Rafael Soutelino

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO OCEANOGRÁFICO
DISCIPLINA: IOF 5855- MÉTODOS DE ANÁLISE DE DADOS QUASE-SINÓTICOS EM OCEANOGRAFIA FÍSICA
PROFESSOR: ILSON CARLOS A. DA SILVEIRA

Ementa Programática

ANO LETIVO DE 2006

Objetivos:

- Descrever os processos físicos do oceano a partir de informação obtida por dados quase-sinóticos.
- Extrair informação dinâmica dos processos via redução, manipulação e "calibração" dinâmica de dados quase-sinóticos.

Arcabouço Teórico: Quase-Geostrofia

Programa Tentativo:

1. O oceano continuamente estratificado quase-geostrófico; Revisão de quase-geostrofia
2. Decomposição e recomposição modal;
3. Interpolação dinâmica;
4. Modos estatísticos - Funções Ortogonais Empíricas;
5. Mapeamento de função de corrente;
   observada e geostrófica

6. Modelos de múltiplas camadas – formalismo;

7. Calibração dinâmica de modelos de camadas;

8. Mapeamento de vorticidade potencial;

9. Modelos de inversão de vorticidade potencial;

10. Modelos de instabilidade barotrópica; e

11. Modelos de instabilidade baroclínica.

Formato:

Todas as quartas

Manhãs (9:~~00~~30 às 12:~~00~~30 h): Fundamentos teóricos

Tardes (14:00 às 17:00 h): Práticas

Avaliação:

80% - 05 Relatórios de prática

20% - 05 Problemas teóricos

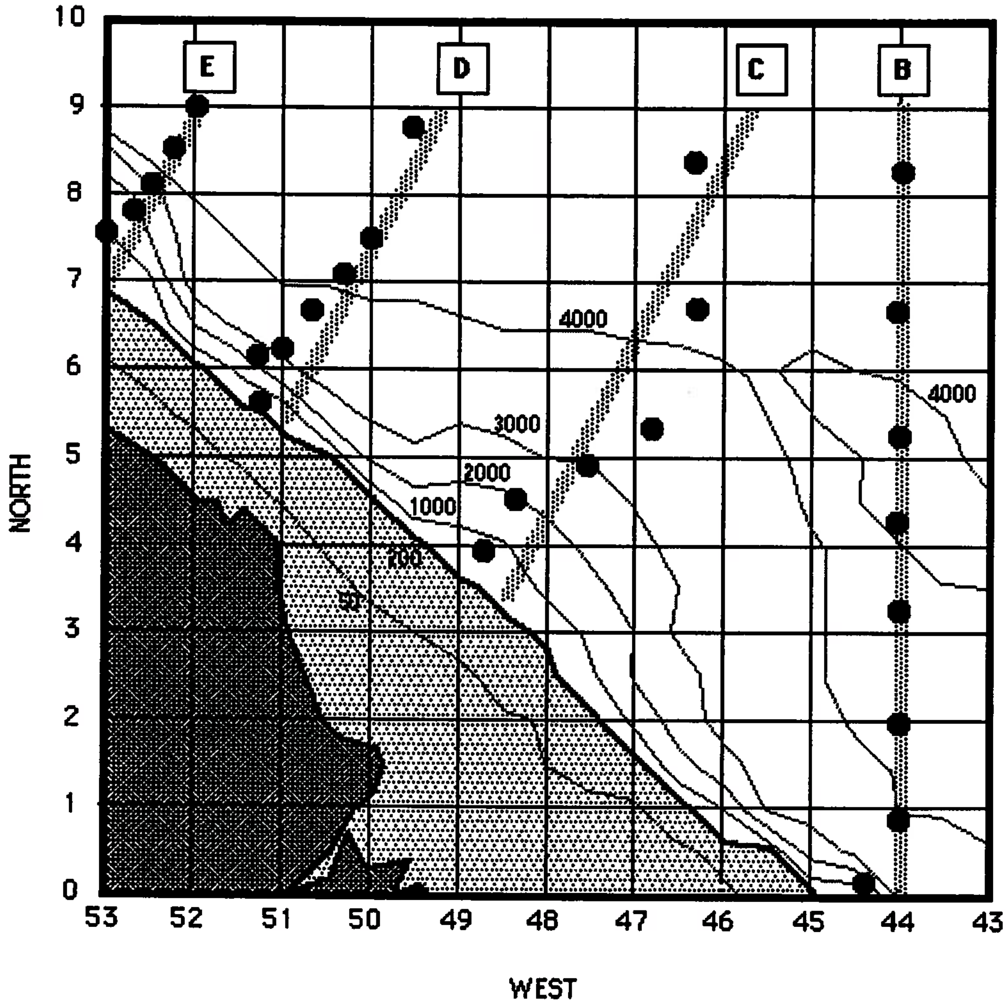
Referências Úteis:

- Data Analysis Methods in Physical Oceanography por Emery & Thomson
- Introduction to Geophysical Fluid Dynamics por Cushman-Roisin
- Geophysical Fluid Dynamics por Pedlosky
- General Circulation of the Ocean por Abarbanel & Young

Conjunto de Dados:

CTD e PEGASUS

"Western Tropical Atlantic Experiment-WESTRAX", realizado entre 1990 e 1991, contendo perfilagens hidrográficas e de velocidade da região da Corrente Norte do Brasil.



4 cruzeiros, 2 muito interessantes

WESTRAX 2 e WESTRAX 4 - paper de 2000
set/1990 jun/91

parecido com o do paper

14/06/2006 - METODOS E TÉCNICAS DE ANÁLISE DE DADOS QUASE-SINÓTICOS IOF. 8555

Prof. Ilson Carlos Almeida da Silveira

Aulas Teóricas: 4ª f 9:30h - 12:30h

Aulas Práticas: 4ª f 14:00h - 17:00h

ITEM ZERO: Considerações Quase-Geostróficas

→ Número de Rossby apelido da eq. do movimento sem viscosidade (atrito)

As eq. de Euler sob a aproximação de Boussinesq é: ↳ $\rho = c^{te}$

$$(1) \quad \underset{(a)}{\frac{D\vec{v}}{Dt}} + \underset{(b)}{\vec{f} \otimes \vec{v}} = \underset{(c)}{-\frac{\nabla p}{\rho_0}} + \underset{(d)}{\nabla \Phi} \quad ; \quad \vec{f} = 2\Omega \sin\theta \vec{k}$$

$\Phi = -gz$ (geopotencial)

obs: $\frac{D}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{local} + \underbrace{\vec{v}.\nabla}_{advectiva}$ → derivada lagrangiana ou material ou substantiva

• Aprox de Boussinesq $\frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1$

• Aproximação tradicional $\vec{f} = \underbrace{\tilde{f}\vec{j}}_{\text{desinteressante dinamicamente}} + f\vec{k}$

O Nº de Rossby é simplesmente a razão entre as ordens de grandeza envolvendo $\frac{(a)}{(b)}$.

$$Ro = \frac{\left|\frac{D\vec{v}}{Dt}\right|}{|\vec{f} \otimes \vec{v}|}$$

Por simplicidade, consideremos a componente zonal da eq (1) e a escala advectiva do tempo ⇒ $T = \frac{L}{U}$

$$Ro = \frac{\left|\frac{Du}{Dt}\right|}{|fv|}$$

com a escala advectiva de T,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = O\left(\vec{v}\cdot\nabla u\right)$$

$$Ro = \frac{\frac{U}{T}}{fU} = \frac{U^{\cancel{2}}}{fL\cancel{U}} \Rightarrow \boxed{Ro = \frac{U}{fL}}$$

Consideremos a aproximação do plano β:

a = raio médio da Terra ~ 6380 km

y = distância meridional

$$f = 2\Omega \operatorname{sen}\theta\,\vec{k} \;\therefore\; f = \Big(\underbrace{2\Omega \operatorname{sen}\theta_0}_{f_0} + \underbrace{\frac{2\Omega\cos\theta_0\, y}{a}}_{\beta}\Big)\vec{k}$$

$$\rightarrow f = f_0 + \beta y$$

f_0 → parâmetro de Coriolis médio

β → parâmetro de Rossby

Assim, no plano β, as componentes horizontais de (1)

Balanço Geostrófico

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{O\left(\frac{U^2}{L}\right)} \qquad (2)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + \cancel{O\left(\frac{U^2}{L}\right)} \qquad (3)$$

No caso de $Ro \ll 1$ (quase-geostrofia),

$$v = \frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial p}{\partial x} + O(Ro\,U) \qquad (4)$$

$$u = -\frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial p}{\partial y} + O(Ro\,U) \qquad (5)$$

Em outras palavras,

v. geostrófica (O1) → $\frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial p}{\partial x}$

$$v = v_0 + O(Ro\,U)$$

→ rel. de ordens menores

$$u = u_0 + O(Ro\,U)$$

O tamanho da velocidade vertical

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{U}{L}} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{\frac{W}{H}} = 0$$

Tradicionalmente, $\frac{\partial w}{\partial z} = O\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \rightarrow \boxed{W = \frac{H}{L} U = \delta U}$

onde H é uma escala vertical na qual o regime de escoamento varia

	MESO - ESCALA	LARGA - ESCALA
U	$0{,}2\ m s^{-1}$	$0{,}04\ m s^{-1}$
L	$10^5\ m$	$10^6\ m$
R_o	$0{,}02 \sim 10^{-2}$	$0{,}0004 \sim 10^{-4}$
δ	10^{-2}	10^{-3}

$H_{BT} = 3300\, m$ (prof. média do oceano) — $\delta_{BT} = 0{,}033$
$H_{BC} = 1000\, m$ (base da termoclina) — $\delta_{BC} = 0{,}01$
} MESO

$W_{MESO} = \delta_m U_{MESO} = 0{,}002\ m s^{-1}$

$W_{LARGA} = \delta_l U_{LARGA} = 0{,}00004\ m s^{-1}$

Seriam estas escalas de W adequadas para um escoamento QG?

