AULA 3 - Função de corrente

3.1 - A Função de Corrente geostrófica em coordenadas isobáricas

Na aula passada, nós vimos que a integração vertical da equação do vento térmico em coordenadas cartesianas era:

$$v_0(z) - v_0(z_0) = -\frac{g}{f_0}\int_{z_0}^{z} \rho \frac{\partial \alpha}{\partial x}\, dz \qquad (1)$$

Fizemos a seguinte transformação para coordenadas isobáricas:

$z = z \rightarrow p = p$ $\qquad \uparrow z \qquad \downarrow p \qquad$ $dp = -\rho g\, dz$

$z = z_0 \rightarrow p = p_0$

$$v_0(p) - v_0(p_0) = -\frac{1}{f_0}\int_{p_0}^{p} \frac{\partial}{\partial x'} \alpha\, dp$$

$$v_0(p) - v_0(p_0) = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x'}\int_{p_0}^{p} \alpha\, dp \quad , \text{ onde } p_0 > p$$

Da relação hidrostática,

$\downarrow p$

$$d(gz) = -\alpha\, dp$$

$$d\Phi = -\alpha\, dp$$

$$\int_{\Phi(p)}^{\Phi_0} d\Phi = -\int_{p}^{p_0} \alpha\, dp$$

$$\Phi(p_0) - \Phi(p) = -\int_{p}^{p_0} \alpha\, dp$$

$$\Phi(p) - \overset{0}{\Phi(p_0)} = -\int_{p_0}^{p} \alpha \, dp$$

$$\bar{\Phi}(p) = -\int_{p_0}^{p} \alpha \, dp = \int_{p}^{p_0} \alpha \, dp$$

$$\Phi = \bar{\Phi}(p) + \Delta\Phi(x, y, p, t)$$

$$\bar{\Phi} = -\int_{p_0}^{p} \alpha(35, 0, p) \, dp \rightarrow \text{função da pressão somente}$$

$$\Delta\Phi = -\int_{p_0}^{p} \delta(S, T, p) \, dp \rightarrow \text{função da S, T e p. Logo pode apresentar variações laterais}$$

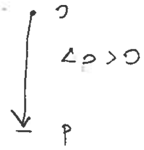
Substituindo no vento térmico,

$$v_0(p) - v_0(p_0) = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{p_0}^{p} \delta \, dp$$

$$\boxed{v_0(p) - v_0(p_0) = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\Phi)}$$

• Entretanto é muito comum expressar o geopotencial relativamente à superfície do mar. Nesse caso,

$$\int_{\Phi_0}^{\Phi(p)} d\Phi = \int_0^p \alpha \, dp$$



$$\Phi(p) - \Phi(0) = \int_0^p \alpha \, dp$$

$$\Phi(p) = - \int_0^p \alpha \, dp$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\int_{v(0)}^{v(p)} dv = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^p \alpha \, dp$$

$$v(p) - v(0) = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

ou relativamente a duas isóbaras de valores p_1 e p_2 $(p_1 < p_2)$

$$v(p_1) - v(p_2) = \frac{1}{f_0} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_1 - \Phi_2$$

onde: $$\Phi_1 = \int_0^{p_1} \alpha \, dp$$

$$\Phi_2 = \int_0^{p_2} \alpha \, dp$$

Se acreditarmos que existe um nível de movimento nulo,

$$v_0 = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$ em coordenadas isobáricas

$$v_0 = \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p}{\partial x}$$ em coordenadas cartesianas

Analogamente,

$$u_0 = -\frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$u_0 = \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial}{\partial y} p$$

Se utilizarmos a definição de função de corrente

$$u_0 = -\frac{\partial}{\partial y} \psi$$

$$v_0 = \frac{\partial}{\partial x} \psi$$

$$\psi = \frac{p}{\rho_0 f_0}$$ em coordenadas cartesianas

$$= \frac{\Phi}{f_0}$$ em coordenadas isobáricas

Entretanto, devemos fazer uma transformação de coordenadas de forma mais rigorosa...

3.2 - Coordenadas Isobáricas

- Geralmente os oceanógrafos não tem medidas diretas de altura ou profundidade. Nossos instrumentos medem pressão.
- Pela equação hidrostática, fica claro que existe uma relação monotônica entre p e z
- Assim, é útil repor a coordenada vertical z por coordenada p
- É importante mencionar que esse sistema de coord NÃO é ortogonal.

- O que nos queremos então é:

$$\phi(x,y,z,t) \rightarrow \phi(x',y',p(x,y,z,t),t')$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}$$

ou $$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}$$ se a transformação for inversa

$\phi = p$,

$$\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho\frac{\partial \Phi}{\partial x'}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}$$

Em coordenadas isobáricas $(u, v, \omega) = \frac{D}{Dt}(x, y, p)$

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \omega\frac{\partial}{\partial p}$$

A equação da continuidade simplesmente se torna

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

Bibliografia:

Gill - seções 6.17 (pg 180)
7.6 - 7.7 (pgs 208 - 219)

Holton - seções 1.6.2 e 3 (pg 21 - 23)