

Rozwiązania zadań I etapu Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

1. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}3 - \sqrt{8} &= 2 - 2\sqrt{1 \cdot 2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2, \\5 - \sqrt{24} &= 3 - 2\sqrt{2 \cdot 3} + 2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \\7 - \sqrt{48} &= 3 - 2\sqrt{3 \cdot 4} + 4 = (2 - \sqrt{3})^2.\end{aligned}$$

Stąd mamy

$$\sqrt{3 - \sqrt{8}} + \sqrt{5 - \sqrt{24}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{3}) = 1.$$

2. Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$ spełniającego założenia zadania. Oznaczmy

$$a = |SA|, \quad b = |SB|, \quad c = |SC|, \quad d = |SD|.$$

Wiadomo, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, więc

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|.$$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa $|AB| = \sqrt{|SA|^2 + |SB|^2}$; analogicznie można przedstawić długości pozostałych boków czworokąta. Zatem równość powyższą można zapisać następująco:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + d^2}.$$

Podnosząc obie strony równania do kwadratu i dalej przekształcając:

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(b^2 + c^2)(a^2 + d^2)}, \\(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (b^2 + c^2)(a^2 + d^2), \\a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 &= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2, \\a^2d^2 + b^2c^2 - a^2b^2 - c^2d^2 &= 0, \\(a^2 - c^2)(b^2 - d^2) &= 0.\end{aligned}$$

Zatem $a^2 = c^2$ lub $b^2 = d^2$, czyli $a = c$ bądź $b = d$, a to właśnie oznacza, że jedna z przekątnych dzieli drugą na połowy.

3. Rozważmy koło o promieniu 10 i dowolnie wybrane w nim 99 punktów. Zbiór wszystkich punktów odległych o co najwyżej 1 od któregośkolwiek z wybranych punktów jest sumą kół o środkach w wybranych punktach i promieniu 1. Każde takie koło ma pole równe π , więc ich suma ma pole nie większe niż 99π (gdyż pole sumy dowolnych figur jest nie większe niż suma ich pól). A ponieważ wyjściowe koło ma pole 100π , to istnieją wewnątrz niego punkty nie należące do opisanego zbioru, a zatem odległe o więcej niż 1 od każdego spośród 99 wybranych punktów.

4. Dodajmy stronami wszystkie trzy równania układu. Otrzymujemy

$$50x^2 + 18y^2 + 8z^2 = 12yz + 20xz + 30xy,$$

co po przegrupowaniu wyrazów jest równoważne

$$\begin{aligned}(25x^2 - 30xy + 9y^2) + (25x^2 - 20xz + 4z^2) + (9y^2 - 12yz + 4z^2) &= 0, \\(5x - 3y)^2 + (5x - 2z)^2 + (3y - 2z)^2 &= 0.\end{aligned}$$

Zatem jeśli (x, y, z) jest rozwiązaniem zadanego układu równań, to $5x = 3y = 2z$, czyli dla pewnego rzeczywistego a zachodzi

$$x = 6a, \quad y = 10a, \quad z = 15a.$$

Musimy jeszcze sprawdzić, czy ta trójka liczb jest rozwiązaniem danego układu. Podstawiając te wartości do wyjściowych równań otrzymujemy tożsamości, więc powyższe wzory dla każdego $a \in \mathbb{R}$ określają poprawne rozwiązania zadanego układu.

5. Tak, jest to możliwe.

Ogrodnik może umieścić w pierwszym koszu 1 jabłko, w drugim 2 jabłka, w trzecim 3 jabłka, itd., w trzynastym 13 jabłek, w czternastym 14 jabłek, a w ostatnim koszu 16 jabłek. Istotnie

$$(1+2+3+\dots+14)+16=\frac{1}{2}(14\cdot 15)+16=105+16=121.$$

6. Tak, możemy.

Zwróćmy uwagę, że jeśli mamy n monet o których wiemy, że ważą łącznie W gramów, to wiemy dokładnie, ile spośród nich jest prawdziwych, a ile fałszywych. Istotnie, oznaczając przez p liczbę monet prawdziwych, a przez f fałszywych mamy:

$$\begin{cases} p+f=n, \\ 10p+9f=W. \end{cases}$$

Ten układ równań ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie:

$$p=W-9n, \quad f=10n-W.$$

Wiemy więc, że mamy do czynienia z sytuacją, w której dokładnie 3 monety są prawdziwe.

Oznaczmy posiadane monety literami A, B, C, D, E . W pierwszym ważeniu kładziemy na wadze monety A i B . Rozważmy trzy przypadki:

- Obie monety A, B są fałszywe. Wtedy wszystkie monety C, D, E muszą być prawdziwe (gdyż wiemy że posiadamy łącznie tylko dwie fałszywe monety).
- Obie monety A, B są prawdziwe. Wtedy dokładnie jedna z monet C, D, E jest prawdziwa. Możemy wykonać dwa ważenia, w każdym ważąc jedną z monet C i D . Wtedy albo któraś okaże się prawdziwa, albo obie okażą się fałszywe (i będziemy wiedzieć, że to E jest prawdziwa).
- Dokładnie jedna z monet A, B jest prawdziwa. Wtedy dokładnie jedna z monet C, D, E jest fałszywa. Ważymy więc teraz A i C łącznie. Znów musimy rozważyć trzy przypadki:
 - Obie monety A, C są prawdziwe. Wtedy wiadomo, że fałszywe są monety: B i dokładnie jedna spośród D, E (jedno ważenie pozwoli z łatwością stwierdzić, która).
 - Obie monety A, C są fałszywe. Wtedy wszystkie monety B, D, E są prawdziwe.
 - Dokładnie jedna z monet A, C jest prawdziwa. Jeśli byłaby to A , to B i C musiałyby być fałszywe, zaś D i E prawdziwe. Jeśli byłaby to C , to A byłaby fałszywa, więc B prawdziwa. Podsumowując, w tym przypadku zestawem prawdziwych monet jest jeden z następujących (A, D, E) , (B, C, D) , (B, C, E) . Zważenie łącznie monet A i D wystarczy do stwierdzenia, która z tych sytuacji ma miejsce.

7. Skoro $|BA|=|BC|=|BD|$, to punkt B jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADC . Ponieważ zaś B leży na odcinku AC , to odcinek ten jest średnicą rozważanego okręgu. Kąt ADC , jako kąt wpisany oparty na średnicy, jest więc prosty. Długość odcinka CD można więc wyznaczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$$|CD|=\sqrt{|AC|^2-|AD|^2}=\sqrt{34^2-16^2}=\sqrt{1156-256}=\sqrt{900}=30.$$