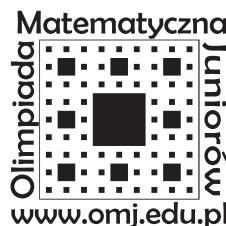


# XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów (2017/18)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia —  
część korespondencyjna

(1 września – 16 października 2017 r.)

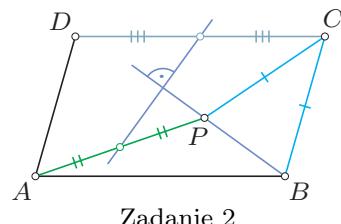


1. Liczby  $a, b, c$  spełniają zależności

$$3a + 4b = 3c \quad \text{oraz} \quad 4a - 3b = 4c.$$

Wykaż, że  $a^2 + b^2 = c^2$ .

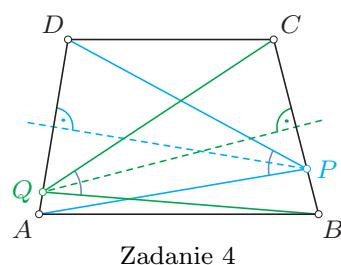
2. Wewnątrz równoległoboku  $ABCD$  znajduje się taki punkt  $P$ , że  $PC = BC$ . Udowodnij, że prosta  $BP$  jest prostopadła do prostej łączącej środki odcinków  $AP$  i  $CD$ .



3. Liczby pierwsze  $a, b, c$  są większe od 3. Udowodnij, że liczba

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

jest podzielna przez 48.



4. Dany jest trapez  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$ . Symetralne ramion  $AD$  i  $BC$  przecinają odcinki  $BC$  i  $AD$  odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$ . Wykaż, że  $\angle APD = \angle BQC$ .

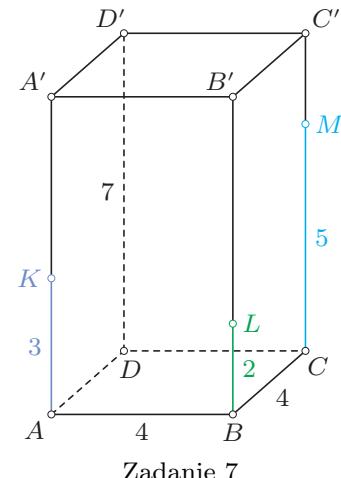
5. Każdą liczbę całkowitą należy pokolorować na jeden z trzech kolorów, w tym czerwony. Należy to uczynić w taki sposób, by każda liczba, którą można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb o różnych kolorach miała kolor czerwony. Czy da się zrealizować takie kolorowanie, używając wszystkich trzech kolorów? Odpowiedź uzasadnij.

6. Dodatnie liczby całkowite  $k, m, n$  spełniają równość  $m^2 + n = k^2 + k$ . Wykaż, że  $m \leq n$ .

7. Kwadrat  $ABCD$  o boku 4 jest podstawą prostopadłościanu  $ABCDA'B'C'D'$ . Krawędzie boczne  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  tego prostopadłościanu mają długość 7. Punkty  $K, L, M$  leżą odpowiednio na odcinkach  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , przy czym

$$AK = 3, \quad BL = 2, \quad CM = 5.$$

Płaszczyzna przechodząca przez punkty  $K, L, M$  rozcina prostopadłościan na dwie bryły. Wyznacz objętości obu tych brył.



Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesyłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

**16 października 2017 r. (decyduje data stempla pocztowego).**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: [www.omj.edu.pl](http://www.omj.edu.pl).

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej.  
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.