IOF819 - Modelos da Circulação Oceânica em Larga Escala
Prof. Dr. Edmo J. D. Campos
2o. Trimestre de 2006

Programa:

1. Introdução
2. Revisão de Conceitos Relevantes:
   - √ Equação Dinâmica Básica
   - √ Forças que atuam no oceano
   - √ Atrito ou viscosidade em fluidos

     LISTA 1 {
     Conceito da Cascata de Energia
     Viscosidade Turbulenta
     Tensões de Reynolds
   - √ Dinâmica de Ekman

     Espiral e o Transporte de Ekman na Camada de Fundo

     LISTA 2 {
     Camada de superfície
     A velocidade no topo da camada de Ekman
     O transporte de Ekman e a direção do vento
     O bombeamento de Ekman
   - √ A Camada de Mistura Oceânica
3. Modelos Homogêneos da Circulação Oceânica
   - √ Equações Primitivas
   - √ Análise de Escala
   - √ Modelos lineares Clássicos

     √ Regime de Sverdrup
     √ O modelo de Stommel
     √ O modelo de Munk
   - Modelos não-lineares

     O modelo de Fofonoff
     O Modelo de Charney
     O Modelo Viscoso-Inercial de Moore
   - Modelos da Termoclina

     Teorias Clássicas da Termoclina
     Modelo de Camadas para a Termoclina
     A termoclina ventilada

- Circulação do Oceano Profundo
  O Modelo de Stommel & Arons → LISTA 3
  O modelo de Kuo & Veronis → LISTA 4

4. A Circulação Termohalina Global e a Célula Meridional do Atlântico

5. Circulação do Atlântico Tropical

   - Aspectos Gerais
   - A ZCIT, os ventos alísios e a Retroflexão da CNB
   - A Sub-Corrente Equatorial e a Célula Meridional Rasa

Avaliação:
Listas 30%
Prova Parcial 30%
Prova Final 40 %

20/06/2006 - OCEANOGRAFIA FÍSICA DE LARGA ESCALA

prof. Edmo Campos

Neste Curso

1) Força associada à gradientes de pressão

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\vec{F}_{gp} = -\nabla p . dx . dy . dz$$

2) Força devido à atrito

3) Força gravitacional $= m\vec{g}$

4) Marés → Não nos interessa nesse curso

5) Força de Coriolis → efeito da rotação do planeta.

$$m.(\hat{k} \times \vec{v}).f \qquad f = 2\Omega \operatorname{sen}\theta$$

componente $x = -fv.m$

componente $y = fu.m$

$$\frac{\partial m\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.(m\vec{v}) + m\hat{k} \times \vec{v}.f = -\nabla p\, dx.dy.dz + m\vec{g} + \vec{f}_a$$

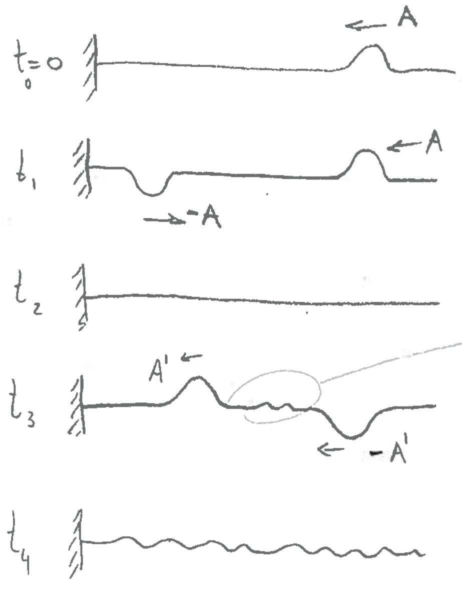
volume unitário, densidade constante

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\nabla\vec{v} - \hat{k} \times f\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \cancel{\frac{1}{\rho}\vec{f}_a} \text{ p/ grande escala}$$

Viscosidade (Atrito) em Fluido → fenômeno que ocorre em escala molecular

⇒ Apesar de existir uma forma para o atrito ou viscosidade de um fluido Newtoniano, com a água, esta expressão não pode ser usada na equação do momentum para o estudo de fenômenos em grande escala.

$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \rightarrow$ termo não-linear



Energia em grande escala

$A' < A$

→ forma não-linear dos processos naturais

• A energia se mantém constante

$E_{t_4} = E_{t_0}$

↳ Energia em escala molecular

Este processo chama-se : CASCATA DE ENERGIA

Problema : é necessário achar um termo para o Atrito

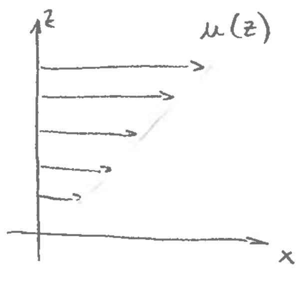
TENSÕES DE REYNOLDS

$\vec{v} = (u, v, w)$

EXERCÍCIO → $\boxed{\text{LISTA Nº 01}}$

1

(a) Mostrar que para cisalhamento vertical de velocidade, conforme indicado na Figura abaixo, a tensão de cisalhamento vertical na direção x, é dada por $\tau_{xz} = A_z \dfrac{\partial u}{\partial z}$



