PROBABILIDADE

Introdução

É um conceito matemático que permite a quantificação da incerteza.

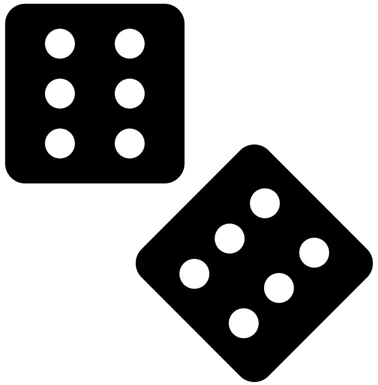
É aquilo que torna possível lidar de forma racional com problemas envolvendo o imprevisível (aleatoriedade).

A teoria da probabilidade é aplicada à Estatística indutiva, ou inferencial, utilizada como ferramenta para a tomada de decisão. sob condição de incerteza.

PROBABILIDADE

Experimento aleatório

- Experimento: lançamento de um dado
- Resultado: número para cima
- Espaço amostral: 1,2,3,4,5 e 6
- Probabilidade: 1/6



PROBABILIDADE

Definição

A probabilidade do evento A ocorrer é escrita por p(A) e lê-se: **probabilidade do evento A**.

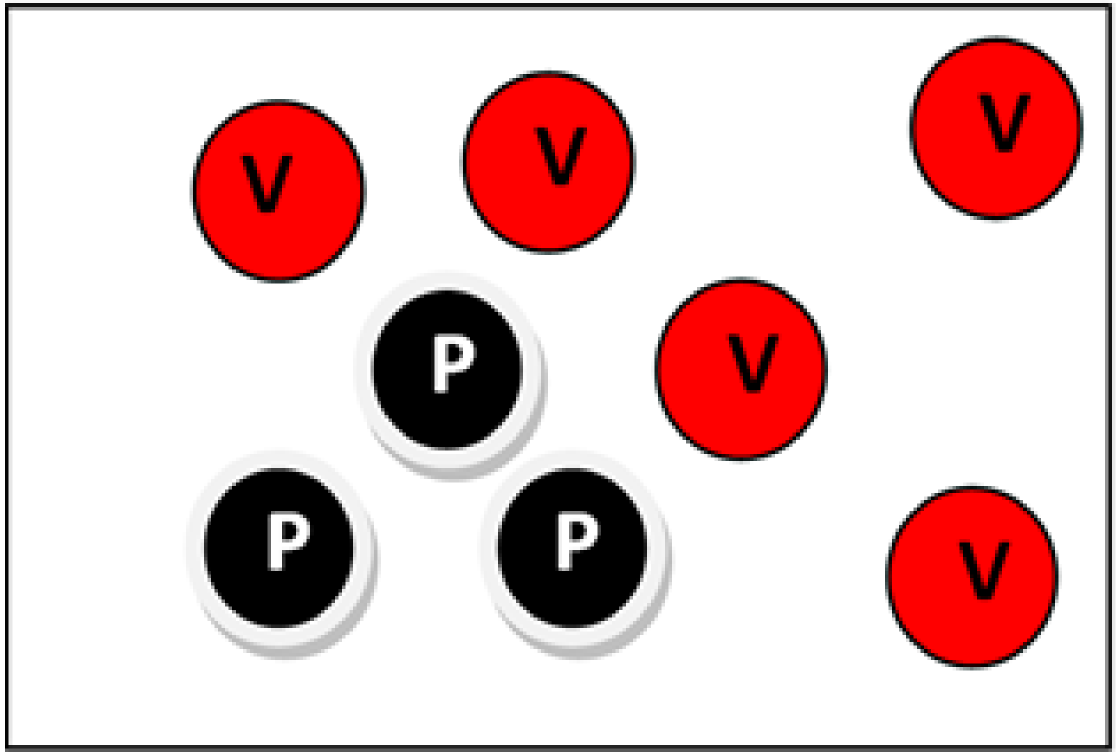
O método para o cálculo da probabilidade depende do tipo de evento.

- Clássico
- Empírico
- Subjetivo

PROBABILIDADE

Clássico

Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 bolas pretas. Qual a probabilidade de ser retirada uma bola preta?



$$P(A)=\frac{n_A}{N}=\frac{3}{8}$$

PROBABILIDADE

Empírico

A probabilidade de ocorrência de um evento é determinada com base na proporção de frequência observada deste evento em um certo número de repetições ou experimentos

Se em N realizações de um experimento o evento A ocorre n_A vezes, então a frequência relativa de A nas N realizações é uma aproximação para a P(A).

Aumentando o número de repetições:

