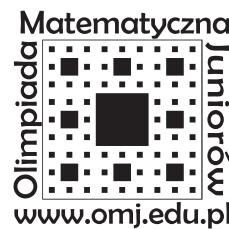


XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów (2018/19)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

(1 września – 15 października 2018 r.)

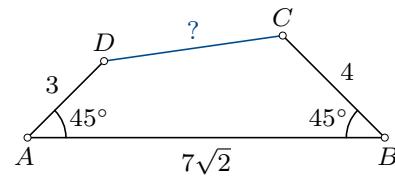


1. Liczbę naturalną n pomnożono przez 3, otrzymując w wyniku liczbę 999^{1000} . Wyznacz cyfrę jedności liczby n .

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$\angle DAB = \angle ABC = 45^\circ$ oraz $DA = 3$, $AB = 7\sqrt{2}$, $BC = 4$.

Oblicz długość boku CD .



Zadanie 2.

3. Liczby całkowite a , b , c są różne od 0 i spełniają zależność

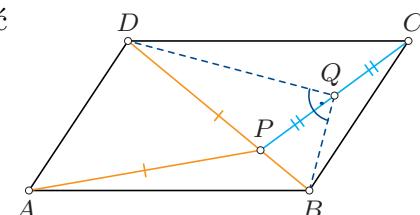
$$\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}.$$

Wykaż, że $a+b+c \leq 0$.

4. Dodatnie liczby całkowite a , b , c mają tę własność, że:

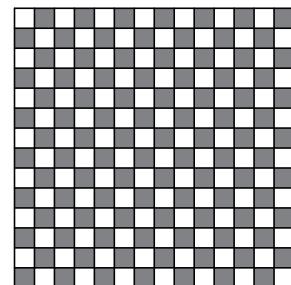
- a daje resztę 2 z dzielenia przez b ,
- b daje resztę 2 z dzielenia przez c ,
- c daje resztę 4 z dzielenia przez a .

Udowodnij, że $c=4$.



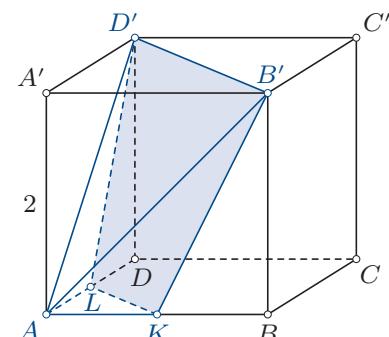
Zadanie 5.

5. Dany jest równoległybok $ABCD$. Na przekątnej BD wybrano taki punkt P , że spełniona jest równość $AP = BD$. Punkt Q jest środkiem odcinka CP . Wykaż, że $\angle BQD = 90^\circ$.



Zadanie 6.

6. Pola szachownicy o wymiarach 14×14 pokolorowano w sposób przedstawiony na rysunku. Czy można wybrać siedem pól czarnych i siedem pól białych tej szachownicy w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazło się dokładnie jedno wybrane pole? Odpowiedź uzasadnij.



7. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 2 i wierzchołkach oznaczonych jak na rysunku. Punkt K jest środkiem krawędzi AB . Płaszczyzna zawierająca punkty B' , D' , K przecina krawędź AD w punkcie L . Oblicz objętość ostrosłupa o podstawie czworokąta $D'B'KL$ i wierzchołku A .

Zadanie 7.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

15 października 2018 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej. Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.