(b) Por extensão, mostre o tensor de tensão total num elemento de fluido é representado por: (2)

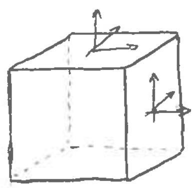
$$\tau_{ij} = \left(-p + A_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + A_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\delta_{ij} + \left(A_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + A_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)(1-\delta_{ij})$$

(c) Finalmente, para um fluido incompressível, assumindo que $A_x = A_y = A_H$ e $A_z = A_V$, mostre que a força de Atrito pode ser representada por:

A_H e A_V: coeficientes de viscosidade turbulenta

$$f_i = \frac{1}{\rho} A_H \nabla_H^2 u_i + \frac{1}{\rho} A_V \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}$$

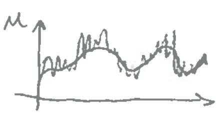
Breve Explicação



$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

Como determinar os coef. de visc. turbulenta?

(2) (Tensões de Reynolds)



valor médio (linha menos ruidosa)

(linha ruidosa)

Podemos assumir que $u = \langle u \rangle + u'$

Problema: assumir que todas as variáveis possam ser escritas como a soma de um valor médio e uma anomalia:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= \langle \vec{v} \rangle + \vec{v}' \\ p &= \langle p \rangle + p' \end{aligned}\right\}$$ substituir nas 3 componentes da eq. do movimento e mostrar que:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\langle u'u'\rangle = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx})$$

consultar pg 7 a 15 da apostila ③

$$-\frac{\partial}{\partial y}\langle u'v'\rangle = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx})$$

$$\vdots$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\langle w'w'\rangle = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz})$$

29/06/2006

$$\begin{cases} \cancel{\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}}^{\,0} + \cancel{(\vec{v}\cdot\nabla)\cdot\vec{v}}^{\,0} + f\vec{K}\times\vec{v} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \cancel{\dfrac{A_H}{\rho}\nabla^2\vec{v}}^{\,0} + \dfrac{A_V}{\rho}\dfrac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

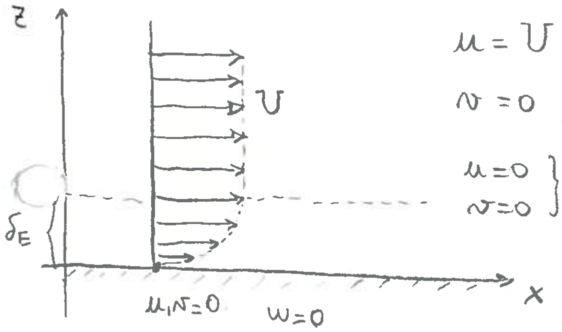
equações de Navier Stokes com rotação

4 variáveis : u, v, w, p e 4 equações

DINÂMICA DE EKMAN

pg 16 na apostila

Problema



$$\left.\begin{matrix} u = U \\ v = 0 \end{matrix}\right\} z \to \infty \qquad \left.\begin{matrix} u = 0 \\ v = 0 \end{matrix}\right\} z \to 0$$

→ condições de contorno

aproximações : → ρ = cte

- Equação linearizada
- atrito horizontal insignificante
- estacionário $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- fundo plano

As eq. então podem ser escritas, já separadas por componentes:

(x) $$-fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{A_V}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z}$$

(y) $$fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{A_V}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z}$$

(z) $$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \cancel{\frac{A_V}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial z}}^{\,0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

é possível demonstrar que fazendo a derivada segunda dessas equações que $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ então $w = c^{te}$ + cond. de contorno => $w = 0$ em $\forall z$, então as equações podem ser ainda mais reduzidas

→ $$g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$ (eq. hidrostática)

Pode ser mostrado também que $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}$ são constantes na coluna de água.

Isso nos permite escrever: $\begin{cases} u = \tilde{u} + U \\ v = \tilde{v} + 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} -f\tilde{u} &= \frac{A_V}{\rho}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \\ f\tilde{v} &= \frac{A_V}{\rho}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{não-geostrófico} \\ z \Rightarrow 0 \end{array} \quad \text{ou} \quad \left.\begin{aligned} fu &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ -fv &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{geostrofia} \Rightarrow z \to \infty$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}(z) \\ \tilde{v} &= \tilde{v}(z) \end{aligned}\right\} \frac{\partial}{\partial z} \Leftrightarrow \frac{d}{dz}$$

coef. dinâmico de viscosidade turbulenta $(\hat{A}_V)$

$\hat{A}_V = \frac{A_V}{\rho} \rightarrow$ coef. cinemático

$$\left.\begin{aligned} (1)\quad -f\tilde{v} &= \frac{A_V}{\rho}\frac{d^2\tilde{u}}{dz^2} \\ (2)\quad f\tilde{u} &= \frac{A_V}{\rho}\frac{d^2\tilde{v}}{dz^2} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{sistema de} \\ \text{2 eq. diferenciais ordinárias de 2ª ordem}\end{array}$$

$$\frac{d^2(1)}{dz^2} \Rightarrow -f\frac{d^2\tilde{v}}{dz^2} = \frac{A_V}{\rho}\frac{d^4\tilde{u}}{dz^4}$$