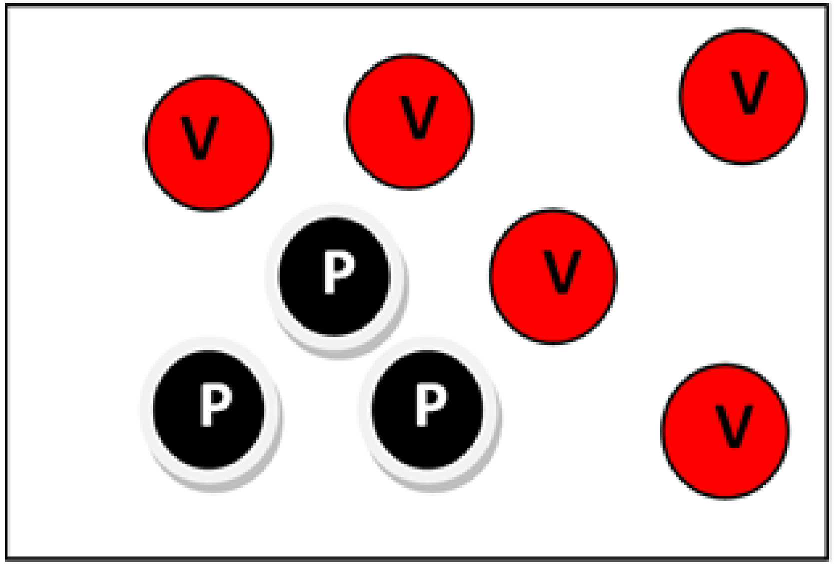
$$\lim_{\{N \to \infty\}} \frac{n_A}{N} = P(A)$$

PROBABILIDADE

Exemplo 1

Há uma urna!

- Experimento: retirada de bolas **reposição**
- Resultado: cor da bola
- Espaço amostral: ????
- Qual a probabilidade de ser preta?

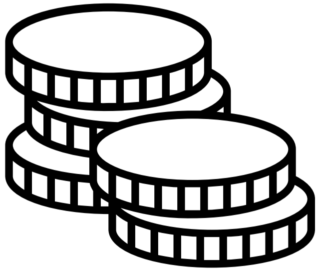


$$\lim_{\{N \to \infty\}} \frac{n_A}{N} = P(A)$$

PROBABILIDADE

Exemplo 2

- Experimento: lançamento de uma moeda
- Resultado: face virada para cima
- Espaço amostral: cara ou coroa
- Qual a probabilidade cara?



$$\lim_{\{N \to \infty\}} \frac{n_A}{N} = P(A)$$

PROBABILIDADE

Subjetiva

Linha Nigra. A linha escura que aparece em algumas mulheres é indicativa do sexo do bebê. Se continuar acima da umbigo, é um menino. Se estiver abaixo, o oposto.

PROBABILIDADE

Elementos

Todos experimento ou fenômeno que envolva incerteza terá seu modelo probabilístico especificado quando estabelecemos:

- espaço amostral (Ω): Consiste em enumerar todos os resultados possíveis do experimento em questão

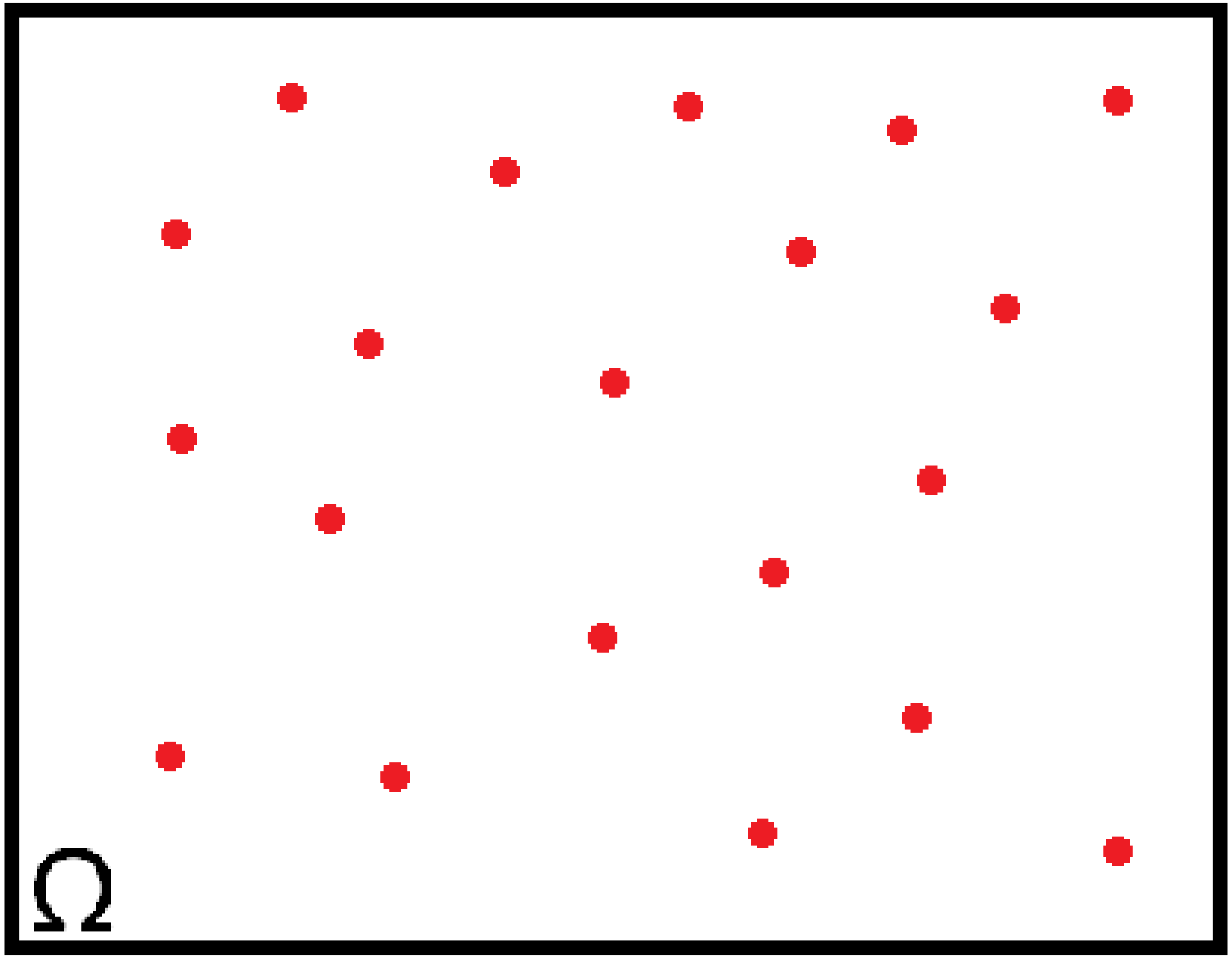
  $$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, ..., w_n\}$$