Voltemos as eq (2) e eq (3) e calculemos sua divergência

$$\frac{\partial}{\partial y}(2): \beta v + f\frac{\partial v}{\partial y} = \cancel{\frac{1}{f_0}\frac{\partial p'}{\partial x \partial y}} + O\left(\frac{U^2}{L^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3): f\frac{\partial u}{\partial x} = \cancel{-\frac{1}{f_0}\frac{\partial p'}{\partial x \partial y}} + O\left(\frac{U^2}{L^2}\right) \quad +$$

$$f\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\downarrow \text{ eq do mov.} \; = \; -\frac{\partial w}{\partial z}} + \beta v = O\left(\frac{U^2}{L^2}\right)$$

$$\boxed{f\frac{\partial w}{\partial z} = \beta v} + O\left(\frac{U^2}{L^2}\right)$$

$$f\frac{W}{H} = \beta U \iff W = \underbrace{\left(\frac{\beta L}{f_0}\right)}_{\hat{\beta} \equiv \text{ nº do plano } \beta}\delta U$$

	MESO	LARGA
$\hat{\beta} = \beta L/f$	0,02	0,2
$\epsilon = U/\beta L^2$	1	0,002

$\underline{\text{MESO}}$ $\quad W = \hat{\beta}\,\delta U = Ro\,(\delta U) = \delta^2 U$ → 2 Ordens de grandeza menor do que o W inferido pela eq. da continuidade

$$= 10^{-4} \cdot 0{,}2 = 2\times 10^{-5}\,ms^{-1}$$

$\underline{\text{LARGA}}$ $\quad W = 10^{-1} \cdot 10^{-3} \cdot 4\times 10^{-2} = 4\times 10^{-6}\,ms^{-1}$

Explorando o ϵ:

$$\epsilon = \frac{\frac{Du}{Dt}}{\beta y v} = \frac{\frac{U^2}{L}}{\beta L U} = \frac{U}{\beta L^2}$$

vorticidade relativa $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{L} \rightarrow \frac{\zeta}{\beta y} = \frac{U}{\beta L^2} = \epsilon$

Consequências da pequenez da velocidade vertical (w):

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{v} = \xi\vec{i} + \chi\vec{j} + \zeta\vec{k}$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\chi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

A componente vertical da eq. da vorticidade absoluta

$$\underbrace{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}_{\substack{\text{var. local}\\ \text{de } \zeta \\ \frac{U^2}{L^2}}} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\nabla\zeta)}_{\substack{\text{var. advectiva}\\ \text{de } \zeta \\ \frac{U^2}{L^2}}} - \underbrace{\left(\xi\frac{\partial}{\partial x} + \chi\frac{\partial}{\partial y}\right.}_{\substack{\text{inclinação do tubo}\\ \text{de vórtice}}} + \underbrace{\left.\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)w - f\frac{\partial w}{\partial z}}_{\substack{\text{estiramento do}\\ \text{tubo de vórtice} \\ \beta U \text{ ou } \frac{U^2}{L^2}}} + \underbrace{\beta v}_{\substack{\text{var. de advecção}\\ \text{de } f \\ \beta N \text{ ou } \frac{U^2}{L^2}}} = 0$$

$Ro\,\dfrac{U^2}{L^2}$

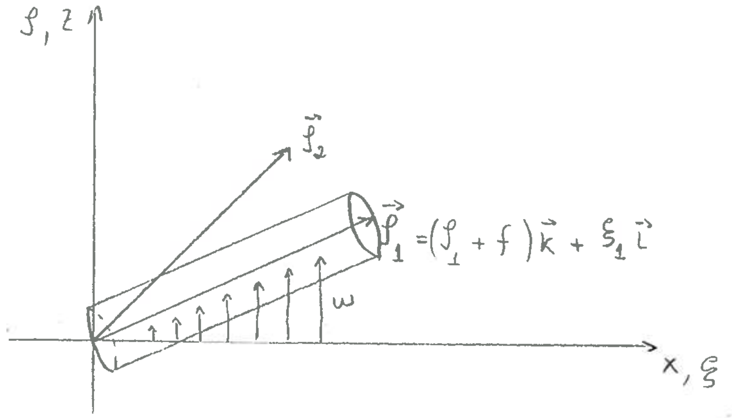
21/06/2006

o mecanismo de inclinação do tubo de vórtice é desprezível se comparado aos outros termos

→ o mecanismo do estiramento é dominado pela vorticidade planetária

MECANISMO DE INCLINAÇÃO

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \overset{>0}{\xi}\,\frac{\partial w}{\partial x}\Big\} > 0 \iff \frac{\partial \zeta}{\partial t} > 0$$



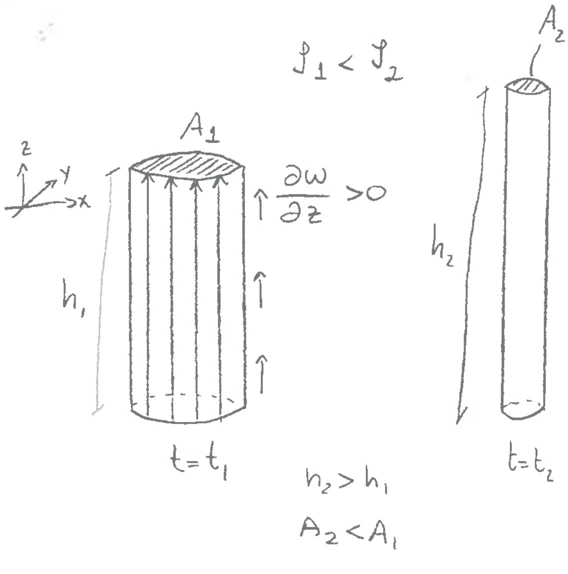
$\vec{\zeta}_1 = \vec{\zeta}(t)$

MECANISMO DE ESTIRAMENTO (H.N.)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = (f+\zeta)\frac{\partial w}{\partial z} \iff \frac{\partial \zeta}{\partial t} > 0$$

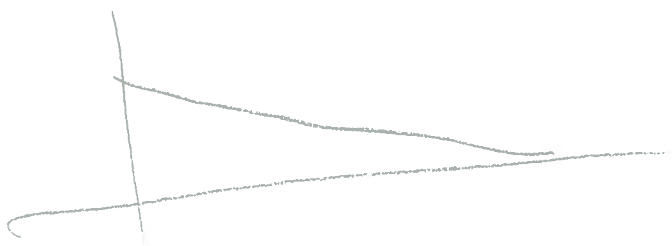
$$\approx f\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{pois } Ro = \frac{\zeta}{f} \ll 1$$

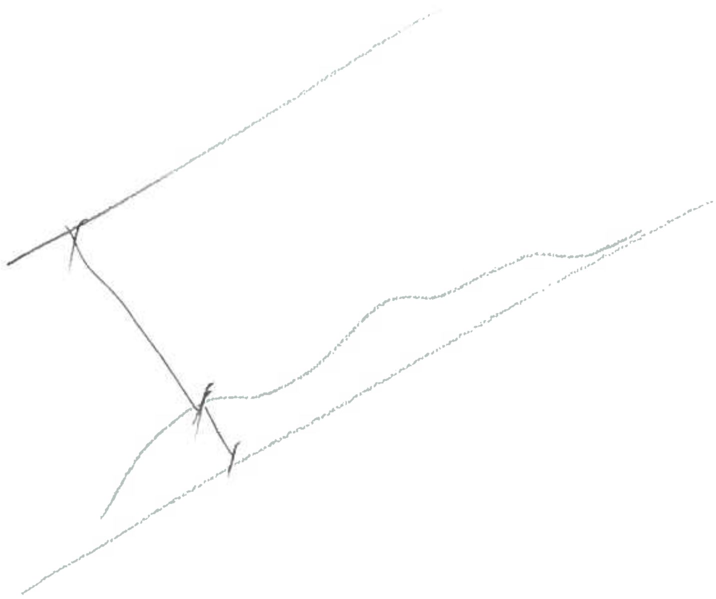
$$\approx \underset{>0}{f_0}\underset{>0}{\frac{\partial w}{\partial z}} \quad \text{pois } \hat{\beta} = \frac{\beta y}{f_0} \ll 1$$



Estiramento do tubo
↓
No HN, ganho de vorticidade relativa

3.v.





→ o oceano também conserva massa e volume

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} \propto \text{altura do volume} \iff \frac{1}{\delta V}\frac{D\delta V}{Dt} = 0$$

↳ ∝ a área do tubo de vórtice

Digressão: Repensando

A vorticidade potencial barotrópica $\qquad f_0 = 2\Omega \operatorname{sen}\theta_0$

$$\frac{D\Pi}{Dt} = 0 \; ; \quad \Pi = \frac{\zeta + f}{H}$$ → vorticidade absoluta $= \dfrac{\zeta_a}{H \propto A^{-1}}$

Momentum Angular dos sólidos: $\mathcal{L} = I . \Omega$ ↳ vel. angular; I ↓ momentum de inércia

$I = \sum_i \rho_i r_i^2 \propto$ área (raio)

QUASE GEOSTROFIA DO OCEANO BAROTRÓPICO

Representa um conjunto de 3 aproximações

(i) aproximação geostrófica ($Ro \ll 1$, $\delta \ll 1$) $\qquad \delta = \dfrac{H}{L}$

(ii) aproximação do plano β ($\hat{\beta} \ll 1$)

(iii) aproximação das espessuras $\dfrac{\delta h}{H} \ll 1 \rightarrow \dfrac{\eta}{H}, \dfrac{h_B}{H} \ll 1$

$$\frac{D}{Dt}\Pi = 0 \; ; \quad \Pi = \frac{\zeta + f}{h} = \frac{\zeta + f}{H + \eta - h_B} = \frac{\zeta + f_0 + \beta y}{H + \eta - h_B}$$

$$\begin{cases} \eta = \eta(x, y, t) \\ h_B = h_B(x, y) \end{cases}$$

Expansão em séries do denominador:

$$(1+a)^{-1} = (1-a) + (1-a)^2 + \dots \; , \quad a \ll 1$$

$$(1-a)^{-1} = (1+a) - (1+a)^2 + \dots$$

denominador de Π:

$$(H + \eta - h_B)^{-1} = \frac{1}{H}\left(1 + \frac{\eta}{H} - \frac{h_B}{H}\right)^{-1} \Rightarrow \Pi \approx \frac{(\overset{O(Ro)}{\zeta} + \overset{O(Ro)^{-1}}{f_0} + \beta y)}{H}\left(1 + \overset{O(Ro)}{\frac{\eta}{H}} - \overset{O(Ro)}{\frac{h_B}{H}}\right)$$

aproximação linear

colecionar termos de $O(1)$: $\frac{f_0}{H} \rightarrow$ vorticidade potencial básica

colecionar termos de $O(R_0)$: $\frac{\zeta}{H} + \frac{f_0}{H^2}\eta - \frac{f_0}{H^2}h_B + \frac{\beta y}{H}$

$$\Pi \approx \frac{1}{H}\left(f_0 + \zeta + \beta y + \frac{f_0}{H}\eta - \frac{f_0}{H}h_B\right)$$

$$\frac{D\Pi}{Dt} = \frac{D}{Dt}\frac{1}{H}\left(f_0 + \zeta + \beta y + \frac{f_0}{H}\eta - \frac{f_0}{H}h_B\right) = 0$$

