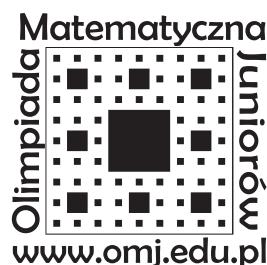


XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(19 marca 2022 r.)



1. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1. Punkty K, L, M, N , różne od wierzchołków kwadratu, leżą odpowiednio na odcinkach AB, BC, CD, DA . Wykaż, że obwód przynajmniej jednego z trójkątów ANK, BKL, CLM, DMN jest mniejszy od 2.

2. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których obie liczby

$$1 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}} \quad \text{oraz} \quad 3 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}}$$

są pierwsze.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $\angle ABD = 90^\circ$ oraz $\angle CBD = 45^\circ$. Punkt E leży na odcinku AD , przy czym $BC = CE$. Wyznacz miarę kąta BCE .

4. Wyznacz wszystkie trójkę (a, b, c) liczb całkowitych różnych od 0, dla których

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (1+a)(1+b)(1+c).$$

5. W tabeli przedstawionej na rysunku Zosia poprzedziła osiem liczb znakami minus, zmieniając je na liczby przeciwe. Okazało się, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazły się dokładnie dwie liczby ujemne. Udowodnij, że po tej zmianie suma wszystkich szesnastu liczb w tabeli jest równa 0.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16