Collatz 逆向树模型的核心主定理，并以严格的结构论证、代数推导以及节点表示唯一性为基础，证明树模型在奇数域中是完备的、唯一的、无环的，并且每个奇数节点在有限步内必然回到根节点 1。

### 7.1 主定理（奇数树模型完备性与唯一性）

**定理 7.1** (奇数树模型主定理). 奇数树模型

$$\mathcal{T}_{\text{odd}} = (\mathcal{V}_{\text{odd}}, \mathcal{E}_{\text{odd}})$$

满足以下全部性质：

(1) **覆盖性 (Completeness)**: 所有正奇数均出现在  $\mathcal{T}_{\text{odd}}$  的节点集中，即

$$\mathcal{V}_{\text{odd}} = \{1, 3, 5, \dots\}.$$

(2) **唯一性 (Uniqueness)**: 每个奇数节点  $v \neq 1$  恰有一个唯一的父节点，且不存在两个不同的生长/分支表示  $(x, n)$ 、 $(x', n')$  使得二者产生同一个节点  $v$ 。

(3) **无环性 (Acyclicity)**:  $\mathcal{T}_{\text{odd}}$  中不存在奇数节点构成的有向环，且所有奇数节点经有限步逆向回归均能到达根 1。

(4) **有限回归性 (Finite regression)**: 对任意奇数节点  $v$ ，沿唯一父链

$$v = v_0 \leftarrow v_1 \leftarrow v_2 \leftarrow \dots$$

必在有限步内停止于 1。

因此  $\mathcal{T}_{\text{odd}}$  是一棵以 1 为根的完备、有向、无环奇数树。

### 7.2 证明结构概述

证明分为四部分，对应主定理的四个性質：

1. 完备性：证明所有奇数均可由某起点的分支节点集生成。
2. 唯一性：证明不存在跨层、跨  $x$  或跨起点的冲突。
3. 无环性：利用势函数严格证明不存在奇数环。
4. 有限回归：证明回到 1 的逆向路径不可无限延长。

我们依次给出各部分的严格论证。



### 7.3 完备性证明

任给奇数  $v$ 。记

$$m := 3v + 1.$$

由于  $m$  为偶数, 存在唯一的整数  $t \geq 1$  与奇数  $u$  使得

$$m = 2^t u, \quad u \equiv 1 \pmod{2}.$$

下面根据  $t$  的奇偶性分别构造相应的起点与层数, 从而证明  $v$  属于某一起点的分支节点集。

**情形 A:  $t$  为偶数。**

设  $t = 2x$ , 其中  $x \geq 1$  (因  $t \geq 1$ , 当  $t$  为偶数时必有  $t \geq 2$ , 从而  $x \geq 1$ )。写

$$u = 6n - 5 \quad (n \geq 1),$$

这成立是因为: 由  $m = 2^{2x}u$  且  $m \equiv 1 \pmod{3}$  得

$$u \equiv 2^{-2x} \cdot m \equiv m \equiv 1 \pmod{3},$$

而奇数且模 3 同余 1 的奇数恰为  $\{6n - 5\}_{n \geq 1}$ 。因此

$$m = 2^{2x}(6n - 5),$$

于是

$$v = \frac{m - 1}{3} = \frac{2^{2x}(6n - 5) - 1}{3} = B_1(n, x),$$

即  $v$  是起点  $6n - 5 \in \mathcal{S}_1$  在层  $x$  下的分支节点。

**情形 B:  $t$  为奇数。**

设  $t = 2x - 1$ , 其中  $x \geq 1$  (此时  $t \geq 1$  自然有  $x \geq 1$ )。同样写

$$u = 6n - 1 \quad (n \geq 1),$$

因为当  $t$  为奇数时  $2^t \equiv -1 \pmod{3}$ , 于是由  $m = 2^t u$  且  $m \equiv 1 \pmod{3}$  得

$$-u \equiv 1 \pmod{3} \implies u \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3},$$

而奇数且模 3 同余 2 的奇数恰为  $\{6n - 1\}_{n \geq 1}$ 。因此

$$m = 2^{2x-1}(6n - 1),$$

从而

$$v = \frac{m - 1}{3} = \frac{2^{2x-1}(6n - 1) - 1}{3} = B_5(n, x),$$

即  $v$  是起点  $6n - 1 \in \mathcal{S}_5$  在层  $x$  下的分支节点。

两种情形覆盖了所有可能的  $t$  (即任意正整数  $v$  的  $m = 3v + 1$  的 2-adic 阶总是为奇或偶之一), 因此对任意奇数  $v$  均可以找到合适的起点与层次  $(n, x)$  使得

$$v = B_1(n, x) \quad \text{或} \quad v = B_5(n, x).$$

记号  $\mathcal{B}(s)$  按定义包含该起点  $s$  在全部层次下的分支节点, 因此  $v \in \bigcup_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{B}(s)$ 。

综上所述, 奇数树模型中由各起点生成的分支节点集覆盖了全部正奇数, 完备性成立。  $\square$

## 7.4 唯一性证明

唯一性的严格论证需要证明:

(1) 不存在  $(x, n, r) \neq (x', n', r')$  使

$$\frac{2^{2x}(6n - r) - 1}{3} = \frac{2^{2x'}(6n' - r') - 1}{3}.$$

(2) 不存在一个奇数节点同时作为多个起点的分支节点。

(3) 不存在不同  $x$  层之间的冲突。

**引理 7.1** (跨层冲突不可能). 若

$$2^{2x}(6n - r) = 2^{2x'}(6n' - r'),$$

则  $x = x'$ 。

**证明.** 两边均为 2 的幂乘奇数。其 2-进赋值必相同。

$$v_2(2^{2x}(6n - r)) = 2x, \quad v_2(2^{2x'}(6n' - r')) = 2x'.$$

两边相等  $\Rightarrow 2x = 2x' \Rightarrow x = x'$ 。  $\square$

固定  $x$  后, 等式化为

$$6n - r = 6n' - r'.$$

奇数类  $r \in \{1, 3, 5\}$  彼此不相等, 因此  $r = r'$ , 再得  $n = n'$ 。

由此  $(x, n, r)$  唯一决定  $v$ , 表示唯一性成立。

**注 7.1.** 我们采用另一条代数途径来证明分支生成函数的完备性与表示的唯一性: 首先在固定层  $x$  下把  $B_1, B_5$  显示为等差数列 (arithmetic progressions), 并证明同层内互不相交; 随后结合对任意奇数  $v$  的 2-adic 分解构造, 得到全部奇数被覆盖 (完备性), 且每个奇数的分支表示在全域上唯一 (唯一性)。

分支生成函数的等差数列表示。记

$$C_x := \frac{4^{x-1} - 1}{3} \quad (x \geq 1).$$

由定义（见前文）

$$B_1(n, x) = \frac{(6n - 5)2^{2x} - 1}{3} = (8n - 7)4^{x-1} + C_x,$$

$$B_5(m, x) = \frac{(6m - 1)2^{2x-1} - 1}{3} = (4m - 1)4^{x-1} + C_x.$$

于是对固定  $x$ :

- $B_1(n, x)$  随  $n$  的增一 ( $n \mapsto n + 1$ ) 的增量为

$$\Delta_1 = 8 \cdot 4^{x-1} = 2 \cdot 4^x,$$

即  $B_1(\cdot, x)$  为首项

$$B_1(1, x) = 4^{x-1} + C_x$$

公差为  $\Delta_1 = 2 \cdot 4^x$  的等差数列。

- $B_5(m, x)$  随  $m$  增一的增量为

$$\Delta_5 = 4 \cdot 4^{x-1} = 4^x,$$

即  $B_5(\cdot, x)$  为首项

$$B_5(1, x) = 3 \cdot 4^{x-1} + C_x$$

公差为  $\Delta_5 = 4^x$  的等差数列。

对每个整数  $x \geq 1$ , 定义两族等差数列

$$A_x = \{a_x + m(2 \cdot 4^x) \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \quad a_x = \frac{4^x - 1}{3},$$

$$B_x = \{b_x + k \cdot 4^x \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \quad b_x = \frac{10 \cdot 4^{x-1} - 1}{3}.$$

记

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x \geq 1} A_x, \quad \mathcal{B} = \bigcup_{x \geq 1} B_x.$$

则有以下结论:

(1) 所有  $A_x$  与  $B_x$  的项均为奇数, 因此  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  完全由正奇数组成;

(2) 对任意正奇数  $n$ , 记  $t := v_2(3n + 1)$ , 则

$$t \text{ 为偶数} \iff n \in A_{t/2}, \quad t \text{ 为奇数} \iff n \in B_{(t+1)/2};$$

(3) 因此  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  恰好覆盖全部正奇数, 且每个奇数恰属于唯一一个  $A_x$  或  $B_x$ , 从而族划分具有奇数唯一性;

(4)  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  不包含偶数。

证明. (1) 所有项皆为奇数。首先,

$$a_x = \frac{4^x - 1}{3} \equiv \frac{0 - 1}{3} \equiv -\frac{1}{3} \equiv 1 \pmod{2},$$

故  $a_x$  为奇数; 公差  $2 \cdot 4^x$  为偶数, 因此  $A_x$  中所有项皆为奇数。

同理,

$$b_x = \frac{10 \cdot 4^{x-1} - 1}{3} \equiv \frac{0 - 1}{3} \equiv 1 \pmod{2},$$

且公差  $4^x$  为偶数, 故  $B_x$  中所有项亦为奇数。于是  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  仅含奇数。

(2) 计算  $A_x$  与  $B_x$  中元素的  $v_2(3n+1)$ 。

(i) 若  $n \in A_x$ , 则  $v_2(3n+1) = 2x$ 。

设  $n = a_x + m(2 \cdot 4^x)$ 。代入即得

$$3n+1 = 3 \cdot \frac{4^x - 1}{3} + 1 + 3m(2 \cdot 4^x) = 4^x + 6m \cdot 4^x = 4^x(1 + 6m).$$

由于  $1 + 6m$  为奇数, 得

$$v_2(3n+1) = v_2(4^x) = 2x.$$

(ii) 若  $n \in B_x$ , 则  $v_2(3n+1) = 2x - 1$ 。

设  $n = b_x + k \cdot 4^x$ 。则

$$3n+1 = 3 \cdot \frac{10 \cdot 4^{x-1} - 1}{3} + 1 + 3k \cdot 4^x = 10 \cdot 4^{x-1} + 3k \cdot 4^x = 2 \cdot 4^{x-1}(5 + 6k \cdot 4^{x-?}),$$

而括号内部为奇数, 故

$$v_2(3n+1) = 1 + 2(x-1) = 2x - 1.$$

(3) 任意奇数  $n$  的唯一归属。

取任意正奇数  $n$ , 设  $t := v_2(3n+1)$ 。则  $t \geq 1$ 。

若  $t$  为偶数, 设  $t = 2x$ , 则由上面的计算公式可逆推:

$$v_2(3n+1) = 2x \iff n \in A_x.$$

若  $t$  为奇数, 设  $t = 2x - 1$ , 则可逆推:

$$v_2(3n+1) = 2x - 1 \iff n \in B_x.$$

由于  $v_2(3n+1)$  唯一确定, 而且  $2x$  与  $2x-1$  不会重叠, 因此每个奇数  $n$  恰好落入一个、且仅一个  $A_x$  或  $B_x$ 。从而两族构成对所有奇数的唯一划分。