  sendo w_i (são pontos amostrais ou eventos elementares)
- Probabilidade ($p(w_i)$): para cada ponto amostral há uma probabilidade de ocorrência.
- Evento é a união de um conjunto de pontos. Ex.: Evento $A = (w_1, w_2, w_5)$

$$p(A) = \sum_i p(w_i), w_i \in A$$

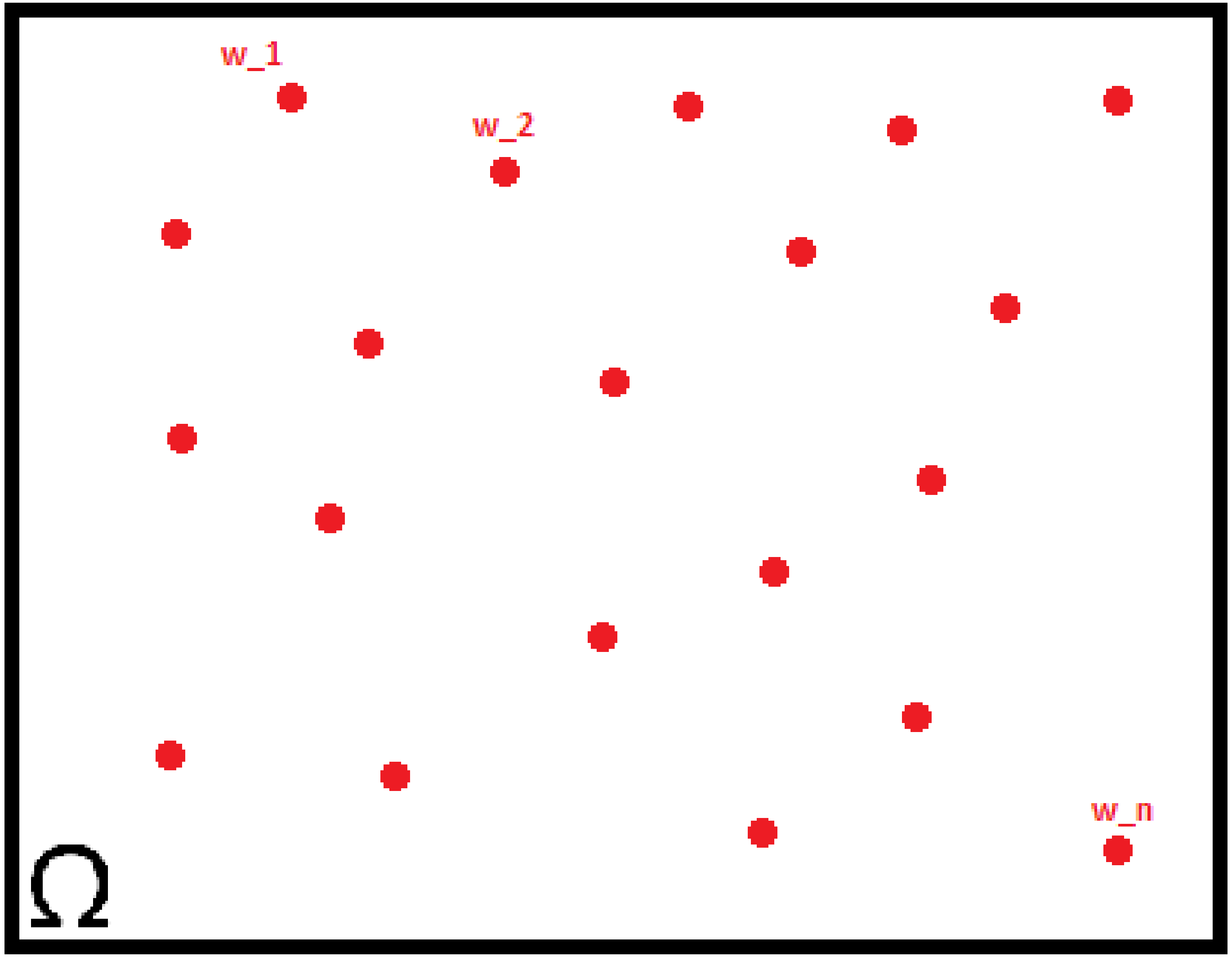
PROBABILIDADE

Elementos



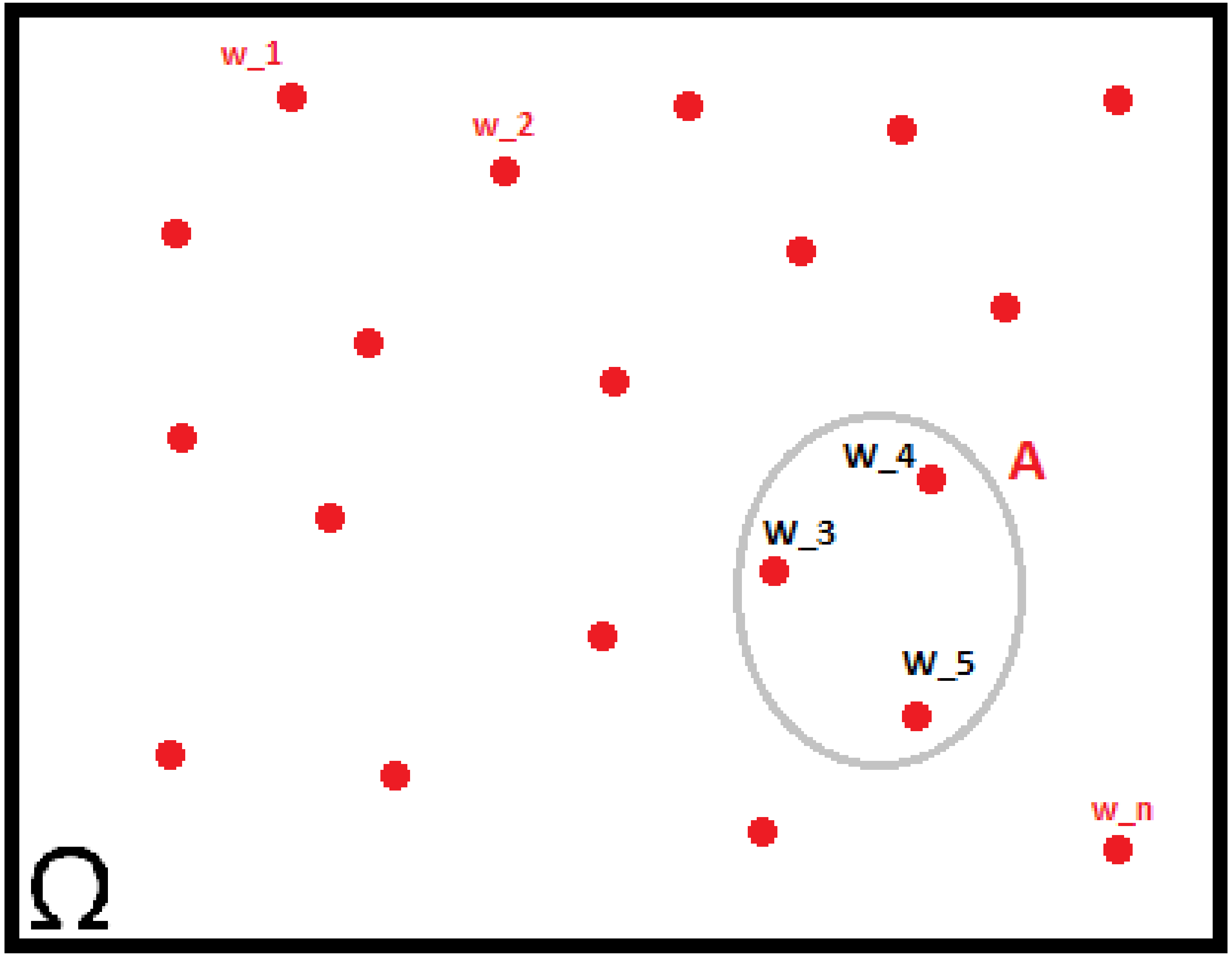
PROBABILIDADE

Elementos



PROBABILIDADE

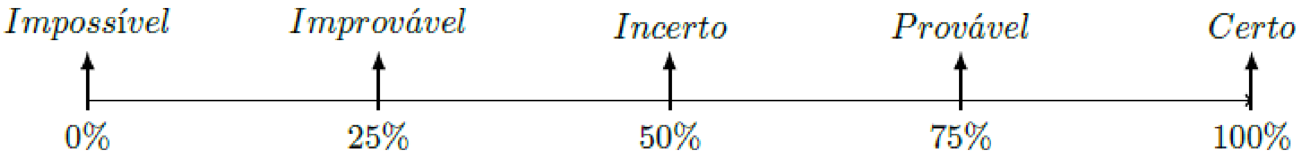
Elementos



PROBABILIDADE

Axiomas

- a probabilidade de qualquer evento $A \subset \Omega$ está limitada por $0 \leq P(A) \leq 1$.
- a probabilidade também pode ser apresentada em formato de percentual % e classificada da seguinte maneira:



- $P(\Omega) = 1$, a probabilidade de ocorrer algum evento em Ω é certa.
- A probabilidade de um evento impossível é 0: $p(\emptyset) = 0$
- A probabilidade da união de dois eventos A e B é (teoria dos conjuntos):

$$P(A \cup B) = p(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Se dois eventos são mutualmente excludentes, ou seja, $A \cap B = \emptyset$, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Se dois eventos são independentes, então a probabilidade de ocorrer o evento A e B é:

$$P(A \cap B) = p(A) \times P(B)$$

- A probabilidade do evento A condicionada ao evento B é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