$\Rightarrow$ subst. em (2) $\Rightarrow f\tilde{u} = \frac{A_V}{\rho}\left[-\frac{1}{f}\frac{A_V}{\rho}\frac{d^4\tilde{u}}{z}\right]$

$$\frac{d^4\tilde{u}}{dz^4} + \frac{f^2}{\hat{A}_V^2}\tilde{u} = 0 \Rightarrow \text{solução} \Rightarrow \tilde{u}(z) = \cancel{C_1 e^{(1+i)\cdot z/\delta_E}}^{\infty} + \cancel{C_2 e^{(1-i)\cdot z/\delta_E}}^{\infty} + C_3 e^{-(1+i)\cdot z/\delta_E} + C_4 \cdot e^{-(1-i)z/\delta_E}$$

$$\delta_E = \sqrt{\frac{A_V}{\frac{f}{2}}}$$

c.c.1

$p/z \to \infty,\ \tilde{u} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

c.c.2

$p/z \to 0,\ \tilde{u} = 0 \Rightarrow C_3 + C_4 = 0 \Rightarrow C_3 = -C_4$

$$\boxed{\tilde{u}(z) = C_3\left[e^{-(1+i)\cdot z/\delta_E} - e^{-(1-i)\cdot z/\delta_E}\right]}$$

$\rightarrow$ fazer em casa o mesmo para $\tilde{v}$

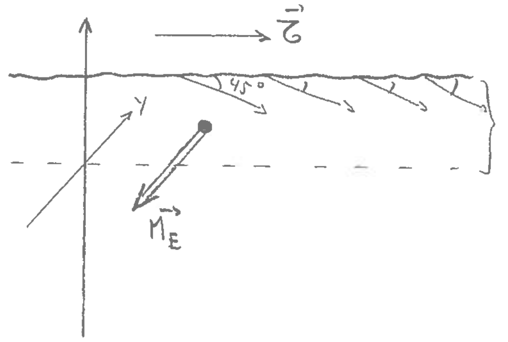
haverá outra relação entre C_3 e C_4 e o valor encontrado é $-\frac{\tilde{u}}{2}$

Solução:
$$\begin{cases} \tilde{u} = U\left[1 - e^{-z/\delta_E} \cdot \cos(z/\delta_E)\right] \\ \tilde{v} = U \cdot e^{-z/\delta_E} \cdot \operatorname{sen}(z/\delta_E) \end{cases}$$

04/07/2006

Ver apostila com observações anotadas (páginas 21 - 24)

Exercício Nº 2: Desenvolver a teoria da Camada de Ekman de Superfície



- Reproduzir a apostila comentando as passagens e derivando as partes que foram omitidas.

Mostrar que:

1) A velocidade na superfície do oceano é orientada a 45° da direção de $\vec{\tau}$; à esquerda no H.S. e à direita no H.N.

2) Mostrar que o Transporte de Ekman é perpendicular a $\vec{\tau}$; à direita no H.N. e à esquerda no H.S.

3) Mostrar que o bombeamento de Ekman no fundo da camada é dado por

$$w_E = \frac{\hat{k} \cdot \nabla \times \vec{\tau}}{\rho f}$$

pg 29 à 36 da apostila

Equações primitivas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} + f\vec{k}\times\vec{v} = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g} + \dfrac{1}{\rho}\left[A_H\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + A_z\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\vec{v} \\ \nabla\cdot\vec{v} = 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix}\vec{v}\\ p\end{matrix}\right\}$ soluções deste conjunto de equações, que podem representar uma grande variedade de escalas de movimento

Interesse do Curso → Larga Escala

Análise de Escalas

L: comprimento horizontal

H: comprimento vertical

U: velocidade horizontal

W: velocidade vertical

ω_0: frequência

ω_0^{-1}: tempo

$$\frac{u}{U} = u'$$

assumir que: $u, v = U(u', v')$, u', v' são não-dimensionais

$$w = W(w')$$

$$x, y = L(x', y')$$

$$z = H.z'$$

$$t = \frac{t'}{\omega_0} = \omega_0^{-1}t'$$

$$p = P.p'$$

Eq da continuidade:

$$\frac{U}{L}\underbrace{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right)}_{O(1)} + \frac{W}{H}\underbrace{\frac{\partial w'}{\partial z'}}_{O(1)} = 0$$

os termos ' são de ordem 1, ou seja, não-dimensionalizados

$$\boxed{W = \delta.U}$$

$$\Rightarrow \frac{U}{L} = \frac{W}{H} \therefore W = \frac{H}{L}.U \therefore \delta = \frac{H}{L}$$ Razão de aspecto do movimento

Ver pg 33...

componente x da eq. do movimento, sem os termos de O(1)

$$W_0 U + \frac{U^2}{L} + \frac{WU}{H} - fU = \frac{1}{\rho}\frac{P}{L} + \frac{A_H}{\rho}\frac{U}{L^2} + \frac{A_z}{\rho}\frac{U}{H^2}$$

são as magnitudes de cada termo da eq. do mov. (x)

