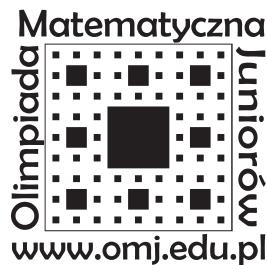


XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(11 stycznia 2020 r.)



1. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c . Wiadomo, że liczby $a+b, b+c, c+a$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności, przy czym najmniejsza z nich jest nieparzysta. Wykaż, że liczby a, b, c są także trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności.
2. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku A jest ostry. Symetralna odcinka AB przecina odcinek CD w punkcie X . Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie E . Udowodnij, że $XE = \frac{1}{2}AD$.
3. W pewnym turnieju wzięli udział chłopcy i dziewczęta. Każda osoba rozegrała dokładnie jeden mecz z każdą inną osobą, nie było remisów. Po turnieju okazało się, że każdy przegrał co najmniej raz. Ponadto każdy chłopiec przegrał inną liczbę meczów niż każdy z pozostałych chłopców. Wykaż, że pewna dziewczynka wygrała mecz z pewnym chłopcem.
4. Dany jest trójkąt ABC , w którym miara kąta przy wierzchołku A jest równa 45° , a kąt przy wierzchołku C jest rozwarty. Udowodnij, że

$$BC + (\sqrt{2} - 1) \cdot CA < AB.$$

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b o następującej właściwości: dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ ułamek

$$\frac{a+n}{b+n}$$

jest skracalny. Wykaż, że $a = b$.