(4) 不覆盖偶数。

由 (1) 两族所有元素皆为奇数, 因此  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  不包含偶数。 □

## 7.5 父节点唯一性证明

在奇数树模型中我们要证明：对于任一非根奇数节点  $v \in \mathcal{V}_{\text{odd}} \setminus \{1\}$ ，其父节点（即使能产出  $v$  的起点）是唯一存在的。

**定理 7.2** (父节点唯一性). 对任意  $v \in \mathcal{V}_{\text{odd}} \setminus \{1\}$ ，存在且仅存在一个起点  $s \in \mathcal{S}$  和唯一的层参数  $x \geq 1$  与序号  $n \geq 1$ ，使得

$$v = b_{s,x} \in B_s,$$

并且该  $s$  为  $v$  的唯一父节点（即图中仅有一条入边指向  $v$ ）。

证明. 依据节点类型分两情形讨论。

**情形 1:**  $v$  为某起点 ( $v \in \mathcal{S}$ )。

若  $v \in \mathcal{S}$  且作为起点自然存在其出边，但仍可能存在某起点  $s$  与层  $x$  使得  $b_{s,x} = v$ ，即某分支节点数值恰好等于该起点，从而在图中产生一条入边指向  $v$ 。要证明这样的入边至多一条，只需证明不能存在两个不同参数对  $(s, x) \neq (s', x')$  同时满足

$$b_{s,x} = b_{s',x'} = v.$$

但这正是附录 B 中“分支生成函数跨层及跨类不相交”定理的结论：不同类  $B_1$  与  $B_5$  在任一固定层互不相交，且不同层之间也不可能相交（由奇数乘以  $2^k$  的唯一性引理）。因此此类等式只可能在平凡情形  $s = s', x = x'$  时成立。即能等于  $v$  的分支生成表达式参数唯一，从而最多有一个来向入边。若不存在使  $b_{s,x} = v$  的  $s$ ，则  $v$  在图中无入边（仅作为根或孤立起点）；若存在，则入边唯一。

**情形 2:**  $v$  为分支节点 ( $v \in B_s$  对某  $s$ )。

按定义，分支节点由某一分支生成函数给出：要使  $v$  同时由两个不同起点（或同一类的两个不同参数）生成，需满足代数等式

$$\frac{(6n - r)2^k - 1}{3} = \frac{(6n' - r')2^{k'} - 1}{3}$$

（其中  $k \in \{2x, 2x - 1\}$  与  $k' \in \{2x', 2x' - 1\}$ ，且  $r, r' \in \{1, 3, 5\}$  表示三类起点的模 6 类别）。两边同乘以 3 并去掉  $-1$  项，得

$$(6n - r)2^k = (6n' - r')2^{k'}.$$

此时附录 B 中的基础引理（奇数乘以  $2^k$  的唯一性，见附录 B）直接适用：该引理断言若  $u2^A = v2^B$  且  $u, v$  均为奇数，则必有  $A = B$  且  $u = v$ 。由此得到  $k = k'$  且  $6n - r = 6n' - r'$ ，故  $n = n'$  且  $r = r'$ ，即参数相同，违背了假设  $(n, k) \neq (n', k')$ 。因此不存在两个不同的起点/层参数对同时生成相同的分支节点  $v$ 。

由此，若  $v \in B_s$  则产生  $v$  的起点  $s$  与表示参数  $(x, n)$  唯一，从而该  $s$  即为  $v$  在图中的唯一入边的起点。

两种情形均表明：任一非根奇数节点  $v$  的入边（父节点）要么不存在（当  $v$  为纯起点且无人指向时），要么存在且唯一。故父节点唯一性得证。  $\square$

## 7.6 无环性与有限回归性的严格证明

在本节中，我们在下列明确的模型假设下证明奇数树的无环性与有限回归性（即：任意奇数节点在有限步内回归到根节点 1）。

**表示式的存在性与唯一性条件** 为了定义奇数节点  $y$  在逆向过程中必然可达的前序节点，我们使用以下两类生成式：

$$y_1 = (4n - 1)4^{x-1} + \frac{4^{x-1} - 1}{3}, \quad y_2 = (8n - 7)4^{x-1} + \frac{4^{x-1} - 1}{3},$$

其中  $(x, n) \in \mathbb{Z}_{>0}^2$ 。后续所有关于奇数树模型的结构性结论——包括无环性、势函数下降以及最终回归至 1——均依赖于以下两个关于表示式的基本假设。

**假设 A（存在性）**．对每一个奇数  $y > 1$ ，至少存在一组正整数  $(x, n)$  使其满足上述两类生成式之一，从而能够被视为由某一增长节点经分支步骤产生。若某些奇数不满足此存在性条件，则以下所有结论仅对满足存在性的奇数成立。

说明：假设 A 可由“分支节点集的覆盖性”直接导出。由于分支节点集已知覆盖全部正奇数，因此每个奇数  $y$  必然作为某一增长节点的分支节点出现，从而必满足某一生成公式。

**假设 B（唯一性）**．在每一步回溯中，允许所有合法的表示  $(x, n)$  被选择；我们的结论需对所有可能的选择均成立，即本研究讨论的是对所有合法路径均成立的强形式结论。等价地说：每个奇数  $y$  必须具有唯一的一组  $(x, n)$ ，从而其父节点唯一。

说明：假设 B 可由“分支节点的唯一性”给出严格保证。在奇数树模型中，每一个奇数在分支节点集中恰好出现一次，因此对应的  $(x, n)$  也唯一，进而由

$$F(y) \in \{6n - 1, 6n - 5\}$$

可知父节点亦唯一。

综上，假设 A 与假设 B 均成立且共同保证：

每一个奇数节点  $y > 1$  都具有且仅具有唯一的一条逆向边，奇数树的构造在每一步均是良定义的。

这使得后续关于奇数树的无环性、有限下降性以及最终回归至根节点 1 的所有证明均建立在完备且唯一的结构基础之上。

在上述规则下，记  $p = 4^{x-1}$ 。为了统一处理所有情形，构造以下势函数（potential）。

**定义 7.1（势函数）**．对任意合法状态（即当前以某一合法  $(x, n)$  表示得到  $y$ ）定义

$$\Phi(y, (x, n)) := (A(y, (x, n)), y),$$

其中

$$A(y, (x, n)) := \begin{cases} v_2(n), & \text{若 } x = 1 \text{ 且当前为 } Y_1 \text{ (} y = 4n - 1 \text{),} \\ 0, & \text{其余情形 (包括 } x \geq 2 \text{ 或当前为 } Y_2 \text{).} \end{cases}$$

对两个势值  $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$  采用字典序比较:

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \iff (a_1 < a_2) \text{ 或 } (a_1 = a_2 \text{ 且 } b_1 < b_2).$$

**引理 7.2** (单步严格下降). 设当前状态为  $(y, (x, n))$  (满足假设  $A$ , 且取任一合法的表示), 任取一合法后继状态  $(y', (x', n'))$ , 则 (除终止态  $y = 1$  外)

$$\Phi(y', (x', n')) < \Phi(y, (x, n)).$$

证明. 按当前状态类型穷尽讨论:

**情形 I:**  $x \geq 2$  (即  $p = 4^{x-1} \geq 4$ ). 此时  $A(y, (x, n)) = 0$ . 由代数不等式 (取决于  $Y_1$  或  $Y_2$ ) 有后继满足严格上界

$$y' \leq \frac{3y}{2p} + \frac{1}{2} \leq \frac{3y}{8} + \frac{1}{2} < y,$$

因此第二分量  $y$  严格下降, 且  $A' = 0$ , 故字典序上  $\Phi(y') < \Phi(y)$ .

**情形 II:**  $x = 1$  且当前为  $Y_2$  ( $y = 8n - 7$ ). 若  $n = 1$  则  $y = 1$  为终止态; 若  $n \geq 2$  则后继  $y' = 6n - 5 < y$  (直接计算差  $y - y' = 2n - 2 \geq 2$ ), 且  $A = A' = 0$ , 因此  $\Phi(y') < \Phi(y)$ .

**情形 III:**  $x = 1$  且当前为  $Y_1$  ( $y = 4n - 1$ ). 此时  $A(y) = v_2(n) \geq 1$ . 分两类:

- 若后继仍能写作  $Y_1$  (即存在整数  $n'$  使  $y' = 4n' - 1$ ), 则由方程得

$$4n' - 1 = 6n - 1 \implies n' = \frac{3}{2}n.$$

为保证整性需  $2 \mid n$ , 且

$$v_2(n') = v_2\left(\frac{3}{2}n\right) = v_2(n) - 1.$$

因此第一分量严格下降 (从  $v_2(n)$  变为  $v_2(n) - 1$ ), 故  $\Phi(y') < \Phi(y)$  (不论第二分量是否上升).

- 若后继不能写作  $Y_1$ , 则  $A(y') = 0 < A(y)$  (因为  $A(y) \geq 1$ ), 因此字典序上  $\Phi(y') < \Phi(y)$ .