Dividindo todos por fU: e considerando $W = \frac{H}{L} \cdot U$

$$\underbrace{\frac{W_0}{f}}_{\text{magnitude do termo local}} \quad \underbrace{\frac{U}{fL} \quad \frac{U}{fL}}_{\text{mag. dos termos advectivos}} \quad 1 = \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{P}{fUL}}_{\text{mag do termo do grad de pressão}} \quad \underbrace{\frac{A_H}{\rho f L^2} \quad \frac{A_z}{\rho f H^2}}_{\text{mag dos termos de atrito}}$$

DEFINIR:

(1) Número de Rossby $\equiv R_0 = \frac{U}{fL} = \frac{(f^{-1})}{\left(\frac{L}{U}\right)}$ → $\frac{\text{período inercial}}{\text{escala de tempo advectiva}}$ $\Rightarrow \boxed{R_0 = \frac{U}{fL}}$

Compara o período inercial com o período advectivo do movimento de interesse

Larga Escala $\Rightarrow$ $R_0 \ll 1$ (termos ñ lineares são pouco importantes)

O Nº de Rossby pode ser visto tb como a medida dos termos não-lineares

(2) Número de Ekman

horizontal: $\boxed{E_H = \frac{A_H}{\rho f L^2}}$ $E_H = \frac{f^{-1}}{\rho/L^2/A_H}$ } Tempo necessário p/ que o atrito horizontal destrua o movimento

vertical: $\boxed{E_V = \frac{A_z}{\rho f H^2}}$ $E_V = \frac{f^{-1}}{\rho/L^2/A_z}$ } Tempo p/ que o atrito com o fundo destrua o movimento

Consequências:

$\frac{w_0}{f} \ll 1 \Rightarrow$ movimento pode ser considerado estacionário $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \to 0\right)$

$Ro = \frac{U}{fL} \ll 1 \Rightarrow$ termos não lineares (advectivos) podem ser desprezados $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \to 0$

em 1ª ordem $fU \sim \frac{P}{\rho L}$ (geostrofia): coriolis e grad. de pressão permanecem

termos dissipativos são mantidos por imposição matemática

$\Rightarrow$ equações do mov. na forma dimensional ficam:

1) $-fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{A_H}{\rho}\nabla_H^2 u + \frac{A_z}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

obs: $\nabla_H^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

2) $fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{A_H}{\rho}\nabla_H^2 v + \frac{A_z}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$

$\boxed{\text{Eq. do Movimento para Grande Escala}}$

3) $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \underbrace{\frac{A_H}{\rho}\nabla_H^2 w + \frac{A_z}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}$

$\hookrightarrow$ mto peq $\Rightarrow$ oceano hidrostático

4) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

- movimento linear
- movimento estacionário } aproximações
- aproximação de Boussinesq $\Rightarrow \rho = cte$

Para "homogeneizar" essas equações, vamos integrá-las do fundo ao topo do oceano, usando as seguintes definições:

$M_x = \int_{-H}^{0} \rho u \, dz \rightarrow$ transporte de volume zonal por u. de área

$M_y = \int_{-H}^{0} \rho v \, dz \rightarrow$ transp. de volume meridional p/ u. de área

$$P = \int_{-H}^{0} p\, dz$$ → pg 34 da apostila

Multiplicando 1ª as eq. por ρ

$$A_z \int_{-H}^{0} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz = A_z \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{-H}^{0}$$

$$= \tau_x^{0} - \tau_x^{-H}$$

$$(1)\quad -fM_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{A_H}{\rho} \cdot \nabla_H^2 M_x + A_z \int_{-H}^{0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz$$

$$(2)\quad fM_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{A_H}{\rho} \nabla_H^2 M_y + A_z \int_{-H}^{0} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dz$$

$$(1)\quad -fM_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{A_H}{\rho} \nabla_H^2 M_x + \tau_x^{0} - \tau_x^{-H}$$

3 eq. dinâmicas

$$(2)\quad -fM_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{A_H}{\rho} \nabla_H^2 M_y + \tau_y^{0} - \tau_y^{-H}$$

$$(3)\quad P = \rho g h$$ ⇒ equilíbrio hidrostático

$$(4)\quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \cancel{W_0}^{\,0} - \cancel{W_{-H}}^{\,0} = 0$$

→ Equações Homogenizadas

- o oceano se move como uma coluna ⇒ Oceano Barotrópico

(4) → oceano horizontalmente não-divergente: sem convergência ou divergência

⇒ formando a equação de vorticidade:

$$-\frac{\partial(1)}{\partial y} + \frac{\partial(2)}{\partial x}$$ ⇒ Eq. da vorticidade (lista teórica 1 de Métodos) $\left(\beta = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\beta M_y = \frac{A_H}{\rho} \nabla_H^2 \left(-\frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{\partial M_y}{\partial x}\right) - \frac{\partial \tau_x^{0}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y^{0}}{\partial x} - \left(-\frac{\partial \tau_x^{-H}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y^{-H}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = \hat{k} \cdot (\nabla \times \vec{M})$$