↓

não pode ser zero

LEMBRANDO: $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v$

⇓

$$\frac{D}{Dt}\left(f_0 + \underbrace{\zeta + \beta y + \frac{f_0}{H}\eta - \frac{f_0}{H}h_B}_{q \,\equiv\, \text{vort. potencial Q.G. barotrópica}}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} = 0}$$

→ aproximação geostrófica $u = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y}$, $v = \frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial x}$

No caso do fluxo homogêneo ($\rho = c^{te}$): $p = \rho g \eta$

$u = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y}$; $v = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}$

$\eta = \frac{f_0}{g}\psi$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ (div. nulo) ∀ $\psi = \frac{g}{f_0}\eta$ fç de corrente geostrófica barotrópica

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{f_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\eta + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\eta\right) = \nabla^2\left(\frac{g}{f_0}\eta\right) = \nabla^2\psi$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{g}{f_0}\nabla^2\eta + \beta y + \frac{f_0}{H}\eta - \frac{f_0}{H}h_B\right) = 0$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\nabla^2\psi + \beta y + \frac{f_0^2}{gH}\psi - \frac{f_0}{H}h_B\right) = 0$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\nabla^2\psi + \frac{1}{R_{de}^2}\psi + \beta y - \frac{f_0}{H}h_B\right) = 0$$

$R_{de} \equiv$ Raio de def. externo de Rossby

$q = q(\psi)$ $\quad\quad S \equiv$ estiramento

Razões entre ζ e S, assumindo $h_B = 0$,

$$\frac{\nabla^2\psi}{\frac{1}{Rde^2}\psi} = 0\,\frac{\left(\frac{\cancel{LU}}{L^2}\right)}{\frac{\cancel{LU}}{Rde^2}} = \frac{Rde^2}{L^2}$$

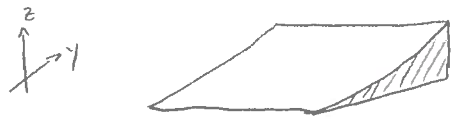
- no caso de $L > Rde$, a vorticidade relativa se torna desprezível se comparada a vorticidade de estiramento

$L < Rde$, vice-versa

$\beta_T \equiv$ beta topográfico

$$\frac{D}{Dt}\left(\nabla^2\psi - \frac{1}{Rde^2}\psi + \underbrace{\beta y - \frac{f_0}{H}}_{\text{efeitos dinâmicos similares}} h_B\right) = 0 \quad \boxed{\frac{f_0}{H}s}y$$

$\rightarrow$ H.N., $h_B(y) = s(y)$



28/06/2006

QUASE-GEOSTROFIA DO OCEANO ESTRATIFICADO

Flierl (78)
parte inicial

- plano β, oceano de Bousinesq
  - $\rightarrow$ Derivação da equação da VPQG para o oceano baroclínico

- Inicialmente, o sistema QG pode ser escrito em 3 formas:

  1º) Sistema de 3 eq. em termos da função de corrente ψ, da anomalia da profundidade de uma superfície isopicnal η, e da velocidade vertical w.

  2º) Eliminar η

  3º) Elimina $w \rightarrow$ 1 eq. em termos de ψ

Vale definir que as velocidades geostróficas são dadas por

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p'}{\rho_0 f_0}\right)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p'}{\rho_0 f_0}\right)$$

Da eq. hidrostática : $\rho' = \frac{1}{g}\frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{-\rho_0 f_0}{g}\frac{\partial \psi}{\partial z}$

As 3 eq. são: 1) Eq da vorticidade absoluta

2) Eq. da definição da isopicnal

3) Eq. da conservação da densidade

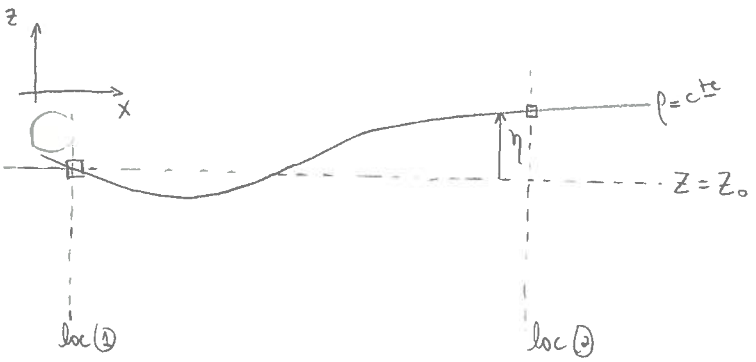
Jacobiano

$$\boxed{J(A,B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}}$$

Eq. da Vorticidade Absoluta

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi}_{\text{var. local de vort relativa}} + \underbrace{J(\psi, \nabla^2\psi)}_{\text{advecção de vort. relativa}} + \underbrace{\beta\frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\text{advecção de vort. planetária}} - \underbrace{f_0\frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{estiramento}} = 0 \qquad (1)$$

Eq. da Definição da Isopicnal



$$\rho(x,y,z,t) = \rho_0 + \bar{\rho}(z) + \rho'(x,y,z,t) \qquad (2)$$

$$\rho_{①} = \rho_0 + \bar{\rho}(z_0) \qquad (3)$$

$$\rho_{②} = \rho_0 + \bar{\rho}(z_0 + \eta) + \rho'(x, y, z_0+\eta, t) \qquad (4)$$

Pela definição da isopicnal : $\rho_{①} = \rho_{②} \iff (3) = (4)$

$$\rho'(x, y, z_0+\eta, t) = \bar{\rho}(z_0) - \bar{\rho}(z_0+\eta) \qquad (5)$$

Se assumirmos que $\frac{\eta}{z_0} = O(R_0)$, podemos expandir os termos envolvendo η em séries de Taylor e considerar somente os termos até $O(R_0)$

$$\bar{\rho}(z_0+\eta) = \bar{\rho}(z_0) + \left.\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\right|_{z_0}\eta + O(R_0^2) \qquad (6)$$

Se usamos (6) em (5): $\rho' = -\eta \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}$

$$\frac{\rho_0 f_0}{g}\frac{\partial \psi}{\partial z} = \eta \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \quad \therefore \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\eta}{f_0}\underbrace{\left(\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\right)}_{-N^2(z)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{N^2}{f_0}\eta} \quad (7)$$

Eq. da CONSERVAÇÃO de DENSIDADE

$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \iff \rho$ sejam superfícies materiais $\quad w = \frac{D\eta}{Dt}$

$$\boxed{w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + J(\psi, \eta)} \quad (8)$$

A 1ª forma do sistema QG é composta por (1), (7) e (8)

A 2ª forma é eliminando η das equações através da manipulação de (7) e (8) $\Rightarrow \frac{D}{Dt}(7)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + J\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) + w\frac{N^2}{f_0} = 0 \quad (9)$$

A 3ª forma é combinando (9) e (1)

$$(9) \rightarrow \quad w = -\frac{f_0}{N^2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = -\frac{D}{Dt}\left(\frac{f_0}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$

$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{D}{Dt}\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z} \Rightarrow$ jogando expressão de $\frac{\partial w}{\partial z}$ em (1)

$$\frac{D}{Dt}\nabla^2\psi + \frac{D}{Dt}\beta y + \frac{D}{Dt}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] = 0$$

$\frac{Dq}{Dt} = 0 \; ; \; q = \nabla^2\psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \rightarrow$ vorticidade potencial no oceano baroclínico $\quad (10)$

Condições de contorno p/ Eq(10) $\rightarrow$ nos limites das camadas de Ekman

- $w = w_E$ em $z=0 \Rightarrow w = \frac{\vec{k}}{\rho_0 f_0}\nabla \times \vec{\tau}$

- $w = \underbrace{J(\psi, h_B)}_{\text{efeito topográfico}} + \underbrace{\sqrt{\frac{A_v}{2 f_0}}\nabla^2\psi}_{\text{Bombeamento de Ekman de fundo}}$ em $z = -H$

Os Modos Dinâmicos

cap 06 do pedlosky

→ tentar encontrar soluções para a equação (10), assumindo tampas rígidas na superfície e no fundo ($w=0$ em $z=0, z=-H$) e forma linear $\left(\dfrac{J(\psi,q)}{\frac{\partial q}{\partial t}} \ll 1\right)$.

$$\Downarrow$$

$$(12) \quad w = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z=0,-H$$

$$(10) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2\psi + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] + \beta\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad (11)$$

obs $\lambda_i = cte$, o que caracteriza um problema de auto valor. λ_i são os auto-valores

Assumindo solução por separação de variáveis

$$\psi(x,y,z,t) = \sum_i \Psi_i(x,y,t)\, F_i(z) \qquad (13)$$

Com (13) em (11)

$$F_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi_i + \beta\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}F_i\right)$$

$$-\frac{1}{\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}}\overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi_i + \beta\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}\right) = \underbrace{\frac{1}{F_i}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)}_{\text{eq. da estrutura vertical}} = -\lambda_i}^{\text{eq. da evolução da função amplitude}}$$

A Eq. de Estrutura Vertical

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{f_0^2}{N^2}\dfrac{\partial}{\partial z}F_i + \lambda_i F_i = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_i}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z=0,-H \end{cases}$$

$$Rd_0^2 = \frac{gH}{f_0^2}$$

$$Rd_i^2 = \frac{g\,h_{e_i}}{f_0^2} \qquad i = 1,\infty$$

Por definição: $\lambda_i = \dfrac{1}{Rd_i^2} = \dfrac{f_0^2}{g h_{e_i}}$

Os autovetores $F_i(z)$ formam um conjunto ortogonal e ortonormal:

$$\underbrace{\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} F_i(z)\,F_j(z)\,dz = \delta_{ij}}_{\text{condições de ortonormalidade}}$$

obs $\delta \begin{cases} i=j, & 1 \\ i\neq j, & 0 \end{cases}$ ⇒ delta de Kronecker

As amplitudes Ψ_i são obtidas pela projeção do modo F_i no perfil de $\psi(z)$.

$$\Psi_i(x,y,t) = \frac{\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} \psi F_i \, dz}{\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} F_i^2 \, dz}$$

