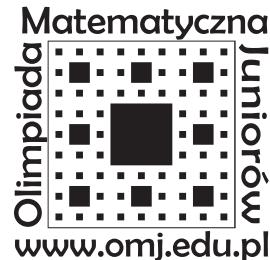


XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(23 marca 2019 r.)



- 1.** Liczby całkowite a i b są większe od 1. Udowodnij, że jeżeli jedna z liczb

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a-1}{b-1}$$

jest o 1 większa od drugiej, to obie są liczbami całkowitymi.

- 2.** Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $AC = BC$. Punkt M jest środkiem ramienia AD . Wykaż, że

$$\angle ACM = \angle CBD.$$

- 3.** Dane są liczby rzeczywiste x, y, z , różne od zera, dla których $x + y + z = 0$. Wiedząc, że liczby

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1$$

są równe, wyznacz ich wspólną wartość.

- 4.** Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Założymy, że na odcinku CD istnieje taki punkt E , że

$$\angle EAD = \angle AED \quad \text{oraz} \quad \angle ECB = \angle CEB.$$

Wykaż, że $AC + BC > AB + CE$.

- 5.** W każde pole tablicy o wymiarach 5×5 wpisano jedną z liczb $-1, 0$ lub 1 . Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 złożonym z pól tablicy suma pewnych trzech spośród czterech wpisanych liczb jest równa zero. Jaka jest największa możliwa suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.