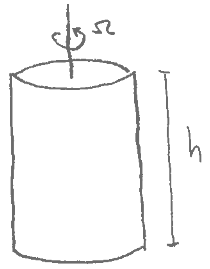
$$\underset{\mathrm{I}}{\beta M_y} = \hat{k}\left[\underset{\mathrm{II}}{\nabla \times \vec{\tau}^{\,0}} - \underset{\mathrm{III}}{\nabla \times \vec{\tau}^{\,-H}} + \frac{A_H}{\rho} \underset{\mathrm{IV}}{\nabla_H^2 (\nabla \times \vec{M})}\right]$$

$$\text{curl}\, \tau^{0} = \frac{\partial \tau_y^{0}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x^{0}}{\partial y}$$

→ componente vertical do rotacional

pg 36 à

Vorticidade Potencial



$f \to$ Vorticidade Planetária

$\zeta \to$ Vorticidade Relativa $= \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$

Devido ao cisalhamento horizontal

$\zeta_a = f + \zeta =$ Vorticidade Absoluta

$\dfrac{\zeta_a}{h} \to$ Vorticidade Potencial (Q)

$\dfrac{dQ}{dt} =$ vorticidade produzida pelo vento + vorticidade associada ao atrito de fundo + ...
...+ vorticidade associada ao cis. horizontais

$$\frac{d}{dt}\frac{(f+\zeta)}{h} \qquad \frac{\zeta}{f} \ll Ro \to \zeta \ll f \qquad (\zeta \text{ pode ser desprezada})$$

$$\frac{dQ}{dt} \approx \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{h}\right) = \cancel{\frac{\partial f}{\partial t}}^{\to 0} + \cancel{u\frac{\partial f}{\partial x}}^{\to 0} + \underbrace{v\frac{\partial f}{\partial y}}_{\beta v}$$

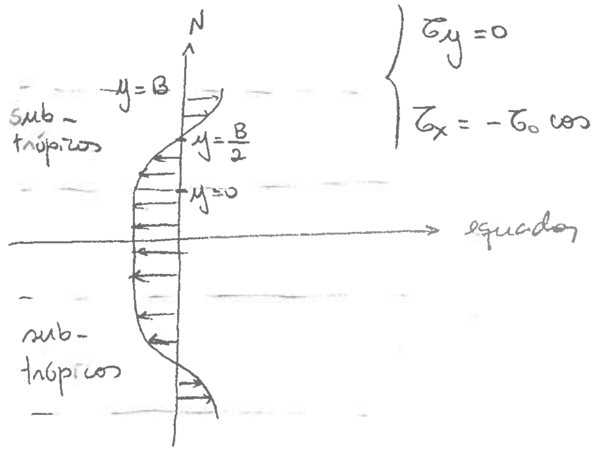
$$\frac{dQ}{dt} = \beta v \Rightarrow \int_{-H}^{0} \rho \beta v \, dz = \beta M_y \Rightarrow \text{vide eq. (3.43) da apostila}$$

$\boxed{\text{Regime de Sverdrup}}$ $\to$ Balanço entre I e II

$$M_y = \frac{1}{\beta}\,\text{curl}\,\tau^0$$

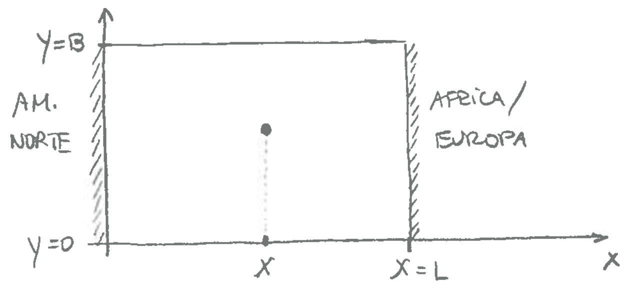
$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M_x}{\partial x}\,dx = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M_y}{\partial y}\,dx = -\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial y}\,\text{curl}\,\tau^0\,dx$$

$$M_y = \frac{1}{\beta}\left(\cancel{\frac{\partial \tau_y}{\partial x}}^{\to 0} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}\right) \therefore \boxed{M_y = -\frac{\pi}{\beta B}\,\text{sen}\,\frac{\pi y}{B}}$$



$$\begin{cases} \tau_y = 0 \\ \tau_x = -\tau_0 \cos\left(\dfrac{\pi y}{B}\right) \end{cases}$$