PROBABILIDADE

Exemplo 1

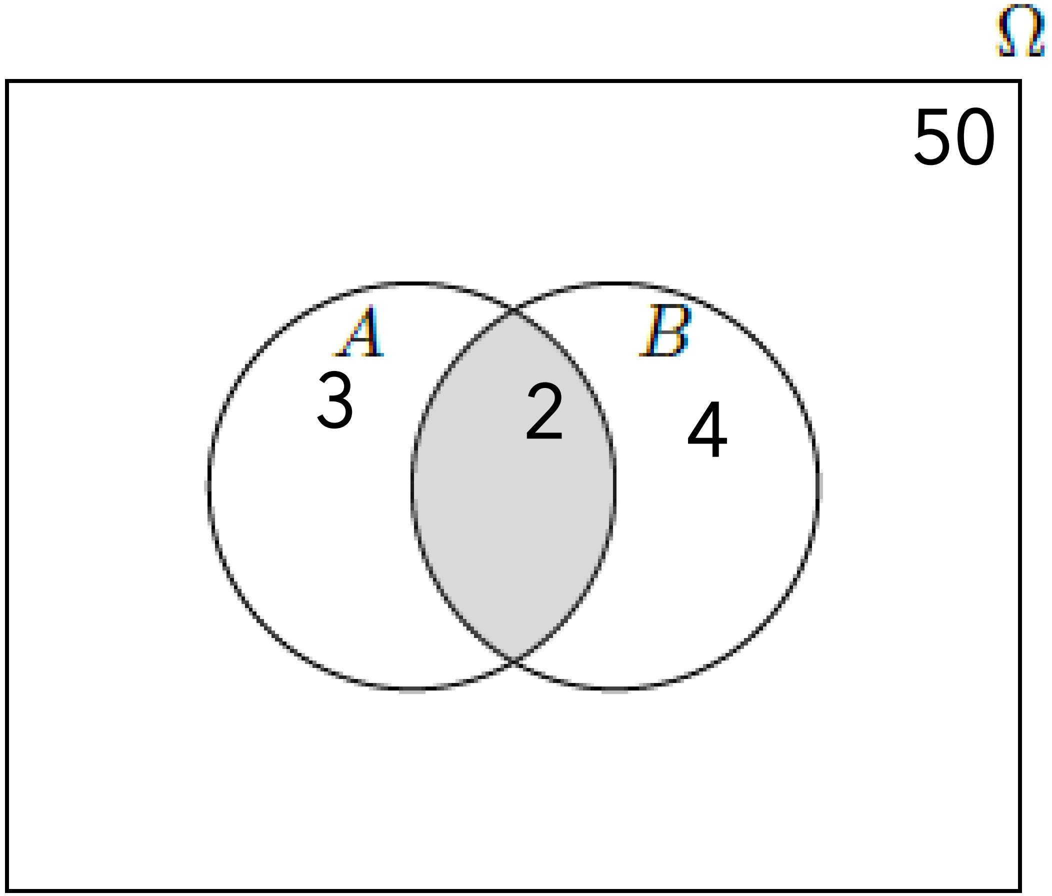
Considere uma fabrica com 50 empregados. Um empregado não tem êxito em satisfazer os padrões de desempenho, se completa o trabalho mais tarde e/ou monta produtos com defeito.

Foi observado que 5 dos 50 tinham completado o trabalho mais tarde, 6 dos 50 trabalhadores tinham montado peças defeituosas e 2 dos 50 tinham tanto completado mais tarde como montado produtos defeituosos.

Quantos trabalhadores não satisfizeram os padrões de desempenho?

PROBABILIDADE

Exemplo 1



A: tempo
B: qualidade

$A = 5$
$B = 6$
$A \cap B = 2$

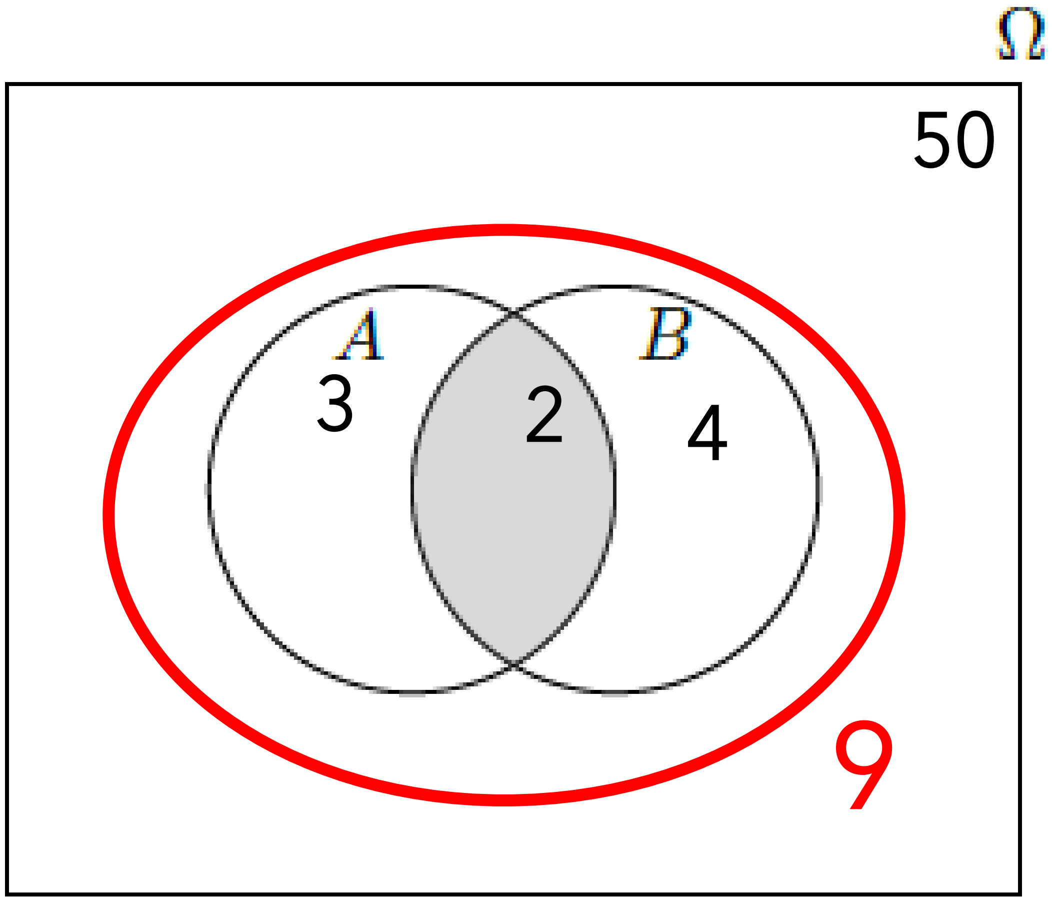
$\underline{A - A} \cap \underline{B = 3}$