02/08/06

ANÁLISE OBJETIVA VETORIAL

Decomposicaõ de Cauchy - Riemman

$\vec{v} = \vec{v}_{irot} + \vec{v}_{nd}$

$\vec{v}_{irot} \equiv$ velocidade irrotacional, divergente → ñ tem vorticidade

$\vec{v}_{irot} = \nabla \chi$. (potencial de velocidade)

$\vec{v}_{nd} \equiv$ velocidade rotacional, não-divergente

$\vec{v}_{nd} = \hat{k} \times \nabla \psi$

Problemas com a Interpolaçaõ

1) Simopticidade
2) Malha Espansa

Se o objetivo é meso-escala ou grande escala, $\Rightarrow \vec{v} \approx \vec{v}_{nd}$

$\vec{v}_{obs} \longrightarrow \boxed{\text{INTERPOLAÇÃO}} \longrightarrow \psi$

		ENTRADA	SAÍDA	
→ Mapear ψ	• diretamente	$\vec{v}_{obs}$	ψ	($\vec{v}_{nd}$ nos pts de grade)
	• indiretamente	$\vec{v}_{obs}$	$\vec{v}_{int}$	

$\vec{v}_{int}$ ↓ Resolvedor de Poisom → ψ

implica em estimativa de $\vec{v}_{irot}$

MAPEAMENTO DIRETO [Bretherton et al, 1976]

- mapeia diretamente ψ à partir de $\vec{v}_{obs}$
- é necessário assumir isotropia

Princípio: se existe uma relação funcional entre $\vec{v}_{rd}$ e ψ, existirá uma relação funcional entre suas funções de correlação

R → função de correlação longitudinal das velocidades

S → " " " transversa das velocidades

$$R(r) = -\frac{1}{r}\frac{dF}{dr} \; ; \quad S(r) = -\frac{d^2F}{dr^2}$$

onde r: distância radial entre os pontos

F → função de correlação de ψ: $F = E[\psi_r, \psi_s]$

$$E[u_r, u_s] = a^2[R-S] + S$$

$$E[v_s, v_r] = b^2[R-S] + S$$

$$E[u_r, v_s] = E[u_s, v_r] = ab\,(R-S)$$

a = cos do ângulo entre o vetor distância r e o eixo x

b = cos do ângulo entre o vetor distância r e o eixo y

A estimativa de ψ é dada por:

$$\phi_s = \begin{bmatrix} u_s \\ --- \\ v_s \end{bmatrix}$$

$$\hat{\psi}_x = P_{xr}\left(A^{-1}_{rs}\,\phi_s\right)$$

↓

correlação cruzada entre ψ nos pontos de grade e as velocidades nos pontos de observação

$$P_{xr} = -b\,\frac{dF}{dr} \quad \text{para } r = 1, \dots, N$$

$$= a\,\frac{dF}{dr} \quad \text{para } r = N+1, \dots, 2N$$

Para satisfazer tal condição, constrói-se a matriz de autocovariancia no lag zero,

$$C_{xy} = \frac{1}{NM} \sum_{z=1}^{M} (\theta_{xz} - \bar{\theta}_x)(\theta_{yz} - \bar{\theta}_y),$$

onde $\bar{\theta}_x$ é a média vertical na localidade x e,

$\bar{\theta}_y$ é a média vertical na localidade y.

Lembrando que x e y não são coordenadas cartesianas, são o índice de localidade das estações

Os elementos da diagonal:

$$C_{xx} = \frac{1}{NM} \sum_{z} (\theta_{xz} - \bar{\theta}_x)^2 \qquad \left(\text{que é a } \frac{\text{variância}}{N} \right)$$

O elemento C_{xx} representa a variância (vertical) de θ na localidade (estação) x, dividida por N

$$C_{xx} = \frac{1}{N} \sigma^2_{\theta_{xz}}$$

Em álgebra linear, a soma dos elementos da matriz C, é definido como "traço de C"

$$Tr(C) = \sum_{x} A_{xx} = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^{N} \sum_{z=1}^{M} (\theta_{xz} - \bar{\theta}_x)^2$$

Logo, Tr(C) representa a variância total dos seus dados. Como C é uma matriz quadrada, pode-se resolver o problema de autovalor, que é o processo de "diagonalização" da matriz

$$C F_i = \lambda_i F_i$$

Combinando a definição de autovetor com com a de Tr(C),

— 23/08/2006 —

CONTEXTUALIZAÇÃO

$$\underbrace{q}_{\text{v. potencial}} = \underbrace{\nabla^2\psi}_{\text{v. relativa}} + \underbrace{\beta y}_{\text{v. planetária}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}}_{\text{vorticidade de estiramento}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial v}{\partial z}$$

lembrando que $\begin{cases} v = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} \\ u = -\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{cases}$

Planof

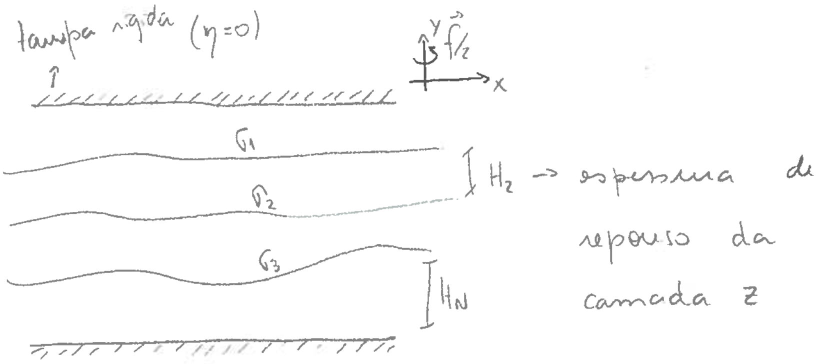
$\underbrace{q = \Gamma\psi \iff \psi = \Gamma^{-1}q}_{\text{rel. de inversibilidade}}$, onde $\Gamma = \nabla^2 + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{f_0^2}{N^2}\dfrac{\partial}{\partial z}$ (operador diferencial complicado)

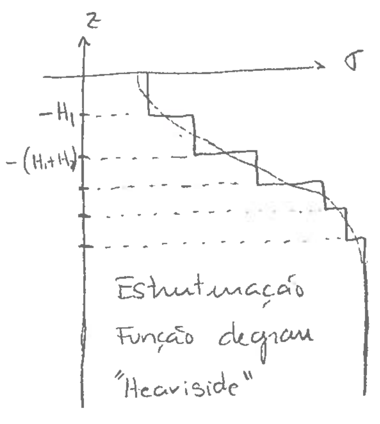
MODELOS DE CAMADAS

E

CALIBRAÇÃO DINÂMICA

IDÉIA BÁSICA: Aproximar a estrutura continuamente estratificada por uma série de camadas imiscíveis e de densidade constante.





A Frequência de Estratificação se torna uma soma de funções "Delta de Dirac"

$$H(z) = \begin{cases} A, & z < H_1 \\ B, & z > H_1 \end{cases}$$

$$N^2 = \epsilon_i g \delta(z - H)$$

$$\frac{dH}{dz} = \delta(z - H)$$

$$\epsilon_i = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\rho_0}$$

↳ salto de densidade normalizado

A condição de Ortonormalidade:

$$\boxed{\frac{1}{H}\sum_N H_i F_j^{(i)} F_k^{(i)} = \delta_{jk}}$$

Determinação das Amplitudes:

$$\boxed{\Psi_j = \frac{1}{H}\sum_N H_i F_j^{(i)} \psi_i}$$ ⇒ projeção da camada no modo

Obs:

1) O número de modos resolvidos é igual ao Nº de camadas
2) Os modos discretos dependerão da escolha de ϵ_i e H_i

30/08

INSTABILIDADE BAROCLÍNICA

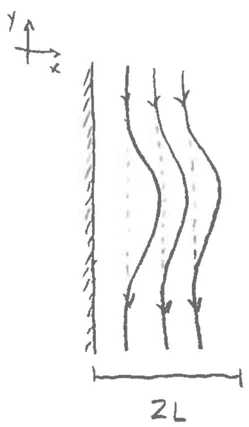
(Modelo do Cayo)
plano f

Orlanski (1969) → caminhos de conversão de BC
Gill (1974) → grande quantidade de energia potencial disponível nos oceanos

princípio inicial: conservação de V.P.

$$\frac{Dq}{Dt} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0$$

def de fç de corrente: $\vec{v} = \hat{k} \times \nabla\psi$



$q = \bar{q}(x,y,z) + q'(x,y,z,t)$

$\psi = \Psi(x,\overset{\text{parâmetro}}{y},z) + \psi'(x,y,z,t)$

$u = u'(x,y,z,t)$

$\underbrace{v = \bar{v}(x,y)}_{\text{partes básicas}} + \underbrace{v'(x,y,z,t)}_{\text{perturbações}}$

Não há velocidade básica em u, apenas perturbação

2) $w = \frac{dh}{dt} = 0 \quad \therefore \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}$

aproximações p/ h : não varia em $\underline{y}$ nem em $\underline{t}$: $h = h(x)$

$$w = u'\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\frac{\partial \psi'}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\overbrace{\frac{\partial h}{\partial x}\frac{N^2}{f}}^{h_x^*} \quad \therefore \quad \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \psi'}{\partial z} = \frac{\partial \psi'}{\partial y}\left(h_x^* + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right); \quad z = 0}$$

(C.C. 2

3) LATERAL : $\frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x = 2L$

RESOLVENDO O PROBLEMA → IMPONDO UMA PERTURBAÇÃO :

→ onda que se propague na direção do canal, nos domínios do canal

$$\psi' = \psi'(x,y,z,t) = \Psi(z)\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)e^{ik(x-ct)}$$

↳ substituir esta perturbação no sistema:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[-\psi\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 - k^2\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right] + ik\psi\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0$$

$$\left[\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2(c-\bar{v}) + k^2(c-\bar{v}) + (c-\bar{v})\frac{\partial}{\partial t}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\right]\Psi - \psi\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0 \qquad \div (c-\bar{v})$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \left[k^2 + \frac{\pi^2}{4L^2} + \frac{1}{(\bar{v}-c)}\frac{\partial \bar{q}}{\partial x}\right]\Psi = 0$$

Resolvido no programa Matlab

Escrever condições de contorno para Ψ

$$(\bar{v}-c)\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Psi\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad ; \quad z = H$$

$$(\bar{v}-c)\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \left(1 - \frac{\partial h^*}{\partial x}\right)\Psi\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad ; \quad z = 0$$

problema de autovalor :

autovalor → velocidade de fase (c)

⇒ Perfis de velocidade $\bar{v}$ e N^2 idealizados

⇒ Objetivo: saber como as ondas instáveis se propagam

$$C_{Im}\left\{ f^2\left[\left(\frac{\frac{\partial\bar u}{\partial z}\Psi^2}{N^2|\bar u-c|^2}\right)_H - \left(\frac{\frac{\partial \bar u}{\partial z}(1-h_x^*)\Psi^2}{N^2|\bar u-c|^2}\right)_0\right] - \int_0^H \frac{\frac{\partial\bar q}{\partial x}\Psi^2}{|\bar u-c|^2}\right\}=0$$

para haver instabilidade $\Rightarrow$ $C_{Im} \neq 0$ $\Rightarrow$ o resto tem que zerar...

