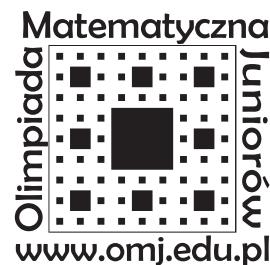


XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(13 stycznia 2024 r.)



- 1.** Liczby całkowite a , b oraz c są takie, że iloczyny

$$a \cdot (b+c) \quad \text{oraz} \quad b \cdot (a+c)$$

są dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi. Wykaż, że co najmniej jeden z tych iloczynów jest kwadratem liczby całkowitej.

- 2.** Kwadrat 6×6 rozcięto na osiem prostokątów, z których każdy ma cztery boki o całkowitych długościach. Wykaż, że pewne dwa z tych ośmiu prostokątów mają równe pola.

- 3.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkt P leży na odcinku AC , przy czym

$$\measuredangle BPC = \measuredangle BAD = \measuredangle ABC = \measuredangle ACB.$$

Wykaż, że $AP = CD$.

- 4.** Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA kwadratu $ABCD$. Odcinki KL, MN, LN dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach. Udowodnij, że odcinki KL, MN, KM również dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach.

- 5.** Na tablicy znajduje się osiemset dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 21. Czterysta z tych liczb zapisano niebieską kredą, a czterysta — żółtą. Wykaż, że można zmazać pewne liczby z tablicy (co najmniej jedną, ale nie wszystkie) w taki sposób, aby suma pozostałych na tablicy niebieskich liczb była równa sumie pozostałych na tablicy żółtych liczb.

Uwaga. Liczby na tablicy mogą się powtarzać.