$\underline{B - A} \cap \underline{B = 4}$

$A \cup B = A + B - A \cap B$

PROBABILIDADE

Exemplo 1



A: tempo
B: qualidade

$A = 5$
$B = 6$
$A \cap B = 2$

$\underline{A - A} \cap \underline{B = 3}$

$\underline{B - A} \cap \underline{B = 4}$

$A \cup B = A + B - A \cap B$

PROBABILIDADE

Exemplo 2

Três cavalos A, B e C, estão em uma corrida; A: tem duas vezes mais probabilidades de ganhar que B, e B tem duas vezes mais probabilidade de ganhar que C. Quais são as probabilidades de vitória de cada um, isto é, P(A), P(B) e P(C)?

PROBABILIDADE

Exemplo 2

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$P(A) = 2\,P(B)$$

$$P(B) = 2\,P(C)$$

$$2\,P(B) + P(B) + P(C) = 1$$

$$2\,(2\,P(C)) + 2\,P(C) + P(C) = 1$$

$$7P(C) = 1$$

$$P(C) = 1/7$$
$$P(B) = 2/7$$
$$P(A) = 4/7$$

PROBABILIDADE

Exemplo 3

A probabilidade de João resolver uma questão de probabilidade e $2/3$ e a de Maria $3/4$. Sabendo que ambos tentam de maneira independente, qual a probabilidade do problema ser resolvido?

PROBABILIDADE

Exemplo 3

M: Maria
J: João

$P(M) = 3/4$
$P(J) = 2/3$

$P(J \cap M) = ?$

$P(J \cap M) = P(M)\,P(J)$

$P(M)\,P(J) = 3/4\ 2/3 = 6/12 = 1/2$

$P(J \cup M) = P(J) + P(M) - P(J \cap M)$

$P(J \cup M) = 2/3 + 3/4 - ½ = 11/12$

PROBABILIDADE

Condicional

	HOMEM	MULHER	Total
NORMAL	110	148	258
MAGRO	5	5	10
SOBREPESO	38	28	66
Total	153	181	334

Figura 3 – Tabela de contigência apresentada em Carvalho et al. (2001)

mulher (M)

$$P(M) = \frac{181}{334} = 54.2\%$$

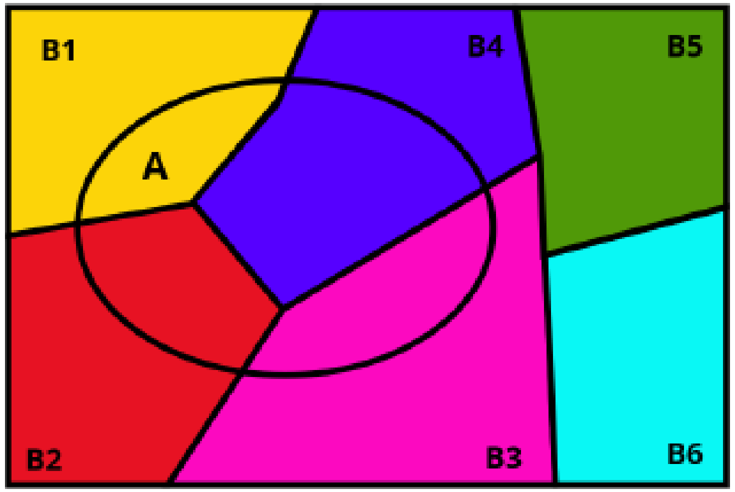
sobrepeso (S).

$$P(M|S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{28}{334}}{\frac{66}{334}} = \frac{28}{66}$$

