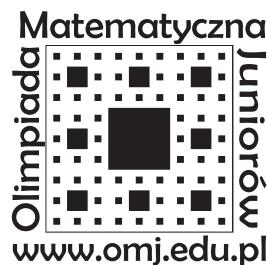


# XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia  
(18 marca 2023 r.)



**1.** Czy istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste  $x, y, z$ , że

$$x + \frac{1}{y} = z, \quad y + \frac{1}{z} = x, \quad z + \frac{1}{x} = y?$$

Odpowiedź uzasadnij.

**2.** Dane są liczby całkowite  $a$  i  $b$ , przy czym  $a > b > 1$  oraz liczba  $b$  jest największym z tych dzielników liczby  $a$ , które są różne od  $a$ . Udowodnij, że liczba  $a+b$  nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

**3.** Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $AC < BC$  oraz  $\angle ACB = 60^\circ$ . Punkt  $D$ , różny od  $A$ , leży na odcinku  $AC$ , przy czym  $AB = BD$ , a punkt  $E$ , różny od  $B$ , leży na prostej  $BC$ , przy czym  $AB = AE$ . Wykaż, że  $\angle DEC = 30^\circ$ .

**4.** Dana jest liczba nieparzysta  $n \geq 1$  oraz  $n$  strzałek ułożonych kolejno od lewej do prawej, przy czym każda strzałka wskazuje albo w lewo, albo w prawo. Udowodnij, że pewna strzałka jest wskazywana przez dokładnie tyle strzałek, na ile sama wskazuje.

*Uwaga:* Przykładowo dla  $n = 5$  i ułożenia  $\rightarrow\rightarrow\leftarrow\leftarrow\rightarrow$  kolejne strzałki (od lewej) wskazują odpowiednio na 4, 3, 2, 3, 0 strzałek.

**5.** Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych  $m, n$  o tej własności, że liczba  $(m+n)$ -cyfrowa

$$\underbrace{33\dots3}_{m} \underbrace{66\dots6}_{n}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.