

VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego
(19 marca 2011 r.)



1. Czy istnieją takie liczby całkowite a i b , że liczby

$$a^2 + b \quad \text{oraz} \quad a + b^2$$

są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest 99-kąt foremny. Wyznacz liczbę trójkątów równoramiennych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego wielokąta.

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Okrąg styczny do prostej AI w punkcie I i przechodzący przez punkt B przecina bok BC w punkcie P (różnym od B). Proste IP i AC przecinają się w punkcie Q . Wykaż, że punkt I jest środkiem odcinka PQ .

4. Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$.

5. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P , dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} \geq 100.$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPOŁNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ
—○—

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