1) longe dos contornos

$\frac{\partial \bar q}{\partial x}$ troca de sinal entre a superfície e o fundo

2) longe do fundo

se $\frac{\partial \bar q}{\partial x}$ em alguma profundidade tiver o mesmo sinal que $\frac{\partial \bar u}{\partial z}$ na superfície

3) longe da superfície

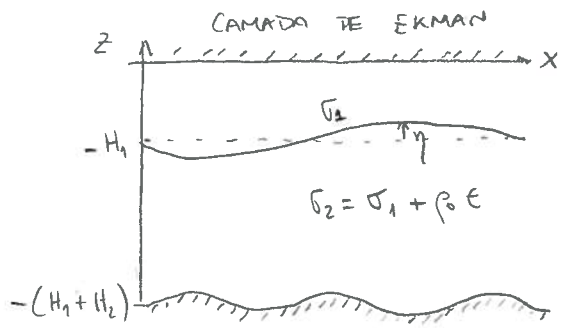
Se em alguma profundidade $\frac{\partial \bar q}{\partial x}$ tiver sinal oposto a $\left(1-\frac{\partial h^*}{\partial x}\right)\frac{\partial \bar u}{\partial z}$ junto ao fundo

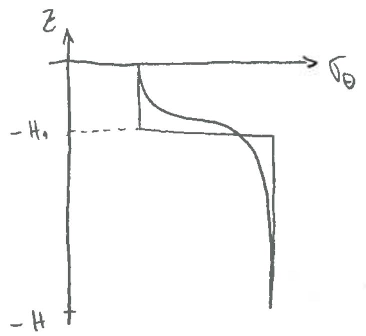
1,2,3 $\Rightarrow$ condições necessárias para ocorrer instabilidade, mas não são suficientes.

6/9/2006

O MODELO DE PHILIPS

- O modelo de duas camadas foi criado por Philips (1951) com o objetivo de simplificar a dinâmica QG





$$\lambda_j^2 - \left[\frac{H_1}{H_2}\left(\frac{f_0^2}{\epsilon g H_1}\right) - \frac{f_0^2}{\epsilon g H_1}\right]\lambda_j = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = 0}$$

$$\boxed{\lambda_j = Rd_j^{-2}}$$

lembrete

$$Rd_0^2 = \infty$$

$\downarrow$

Raio de deformação barotrópico

$$\lambda_1 = \frac{f_0^2}{\epsilon g H_1}\left(1 + \frac{H_1}{H_2}\right) = \frac{f_0^2}{\epsilon g}\boxed{\frac{(H_1+H_2)}{H_1 H_2}}$$

H_M^{-1} $\to$ Média Harmônica

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{f_0^2}{\epsilon g H_M}} \to Rd_1^2 = \frac{\epsilon g H_M}{f_0^2} \to \text{Raio de def. baroclínico}$$

Achando os auto-vetores $(F_0^1, F_0^2; F_1^1, F_1^2)$

$\boxed{\text{para } \lambda_0 = 0}$

$$\begin{bmatrix} -\frac{f_0^2}{\epsilon g H_1} & \frac{f_0^2}{\epsilon g H_1} \\ \frac{f_0^2}{\epsilon g H_2} & -\frac{f_0^2}{\epsilon g H_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_0^1 \\ F_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_0^1 = F_0^2$$
$$F_0^1 = F_0^2$$

são iguais

Condição de Ortonormalidade: $\frac{1}{H}\left[H_1(F_0^1)^2 + H_2(F_0^1)^2\right] = 1$

$$\frac{1}{\cancel{H}}\underbrace{(H_1+H_2)}_{\cancel{H}}(F_0^1)^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned}F_0^1 &= 1\\ F_0^2 &= 1\end{aligned}}$$

$$\boxed{\text{Para } \lambda_1 = \frac{f_0(H_1+H_2)}{\epsilon g H_1 H_2}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{f_0}{\epsilon g H_2} & \frac{f_0^2}{\epsilon g H_1} \\ \frac{f_0^2}{\epsilon g H_2} & \frac{f_0^2}{\epsilon g H_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_1^2 = -\frac{H_1}{H_2}F_1^1$$

$$\frac{1}{H}\left[H_1(F_1^1)^2 + H_2\left(-\frac{H_1}{H_2}F_1^1\right)^2\right] = 1$$

$$F_1^1 = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} = \sqrt{\frac{1}{\delta}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}F_1^1 &= \sqrt{\frac{1}{\delta}}\\ F_1^2 &= -\sqrt{\delta}\end{aligned}}$$

Condição de Ortonormalidade

MÉTODOS DE ANÁLISE DE DADOS QUASE-SINÓTICOS EM OCEANOGRAFIA FÍSICA

Os campos de velocidade em oceanografia podem ser divididos em 2 partes

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{k}\times\nabla\psi}_{\text{parte rotacional não divergente}} + \overbrace{\nabla\phi}^{\text{parte irrotacional divergente}}$$

$\psi \equiv$ função de corrente

$\phi \equiv$ potencial de velocidade

<u>PEQUENA</u> <u>ESCALA</u> $\Rightarrow$ $\vec{v} \approx \nabla\phi$

<u>MESO</u> <u>E</u> <u>LARGA</u> <u>ESCALA</u> $\Rightarrow$ $\vec{v} \approx \vec{k}\times\nabla\psi$

$$\boxed{\text{NESTE CURSO} \Rightarrow \vec{v} \approx \vec{k}\times\nabla\psi}$$

CONSIDERAÇÕES QUASE-GEOSTRÓFICAS

Equação do movimento sob aproximação de Boussinesq e sem atrito

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{k}f\times\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \vec{g} \qquad (1) \qquad\qquad \vec{f} = \cancel{\tilde{f}\vec{j}} + f\vec{k}$$

<u>Aproximação</u> <u>Tradicional</u> $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ é dinamicamente irrelevante:

comp x $\Rightarrow$ $\tilde{f}w \ll fv$

comp z $\Rightarrow$ $\tilde{f}u \ll g$

O Nº de Rossby é simplesmente a razão entre os dois primeiros termos de (1):

$$R_o = \frac{\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|}{|\vec{k}f\times\vec{v}|} \qquad (2)$$

Se usarmos notação usual de análise de escalas e escalarmos advectivamente o tempo, reescrevemos (2):

$$R_o = \frac{U}{fL} \qquad (3)$$

→ Usando a aproximação do plano β em latitudes médias

$$f = f_0 + \beta y = 2\Omega \sin\theta_0 + \frac{2\Omega\cos\theta_0}{a}\, y$$

→ Um bom diagnóstico para a aplicação da aproximação do plano β é o Nº Planetário

$$\hat{\beta} = O\left(\frac{\beta y}{f_0}\right) \rightarrow \hat{\beta} \ll 1$$

Considerando $R_o \ll 1$,

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + O\left(\frac{U^2}{L}\right)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + O\left(\frac{U^2}{L}\right) \qquad (4)$$

(4) ÷ f :

Correções ageostróficas de $O(R_o)$

$$\boxed{v = +\frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial p}{\partial x}} + \boxed{O(R_o U)} \qquad (4a)$$

$$\boxed{u = -\frac{1}{\rho_0 f}\frac{\partial p}{\partial y}} + \boxed{O(R_o \cdot U)}$$

Balanço Geostrófico ⇒ balanço de O(1)

O Tamanho da Velocidade Vertical

Tradicionalmente, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow O\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = O\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$

$$\frac{U}{L} = \frac{W}{H} \Leftrightarrow W = \frac{H}{L} \cdot U$$

$$\boxed{W = \delta \cdot U}$$

	MESO	LARGA
U	0,2 m/s	0,04 m/s
L	10^5 m	10^6 m
R_o	$0{,}02 \sim 10^{-2}$	$0{,}0004 \sim 10^{-4}$
δ	10^{-2}	10^{-3}

$\delta = \frac{H}{L} \rightarrow \begin{cases} H_{BT} \Rightarrow \text{espessura da coluna d'água} = 3300m \sim 10^3 m \\ H_{BC} \Rightarrow \text{espessura das correntes} \Rightarrow \text{base da termoclina} \sim 10^3 m \end{cases}$

$\delta \ll 1 \Rightarrow$ aproximação de águas rasas $\Rightarrow$ oceano hidrostático

Com isso, podemos estimar:

$$W_{meso} = \delta_{meso} \cdot U_{meso} = 0{,}002 \text{ m/s} \sim R_o \cdot U_{meso}$$

$$\boxed{W_{meso} = R_o \cdot U_{meso}}$$

$$W_{larga} = \delta_{larga} \cdot U_{larga} = 0{,}00000004 \text{ m/s} \sim 10^{-8}$$

E para o escoamento Quase-geostrófico? Estimar w pela eq da continuidade é adequado?

$$\frac{\partial}{\partial y}(4.1) \rightarrow \beta v + f\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + O\left(\frac{U^2}{L^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(4.2) \rightarrow f\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + O\left(\frac{U^2}{L^2}\right) \quad +$$

$$\beta v = -f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + O\left(\frac{U^2}{L^2}\right)$$

(6) $\boxed{f \dfrac{\partial w}{\partial z} = \beta v} + O\left(\dfrac{U^2}{L^2}\right)$ $\Rightarrow$ A div. do mov. geostrófico no plano β é: $\dfrac{\beta v}{f}$

Balanço dominante

$$W = \frac{\beta H U}{f_0} \Rightarrow \times \frac{L}{L} \to W = \underbrace{\frac{\beta L}{f_0}}_{\hat{\beta}} \underbrace{\frac{H}{L}}_{\delta} \cdot U \therefore W = \hat{\beta}\, \delta\, U$$

f_0: escala para f

$f_0 = 10^{-4}\, s^{-1}$; $\beta = 10^{-11}\, m^{-1} s^{-1}$

	Meso	Larga
$\hat{\beta}$	0,02	0,2

$$W_{meso} = \hat{\beta}_{meso}\, \delta_{meso}\, U_{meso}$$

$$\boxed{W_{meso} = R_0^2 U_{meso}}$$

Estimando W_{meso} pela eq da continuidade, superestima-se seu valor em 10^2 m/s.