PROBABILIDADE

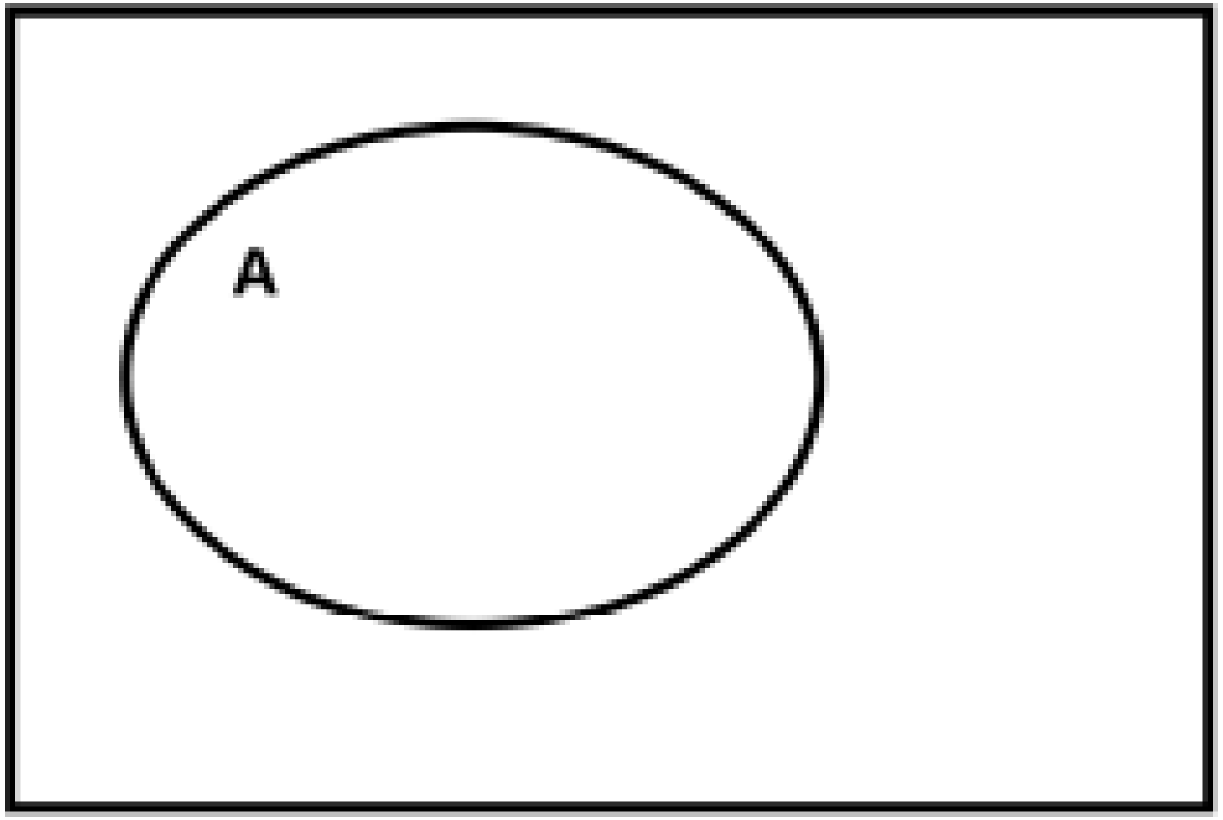
Regra da probabilidade total

A Lei da Probabilidade total é uma regra fundamental que relaciona as probabilidades conjuntas de um evento de interesse. Ela expressa a probabilidade total de um resultado que pode ser obtido por meio de vários eventos disjuntos (mutuamente exclusivos). Nos espaços amostrais Ω formados pela união das partes B_i disjuntas a probabilidade de qualquer evento em Ω.