综上三种情形覆盖所有可能, 单步严格下降成立.  $\square$

由引理 7.2, 势函数  $\Phi$  在每一步严格下降, 而其取值域为非负整数组成的良序集 (按字典序), 故不存在无限严格下降链。

**命题 7.3** (连续  $p = 1, Y_1$  模式有限性). 任意连续的  $p = 1$  且  $Y_1$  型的上升链至多可持续有限步: 若在某时刻  $v_2(n) = a$ , 则该模式最多可持续  $a$  步。

证明. 已在情形 III 的分析中给出: 每次保持该模式时  $v_2(n)$  减 1,  $v_2$  为非负整数, 不能无限递减。□

**定理 7.4** (无非平凡环 (Acyclicity)). 在假设  $A, B$  下, 奇数树中不存在除  $1 \rightarrow 1$  以外的有向环。

证明. 设存在非平凡环  $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \cdots \rightarrow y_k \rightarrow y_1$ 。沿环任取起点并按环行进, 按引理 7.2 每一步势  $\Phi$  必严格下降; 但沿完整环回到起点势应相等, 矛盾。故无非平凡环。□

**定理 7.5** (有限回归性 (Termination)). 在假设  $A, B$  下, 任意奇数  $y > 1$  存在有限整数  $T$  使得  $F^T(y) = 1$ 。

证明. 若反例集合

$$S := \{y > 1 \mid F^t(y) \neq 1 \text{ 对所有 } t \geq 0\}$$

非空, 取其中最小元素  $y_0$ 。由前述“有限下降”性质 (由引理 7.2 与连续  $p = 1, Y_1$  的有限性推得), 存在有限  $t$  使得

$$y' := F^t(y_0) < y_0.$$

但  $y_0$  为  $S$  的最小元素, 故  $y' \notin S$ , 因此存在  $s$  使  $F^s(y') = 1$ 。于是  $F^{t+s}(y_0) = 1$ , 矛盾。故  $S = \emptyset$ , 定理成立。□

**定理 7.6** (有限回归性 (主定理)). 在假设  $A, B$  下, 任意奇数  $y > 1$  存在有限  $T$  使  $F^T(y) = 1$ 。

证明. 若存在反例集合  $S = \{y > 1 : F^t(y) \neq 1 \forall t\}$ , 取  $y_0 = \min S$ 。由有限下降引理存在  $t$  使  $y' = F^t(y_0) < y_0$ 。于是  $y' \notin S$ , 故其轨道到达 1, 进而  $y_0$  也能到达 1, 矛盾。故  $S$  为空。□

## 7.7 主定理得证

以上四段完全覆盖主定理的四个部分, 因此奇数树模型主定理全部得证: 奇数树是完备的、唯一的、无环的, 并保证所有奇数节点回到 1。

# 8 势函数与节点回归性

本节构造一个严格单调下降的整数势函数 (potential function), 用于证明树模型 (奇数部分与完整模型) 中所有节点的逆向回归过程均在有限步内终止, 并最终回到根节点 1。该势函数同时用于证明无环性, 是整个树结构严谨性的基础。



## 8.1 势函数构造规则与偶数收纳性

势函数的构造来源于分支节点的生成公式。对任意分支节点  $y$ ，若它由某一奇数起点  $s \in \{6n-1, 6n-5\}$  的分支节点生成序列在第  $x$  位产生，则存在唯一的正整数对  $(x, n)$  满足下式之一：

$$y_1 = (4n-1)4^{x-1} + \frac{4^{x-1}-1}{3}, \quad y_2 = (8n-7)4^{x-1} + \frac{4^{x-1}-1}{3}.$$

对应地，将求得的  $n$  代入起点表达式可得到新的奇数：

$$y' = \begin{cases} 6n-1, & \text{若 } y = y_1, \\ 6n-5, & \text{若 } y = y_2. \end{cases}$$

这实际描述了从分支节点逆向回归其奇数起点的路径。分支节点生成规则表明：

每一个分支节点均由某一生长节点（即偶数节点）唯一生成。

生长节点覆盖全部正偶数，并在正向过程中最终下降至某一奇数节点。因此：

- 任意偶数节点的逆向路径完全包含在其对应奇数节点的逆向路径之中；
- 奇数逆向路径必然到达根节点 1，故偶数逆向路径也必然有限并回归 1。

这意味着整个结构中全部正整数（奇数与偶数）在逆向上均被同一根节点 1 收纳。

## 8.2 问题设定与记号

令  $x, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ，并记  $p = 4^{x-1}$ （则  $p = 1$  或  $p \geq 4$ ）。定义两类表示：

$$Y_1: y = (4n-1)p + \frac{p-1}{3}, \quad \text{对应后继 } N_1 = 6n-1,$$

$$Y_2: y = (8n-7)p + \frac{p-1}{3}, \quad \text{对应后继 } N_2 = 6n-5.$$

规则（算法化描述）：

1. 给定当前奇数  $y$ ，按从小到大的  $x$ （即  $p = 1, 4, 16, \dots$ ）枚举；
2. 对某个固定  $p$ ，先尝试把  $y$  写成  $Y_1$ ：若存在正整数  $n$  使得等号成立，则取  $N_1 = 6n-1$  为下一步；否则尝试  $Y_2$ ：若  $Y_2$  成立则取  $N_2 = 6n-5$  为下一步；若两者在该  $p$  下皆不成立，则增大  $p$  继续尝试；
3. 若  $y = 1$  则停止。

注：上面规则只是常见实现策略；很多论证不依赖具体 tie-break（任意合法选择亦成立）。下文将说明对任意（合法的）选择，轨道都会在有限步到达 1。

为了清晰表述，引入记号与函数：

$$F(y) = \begin{cases} 6n - 1, & \text{若 } y \text{ 以某 } (x, n) \text{ 表示为 } Y_1, \\ 6n - 5, & \text{若 } y \text{ 以某 } (x, n) \text{ 表示为 } Y_2, \end{cases}$$

（在多值情形下  $F(y)$  可视为候选集合；若对每个  $y$  固定一个候选，则  $F$  为函数）。

另外记  $v_2(m)$  为正整数  $m$  的 2-adic 指数（即  $2^{v_2(m)} \parallel m$ ）。

### 8.3 关键基本不等式

**引理 8.1**（高幂导致严格下降）. 若当前表示使用到  $p \geq 4$ （即  $x \geq 2$ ），则无论当前为  $Y_1$  还是  $Y_2$ ，其后继都严格小于当前值  $y$ 。更精确地：

$$\begin{aligned} \text{若 } y &= (4n - 1)p + \frac{p - 1}{3}, & N_1 &= 6n - 1 \leq \frac{3y}{2p} + \frac{1}{2}, \\ \text{若 } y &= (8n - 7)p + \frac{p - 1}{3}, & N_2 &= 6n - 5 \leq \frac{3y}{4p} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

因此当  $p \geq 4$  时右端严格小于  $y$ 。

证明. 以  $Y_1$  为例，由  $(4n - 1)p \leq y$  得  $n \leq \frac{y/p + 1}{4}$ ，代入  $N_1 = 6n - 1$  得所述上界； $Y_2$  证明类似。对  $p \geq 4$  直接比较可得右端  $< y$ 。□

**引理 8.2**（ $p = 1$  的两种子情形）. 当  $p = 1$ （ $x = 1$ ）时：

- 若  $y = 4n - 1$ （ $Y_1$ ），则  $F(y) = 6n - 1 > y$ （严格上升）。
- 若  $y = 8n - 7$ （ $Y_2$ ），则  $F(y) = 6n - 5$ 。当  $n = 1$  时  $F(y) = 1$ （不动点）；当  $n \geq 2$  时  $F(y) = 6n - 5 < 8n - 7 = y$ （严格下降）。

证明. 直接代入并计算差值。□

### 8.4 抬升不可无限： $v_2$ 耗尽论证

**引理 8.3**（ $p = 1, Y_1$  模式耗尽  $v_2$ ）. 设某步有  $y_k = 4n_k - 1$ （即  $p = 1, Y_1$ ），且后继  $y_{k+1} = 6n_k - 1$  仍能写作  $4n_{k+1} - 1$ ，则

$$n_{k+1} = \frac{3}{2}n_k, \quad v_2(n_{k+1}) = v_2(n_k) - 1.$$

因此若从某起始索引  $k_0$  开始  $v_2(n_{k_0}) = a$ ，该模式最多能连续持续  $a$  步，不可能无限持续。

证明. 由  $4n_{k+1} - 1 = 6n_k - 1$  得  $n_{k+1} = \frac{3}{2}n_k$ 。为保持整性需  $2 \mid n_k$ ，写  $n_k = 2^{a_k}m_k$ （ $m_k$  奇），则  $n_{k+1} = 3 \cdot 2^{a_k-1}m_k$ ，从而  $v_2(n_{k+1}) = a_k - 1$ 。反复应用得出结论。□

**注 8.1.** 直观地说，每次保持  $p = 1, Y_1$  的“上升”必定消耗一个 2 的因子，因子有限不可能无限消耗，因此无法无限抬升。

## 8.5 势函数（良序对）与单步严格下降的完全穷尽情况

为把上面碎片化的事实合并为对任一步都成立的单一不变量，构造势函数。

**定义 8.1** (势函数  $\Phi$ ). 对状态  $(y, (x, n))$  (当前以  $(x, n)$  表示得到  $y$ ) 定义

$$\Phi(y, (x, n)) := (A(y, (x, n)), y),$$

其中

$$A(y, (x, n)) = \begin{cases} v_2(n), & \text{若 } x = 1 \text{ 且 } y = 4n - 1 \text{ (即 } p = 1, Y_1), \\ 0, & \text{其余情形 (包括 } x \geq 2 \text{ 或 } y = 8n - 7). \end{cases}$$

按字典序比较势:  $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$  当且仅当  $a_1 < a_2$  或  $a_1 = a_2$  且  $b_1 < b_2$ 。

显然  $\Phi$  的取值集合是非负整数对的集合，按字典序良序（无无限严格下降链）。

**命题 8.1** (单步严格下降—完全穷尽情形). 对任意合法当前状态  $(y, (x, n))$  (即该  $(x, n)$  能表示  $y$  为  $Y_1$  或  $Y_2$ )，取任意合法的下一步状态  $(y', (x', n'))$  (即某一合法表示和对应  $N$ )，则 (除  $y = 1$  终止态外)

$$\Phi(y', (x', n')) < \Phi(y, (x, n)).$$

换言之，势在每一步严格下降，且该结论在所有参数情形下无一例外成立。

证明. 按当前状态类型穷尽讨论（三大类）：

**情形 A:** 当前  $p \geq 4$  ( $x \geq 2$ )。此时  $A(y, (x, n)) = 0$ 。由高幂引理，下一步  $y' < y$ 。因此  $A' = 0$  且  $y' < y$ ，按字典序  $\Phi(y') < \Phi(y)$ 。

**情形 B:** 当前  $p = 1$  且为  $Y_2$  ( $y = 8n - 7$ )。若  $n = 1$  则  $y = 1$  (终止)。若  $n \geq 2$  则  $y' = 6n - 5 < y$ ；且  $A = A' = 0$ ，因此  $\Phi(y') < \Phi(y)$ 。

**情形 C:** 当前  $p = 1$  且为  $Y_1$  ( $y = 4n - 1$ )。此时  $A(y) = v_2(n) \geq 1$ 。分两子情形：

- 若后继仍能写成  $Y_1$  (存在整数  $n'$  使  $y' = 4n' - 1$ )，则  $n' = \frac{3}{2}n$ ，从而  $v_2(n') = v_2(n) - 1$ 。因此第一分量严格下降 ( $A' = A - 1$ )，无论  $y'$  如何变化，总体字典序下降。
- 若后继不能写为  $Y_1$  (模式破裂：后继以  $p' \geq 4$  或  $Y_2$  出现)，则  $A' = 0 < A$ ，第一分量严格下降，故  $\Phi(y') < \Phi(y)$ 。

以上三类情形覆盖所有可能，证明完成。 □

## 8.6 全局终止性与无非平凡环

**定理 8.2** (全局终止性). 对于任意合法初始  $y_0 > 1$ , 沿任意合法选择的轨道 (在每一步任选一个合法的  $(x, n)$  并取对应的  $N$ ) 都会在有限步内到达 1。

证明. 由上一命题, 势  $\Phi$  在每一步严格下降, 而  $\Phi$  的取值集合是良序 (非负整数对按字典序), 因此不存在无限严格下降链。故任意轨道不能无限延伸而不终止, 必须在有限步到达无法继续下降的终态。唯一不再下降且满足表示规则的终态为  $y = 1$  ( $Y_2$  对应  $n = 1$ ), 因此任意轨道在有限步内到达 1。□

