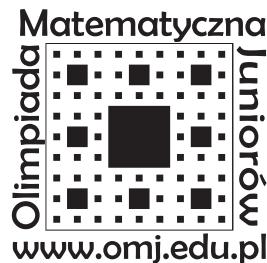


# XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia  
(16 marca 2024 r.)



- 1.** Rozstrzygnij, czy istnieje taki czworokąt wypukły  $ABCD$ , we wnętrzu którego można wskazać punkt  $P$  spełniający warunki

$$AB = AP, \quad BC = BP, \quad CD = CP, \quad DA = DP.$$

*Uwaga:* Wielokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne mają miarę mniejszą od  $180^\circ$ .

- 2.** Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą  $n \geq 1$  o tej własności, że kwadrat o wymiarach  $n \times n$  można rozciąć na kwadratowe części o wymiarach  $1 \times 1$  lub  $2 \times 2$  w taki sposób, aby uzyskać po tyle samo części każdego z tych dwóch rodzajów.

- 3.** Liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają warunki  $a+b \neq 0, b+c \neq 0$  oraz  $c+a \neq 0$ . Wykaż, że

$$\left( \frac{a^2c}{a+b} + \frac{b^2a}{b+c} + \frac{c^2b}{c+a} \right) \cdot \left( \frac{b^2c}{a+b} + \frac{c^2a}{b+c} + \frac{a^2b}{c+a} \right) \geq 0.$$

- 4.** Dany jest trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $AC = BC$ . Punkty  $P, Q, R$  leżą odpowiednio na bokach  $AB, BC, CA$  tego trójkąta, przy czym czworokąt  $CQPR$  jest równoległobokiem. Wykaż, że punkt symetryczny do punktu  $P$  względem prostej  $QR$  leży na okręgu opisany na trójkącie  $ABC$ .

- 5.** Niech  $S = \underbrace{111\dots1}_{19} \underbrace{999\dots9}_{19}$ . Wykaż, że liczba  $2S$ -cyfrowa

$$\underbrace{11111\dots111}_S \underbrace{99999\dots999}_S$$

jest podzielna przez 19.