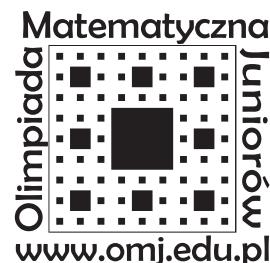


XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(20 marca 2021 r.)



- 1.** Dodatnie liczby całkowite a , b oraz n spełniają równość

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2 + n^2}{b^2 + n^2}.$$

Wykaż, że liczba \sqrt{ab} jest całkowita.

- 2.** W trójkącie prostokątnym ABC punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB . Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach AM i MB , przy czym $PQ = CQ$. Udowodnij, że $AP \leqslant 2 \cdot MQ$.

- 3.** W turnieju badmintona uczestniczyło 16 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał co najwyżej jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju okazało się, że każdy z zawodników wygrał inną liczbę meczów. Wykaż, że każdy z zawodników przegrał inną liczbę meczów.

- 4.** Na boku AB nierównoramiennego trójkąta ABC leżą takie punkty M i N , że $AN = AC$ oraz $BM = BC$. Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt M i prosta równoległa do AC przechodząca przez punkt N przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $\measuredangle CSM = \measuredangle CSN$.

- 5.** Dane są liczby naturalne a , b , które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda z cyfr od 0 do 9 występuje tyle samo razy w zapisie a co w zapisie b). Wykaż, że jeżeli $a + b = 10^{1000}$, to liczby a i b są podzielne przez 10.