

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(1 września 2011 r. – 24 października 2011 r.)

Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesyłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły najpóźniej dnia **24 października 2011 r.** (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem

www.omg.edu.pl

Uwaga. W roku szkolnym 2011/2012 Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów zostanie przeprowadzona w nowej, eksperymentalnej formule. Zawody stopnia pierwszego, odbywające się dotychczas wyłącznie w systemie korespondencyjnym, zostaną w bieżącej edycji rozbudowane o część testową. Więcej informacji na stronie www.omg.edu.pl

1. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y , dla których

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = x + y?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt D leży na boku AB , przy czym $BD = 2AD$, a kąt BCD jest prosty. Wyznacz miarę kąta BAC .

3. Dane są dwa prostokąty o równych polach i o równych obwodach. Wykaż, że długości przekątnych obu prostokątów także są równe.

4. Każda spośród pewnych 99 liczb naturalnych ma w zapisie dziesiętnym 10 jedynek, 20 dwójek oraz pewną liczbę zer. Udowodnij, że liczb tych nie można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, aby iloczyn liczb z pierwszej grupy był równy iloczynowi liczb z drugiej grupy.

5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2BD$.

6. Dane są takie dodatnie liczby wymierne a i b , dla których liczba

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}$$

jest wymierna. Wykaż, że liczby \sqrt{a} oraz \sqrt{b} także są wymierne.

7. Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie sześcianem, jak na rysunku. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami krawędzi $AD, BC, A'B', C'D'$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach KM i LN . Krawędź sześcianu jest równa 2. Udowodnij, że $PQ \geq \sqrt{2}$.