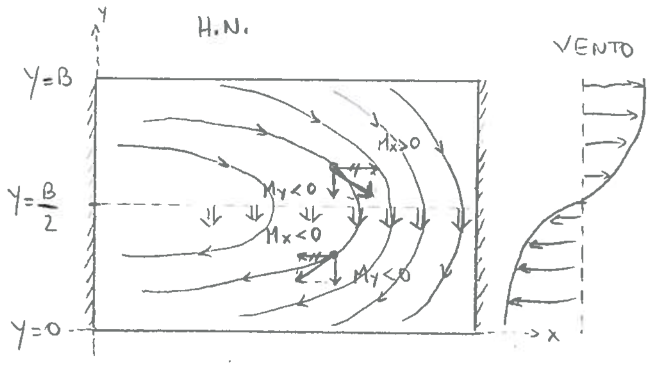
$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M_x}{\partial x}\, dx = \frac{\pi^2}{\beta B^2} \int_{x_0}^{x} \cos\left(\frac{\pi y}{B}\right) dx$$



$$\int_{x}^{L} \frac{\partial M_x}{\partial x}\, dx = \frac{\pi^2}{\beta B^2} \cos\left(\frac{\pi y}{B}\right) \int_{x}^{L} dx$$

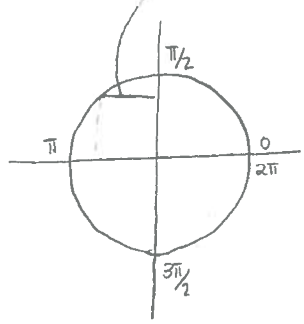
$$\cancel{M_x\Big|_{x=L}}^{\,0} - M_x\Big|_{x=x} = \frac{\pi^2}{\beta B^2} \cos\left(\frac{\pi y}{B}\right) \left[L - x\right]$$

$$\boxed{M_x = \frac{\pi^2}{\beta B^2} \cos\left(\frac{\pi y}{B}\right) (x - L)}$$



$\left\{ \begin{array}{l} M_y < 0 \\ \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}\ \pi\right] > 0 \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} (x - L) < 0 \\ \cos\left[\frac{\pi}{2}\ \pi\right] < 0 \end{array} \right\} M_x > 0$



$\left. \begin{array}{l} (x - L) < 0 \\ \cos\left[0\ \frac{\pi}{2}\right] > 0 \end{array} \right\} M_x < 0$

Se a integração for feita entre x e 0, o padrão de circulação será: fig 3.6 pág 40 (apostila)

Paradoxo devido a possibilidade de assumir apenas 1 condição de contorno de uma eq. diferencial de 1ª ordem. Mas como já se conhecia a circulação assume-se a 1ª solução sendo correta.

Isto ocorreu porque Sverdrup escolheu apenas 2 termos da eq. de conservação de V.P.

O Atrito deve ser incluído ⇒ Solução de STOMMEL que incluirá mais condições de contorno, definindo a solução 1 e explicando a intensificação da borda OESTE.

MODELO DE STOMMEL

parametrização do atrito

$f_a \propto v$ (f_a é função linear de v)

BALANÇO: $\beta M_y = \text{curl}\,\tau^{0} - \text{curl}\,\tau^{-H}$

Stommel Assumiu uma lei de arrasto linear para o atrito de fundo: $\tau = k v$ → coef. de arrasto linear

$$\beta M_y = \text{curl}\,\tau^{\circ} - k\,\text{curl}\,\vec{M}$$

Definir uma função de corrente tal que:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ M_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$

Todo campo não divergente pode ser escrito em termos de uma função de corrente

$$\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \text{curl}\,\tau^{\circ} - k\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)$$

$$\boxed{\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \text{curl}\,\tau^{\circ} - k\,\nabla_H^2 \psi}$$ Eq. dif. em ψ

$$\boxed{\nabla^2 \psi + \frac{\beta}{k}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{k}\,\text{curl}\,\tau^{\circ}}$$

Solução no paper Stommel 1949 escrita na página 42, eq. (3.6)

1/8/06

$\boxed{\text{1950: MUNK}}$

Eq. de cons. de vorticidade:

$$\overset{\text{I}}{\beta M_y} = \overset{\text{II}}{\text{Curl}\,\tau^{\circ}} - \overset{\text{III}}{\text{Curl}\,\tau^{-H}} + \overset{\text{IV}}{\frac{A_H}{\rho}\nabla^2 \text{curl}\,M}$$

MUNK: $\left.\beta M_y = \text{curl}\,\tau^{\circ} + \dfrac{A_H}{\rho}\nabla^2 \text{curl}\,M\right\}$

Velocidades grandes próximas ao contorno oeste ⇒ atrito horizontal é importante

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ M_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \text{curl}\,\tau^{\circ} + \frac{A_H}{\rho}\nabla_H^4 \psi}$$

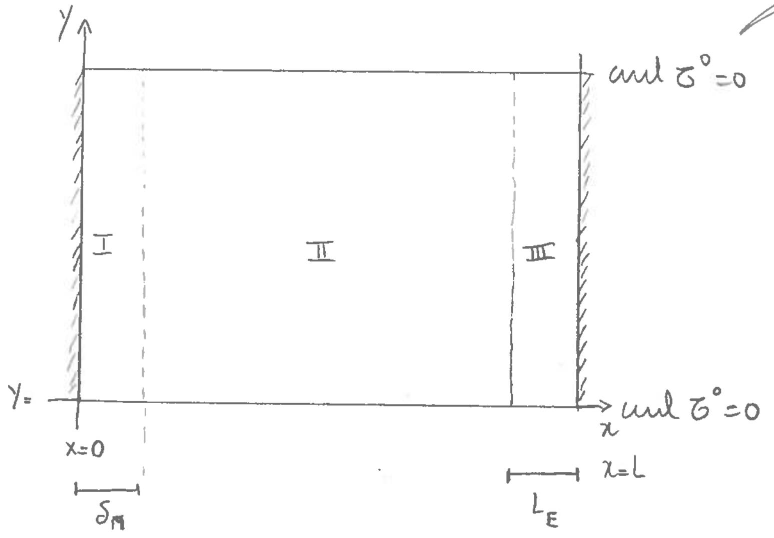
onde $k = \left(\dfrac{\beta}{A_H}\right)^{1/3} = \delta_M^{-1}$