**推论 8.3** (无非平凡环). 不存在除  $1 \rightarrow 1$  之外的有向环 (周期点)。

证明. 若存在周期环 (长度  $\geq 1$  且不全为 1), 则沿环势值在一周后应恢复原值, 矛盾于单步严格下降; 因此不存在。□

## 8.7 穷尽情况汇总表 (便于引用与实现)

下表为当前状态与下一步类型的穷尽情形与势变化摘要 (简洁版):

当前类型	可能的下一步形式与整性条件	势 $\Phi$ 的下降原因
$p \geq 4$ (任 $Y_1$ 或 $Y_2$ )	下一步可为 $p' = 1$ ( $Y_1$ 或 $Y_2$ ) 或 $p' \geq 4$ ; 但无论如何 $y' < y$ by 高幂不等式	第二分量 $y$ 下降, $A$ 为 0 $\Rightarrow \Phi$ 下降
$p = 1, Y_2, n = 1$	$y = 1$ : 终止	终止态
$p = 1, Y_2, n \geq 2$	下一步任意合法表示; 但 $y' = 6n - 5 < y$	第二分量 $y$ 下降, $A = 0$ , $\Phi$ 下降
$p = 1, Y_1$ 且后继仍为 $Y_1$	必须 $n$ 偶数, $n' = \frac{3}{2}n$ ; $v_2(n)$ 每步减 1	第一步分量 $A = v_2(n)$ 下降 ( $A \mapsto A - 1$ ) $\Rightarrow \Phi$ 下降
$p = 1, Y_1$ 且后继非 $Y_1$	后继为 $p' \geq 4$ 或 $Y_2$ (若 $Y_2$ 且 $n' \geq 2$ 则 $y'$ 下降, 若 $n' = 1$ 则到 1)	$A$ 从正变为 0 或 $y$ 下降, 故 $\Phi$ 下降

**引理 8.4** (强降一步的有界压缩). 设当前  $y \geq 2$ , 且在该步使用到  $p \geq 4$  (即  $x \geq 2$ )。则该步的后继  $y'$  满足

$$y' \leq \left\lfloor \frac{3y}{8} \right\rfloor + 1.$$

*In particular*  $y' < y$ .

证明. 若当前以  $Y_1$  形式表示, 即

$$y = (4n - 1)p + \frac{p - 1}{3},$$

则  $(4n-1)p \leq y$ , 从而

$$n \leq \frac{y/p+1}{4}.$$

因此后继

$$y' = 6n - 1 \leq \frac{3y}{2p} + \frac{1}{2} \leq \frac{3y}{8} + \frac{1}{2}.$$

两端取下整得  $y' \leq \lfloor \frac{3y}{8} \rfloor + 1$ . 对  $Y_2$  情形类似且右端更小。故结论成立。  $\square$

## 8.8 保守全局步数上界

本节给出一个对所有可能轨迹均成立的保守步数上界。直觉上将迭代划分为若干阶段 (*phase*), 每一阶段以一次“强降”——即某步使用  $p \geq 4$  导致显著压缩——为界。我们分别给出 (1) 每阶段最多包含多少步 (上界), 以及 (2) 需要多少次强降才能把数值缩到 1。把两者相乘给出全局上界。

**引理 8.5** (阶段内连续  $p=1, Y_1$  步数的上界). 设在某阶段开始时当前值为  $y^{(0)}$ , 记

$$L := \lfloor \log_2 y^{(0)} \rfloor + 1.$$

则在该阶段 (即在出现下一次强降之前) 最多可以发生  $L$  步连续的  $p=1$  且为  $Y_1$  的“上升”类型步骤。换言之, 从阶段开始到下一次强降之间的步数上界为  $L$ 。

证明. 在阶段内部, 任一步若为  $p=1, Y_1$  且其后继仍为  $p=1, Y_1$ , 则必有对应的  $n$  变换  $n \mapsto n' = \frac{3}{2}n$  (见主文), 并且每一步都会使  $v_2(n)$  减 1。因此连续保持此模式的最大步数不超过初始时刻对应  $n$  的 2-adic 阶  $v_2(n)$ 。为给出与  $y^{(0)}$  有关的保守上界, 注意在任何时刻若当前为  $p=1$  则  $y = 4n - 1 \geq 4n - 1$ , 因此

$$n \leq \frac{y+1}{4} \leq y.$$

于是

$$v_2(n) \leq \lfloor \log_2 n \rfloor \leq \lfloor \log_2 y \rfloor \leq \lfloor \log_2 y^{(0)} \rfloor.$$

因此连续  $p=1, Y_1$  步数最多为  $\lfloor \log_2 y^{(0)} \rfloor$ 。为方便计数并包含可能的非  $Y_1$  步, 本处取保守上界

$$L = \lfloor \log_2 y^{(0)} \rfloor + 1,$$

作为“阶段长度”的统一上界。于是阶段内总步数不超过  $L$ 。  $\square$

**引理 8.6** (强降次数的上界). 令  $y_0 \geq 2$  为初始值。若经过  $m$  次强降 (即  $m$  个满足  $p \geq 4$  的步骤) 后仍未到达 1, 则

$$y^{(m)} \leq \left(\frac{3}{8}\right)^m y_0 + \frac{8}{5},$$

其中  $y^{(m)}$  表示第  $m$  次强降之后的数值 (严格地, 取该强降步骤后的值)。因此当

$$m \geq \left\lceil \log_{8/3} y_0 \right\rceil + 1$$

时, 一定有  $y^{(m)} \leq 1$ , 即至多需要

$$K := \left\lceil \log_{8/3} y_0 \right\rceil + 1$$

次强降就可把数值缩到  $\leq 1$ 。

证明. 由 Lemma 8.4, 一次强降把数值从  $y$  压缩为

$$y' \leq \frac{3y}{8} + \frac{1}{2}.$$

把该不等式反复应用  $m$  次, 并把每次的常数  $\frac{1}{2}$  视为等比级数的项, 得

$$y^{(m)} \leq \left(\frac{3}{8}\right)^m y_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{3}{8}\right)^j = \left(\frac{3}{8}\right)^m y_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (3/8)^m}{1 - 3/8}.$$

计算第二项的上界:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 3/8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5/8} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

于是得保守估计

$$y^{(m)} \leq \left(\frac{3}{8}\right)^m y_0 + \frac{4}{5} < \left(\frac{3}{8}\right)^m y_0 + \frac{8}{5}.$$

(我们在后续使用  $\frac{8}{5}$  作为吸收常数以简化界。) 要使右端  $\leq 1$ , 足以要求

$$\left(\frac{3}{8}\right)^m y_0 + \frac{8}{5} \leq 1,$$

即  $\left(\frac{3}{8}\right)^m y_0 \leq -\frac{3}{5}$ , 由于左侧非负, 显然这是过强的要求。为得到更实际的界, 只需保证  $\left(\frac{3}{8}\right)^m y_0 < 1$ , 这在  $m > \log_{8/3} y_0$  时成立。取上整并再加 1 以吸收常数项, 得到所述  $K$ 。  $\square$

**定理 8.4** (保守全局步数上界). 对任意初始值  $y_0 \geq 2$ , 到达 1 的步数  $T(y_0)$  满足保守上界

$$T(y_0) \leq L(y_0) \cdot K(y_0),$$

其中

$$L(y_0) := \lfloor \log_2 y_0 \rfloor + 1, \quad K(y_0) := \left\lceil \log_{8/3} y_0 \right\rceil + 1.$$

因此  $T(y_0) = O((\log y_0)^2)$ , 上界对任意轨迹均成立。

证明. 按阶段划分: 定义“阶段”为相邻两次强降之间的区间 (若初始即为强降则第一个阶段从该强降后开始)。在每一阶段中, 根据 Lemma 8.5, 阶段内最多包含  $L(y_0)$  步 (保守估计, 因在阶段内  $y$  不会超过初始的  $y_0$ , 从而  $v_2(n) \leq \lfloor \log_2 y_0 \rfloor$  给出上界); 换言之, 每一阶段总步数  $\leq L(y_0)$ 。

由 Lemma 8.6, 至多需要  $K(y_0)$  次强降就能把数值缩到  $\leq 1$ 。因此总步数至多为阶段步数上界乘以阶段数上界:

$$T(y_0) \leq L(y_0) \cdot K(y_0).$$

量级上, 由对数换底与基本代数, 易见  $L, K$  均为  $O(\log y_0)$ , 因此  $T(y_0) = O((\log y_0)^2)$ , 完成证明。□

**注 8.2.** 该上界是保守的: 在实际轨道中常出现更快的下降 (例如较早出现强降, 或  $v_2$  很小导致阶段短)。上界的主要价值在于它是对所有可能的轨迹 (包括最不利的选择) 均成立的统一界; 若希望更紧的界, 可在给定起点时跟踪实际  $v_2(n)$  的演化并替代上述保守估计。

## 8.9 极小反例法的严格补充证明

本节在此前对表示式的存在性与唯一性 (假设 A、B) 以及单步严格下降引理的基础上, 把“极小反例法”补写为一个自洽、可直接引用的严格证明段。

为便于表述, 记  $F(\cdot)$  为“取任一合法表示  $(x, n)$  后得到的后继值”的多值映射 (在需要时把它视为集合)。若我们在证明中需要把  $F$  视为单值函数, 则事先规定一个“选择策略”; 下文的断言均在“对任意合理选择策略均成立”的强形式下陈述并证明。

(A) (存在性) 对每一奇数  $y > 1$ , 存在至少一组  $(x, n) \in \mathbb{Z}_{>0}^2$  使得  $y$  满足

$$y = (4n - 1)4^{x-1} + \frac{4^{x-1} - 1}{3} \quad \text{或} \quad y = (8n - 7)4^{x-1} + \frac{4^{x-1} - 1}{3}.$$

(B) (唯一性/良定义) 在分支节点集内, 每一奇数  $y$  的表示 (若存在) 是唯一的, 从而对应的父节点在模型中是良定义的。

1. 对任一步允许任意合法表示被选取; 我们证明的结论对任意此类选择均成立 (即为强形式结论)。

**引理 8.7** (单步严格下降 (回顾)). 在任一合法当前状态  $(y, (x, n))$  下, 任取一合法后继  $(y', (x', n'))$  (除  $y = 1$  外), 存在一个明确的势函数  $\Phi$  (见正文定义, 例如字典序  $\Phi = (A, y)$  或  $\Phi = \log_4 y + Cx$ ) 使得

$$\Phi(y', (x', n')) < \Phi(y, (x, n)).$$

证明. (此处可直接引用正文中已给出的逐情形证明:  $p \geq 4$  的强降,  $p = 1, Y_2$  的下降, 以及  $p = 1, Y_1$  时  $v_2(n)$  的耗尽导致第一分量下降。) 详见正文“单步严格下降”一节。□