W aqui é mto menor pois é estimada em função da divergência do Mov geostrófico, que acreditamos ser dominante na quase-geostrofia.

Quais são as consequências dinâmicas da pequenez de w?

$$\vec{\omega} = \underbrace{\xi \vec{i} + \chi \vec{j} + \zeta \vec{k}}$$

$\to$ 3 eqs de vorticidade $\Rightarrow$ componentes ξ, χ, ζ

A mais relevante para meso e larga escala é a componente ζ

$$\vec{\omega_a} = \xi \vec{i} + \chi \vec{j} + (\zeta + f)\vec{k}$$

Ver no caderno do Belmiro pq ζ é a mais importante. Aqui vamos que ela é a mais importante pois é balanceada por f, que é a mais importante em meso e larga escala.

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad \chi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

A componente vertical da equação da vorticidade absoluta:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial \zeta}{\partial t}}_{(i)} + \underbrace{\vec{v}\cdot\nabla\zeta}_{(ii)} - \left(\underbrace{\xi\frac{\partial}{\partial x} + \chi\frac{\partial}{\partial y}}_{(iii)} + \underbrace{\zeta\frac{\partial}{\partial z}\right)w - f\frac{\partial w}{\partial z}}_{(iv)} + \underbrace{\beta v}_{(v)} = 0} \qquad (7)$$

(i) Variação local da vorticidade relativa

(ii) Variação advectiva da V.R.

(iii) Inclinação do tubo de vórtice

(iv) Estiramento do tubo de vórtice

(v) Advecção de vorticidade planetária

$$\beta v = v\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{U^2}{L^2} \qquad \frac{U^2}{L^2} \qquad \underbrace{\frac{U}{\cancel{H}L}\cdot\frac{R_o\cancel{H}U}{L}}_{R_o\frac{U^2}{L^2}} \qquad \underbrace{\frac{U}{L\cancel{H}}\frac{\cancel{R_o}HU}{L}}_{R_o\frac{U^2}{L^2}} \qquad \beta U \qquad \beta U$$

$$\beta U \downarrow$$

$$f\frac{W}{H} = f_o R_o \frac{\cancel{H}}{L}\frac{U}{\cancel{H}} = \cancel{f_o}\frac{U^2}{\cancel{f_o}L^2} = O\left(\frac{U^2}{L^2}\right)$$

$$f\frac{\partial w}{\partial z} = O\left(\beta U, \frac{U^2}{L^2}\right)$$

Na eq (7), em meso escala, os termos entre parênteses são $O(R_o)$ menores do que os outros:

A inclinação é desprezível!

	Meso	Larga
$\mathcal{E}$	1	0,002

$$\mathcal{E} = \frac{\zeta}{\beta y} = \frac{\frac{U}{L}}{\beta L} = \frac{U}{\beta L^2}$$

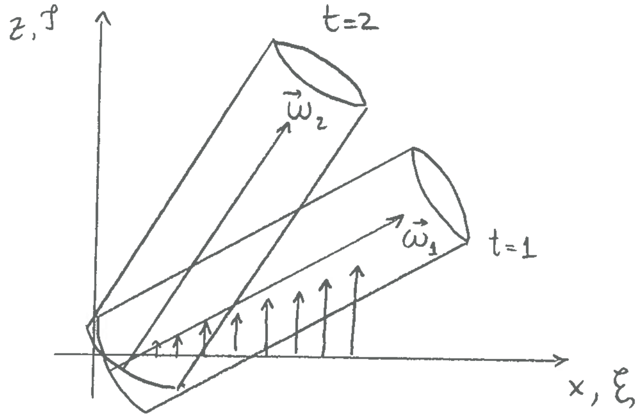
$$\mathcal{E} = \frac{\frac{d\zeta}{dt}}{\frac{d}{dt}\beta y}$$ ∴ $\mathcal{E}$ compara a variação total de V.R. com a variação total de V.Pl.

Quanto maior a escala, menos importante é a vorticidade relativa!

A inclinação do tubo de vórtice é um mecanismo extremamente ineficiente para geração de vorticidade em meso e larga escala!

Entendendo o mecanismo de inclinação

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \xi \frac{\partial w}{\partial x}$$



<u>Em t=1</u>: $\zeta > 0$

$\xi > 0$

$\frac{\partial w}{\partial x} > 0$

<u>Em t=2</u>: $\zeta_2 > \zeta_1 \Rightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial t} \neq 0$

20/06/07

Mapeamento de Função de Corrente Geostrófica

$$\frac{\partial}{\partial z}(4a) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{f}\frac{\partial \rho}{\partial x} + O\left(Ro\frac{U}{H}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{f}\frac{\partial \rho}{\partial y} + O\left(Ro\frac{U}{H}\right) \qquad (8)$$

O Método dinâmico clássico utiliza a integração vertical de (8) para estimar velocidades geostróficas baroclínicas relativas a um nível de referência à partir de perfis de T e S.

Assim: $$v(z) - v(-H_0) = -\frac{g}{f}\int_{-H_0}^{z} \rho \frac{\partial \alpha}{\partial x}\, dz' \quad (9)$$

Em coordenadas isobáricas, (9) assume a forma de:

$$v(p) - v(p_0) = -\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\int_{p_0}^{p} \alpha\, dp}_{-\Phi(p)\ \Rightarrow\ \text{pela eq hidrostática}} \quad (10)$$

$$\Phi = \Phi(p) + \Delta\Phi(x, y, p) \quad (11)$$

$\Phi(p)$ → Geopotencial Padrão

$\Delta\Phi(x,y,p)$ → Anomalia do Geopotencial

$$\Rightarrow \Delta\Phi = -\int_{p_0}^{p} \delta_\alpha\, dp \quad , \quad \text{onde} \quad \delta_\alpha = \alpha(35, 15, p) - \alpha(S, T, p)$$

$$(11) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_p - v_{p_0} &= \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Phi \\ u_p - u_{p_0} &= -\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\Phi \end{aligned}} \quad (12) \qquad v_{p_0} = u_{p_0} \approx 0$$

$$\text{Se } \hat{\beta} \ll 1, \quad \hat{\beta} = \frac{\beta L}{f_0} \ll 1 \Rightarrow v_p = \frac{1}{f_0\underbrace{\left(1 + \frac{\beta y}{f}\right)}_{\approx 1}}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Phi \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v &= \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Phi \\ u &= -\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\Phi \end{aligned}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial^2 \Delta\Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{f_0}\frac{\partial^2 \Delta\Phi}{\partial y \partial x} = 0$$

→ o movimento, em $O(1)$ é não-divergente, logo podemos definir uma função de corrente ψ

$$\boxed{\psi = \frac{\Delta\Phi}{f_0}}$$ → Função de corrente geostrófica em coordenadas isobáricas

(13) $\Rightarrow$ $$\boxed{\begin{aligned} v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned}}$$

Aspectos práticos do cálculo de ψ

→ estabelecer o p_0 (NR)

→ calcular $\Delta\Phi$ para cada estação em todos os níveis p

→ calcular $\psi = \dfrac{\Delta\Phi}{f}$ ⇒ definir f

→ Mapas de ψ devem respeitar as condições de contorno de dinâmica de fluidos. Não pode existir fluxo normal a um contorno sólido

Newman : $\dfrac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, onde n é a coordenada normal ao cont.

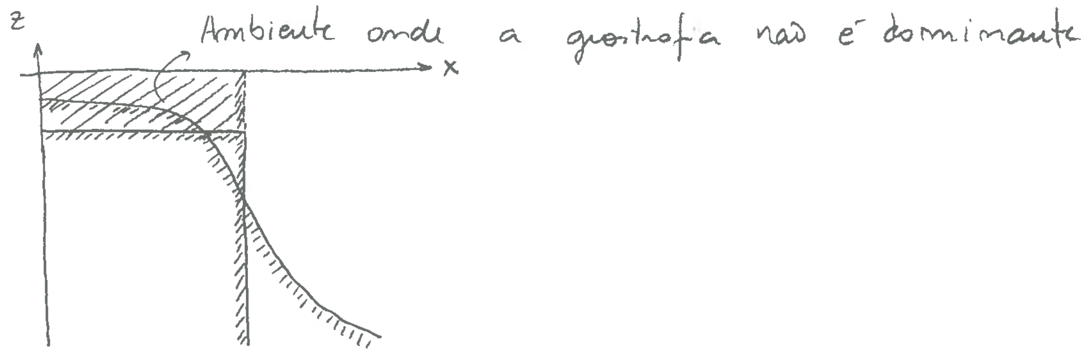
ou

Dirichlet : $\psi = \text{constante}$ ao longo do contorno sólido

→ o contorno sólido vira uma linha de corrente

→ condição de livre escorregamento ("free-slip")

→ aproximação da parede vertical ⇒ teoria QG



1) Elegir uma isóbata de referência e usá-la como linha de corrente

2) Remover a média de ψ para usar $\psi = cte = 0$ no contorno

---

REVISÃO: APROXIMAÇÃO QG NUM OCEANO HOMOGÊNEO

Fundo Plano

→ conjunto de 3-4 aproximações

1) Aproximação geostrófica + hidrostática $R_o, \delta \ll 1$ $E_H, E_V \ll 1$

2) Aproximação do plano β de lat. médias $\hat{\beta} \ll 1$

3) Aproximação das espessuras $h = H + \Delta h$ $R_{o_s} = \frac{\Delta h}{H} \ll 1$

Se R_o e $\hat{\beta} \ll 1$,

$$(14) \quad v = \underbrace{\frac{1}{\bar{\rho} f}\frac{\partial p}{\partial x}}_{O(1)} + \underbrace{O(R_o U)}_{O(R_o)} \longrightarrow v = v_g + v_a$$

$$u = -\frac{1}{\bar{\rho} f}\frac{\partial p}{\partial y} + O(R_o U) \longrightarrow u = u_g + u_a$$

$$\frac{u_a, v_a}{u_g, v_g} = O(R_o$$

Pela equação da continuidade

$$O(1): \quad \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 \qquad (15)$$

$$O(R_o): \quad \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w_a}{\partial z} = 0 \qquad (16)$$