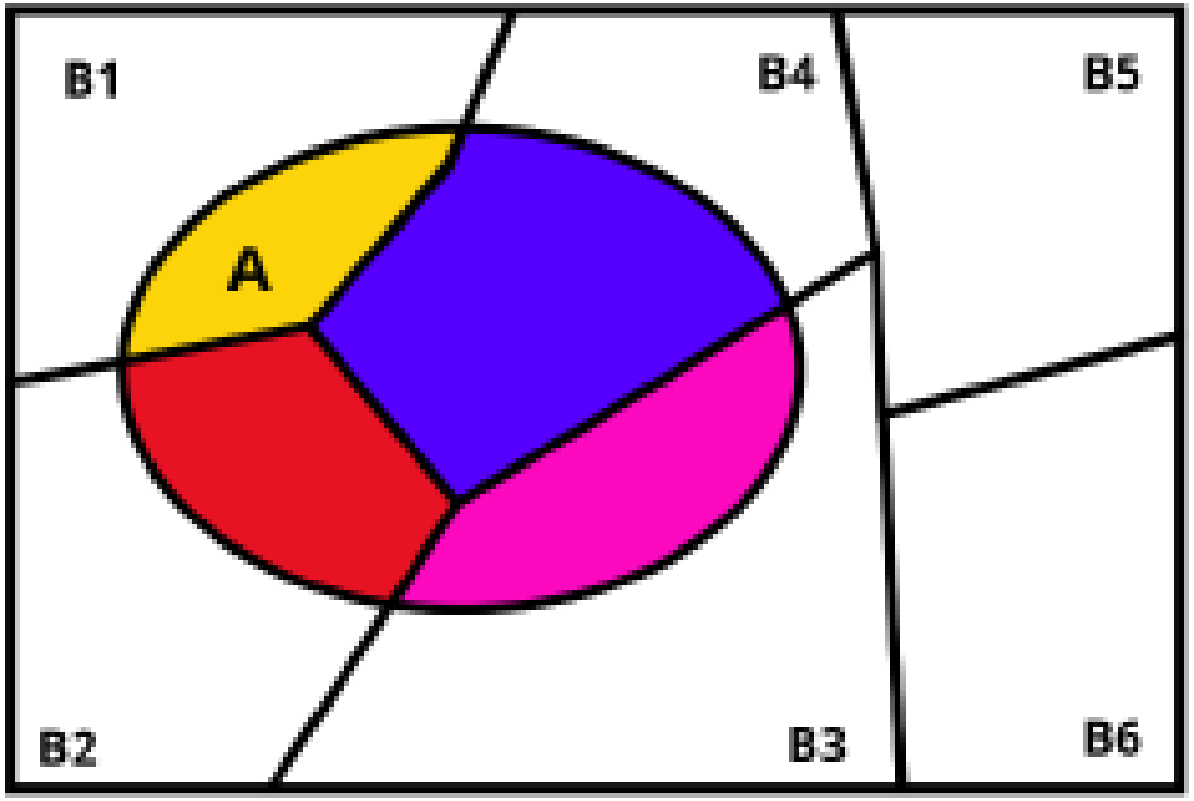
PROBABILIDADE

Regra da probabilidade total



PROBABILIDADE

Regra da probabilidade total



PROBABILIDADE

Regra da probabilidade total

Utilizando a probabilidadae condicional e o fato dos elementos B_i serem disjuntos:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) \cup P(A|B_2)P(B_2) \cup ... \cup P(A|B_N)P(B_N)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A|B_i)P(B_i)$$

PROBABILIDADE

Regra da probabilidade total

D: durar mais do que 5000

$P(D|X) = 99\%$ e $P(D|Y) = 95\%$

X: Lâmpadas do tipo X $P(X) = 60\%$

Y: Lâmpadas do tipo Y $P(Y) = 40\%$

PROBABILIDADE

Regra da probabilidade total

$$P(D) = P(D|X)P(X) + P(D|Y)P(Y)$$

$$P(D) = 99\% \times 60\% + 95\% \times 40\% = 97.4\%$$

PROBABILIDADE

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = P(A)\frac{P(B|A)}{P(B)}$$

A informação à *priori* P(A) é atualizada após o conhecimento sobre B $P(A|B)$. No teorema de Bayes temos que o valor da probabilidade a posteriori é o produto da probabilidade a priori e de uma razão de probabilidades da informação B.

PROBABILIDADE

Teorema de Bayes

Considere o seguinte exemplo. A probabilidade a priori dos eventos A e B são $P(A) = 0.4$ E $P(B) = 0.6$. Sabe-se que $P(A \cap B) = 0)$ e que que $P(R|A) = 0.2$ e $P(R|B) = 0.05$, R sendo um evento de interesse. Sabendo essa informação sobre R, qual é a probabilidade P(A/R) e P(B/R).

Nesse caso, temos a seguinte representação para o conhecimento a priori de A e B.

Figura 4 – Conhecimento sobre A e B antes de R.

PROBABILIDADE

Teorema de Bayes

$$P(A \cap R) = P(R|A) \times P(A) = 0.2 \times 0.4 = 0.08$$

$$P(B \cap R) = P(R|B) \times P(B) = 0.05 \times 0.6 = 0.03$$

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = 0.08 + 0.03 = 0.11$$

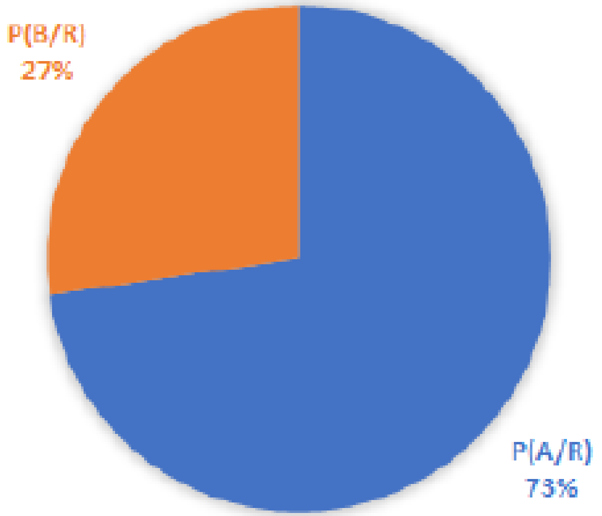
Dessa forma, para encontrar a probabilidade de $P(A/R)$, podemos utilizar o teorema de Bayes.

$$P(A/R) = P(A)\frac{P(R|A)}{P(R)} = 0.4\frac{0.2}{0.11} = 0.4 \times 1.81 = 0.7272$$

PROBABILIDADE

Teorema de Bayes

Dessa forma, a probabilidade inicial de P(A) era de 40%, no entanto, após saber que R aconteceu, a probabilidade associada ao evento A aumenta em 1.81 vezes. Isto é, a probabilidade de A é atualizada pelo o que conheçemos sobre R.



Referências

CARVALHO, C. et al. Consumo alimentar de adolescentes matriculados em um colégio particular de teresina, piauí, brasil. 2001.

FABER, B.; LARSON, R. *Estatística Aplicada*. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

MAGALHãES, M. N. *Probabilidade e variáveis aleatórias*. São Paulo: Edusp, 2006.

MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. *Estatística básica*. São Paulo: Editora Saraiva, 2017.