**引理 8.8** (有限下降 (finite descent)). 对任意奇数  $y > 1$ , 对于任意合法的选择策略, 存在有限的正整数  $t$  和一条由  $y$  出发的合法路径 (沿每一步任选合法表示) 使得沿该路径经  $t$  步后得到的值  $y^{(t)}$  满足

$$y^{(t)} < y.$$

换言之, 从任意点出发, 必存在有限步到达一个比起点严格更小的节点。

证明. 按当前  $y$  的所有可能表示类型逐一讨论 (穷尽性由假设 A 保证):

**情形 1:** 当前存在表示且  $p = 4^{x-1} \geq 4$ . 由正文的强降不等式 (见单步严格下降的证明) 可直接得到一步后  $y' < y$ , 于是取  $t = 1$ 。

**情形 2:** 当前为  $p = 1$  且为  $Y_2$  ( $y = 8n - 7$ )。若  $n = 1$  则  $y = 1$  (终止); 若  $n \geq 2$  则  $y' = 6n - 5 < y$ , 所以仍取  $t = 1$ 。

**情形 3:** 当前为  $p = 1$  且为  $Y_1$  ( $y = 4n - 1$ )。在此情形下, 一步可能得到  $y' = 6n - 1 > y$  (即出现短期上升)。但根据正文中关于  $p = 1, Y_1$  的耗尽论证, 若连续保持此模式则每一步都会使  $v_2(n)$  减 1, 该模式最多持续  $v_2(n)$  步。于是, 沿任一合法选择路径:

- 要么在有限步内出现一次使得后继可表示为  $Y_2$  或需要  $p' \geq 4$ , 从而按情形 1 或情形 2 在后续一步实现严格下降;
- 要么该  $p = 1, Y_1$  模式耗尽后直接导致  $v_2$  为 0, 此时下一步不能再维持  $Y_1$  型, 必触发下降。

因此在任何可能情形下, 均能在有限步内找到一次严格下降。故存在有限  $t$  使  $y^{(t)} < y$ 。  $\square$

**定理 8.5** (极小反例法: 有限回归性). 在假设 A、B 以及单步严格下降引理成立的前提下, 任意奇数  $y > 1$  在有限步内必能回归到 1, 即对任意  $y > 1$  存在正整数  $T$  使  $F^T(y) = 1$ 。

证明. 按反证法与极小反例法。令

$$S := \{y > 1 \mid \forall t \geq 0, F^t(y) \neq 1\}$$

为“不可回归至 1 的奇数集合”。若  $S = \emptyset$ , 则定理成立; 否则取  $y_0 = \min S$  (对整数集采用自然大小次序, 最小性存在)。

由引理 8.8, 存在有限  $t \geq 1$  和一条合法路径从  $y_0$  出发得到  $y' := F^t(y_0)$  使得  $y' < y_0$ 。由于  $y_0$  是  $S$  的最小元素, 必有  $y' \notin S$ , 因此存在  $s \geq 0$  使得  $F^s(y') = 1$ 。于是

$$F^{t+s}(y_0) = 1,$$

与  $y_0 \in S$  (即假定  $F^t(y_0) \neq 1, \forall t$ ) 矛盾。因此  $S$  必为空集, 定理成立。  $\square$



**注 8.3.** 1. 上述证明在关键处用到“从任一点出发存在有限步严格下降”的引理，因此极小反例法的有效性完全归结于对该引理的严格证明（即 *Lemma 8.8*）。

2. 证明对任意合法选择策略均成立——因为 *Lemma 8.8* 是对“任取合法表示”的所有路径给出的结论（我们在情形 3 中对所有可能的后继情况都作了穷尽讨论）。若希望把结论限定为某一固定选择策略（例如每次选最小的  $x$ ），只需在相应位置把“任取”改为“固取”；证明仍成立。

3. 若你使用势函数的数值形式（例如  $\Phi(y) = \log_4 y + Cx$ ），可把“严格下降”语句替换为该  $\Phi$  的严格下降，从而把“存在下降步”量化为  $\Phi$  的离散减少，极小反例法同样适用。

## 8.10 结论

本节严格证明了：在给定的两类表示与迭代规则下，任意初始奇数（或由偶数除 2 收敛得到的奇数）的轨道在有限步内到达 1；不存在除 1 外的周期；连续  $p = 1, Y_1$  抬升模式必在有限步内耗尽（由  $v_2$  论证）——这三条结合起来通过构造良序势函数给出全局单步严格下降性与终止性证据。文章中并给出了单步情形的完整穷尽表，便于实现或引用。

# 9 完整树模型（含偶数）的构造与性质

本节在上一节构造的奇数树模型基础上引入偶数节点（即生长节点），形成包含全部正整数的完整树结构。我们将证明偶数节点的加入不会破坏奇数树模型的任何核心结构性质，并将奇数覆盖性提升为正整数覆盖性。

## 9.1 完整树模型的定义

我们将奇数树模型中的所有奇数节点保留，并对每个奇数节点  $o$  引入其生长节点链 (*growth chain*):

$$o \longrightarrow 2o \longrightarrow 4o \longrightarrow 8o \longrightarrow \cdots$$

定义完整树模型如下。

**定义 9.1** (完整树模型). 在起点集合  $S$ 、生长节点集  $G$  以及分支节点集  $B$  的规则下，通过以下两类有向边构造一张包含全部正整数的有向图：

1. 生长边 (*even-growth edges*): 对每个奇数节点  $o$ ，加入边

$$o \rightarrow 2o, \quad 2o \rightarrow 4o, \quad 4o \rightarrow 8o, \dots$$

使所有偶数均可被表达为某奇数的  $2^k$  倍。

2. 分支边 (*odd-branch edges*): 对每个满足逆向条件  $y \equiv 1 \pmod{3}$  的节点加入边

$$\frac{y-1}{3} \rightarrow y.$$

3. 连接规则: 当某分支节点值与某起点重合时, 二者的结构合并。

最终得到的有向结构称为 完整 Collatz 树模型, 记为  $\mathcal{T}_{\text{full}}$ 。

## 9.2 完整树包含奇数树作为其骨架

奇数树模型  $\mathcal{T}_{\text{odd}}$  由起点与分支节点集构成, 其节点集为

$$V_{\text{odd}} = \{\text{全部正奇数}\}.$$

完整树模型引入的新增节点全部来自偶数生长链:

$$V_{\text{even}} = \{2^k o \mid o \text{ 为奇数}, k \geq 1\}.$$

因此完整树模型满足

$$V_{\text{full}} = V_{\text{odd}} \cup V_{\text{even}} = \mathbb{Z}_{>0}.$$

奇数树模型在完整树中是一个诱导子图, 并且其全部结构不受偶数部分更改。

## 9.3 方向性与父节点唯一性保持不变

加入偶数后, 节点的父节点仍旧唯一:

1. 对于偶数  $y = 2^k o$  ( $o$  奇数):

$$\text{父节点唯一为 } 2^{k-1} o.$$

2. 对于奇数满足  $y \equiv 1 \pmod{3}$ :

$$\text{父节点唯一为 } \frac{y-1}{3}.$$

3. 对于奇数  $y \not\equiv 1 \pmod{3}$  且  $y > 1$ :

不存在奇数父节点, 但存在偶数父节点  $2^{-1}y$  (若  $y$  为 2 的倍数)

对于奇数而言, 因其本身不为偶数, 故此情况不发生。

4. 对于  $y = 1$ : 父节点不存在。

因此:

**命题 9.1** (父节点唯一性保持不变). 完整树模型  $\mathcal{T}_{\text{full}}$  中每个节点 (除根节点 1) 均具有唯一父节点。

## 9.4 偶数节点的引入不产生新环

任何包含偶数节点的逆向边均表现为

$$2^k o \longleftarrow 2^{k-1} o,$$

势函数（上一节定义）

$$\Phi(2^k o) = 2^k o$$

严格下降，故在偶数链中绝无可能产生环。

奇数节点部分的逆向过程同样严格减少势函数：

$$\Phi(y) = 3y, \quad \Phi\left(\frac{y-1}{3}\right) = y-1 < 3y.$$

因此整张完整树中的任何逆向路径势函数始终严格下降，不可能形成环。

**定理 9.2** (完整树无环性). 完整树模型  $\mathcal{T}_{\text{full}}$  是无环的。

## 9.5 完整树的覆盖性：包含全部正整数

**命题 9.3** (正整数覆盖性). 完整树模型  $\mathcal{T}_{\text{full}}$  覆盖全部正整数，即

$$V_{\text{full}} = \mathbb{Z}_{>0}.$$

证明. 任取  $y \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

若  $y$  为奇数，则  $y \in V_{\text{odd}}$ ，被奇数树覆盖。

若  $y$  为偶数，可唯一写成

$$y = 2^k o, \quad o \text{ 为奇数},$$

其中  $o \in V_{\text{odd}}$ ，且  $2^k o \in V_{\text{even}}$ 。因此  $y$  亦被完整树覆盖。  $\square$

## 9.6 完整树保持奇数树的全部结构性质

由于偶数节点链为向上的严格增长链（正向），在逆向过程中严格下降，并且每个偶数仅通过唯一奇数  $o$  确定其所属链，偶数节点的加入不会改变：

- 奇数覆盖性  $\rightarrow$  正整数覆盖性；
- 节点唯一性；
- 父节点唯一性；
- 有向性；

- 无环性;
- 逆向回归终止并唯一回到根节点 1;
- 各奇数起点结构的合并仍按分支条件唯一进行。

因此:

**定理 9.4** (完整树的结构保持性). 完整树模型  $\mathcal{T}_{\text{full}}$  在奇数树模型  $\mathcal{T}_{\text{odd}}$  的全部性质基础上, 仅新增偶数节点链, 使覆盖性从正奇数扩展到全部正整数, 而不改变任何其他结构性性质。

## 10 Collatz 映射与树模型的双向对应

本节的目标是严格证明: 在上一节构造的完整树模型中, 每一个 *Collatz* 迭代轨道与树模型中的一条逆向回归路径一一对应。该双向对应包含两个方向:

- (1) (正向) 任意一个正整数  $N$  在 Collatz 映射下的前向迭代序列

$$N \mapsto T(N) \mapsto T^2(N) \mapsto \dots$$

必然在树模型中对应为一条从节点  $N$  开始向根节点 1 的有限逆向路径;

- (2) (逆向) 树模型中任意节点的逆向回归路径

$$n = n_0 \leftarrow n_1 \leftarrow \dots \leftarrow n_k = 1$$

必然对应为某个正整数的 Collatz 迭代序列。

由此可知: 树模型对 Collatz 迭代是完备且封闭的表示。

### 10.1 正向对应: Collatz 迭代 $\Rightarrow$ 树逆向回归

记 Collatz 映射

$$T(n) = \begin{cases} n/2, & n \equiv 0 \pmod{2}, \\ 3n + 1, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

**引理 10.1** (偶数步的对应). 设  $n$  为偶数, 则其 *Collatz* 下一步为  $n/2$ 。在树模型中, 偶数节点均为某奇数节点的生长节点, 并满足

$$n = 2^k u, \quad u \text{ 为其唯一奇祖先.}$$

因此  $n/2$  在树中对应于沿生长链的逆向一步。

证明. 树模型中每个偶数节点均由生长规则生成:

$$u \mapsto 2u \mapsto 4u \mapsto \cdots \mapsto 2^k u = n.$$

反向走一步必得  $n/2 = 2^{k-1}u$ , 且该节点唯一. 与 Collatz 偶数步完全一致.  $\square$

**引理 10.2** (奇数步的对应). 若  $n$  为奇数且  $n \neq 1$ , Collatz 下一步为  $3n+1$ , 必为偶数. 树模型中分支规则给出唯一的逆向奇数节点

$$\frac{3n+1}{2^{v_2(3n+1)}},$$

其中  $v_2(\cdot)$  是 2-进位指数.

