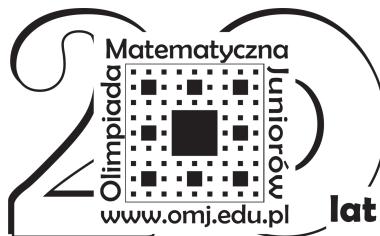


XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(11 stycznia 2025 r.)



- 1.** Punkt E leży na boku CD prostokąta $ABCD$, przy czym

$$\hat{\gamma}DAE + \hat{\gamma}EBC = \hat{\gamma}ABE.$$

Wykaż, że $AB \geqslant AD$.

- 2.** Każde pole tablicy 5×5 pomalowano albo na czerwono, albo na niebiesko. Okazało się, że w każdym wierszu tej tablicy liczba czerwonych pól jest taka sama, a w każdych dwóch kolumnach tej tablicy liczby niebieskich pól są różne. Wyznacz łączną liczbę niebieskich pól w całej tablicy. Podaj wszystkie możliwości.

- 3.** Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$ i $\hat{\gamma}ACB = 150^\circ$. Punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej BC , punkt B' jest symetryczny do punktu B względem prostej AC , a punkt C' jest symetryczny do punktu C względem prostej AB . Udowodnij, że trójkąt $A'B'C'$ jest równoboczny.

- 4.** Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz b , że

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2025}?$$

Uwaga. Symbol $\sqrt[3]{x}$ oznacza pierwiastek trzeciego stopnia z x , czyli taką liczbę rzeczywistą y , że $y^3 = x$.

- 5.** Liczbę całkowitą nazwiemy *olimpijską*, jeśli można ją uzyskać z liczby 1 w wyniku wykonania pewnej liczby operacji polegających na zwiększeniu liczby o jej cyfrę jedności. Początkowymi liczbami olimpijskimi są więc 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, ... Wykaż, że kwadrat liczby olimpijskiej jest liczbą olimpijską.