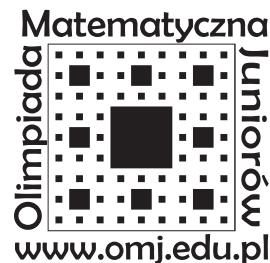


# XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia  
(13 stycznia 2018 r.)



- 1.** Czy istnieją dodatnie liczby rzeczywiste  $a, b, c, x$  o tej własności, że

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{oraz} \quad (a+x)^2 + (b+x)^2 = (c+x)^2 ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

- 2.** Dany jest trójkąt ostrokatny  $ABC$ , w którym  $AC \neq BC$ . Punkt  $K$  jest spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka  $C$ . Punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Udowodnij, że pola czworokątów  $AKOC$  oraz  $BKOC$  są równe.

- 3.** Wyznacz wszystkie trójkę  $(x, y, z)$  liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} x - yz = 1 \\ xz + y = 2. \end{cases}$$

- 4.** Dany jest trapez  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$ . Punkty  $P$  i  $Q$  leżą odpowiednio na przekątnych  $AC$  i  $BD$ , przy czym

$$\measuredangle APD = \measuredangle BQC.$$

Wykaż, że  $\measuredangle AQC = \measuredangle BPC$ .

- 5.** Każdą liczbę całkowitą pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.