Num oceano homogêneo, $p = \bar{\rho} g \eta$

Por (14) $\Rightarrow$

$$u = u_g + u_a = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial y} + u_a$$

$$v = v_g + v_a = \frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial x} + v_a \qquad (17)$$

Por (15) e (17) $\Rightarrow$ $\psi = \frac{g}{f_0}\eta$

Reescrevendo as equações do movimento:

$$O(1): \quad -f_0 v_g = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$f_0 u_g = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (18)$$

$$O(R_0): \quad \frac{\partial u_g}{\partial t} + u_g\frac{\partial u_g}{\partial x} + v_g\frac{\partial u_g}{\partial y} - f_0 v_a - \beta y v_g = 0$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial t} + u_g\frac{\partial v_g}{\partial x} + v_g\frac{\partial v_g}{\partial y} + f_0 u_a + \beta y u_g = 0 \qquad (19)$$

Tomando o rotacional de (19) $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial x}(19.2) - \frac{\partial}{\partial y}(19.1)$

$$\frac{d\zeta_g}{dt} + f\left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y}\right) + \beta v_g = 0 \qquad (20)$$

Equação da Vorticidade Absoluta QG

Eliminando $\nabla_H \cdot \vec{v}_a$ através da equação da continuidade, mas antes tomemos um novo formato para ela

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0 \qquad (21)$$

e como $R_0, R_{0_S} \ll 1$ e $h = H + \eta$

$$\frac{d\eta}{dt} + H\left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y}\right) = 0 \qquad (22)$$

Com (22) em (20):

$$\frac{d\zeta_g}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{f_0}{H}\eta\right) + \frac{d}{dt}(\beta y) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\zeta_g + \beta y - \frac{f_0}{H}\eta\right)}_{q} = 0 \qquad (23)$$

$q \equiv$ Vorticidade Potencial Q.G. $\Rightarrow \frac{dq}{dt} = 0$

$\downarrow$

É a linearização de $\frac{\zeta + f}{H}$

Para escrever (23) em função de uma só variável $\Rightarrow \psi$

$$\zeta_g = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla^2\psi = \nabla^2\left(\frac{g}{f_0}\eta\right) \qquad (24)$$

$$-\frac{f_0}{H}\eta = -\frac{f_0^2}{gH}\psi \qquad (25)$$

Com (24) e (25) em (23)

$$\frac{dq}{dt} = 0 \;;\quad \boxed{q = \nabla^2\psi + \beta y - \frac{1}{Rd_c^2}\psi}\;, \quad \text{onde } Rd_c = \frac{\sqrt{gH}}{|f_0|}$$

Relação de Inversibilidade $q \leftrightarrow \psi$

lembrando o teorema de Ertel

$$\frac{d\Pi}{dt} = 0, \quad \Pi = \frac{1}{\rho_0}(\vec{\zeta} + f\vec{k})\cdot\nabla\lambda, \quad \lambda = \frac{z - h_B}{h}, \quad h = H + \eta - h_B$$

λ $\to$ funções de status

$\Pi = \frac{\zeta + f}{H} \Rightarrow$ não linear

$q = [T^{-1}]$

Notemos que sob $R_0, \hat{\beta}, R_{0_s} \ll 1$

$$\Pi = \underbrace{\frac{f_0}{H}}_{\text{V.P. básica}} + \frac{q}{H} + O(R_0^2) \Rightarrow \frac{d\Pi}{dt} = \cancel{\frac{d}{dt}\frac{f_0}{H}}^{\,0} + \frac{1}{H}\frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dq}{dt} = 0}$$

A VPQG é uma anomalia perante a VP básica

Podemos definir então o R_o : $\boxed{R_o = \frac{q}{f}}$

MAC 0122

$\frac{q}{H}$ é o desvio de $O(R_o)$ de $\frac{f}{H}$

21/06/07

Abrindo um parênteses para uma aula de Oceanografia Regional.

AJUSTAMENTO GEOSTRÓFICO

[Rossby, 1938]

Solução no Gill

Como se dá o ajustamento geostrófico uma vez que é estabelecido um gradiente de pressão no oceano?

Hipóteses:

→ Oceano homogêneo de águas rasas ($\rho = cte$, $\delta \ll 1$)

→ fundo plano ($z = -H$)

→ plano f (menor escala para o mov. geostrófico) $f = f_o$

→ sistema de equações linearizado.

Sistema Hidrodinâmico

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3)$$

Obtendo equação de onda: Tomando a divergência (1) - (2) e usando (3):

$$\frac{\partial}{\partial x}(1): \quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} - f\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2): \quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y} + f\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \quad (+)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{-\frac{1}{H}\frac{\partial \eta}{\partial t}} - f\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\zeta} + g\nabla_H^2\eta = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \underbrace{gH}_{c^2}\nabla_H^2\eta + fH\zeta = 0} \quad (4)$$

Agora, tomemos o rotacional de (1) - (2) e obter a equação da vorticidade absoluta:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + f\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{-\frac{1}{H}\frac{\partial \eta}{\partial t}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\zeta + \frac{f}{H}\eta\right)}_{q\ [s^{-1}]} = 0 \quad (5)$$

(5) é a forma linearizada da conservação de vort. potencial

$$Q = \frac{q}{H} = \frac{\zeta}{H} - \frac{f}{H^2}\eta \quad (6) \quad [m^{-1}s^{-1}]$$

(6) em (5)

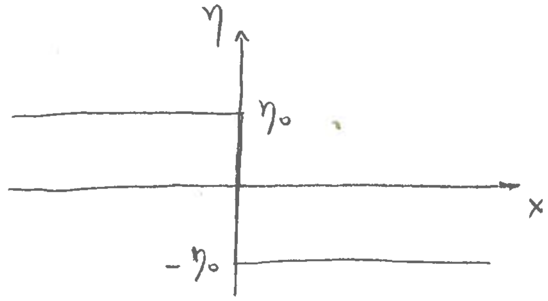
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\zeta}{H} - \frac{f}{H^2}\eta\right) = \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad Q \text{ é conservado.}$$

Logo, $Q(x,y,t) = Q(x,y,0)$ (7)

Condições iniciais do problema hidrodinâmico:

$$u = v = 0 \quad , \quad \text{em} \quad t = 0 \qquad (8)$$

$\eta = -\eta_0 \, \text{sgn}(x)$, onde sgn é a função sinal



$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & p/\ x > 0 \\ -1 & p/\ x < 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\underbrace{\frac{\zeta}{H} - \frac{f}{H^2}\eta}_{Q(x,y,t)} = \underbrace{\frac{f}{H^2}\eta_0 \, \text{sgn}(x)}_{Q(x,y,0)} \qquad (9)$$

Com (9) em (4):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \nabla_H^2 \eta + f^2 \eta = -f^2 \eta_0 \, \text{sgn}(x) \qquad (10)$$

SOLUÇÃO ESTACIONÁRIA

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \qquad p/ \quad (1) - (3)$$

$$(1) \longrightarrow \quad -fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$(2) \longrightarrow \quad fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (11)$$

$$f\psi = g\eta = \frac{\tilde{p}}{\rho} \qquad (13)$$

$$\Uparrow$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (12)$$

$$(3) \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \text{existe uma função de corrente } \psi$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla_H^2 \psi = \nabla_H^2\left(\frac{g}{f}\eta\right) \quad \Rightarrow \quad \zeta = \nabla_H^2\left(\frac{g}{f}\eta\right)$$

A forma estacionária de (10) sob $\eta = \eta(x)$,

$$-c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + f^2 \eta = f^2 \eta_0 \, \mathrm{sgn}(x) \qquad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{f^2}{c^2}\eta = \frac{f^2}{c^2}\eta_0 \, \mathrm{sgn}(x) \qquad (15)$$

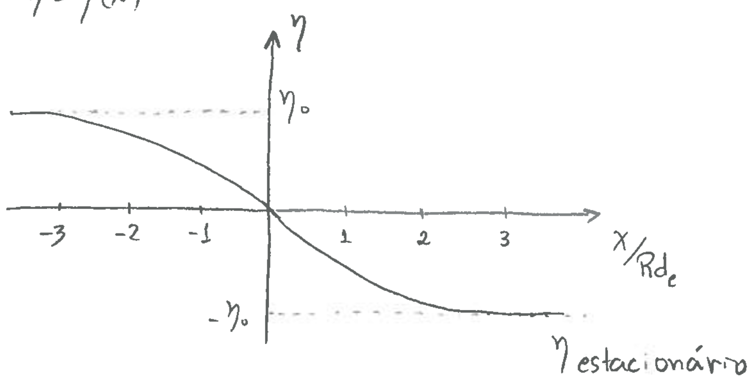
$$Rd_e = \frac{\sqrt{gH}}{|f|} = \frac{c}{|f|}$$

$\eta = \eta_{HOM.} + \eta_{part.}$

A solução para η:

$$\eta = \eta_0 \begin{cases} -1 + e^{-x/Rd_e} & p/\ x > 0 \\ 1 - e^{x/Rd_e} & p/\ x < 0 \end{cases} \qquad (16)$$

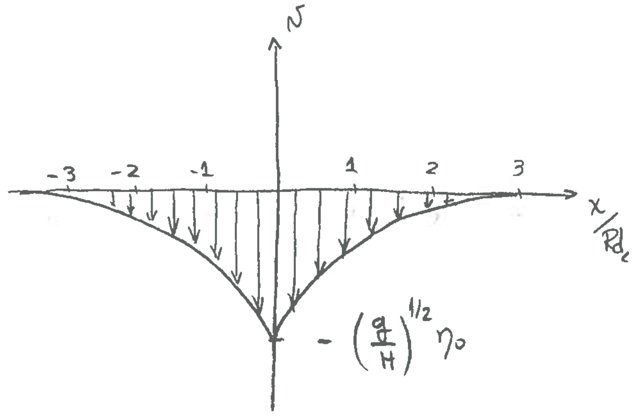
$\eta = \eta(x)$



O campo de velocidades é dado por:

$$u = 0$$

$$v = -\frac{g}{f}\eta_0 \left(\frac{1}{Rd_e} e^{-x/Rd_e} \right) \qquad (17)$$



O diferencial é obter uma equação de onda, ou seja, não desprezando a ac. local. Aí sim, eliminando $\frac{\partial}{\partial t}$ da equação de onda, obtem-se a solução estacionária, mostrando o <u>Ajustamento Geostrófico</u>

Esta solução mostra <u>matematicamente</u> como as inclinações de η são mantidas permanentes pelo ajuste geostrófico.