Solução: $X(x) = \left(1 - \dfrac{k}{L}\right)\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{kx}{2}} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}kx - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1\right] - \dfrac{1}{kL}\left[kx - e^{-k(L-x)}\right]$

$\psi(x,y) = -\dfrac{L}{\beta} X(x) \cdot \dfrac{\partial \tau_x}{\partial y}$

Interpretação da Solução de Munk

→ Bacia sub-tropical do Atl. N



↓ largura da camada de Munk

↓ largura do contorno leste

<u>Região II</u> : $2\delta_m \ll x \ll L$

A solução para este $\underline{x}$ pode ser aproximada p/ $\mathcal{X}(x) = \frac{L-x}{L}$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x,y) = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial \tau}{\partial y}(L-x)} = \text{a solução de Sverdrup}$$

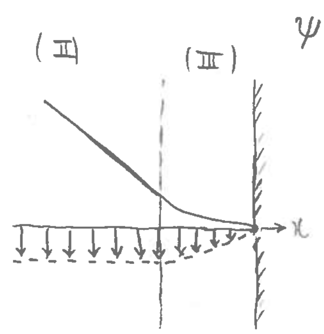
<u>Região III</u> : $x \to L \Rightarrow \mathcal{X}(x) = 1 - \frac{x}{L} + \frac{e^{-k(L-x)}}{kL} - \frac{1}{kL}$ $\quad (\mathcal{X}(L)=0) \Rightarrow \psi = 0$

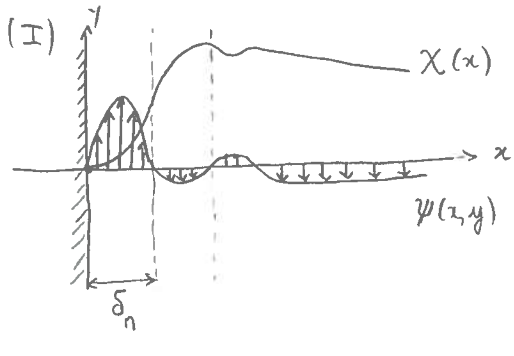
<u>Região I</u> : $x < 2\delta_m$

$$\mathcal{X}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-kx/2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

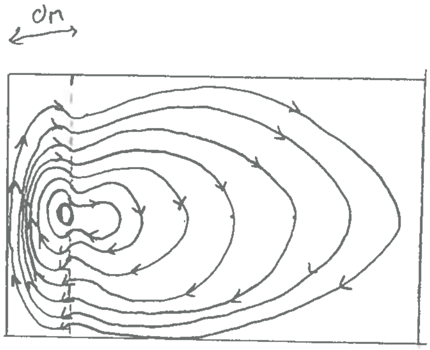
reescrevendo : $\frac{\sqrt{3}}{2}(\mathcal{X}-1) = e^{-kx/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\pi}{6}\right)$, lembrando que $M_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

Plotando isto: $\mathcal{X}(x)$ ——
$\psi(x,y)$ ----





H.N.



* O Modelo de Munk previu a existência de uma região de recirculação próxima ao contorno Oeste, eventualmente confirmado por observações

Estimando δ_M: $[\beta M_y] = [\text{curl}\,\tau] + \left[\frac{A_H}{\rho}\nabla^2 \text{curl}\, M\right]$ (balanço de Munk)

próximo ao contorno oeste ($x < \delta_M$) $[\beta \cancel{M_y}] \approx \left[\frac{A_H}{\rho}\nabla^2 \text{curl}\,\cancel{M}\right]$

$\delta_M = \sqrt[3]{\frac{A_H}{\beta}}$ (checar pq o ρ saiu) $\qquad \beta = \frac{A_H}{\rho}\frac{1}{\delta_M^3}$

$R_o \ll 1$
$E_H \ll 1$
$E_V \ll 1$
} Não é válido para o contorno oeste

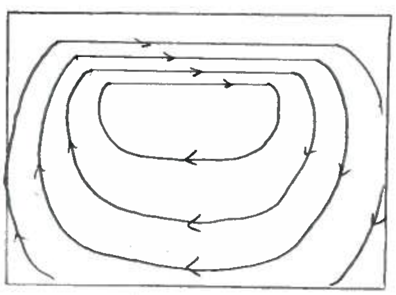
⇓

À partir daí, começou um interesse por incluir os termos não-lineares nos modelos ⇒ anos 1950

