

V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego
(20 marca 2010 r.)



1. Dane są takie liczby całkowite $a, b, c > 1$, że największy wspólny dzielnik liczb $a - 1, b - 1, c - 1$ jest większy od 1. Udowodnij, że liczba $abc - 1$ jest złożona.
2. Na tablicy napisano skończenie wiele (i więcej niż jedną) różnych liczb rzeczywistych. Okazało się, że dla każdych dwóch napisanych liczb została napisana także ich suma. Jakie liczby napisano na tablicy? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.
3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty D, E, F to punkty symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych BC, CA, AB . Wykaż, że jeśli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.
4. Danych jest pięć dodatnich liczb rzeczywistych. Wykaż, że spośród tych liczb można wybrać takie dwie liczby a, b , dla których
$$0 \leqslant \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} < \frac{1}{4}.$$
5. Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których przynajmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie? Odpowiedź uzasadnij.