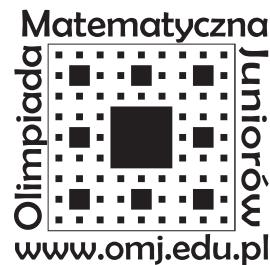


XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(12 stycznia 2019 r.)



1. Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają nierówność $x^2 + x \leq y$. Udowodnij, że $y^2 + y \geq x$.
2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $\angle ABC = 90^\circ$. Dwusieczna kąta BAD przecina odcinek BC w punkcie P . Wykaż, że jeśli $\angle APD = 45^\circ$, to pole czworokąta $APCD$ jest równe polu trójkąta ABP .
3. Dany jest 101-kąt foremny. Prosta ℓ leży w płaszczyźnie tego wielokąta i nie przechodzi przez żaden z jego wierzchołków. Udowodnij, że prosta ℓ przecina parzystą liczbę przekątnych danego wielokąta.
4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = 3 \cdot BC$. Punkty P i Q leżą na boku AB i spełniają warunek $AP = PQ = QB$. Punkt M jest środkiem boku AC . Wykaż, że $\angle PMQ = 90^\circ$.
5. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej n nie występuje żadna z cyfr 1, 2, 9. Udowodnij, że w zapisie dziesiętnym liczby $3n$ występuje co najmniej jedna z cyfr 1, 2, 9.