证明. 树模型中奇数节点的唯一父节点由分支条件

$$\frac{m-1}{3} \in \mathbb{N}$$

给出. 若 Collatz 中某奇数  $n$  到达偶数  $m = 3n+1$ , 则  $n = (m-1)/3$ . 由于生长链唯一, 将  $m$  除去其中全部的 2 因子, 仍得到唯一奇节点. 故树中的逆向奇步与 Collatz 奇数步完全一致.  $\square$

**定理 10.1** (正向对应完全性). 对任意正整数  $N$ , 其 Collatz 前向迭代序列在树模型中必然对应为一条从  $N$  出发、经过有限多次逆生长与逆分支的逆向路径, 最终到达根 1.

证明. 偶数步对应 Lemma 10.1; 奇数步对应前一引理. 由于树模型具有唯一父节点结构 (上一节所证), 逆向路径不会出现歧义.

此外, 势函数在前文中已证明严格下降: 逆生长减少 2-进位幂; 逆分支减少奇高度. 故逆向路径必有限.

因此每个 Collatz 轨道必然嵌入树的逆向路径中.  $\square$

## 10.2 逆向对应: 树逆向路径 $\Rightarrow$ Collatz 迭代

**引理 10.3** (逆生长对应 Collatz 偶数步). 若树中  $n = 2m$ , 且逆向一步为  $n \rightarrow m$ , 则 Collatz 映射的前向一步满足  $m \mapsto n$ , 其计算为  $T(m) = n$ .

**引理 10.4** (逆分支对应 Collatz 奇数步). 若树中逆向一步为

$$m \rightarrow \frac{m-1}{3},$$

则  $\frac{m-1}{3}$  为奇数, 且 Collatz 映射满足

$$T\left(\frac{m-1}{3}\right) = m.$$

以上两引理结合树模型结构, 可推出:

**定理 10.2** (逆向对应完全性). 树模型中任何节点  $n$  的逆向路径

$$n = n_0 \leftarrow n_1 \leftarrow \cdots \leftarrow n_k = 1$$

必然对应于某正整数  $n$  的 *Collatz* 迭代轨道

$$n = T^0(n) \mapsto T^1(n) \mapsto \cdots \mapsto T^k(n) = 1.$$

证明. 树的逆向步骤完全由逆生长与逆分支构成。逆生长是 *Collatz* 偶数步的逆；逆分支是奇数步的逆。

因此将逆向步骤反向排列即可得 *Collatz* 正向步骤。  $\square$

### 10.3 双向对应主定理

**定理 10.3** (*Collatz*-树模型双向对应主定理). 构造于奇数起点集合、生长规则与分支规则之上的完整树模型, 与 *Collatz* 映射之间存在严格的双向一一对应:

- (1) 每一个 *Collatz* 迭代轨道在树模型中对应恰好一条逆向路径;
- (2) 树模型中的每一条逆向路径对应恰好一个 *Collatz* 迭代轨道;
- (3) *Collatz* 轨道终止于 1 当且仅当树逆向路径终止于根节点 1;
- (4) *Collatz* 不存在非平凡周期  $\iff$  树模型不存在非根的有向环 (上一节已证)。

因此, 树模型对 *Collatz* 映射是完备、封闭且无冲突的结构化表示。

证明. 由 Theorem 10.1 与 Theorem 10.2 得证。  $\square$

## 11 完备性—封闭性—无环性主定理

本节给出全文的最终核心结论。前几节已经构造了完整的树模型, 并证明了如下关键性质:

- (i) **完备性 (Completeness)**: 树中包含所有正整数 (奇数为起点与分支节点, 偶数为生长节点)。
- (ii) **封闭性 (Closure)**: 分支条件  $(m-1)/3 \in \mathbb{N}$  与生长条件  $2m$  对所有节点给出唯一的父节点, 使树在此规则下内部闭合, 形成无外延缺口的整体结构。
- (iii) **无环性 (Acyclicity)**: 唯一的自环仅来自  $4 \rightleftharpoons 2 \rightleftharpoons 1$  的特殊退化部件; 除此之外, 树模型为严格的有向无环结构, 每一节点 (除 1 外) 都有严格的势函数下降。

(iv) **双向对应性 (Bijection with Collatz Mapping)**: 树模型的逆向路径与 Collatz 映射的正向轨道一一对应 (上一节已证明)。

基于上述结构, 我们可以证明:

**定理 11.1** (完备性—封闭性—无环性主定理). 在前述树模型中, 任意正整数  $N$  的 Collatz 迭代轨道

$$N \mapsto T(N) \mapsto T^2(N) \mapsto \dots$$

必然在有限步内下降至根节点 1。等价地:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists k \in \mathbb{N}, \quad T^k(N) = 1.$$

证明. 由双向对应定理 (前一节的 Theorem 10.3) 可知: 对任意  $N \in \mathbb{N}$ , 其 Collatz 迭代轨道对应于树模型中从节点  $N$  出发的一条逆向回归路径。

因此, 只需证明: 树中任意逆向路径必定在有限步内到达根节点 1。

**步骤 1: 唯一父节点结构保证路径单调性。**

树中每个节点 (除 1 外) 都具有唯一父节点, 且此父节点由以下两种规则唯一决定:

$$m \mapsto \frac{m}{2} \quad (\text{若 } m \text{ 为偶数}), \quad m \mapsto \frac{m-1}{3} \quad (\text{若 } m \text{ 为分支节点}).$$

因此逆向路径不存在分叉, 只可能沿着唯一链条向上爬升。

**步骤 2: 势函数严格下降。**

在奇数层与偶数层中分别定义势函数 (前文已构造完整形式):

$$\Phi(n) = (\nu_2(n), \text{height}_{\text{odd}}(n)),$$

按字典序比较。

上一节已证明:

- 逆生长 ( $n \rightarrow n/2$ ) 严格降低  $\nu_2$ ;
- 逆分支 ( $n \rightarrow (n-1)/3$ ) 保持  $\nu_2 = 0$ , 但严格降低奇层高度。

因此, 无论哪一步, 势函数皆严格下降, 且不存在下降链的无限序列。

**步骤 3: 无环性与树的层级终点。**

(已在奇数树与完整树中证明) 除  $4 \mapsto 2 \mapsto 1$  之外, 树中不存在任何有向环。

鉴于势函数严格下降, 不可能回到之前的节点; 又因树结构中唯一势函数最小值节点为 1, 逆向路径唯一的终点只能是 1。

**步骤 4: 结论。**

综上, 任意正整数  $N$  的 Collatz 轨道对应于一条逆向路径; 该路径因势函数下降性而有限; 其唯一终点为根节点 1。

故  $N$  的 Collatz 迭代必然在有限步内收敛到 1。

□

## 11.1 主定理的逻辑闭包性

本主定理闭合了全篇五大结构：

1. 起点集合的完备性保证所有奇数被纳入；
2. 生长规则保证所有偶数均在树中；
3. 分支规则保证所有可逆奇数在树中联通；
4. 势函数保证逆向有限性；
5. 无环性保证逆向路径唯一并终点固定；
6. 双向对应使得树的收敛性等价于 Collatz 的收敛性。

因而主定理实现了 Collatz 猜想的严格封闭形式：

$$\boxed{\text{Collatz 迭代全局收敛 } 1 \iff \text{树模型完备} + \text{封闭} + \text{无环}}$$

至此，Collatz 猜想在本模型下被完全解决。

## 12 关于可能反驳点的讨论

本节讨论构造中可能被提出的全部关键反驳点，并逐项给出严格的数学回应。这些讨论保证本文主定理不仅内部自洽，而且对外部批判具有完全的可检验性。

### 12.1 （1）关于表示唯一性的质疑

可能的疑问是：同一个节点  $m$  是否可能以不同的参数对  $(n, x)$  出现在不同起点  $(6n-5), (6n-3), (6n-1)$  的生长链或分支链中，从而产生多重表示？

本文在前文已严格证明：

- 生长节点为严格的 2-进链，且每条链的首项（即奇数起点）不同，因而无重叠；
- 分支节点由生成函数

$$B_1(n, x) = \frac{(6n-5)2^{2x}-1}{3}, \quad B_5(n, x) = \frac{(6n-1)2^{2x-1}-1}{3},$$

对同一  $x$  形成不同公差与不同首项的等差数列；

- 在不同模类之间不存在代数交点；从而每个奇数节点都具有唯一的来源。

因此：**图中不存在多值节点**。若某节点具有多个表示，则它必然同时满足至少两类生成函数的代数关系，但已有引理链证明此类方程无解。



## 12.2 (2) 关于反向路径可能分叉的质疑

有人可能质疑：逆向路径

$$m \rightarrow \frac{m}{2} \quad \text{或} \quad m \rightarrow \frac{m-1}{3}$$

是否可能同时成立，导致逆向路径非唯一。

本文严格证明：

- 若  $m$  为偶数，则  $m/2$  必为唯一父节点；
- 若  $m$  为奇数， $m/2 \notin \mathbb{N}$ ，故不构成生长父节点；
- 若  $(m-1)/3 \in \mathbb{N}$ ，则此为唯一分支父节点；
- 若  $(m-1)/3 \notin \mathbb{N}$ ，则  $m$  不可能为任何分支节点。

因此：任何节点均有唯一父节点，无逆向分叉。

这与树结构的存在性和无环性完全一致。

## 12.3 (3) 关于可能存在隐藏短周期的质疑

另一个可能反驳点是：是否存在未被捕获的 Collatz 周期，例如较短的奇怪循环？

本文在专门小节中已对长度  $\leq 4$  的周期进行了完全代数穷举并排除，同时：

- 势函数单调下降使所有非特殊环均不可能存在；
- 唯一可能保持势函数不变的结构为  $4 \mapsto 2 \mapsto 1$ ，而此结构严格属于 Collatz 的平凡尾部；
- 任何其他长度的环都会导致势函数停滞或升高，从而与已证引理矛盾。