Recapitulação : QG no oceano barotrópico 27/06/07

→ fundo plano , oceano homogêneo

Teorema de Erthel : $\dfrac{d\Pi}{dt} = 0$, $\Pi = \dfrac{\zeta + f}{H}$ $[m^{-1}s^{-1}]$

Aproximações QG : $R_o, R_{o_T} \ll 1$; $\hat{\beta} \ll 1$; $h = H + \eta - \cancel{h_B}$ $\Rightarrow R_{o_S} = \dfrac{\eta}{H} \ll 1$

(lat. médias) $\equiv R_o$; Nº de Rossby do Estiramento

→ os 3 termos da vorticidade potencial em meso escala (plan., rel., est.) tem que ter $O(R_o)$

$$\Pi = \underbrace{\frac{f_0}{H}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{q}{H}}_{O(R_o)} + O(R_o^2)$$

$$\boxed{q = \underbrace{\nabla^2\psi}_{V.R} + \underbrace{\beta y}_{\text{vari. de VPlan}} - \underbrace{\frac{1}{Rd_e}\psi}_{V.Est}} \quad [s^{-1}]$$

VPQG

$R_o = \dfrac{q}{f_0}$

- Quem conhece o escoamento (ψ), conhece a VPQG (q)
- Quem conhece a VPQG (q), conhece o escoamento (ψ)

} Relações de Inversibilidade

A Aproximação Quase-Geostrófica num Oceano continuamente estratificado

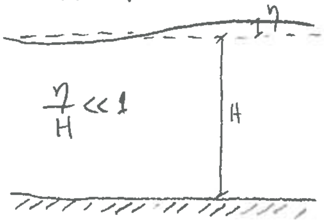
OCE: Oceano, Cont. Estr.

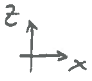
→ No oceano BT ; $\psi = \psi(x, y, t)$

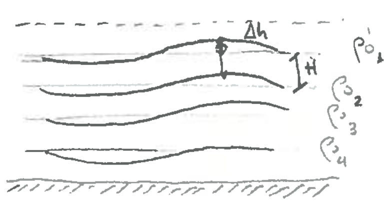
→ No oceano BC : $\psi = \psi(x, y, z, t)$, pois $p = p_0(z) + \tilde{p}(x, y, z, t)$ (1)

$\rho = \rho_0(z) + \tilde{\rho}(x, y, z, t)$ (2)

→ boussinesq : $\dfrac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \ll 1$ ~ equivale à aproximação das espessuras ~ R_{o_S} no OCE







$\dfrac{\Delta h}{H} \ll 1$

→ O balanço de $O(1)$, levando em consideração os hipóteses: $Ro, Ro_t, \hat{\beta}, Ro_s, \ll 1$

$$u_g = -\frac{1}{\bar{\rho} f_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tilde{p}}{\bar{\rho} f}\right)$$

$$v_g = \frac{1}{\bar{\rho} f}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{p}}{\bar{\rho} f}\right)$$

$$\psi_g = \frac{\tilde{p}}{\bar{\rho} f}$$

→ O balanço de $O(Ro)$,

$$\frac{du_g}{dt} - f_0 v_a - \beta y v_g = 0$$

$$\frac{dv_g}{dt} + f_0 u_a + \beta y u_g = 0 \qquad (4)$$

Tomando o rotacional de (4),

$$\frac{d}{dt}\left(\zeta_g + \beta y\right) - f_0 \underbrace{\left(\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y}\right)}_{-\frac{\partial w_a}{\partial z}} = 0 \qquad (5)$$

Vamos usar a eq da conservação de densidade, $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (6)

E vamos considerar $Ro, Ro_t, Ro_s \ll 1$, em (6):

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} + w\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \qquad (7)$$

$$\rightarrow \boxed{w = -\frac{1}{\frac{\partial \rho_0}{\partial z}}\frac{d\tilde{\rho}}{dt}} \qquad (8)$$

Com (8) em (5)

$$\frac{d}{dt}\left(\zeta_g + \beta y\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0}{\partial \rho_0/\partial z}\tilde{\rho}\right) = 0 \qquad (9)$$

Relembremos a função de corrente geostrófica

Pela equação hidrostática,

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = -\tilde{\rho} g \Rightarrow \bar{\rho} f \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\tilde{\rho} g \Rightarrow \boxed{\tilde{\rho} = \frac{-\bar{\rho} f}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z}} \qquad (11)$$

Com (10) em (11) em (9),

$$\frac{d}{dt}(\nabla^2 \psi + \beta y) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\bar{\rho} f^2}{g \partial \rho_0 / \partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0$$

Usando a definição $N^2(z) = -\frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\nabla^2 \psi + \beta y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0} \qquad (12)$$

$$\underbrace{\underset{\text{V.R.}}{\nabla^2 \psi} \quad \underset{\text{V.plan}}{\beta y} \quad \underset{\text{V.est.}}{\frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}}}_{q}$$

Comparando os termos de estiramento dos modelos BT e BC:

BT: $\boxed{O\left(\frac{\psi}{Rd_e^2}\right)}$

mas: $Rd_e = \frac{\sqrt{gH}}{|f_0|}$; $\underbrace{Rd_i = \frac{NH}{|f_0|}}_{\text{definições!}}$

BC: $O\left(\frac{f_0^2}{N^2 H^2} \psi\right)$

$\longrightarrow \boxed{O\left(\frac{\psi}{Rd_i^2}\right)}$

A relação entre a vorticidade relativa e a vorticidade de estiramento resulta em importante implicação dinâmica que tornam distintos os mecanismos de conservação de q em meso e larga escalas:

$$Bu = O\left(\frac{\text{v. relativa}}{\text{v. estiramento}}\right) = \frac{\psi L^{-2}}{\psi Rd_i^{-2}} = \boxed{\frac{Rd_i^2}{L^2}} \qquad \boxed{Bu = \frac{Rd_i^2}{L^2}}$$

Nº de Burger

$$\boxed{Bu \ll 1 \rightarrow NH \ll f_0 L}$$

Ou a estratificação é fraca ou estamos num regime de larga escala. E qq um dos casos, a vorticidade de estiramento domina, e o balanço de vorticidade resguarda semelhanças com o fluido homogêneo

$$\boxed{Bu \gg 1 \rightarrow NH \gg f_0 L}$$

Ou a estratificação é intensa ou estamos no limite das menores escalas dos movimentos QG. Em qq um dos casos, a vorticidade relativa domina e a estratificação robusta reduz o acoplamento vertical. Assim, cada "camada" tenderá a se comportar como uma estrutura praticamente bidimensional.

$$\boxed{Bu \sim O(1) \rightarrow NH \approx f_0 L}$$

Os dois mecanismos competem, ou seja, estamos em meso-escala, aonde os movimentos são da ordem do raio de deformação interno.

Os Modos Normais Dinâmicos

→ buscar soluções para (12)

→ imporemos tampas rígidas na supf e no fundo (fundo plano)

→ linearizaremos (12)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0} \quad (13)$$

→ forma linearizada de (12)

→ condições de contorno:

$$\boxed{w = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, -H}$$

$$\underset{(11)}{\overset{}{(8)}} \Rightarrow -\frac{1}{\partial\rho_0/\partial z}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\rho_0 f}{g}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\rho_0 f}{g\,\partial\rho_0/\partial z}}_{\neq 0}\ \text{ou}\ \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)}_{=0} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, -H$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, -H$$

Linearizando: $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, -H} \quad (14)$$

→ Assumir uma solução p/ ψ por <u>separação</u> de <u>variáveis</u>:

$$\psi(x,y,z,t) = \sum_i \underbrace{\Psi_i(x,y,t)}_{\text{funções amplitude}} \cdot \underbrace{F_i(z)}_{\text{Modo de Estrutura vertical}} \quad (15)$$

(15) em (13),

$$\underbrace{-\frac{1}{\frac{\partial\Psi_i}{\partial t}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi_i + \beta\frac{\partial\Psi_i}{\partial x}\right)}_{\text{depende de } (x,y,t)} = \underbrace{\frac{1}{F_i}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)}_{\text{depende de } (z)} = \lambda_i$$

A única chance de uma coisa que depende de (x,y,t) ser igual a uma coisa que depende de (z), é essa coisa ser igual a uma constante $\underline{\underline{\lambda_i}}$, que é chamada de AUTO-VALOR!

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial F_i}{\partial z} + \lambda_i F_i = 0 \qquad (16)$$ Equação da Estrutura Vertical

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\Psi_i - \lambda_i\Psi_i\right) + \beta\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = 0 \qquad (17)$$ Equação da Evolução da Amplitude

Se olhamos para (17), percebemos que o termo $\lambda_i \Psi_i$ é o termo de estiramento, que tinha a forma $\frac{\Psi}{Rd_i^2}$. Com isso podemos obter a expressão para o cálculo dos Rd_i:

$$\boxed{\lambda_i = \frac{1}{Rd_i^2}} \Rightarrow \boxed{\lambda_i = \frac{f_0^2}{g h_{e_i}}}$$

h_{e_i} → prof. equivalente

→ Resolvendo os modos dinâmicos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{f_0^2}{N^2}\dfrac{\partial F_i}{\partial z} + \lambda_i F_i = 0 & (18) \\ \dfrac{\partial F_i}{\partial z} = 0 \quad \text{em} \quad z = 0, -H \end{cases}$$

de (14) ⇒ (segunda equação)

Este sistema é resolvido numericamente nas rotinas Matlab

A estrutura do oceano é dividida em infinitas estruturas. Infinitos oceanos homogêneos separados individualmente. A prof. equivalente é a prof. que cada pequeno oceano homogêneo deveria ter para que estivesse em ajuste geostrófico de acordo com os Rd_i^2 aqui vistos

Os Fi devem ser <u>ortonormais</u> :

$$\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} F_i(z)\, F_j(z)\, dz = \delta_{ij} \begin{cases} i=j\,, & 1 \\ i\neq j\,, & 0 \end{cases} \qquad (19)$$

As amplitudes Ψ_i são obtidos pela projeção do modo F_i no perfil $\psi(x,y,z,t)$:

$$\Psi_i = \frac{\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} \psi F_i\, dz}{\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} F_i^2\, dz} \qquad (20)$$