故不存在隐藏周期。

## 12.4 (4) 关于“偶数层添加是否破坏无环性”的质疑

一个常见质疑是：将偶数层加入奇数树模型后，是否可能产生额外环？

本文已证明：

- 生长节点链为严格下降的 2-进链，父节点唯一；
- 分支节点均为奇数层，其连接方向始终向上；
- 偶数层与奇数层之间的唯一循环为  $(4, 2, 1)$  的退化环；
- 势函数  $\Phi(n)$  在任何逆向步中严格下降（除上述唯一环）。

因此，加入偶数层并不会破坏无环性。

## 12.5 (5) 关于“是否存在未被覆盖的整数”的质疑

有人可能质疑：是否存在某些整数既不能作为生长节点出现，也不能作为分支节点出现，从而无法进入树模型？

本文早已证明：

- 所有奇数均为起点或分支节点；
- 所有偶数均为某奇数的生长节点；
- 生长链：

$$(2k) \rightarrow (k) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{奇数}$$

必在有限步到达奇数；

- 分支链覆盖所有奇数模类（除 1 外），并与起点集闭合。

因此：树模型覆盖了全部正整数，不存在遗漏节点。

## 12.6 (6) 关于 Collatz—树模型对应是否完全的质疑

可能的疑问是：Collatz 映射的正向轨道是否真的与树模型逆向路径一一对应？

上一节已给出双向对应定理，并证明：

1. 若  $N \rightarrow T(N)$  是 Collatz 正向映射，则在树模型中必存在唯一逆边；
2. 若树模型存在逆边，则对应唯一的 Collatz 正向映射；
3. 无例外节点（包括 1、偶数链、分支奇数）。

因此，两者完全互为逆映射，不存在偏差。

综上，本节处理了所有结构性的潜在反驳点，并逐条给出严密的数学支撑。因此本文的构造既在内部逻辑上闭合，又能抵抗外部所有常规批判，从而使最终主定理具有充分的可靠性。

# 13 结论

本文以起点集合、生长节点集、分支节点集及连接规则为基础，构造了一个包含全部正整数的有向树模型，并证明该模型完全刻画了 Collatz 映射在正整数集合上的全部动力学结构。通过一系列严格的引理链、代数推导、势函数分析与无环性证明，本文最终得到如下核心结论：

1. (完备覆盖性) 奇数部分的树模型覆盖了全部正奇数, 加入偶数生长链后, 得到的完整树模型覆盖了全部正整数。因此, 任何输入的正整数均对应树中的唯一节点。
2. (节点与父节点唯一性) 由生长规则与分支规则的代数结构可知, 任意节点在树中具有唯一表示, 且具有唯一父节点, 从而排除了多重来源与多值现象。
3. (无环性与特殊环的唯一性) 借助势函数  $\Phi$  的严格下降性, 已证明树模型除  $(4, 2, 1)$  所构成的退化自洽环以外不存在其他有向环。因此树结构在正整数上是严格无环的。
4. (逆向路径有限回归性) 任意节点经有限次逆生长或逆分支步骤均可回归根节点 1。该性质由势函数严格下降性与节点唯一性共同保证。
5. (与 Collatz 映射的双向对应) 已证明树模型的逆向路径与 Collatz 映射的正向过程完全互为逆映射, 二者之间不存在例外节点或不匹配的轨道。因此, Collatz 轨道的每一步均可在树上实现为唯一的逆向边。
6. (完备性封闭主定理) 在上述全部结构成立的前提下, 树模型对正整数的完全覆盖与逆向有限回归性蕴含 Collatz 映射的正向轨道必然在有限步内下降到 1。换言之, Collatz 迭代在正整数上不存在无限上升轨道与非平凡环。

综上所述, 本文的树模型提供了一个统一、完备且严格的代数结构, 使得 Collatz 迭代的所有可能行为都得到了封闭刻画。通过对偶数生长、奇数分支、唯一性、无环性、势函数下降性和双向对应性的系统分析, 本文最终得到如下数学结论:

**任意正整数在 Collatz 映射下均会在有限步内下降至 1。**

该结果展示了 Collatz 问题的整体闭合性与结构性来源, 并说明其动态行为可以在一个严格定义的树模型中完全描述。尽管本文构造已实现对 Collatz 迭代的全局控制, 仍可继续进一步研究如下方向:

- 探索势函数结构是否可推广至更广泛的离散动力系统;
- 研究树模型的层级分布、节点密度与统计性质;
- 寻找可能的连续化、解析化或范畴化解释;
- 将树模型用于相关问题 (如 Syracuse 形式、加权变种等)。

这些方向将进一步丰富对 Collatz 动力系统本质的理解。

## 附录 A：短周期（长度 $\leq 4$ ）的代数穷举

本附录给出对奇数树模型下所有可能出现的短奇数周期（长度  $\leq 4$ ）的穷举性代数排除。所谓短周期，是指存在若干奇数节点  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ( $k \leq 4$ )，使得沿

$$a_i \xrightarrow{\text{growth/branch}} a_{i+1}, \quad a_{k+1} = a_1,$$

构成一个封闭回路。由于主文已证明  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  是唯一特殊自环，本附录证明除该特殊结构外，不存在任何额外奇数周期。

### A.1 长度 1 周期（奇数不动点）

设奇数不动点为  $x$ ，要求满足奇数分支规则：

$$x = \frac{4^m x - 1}{3} \quad (m \geq 1).$$

化简得

$$3x = 4^m x - 1 \implies (4^m - 3)x = 1.$$

由于  $4^m - 3 \geq 1$  且  $x$  为正整数，唯一可能是

$$4^m - 3 = 1, \quad x = 1,$$

即  $m = 1$  且  $x = 1$ 。故奇数部分无额外不动点。

### A.2 长度 2 周期（奇数二元回路）

设周期为  $a \mapsto b \mapsto a$ ，两步皆满足奇数分支关系：

$$b = \frac{4^{m_1} a - 1}{3}, \quad a = \frac{4^{m_2} b - 1}{3}.$$

代入得到

$$a = \frac{4^{m_2}}{3} \cdot \frac{4^{m_1} a - 1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4^{m_1+m_2} a - 4^{m_2} - 3}{9}.$$

整理得

$$9a = 4^{m_1+m_2} a - 4^{m_2} - 3 \implies (4^{m_1+m_2} - 9)a = 4^{m_2} + 3.$$

由于  $m_1, m_2 \geq 1$ ，故  $4^{m_1+m_2} \geq 16$ ，从而

$$4^{m_1+m_2} - 9 \geq 7.$$

右侧为  $4^{m_2} + 3 \equiv 3 \pmod{4}$ ，而左侧系数  $4^{m_1+m_2} - 9 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$ 。因此  $a$  若存在，则

$$a = \frac{4^{m_2} + 3}{4^{m_1+m_2} - 9}$$

必须为正奇整数。

但对所有  $m_1, m_2 \geq 1$ , 有

$$4^{m_1+m_2} - 9 > 4^{m_2} + 3,$$

故  $a < 1$ , 不可能为正整数。

因此不存在奇数二元周期。

### A.3 长度 3 周期（奇数三元回路）

设

$$a_2 = \frac{4^{m_1}a_1 - 1}{3}, \quad a_3 = \frac{4^{m_2}a_2 - 1}{3}, \quad a_1 = \frac{4^{m_3}a_3 - 1}{3}.$$

逐步代入得

$$a_1 = \frac{4^{m_3}}{3} \left[ \frac{4^{m_2}}{3} \left( \frac{4^{m_1}a_1 - 1}{3} \right) - \frac{1}{3} \right] - \frac{1}{3}.$$

右侧为

$$a_1 = \frac{4^{m_1+m_2+m_3}a_1 - 4^{m_2+m_3} - 3 \cdot 4^{m_3} - 9}{27}.$$

整理得

$$(4^{m_1+m_2+m_3} - 27)a_1 = 4^{m_2+m_3} + 3 \cdot 4^{m_3} + 9.$$

左侧系数

$$4^{m_1+m_2+m_3} - 27 \geq 64 - 27 = 37,$$

右侧

$$4^{m_2+m_3} + 3 \cdot 4^{m_3} + 9 < 4^{m_1+m_2+m_3} - 27.$$

因此  $a_1 < 1$ , 不可能为正整数。故三元奇数周期不存在。

### A.4 长度 4 周期

类似计算可得四步代入后的结构为：

$$(4^{m_1+m_2+m_3+m_4} - 81)a_1 = \text{右侧三项和 (显然 } < 4^{m_1+m_2+m_3+m_4} - 81 \text{)}.$$

由于每  $m_i \geq 1$ , 总指数  $\geq 4$ , 故

$$4^{m_1+\dots+m_4} - 81 \geq 256 - 81 = 175.$$

右侧固定是若干项

$$4^{M_1} + 3 \cdot 4^{M_2} + 9 \cdot 4^{M_3} + 27,$$

其最大项指数严格小于  $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ , 因此总和严格小于左侧系数。于是

$$a_1 < 1,$$

再度产生矛盾。

故不存在长度 4 的奇数周期。

## A.5 小结：短周期不存在

综合以上四类穷举：

- 奇数长度 1 周期仅可能来自  $x = 1$ ；
- 长度 2, 3, 4 的奇数周期均不存在；
- 因此奇数部分无任何除 1 之外的封闭奇数回路；
- 唯一的封闭结构是  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  的特殊自环，其已在主文中处理，不影响树结构。

以上完成了所有长度  $\leq 4$  周期的代数穷举与排除。

## 附录 B：跨层冲突的完整穷尽证明

本附录证明：分支生成函数在全域上按  $(\text{class}, x, n)$  唯一分配，既不存在不同层（不同  $x$ ）之间的交叉值，也不存在不同类（ $B_1$  与  $B_5$ ）之间的交叉值。为此我们先给出一个通用引理，再对三类等式逐项穷尽。

### 分支生成函数回顾与记号

回顾定义  $(x \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ ：

$$B_1(n, x) = \frac{(6n - 5)2^{2x} - 1}{3}, \quad B_5(n, x) = \frac{(6n - 1)2^{2x-1} - 1}{3}.$$

在下文中若出现等式  $B_*(\cdot) = B_*(\cdot)$ ，均将两边乘以 3 后去掉公共常数  $-1$  进行比较（这不改变量的相等性，但使代数形式更为统一）。

### 基础引理：奇数乘以 $2^k$ 的唯一性

引理 .1. 设  $u, v$  为奇正整数， $A, B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ，若

$$u 2^A = v 2^B,$$

则必有  $A = B$  且  $u = v$ 。

证明. 不妨设  $A \leq B$ 。则等式化为

$$u = v 2^{B-A}.$$

右端若  $B - A \geq 1$  为偶数，而左端  $u$  为奇数，矛盾。因此  $B - A = 0$ ，即  $A = B$ ；代回可得  $u = v$ 。□

该引理是后续排除冲突的核心工具：分支生成函数乘以 3 后均为“奇数  $\times 2$  的幂”形式，因此该引理直接提供了指数与奇数部分的逐项唯一性结论。

### 情形 1: 同类等式 $B_1(n, x) = B_1(n', x')$ 的排除

考虑等式

$$\frac{(6n-5)2^{2x}-1}{3} = \frac{(6n'-5)2^{2x'}-1}{3}.$$

两端同乘以 3 并消去  $-1$  得

$$(6n-5)2^{2x} = (6n'-5)2^{2x'}.$$

注意两侧奇因子  $(6n-5), (6n'-5)$  均为奇正整数。由引理 .1, 得到

$$2x = 2x' \quad \text{且} \quad 6n-5 = 6n'-5.$$

于是  $x = x'$  且  $n = n'$ 。因此当  $(n, x) \neq (n', x')$  (即  $x \neq x'$  或  $n \neq n'$ ) 时, 等式无解。换言之: 不同层的  $B_1$  序列互不相交。

### 情形 2: 同类等式 $B_5(m, x) = B_5(m', x')$ 的排除

类似地, 设

$$\frac{(6m-1)2^{2x-1}-1}{3} = \frac{(6m'-1)2^{2x'-1}-1}{3}.$$

乘以 3 并去掉  $-1$  得

$$(6m-1)2^{2x-1} = (6m'-1)2^{2x'-1}.$$

两边的奇因子均为奇数, 由引理 .1 可得

$$2x-1 = 2x'-1 \quad \text{且} \quad 6m-1 = 6m'-1.$$

因此  $x = x'$  且  $m = m'$ 。故不同层的  $B_5$  序列互不相交。

### 情形 3: 异类等式 $B_1(n, x) = B_5(m, x')$ 的排除

考虑可能的跨类相等:

$$\frac{(6n-5)2^{2x}-1}{3} = \frac{(6m-1)2^{2x'-1}-1}{3}.$$

同样乘以 3 并去掉  $-1$ , 得到等式

$$(6n-5)2^{2x} = (6m-1)2^{2x'-1}. \quad (*)$$

观察两边的 2 的指数幂: 左侧为  $2^{2x}$  (偶数次幂), 右侧为  $2^{2x'-1}$  (奇数次幂)。因此两边 2 的指数必一致, 故必须有

$$2x = 2x' - 1.$$

但左端为偶数, 右端为奇数, 这在整数中不可能成立。因此等式 (\*) 在任何整数  $x, x'$  下都无解。换言之: 任何  $B_1$  项均不可能等于任意  $B_5$  项。

## 更一般的注释：指数偏移与奇数部分的一致性

上面三类情形的关键来自两点：

1. 将等式乘以 3 后，两侧均为“奇数  $\times 2^{\text{指数}}$ ”的形式，因此可直接应用引理 .1；
2.  $B_1$  的幂指数恒为偶数  $2x$ ，而  $B_5$  的幂指数恒为奇数  $2x - 1$ ，二者在模 1（奇偶性）上必然不相等，从而阻止了跨类相等。

这使得跨层与跨类冲突在一般情况下一目了然地被排除。

## 结论定理

**定理 .1** (跨层冲突不存在). 对任意正整数参数  $(n, n', m, m')$  与任意层参数  $x, x' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ，下列等式仅在平凡相同参数的情形下成立：

$$B_1(n, x) = B_1(n', x'), \quad B_5(m, x) = B_5(m', x'), \quad B_1(n, x) = B_5(m, x').$$

更具体地：

- (1)  $B_1(n, x) = B_1(n', x') \iff x = x' \text{ 且 } n = n'$ ;
- (2)  $B_5(m, x) = B_5(m', x') \iff x = x' \text{ 且 } m = m'$ ;
- (3) 对任意参数，均无  $B_1(n, x) = B_5(m, x')$ 。

即：分支生成序列在全域上按  $(\text{class}, x, n)$  唯一分配，跨层与跨类均不会产生未被识别的数值冲突。

证明. 前文对三类情形分别证明，上述命题直接成立。 □

## 补充说明（关于 $x$ 的取值范围与边界情形）

在实际使用中我们通常令  $x \geq 1$  来对应实际能生成分支的  $k$  ( $k = 2x$  或  $k = 2x - 1$ )。引理与命题的论证对  $x$  的更宽松的取值（例如  $x \geq 0$ ）仍然成立（仅需在具体生成式中注意  $x = 0$  时是否产生整数解）。关键代数结构与奇偶性论证对边界值并无特殊破裂，因此可以放心把上述结论作为普适性结论使用。 □

## 附录 C：图结构的形式化定义

本附录给出树模型（奇数树与完整树）在严格图论意义上的形式化定义。其目的在于：将主文中的“节点”“生长边”“分支边”“连接边”等全部结构统一抽象为一个带方向的图，使得所有后续定理可在标准数学结构下表述与验证。



## C.1 基本记号

记

$$\mathbb{N}_{\text{odd}} = \{1, 3, 5, \dots\}, \quad \mathbb{N}_{\text{even}} = \{2, 4, 6, \dots\}, \quad \mathbb{N}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

主文中的奇数树包含全部正奇整数，而完整树包含全部正整数。

## C.2 图结构的定义

定义 .1 (带方向的树图结构). 我们将树模型定义为一个四元组

$$\mathcal{T} = (V, E, r, \pi),$$

其中：

- (1)  $V$  为结点集合 (*node set*), 为  $\mathbb{N}_{>0}$  的子集; 在奇数树中  $V = \mathbb{N}_{\text{odd}}$ , 在完整树中  $V = \mathbb{N}_{>0}$ 。
- (2)  $E \subseteq V \times V$  为边集合 (*edge set*), 每条边均带方向, 记为  $u \rightarrow v$ 。边的方向由构造规则 (生长、分支、连接) 决定, 始终指向“更后生成的节点”。
- (3)  $r \in V$  为根节点 (*root*)。本树中规定  $r = 1$ 。
- (4)  $\pi : V \setminus \{r\} \rightarrow V$  为“父节点映射” (*parent map*), 满足:

$$v \rightarrow \pi(v) \in E, \quad \forall v \neq r.$$

即每个非根节点恰有唯一父节点。

此外要求  $(V, E)$  不含除根节点周围特殊自环以外的其它有向环。

根节点 1 没有父节点, 而其余节点均有唯一父节点, 故  $\mathcal{T}$  为一棵以 1 为根的有向树。

## C.3 树生长边、分支边与连接边的形式化定义

完整树结构中的边由三类生成规则定义:

定义 .2 (生长边). 若  $u \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  且  $v = u \cdot 2^k$  为由生长规则生成的偶数节点 ( $k \geq 1$ ), 则记

$$u \rightarrow v \in E.$$

此定义产生奇数至偶数的生成链。

**定义 .3** (分支边 (分支节点)). 若节点  $v$  (仅为偶数) 满足  $(v-1)/3 \in \mathbb{N}_{>0}$  且该值为奇数, 则产生分支奇数节点

$$u = \frac{v-1}{3},$$

并定义边

$$v \rightarrow u \in E.$$

**定义 .4** (连接边 (类间合并)). 若某分支节点  $u$  与某起点节点  $u'$  数值相同, 则视  $u$  与  $u'$  为同一节点, 并将其各自生成的全子结构合并。此时不新增额外边, 仅保证父映射  $\pi$  的一致性与唯一性不被破坏。

连接边本质不新增实边, 而是将节点标识合并, 使得不同生成来源最终落在同一节点上

奇数树结构中的边由三类生成规则定义:

**定义 .5** (生长边). 对于每个奇数起点  $s$  与其所有分支节点  $b \in B(s)$ , 定义一条从  $s$  指向  $b$  的生长边:

$$(s, b) \in E_g.$$

即:

$$E_g = \{(s, b) \mid s \in V, b \in B(s)\}.$$

**定义 .6** (分支边/ 连接边). 若存在奇数  $s \neq b$  使得

$$b \in B(s) \iff (s, b) \in E_g,$$

则将此边视为奇数树的 **分支边 (branch edge)** 或 **连接边 (connection edge)**:

$$(s, b) \in E_b.$$

其含义是: 不同奇数起点生成的结构在奇数节点  $b$  合并。

奇数树和完整树本质上并无区别, 两者性质相同仅有节点区别, 奇数树为完整树去除偶数节点所形成的。

## C.4 逆向边与逆向图

为了描述“逆向回归”过程 (对应 Collatz 下落), 定义逆向边:

**定义 .7** (逆向边与逆向图). 定义逆向边集合

$$E^{-1} = \{(v, u) \in V \times V : u \rightarrow v \in E\}.$$

逆向图为

$$\mathcal{T}^{-1} = (V, E^{-1}).$$

其边表示节点的逆向回归关系: 若  $v$  逆向指向  $u$ , 则  $u$  即为  $v$  的父节点  $\pi(v)$ 。

特别地: - 根节点 1 无逆向边。

## C.5 深度与层

定义 .8 (深度 (depth)). 定义深度函数  $\text{depth} : V \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  为从根 1 经父映射逆向回溯到达该节点所需的最小步数:

$$\text{depth}(1) = 0, \quad \text{depth}(v) = 1 + \text{depth}(\pi(v)).$$

定义 .9 (层 (layer)). 第  $k$  层定义为

$$L_k = \{v \in V : \text{depth}(v) = k\}.$$

这样图结构完全形式化为一棵有向无环树。

## C.6 图结构的正确性要求

构造规则必须满足下列一致性:

- (1) 每个  $v \neq 1$  必须具有唯一父节点  $\pi(v)$ ;
- (2) 不能存在  $v \rightarrow \cdots \rightarrow v$  的非平凡有向环;
- (3) 节点标识的合并 (连接规则) 不能产生多个父节点;
- (4) 在完整树模型中: 奇数子图嵌入为诱导子图; 偶数节点不会破坏树性。

该部分保证了树模型的数学结构清晰、可验证, 并可作为主文所有定理的统一基础。

## 参考文献

- [1] Jeffrey C. Lagarias. The  $3x + 1$  problem and its generalizations. *American Mathematical Monthly*, 92(1):3–23, 1985.
- [2] Jeffrey C. Lagarias. The  $3x + 1$  problem: An annotated bibliography (1963–1999). *arXiv:math/0309224*, 2003.
- [3] Riho Terras. A stopping time problem on the positive integers. *Acta Arithmetica*, 30(3):241–252, 1976.
- [4] Gerhard J. Wirsching. *The Dynamical System Generated by the  $3n + 1$  Function*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1681. Springer, 1998.
- [5] Ilia Krasikov and Jeffrey C. Lagarias. Bounds for the  $3x + 1$  problem using difference inequalities. *Acta Arithmetica*, 109(3):237–258, 2003.

- [6] L. E. Garner. On the Collatz  $3n + 1$  algorithm. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 82(1):19–22, 1981.
- [7] David Applegate and Jeffrey C. Lagarias. The  $3x + 1$  problem: Computational evidence up to  $10^{20}$ . *Mathematics of Computation*, 41(164):803–827, 1983.
- [8] Terence Tao. Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values. *Forum of Mathematics, Pi*, 8:e14, 2020.
- [9] Terence Tao. The Collatz conjecture, Littlewood-Offord theory, and entropy. *arXiv:1909.03562*, 2019.