(1) FOFONOFF: Modelo Inercial, não-linear, atrito desprezado

solução:

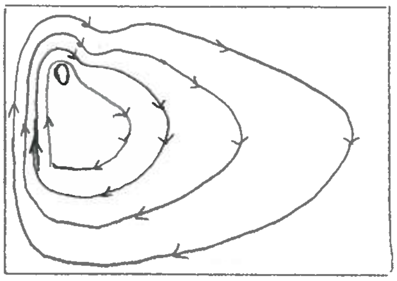
(Região sub-tropical no Atlântico Norte)



← correntes mais intensas ao Norte

(3) MOORE 1963 → Intensificação à oeste e à Norte

considerou-se atrito e não-linearidade



1963 em diante ⇒ não temos mais modelos analíticos, começa a era dos Modelos Numéricos

Voltando um pouco:

(2) CHARNEY ⇒ na apostila

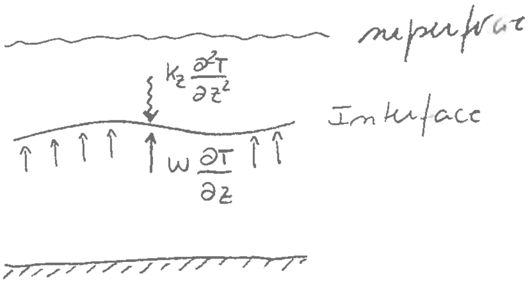
— 3/08/2006 —

CIRCULAÇÃO ABISSAL

Hipótese de Stommel para a manutenção da Termoclina

$$\frac{dT}{dt} = k_H \nabla^2 T + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \therefore \quad \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}^{0} + \cancel{\vec{v}_H \nabla_H T}^{0} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \cancel{k_H \nabla^2 T}^{0} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

eq. da conservação de temperatura

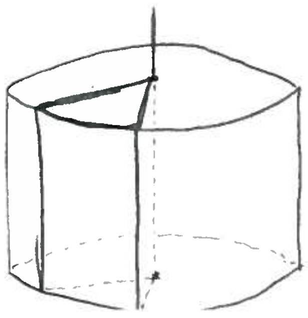


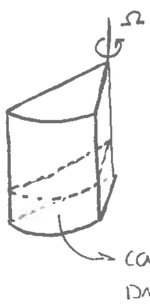
A manutenção da termoclina se deve ao equilíbrio entre difusão vertical de temperatura e advecção vertical de temperatura

$$w\frac{\partial T}{\partial z} = k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Ele admitiu fontes de água profunda

TEORIA DE STOMMEL & ARONS (semi-empírica)





ATL. NORTE VISTO DE CIMA

Equações atuantes numa porção profunda

$\int_{\text{fundo}}^{\text{topo da cam profunda}} (\quad) \, dz$

(1) $-fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$

(2) $fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$

(3) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow H \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + w_{topo} - w_{fundo} = 0$

$$f\int_{-H}^{z} v \, dz = \frac{1}{\rho}\int_{-H}^{I} \frac{\partial p}{\partial x} dz \ldots$$

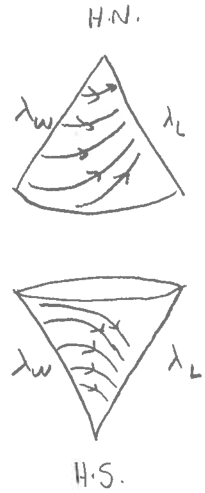
$$f\int_{-H}^{z} u \, dz = -\frac{1}{\rho}\int_{-H}^{I} \frac{\partial p}{\partial y} dz \ldots$$

Combinando tudo e derivando uma eq. de vorticidade,

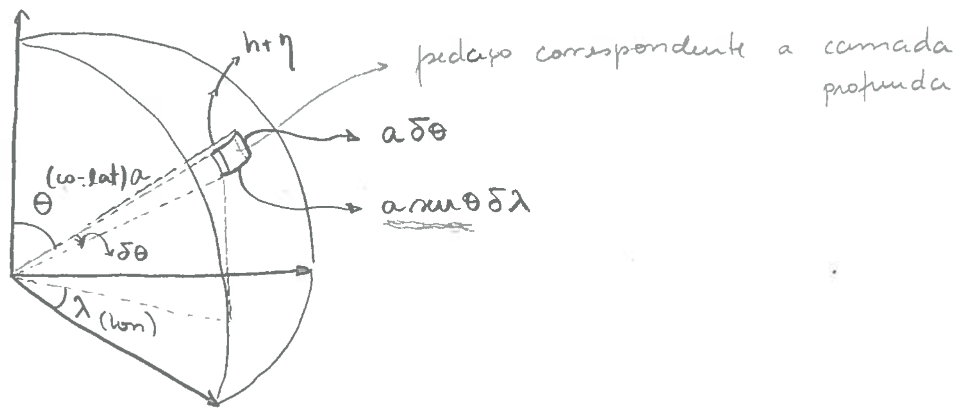
$M_y = \frac{f}{\beta} w_0$ No H.N., $f>0$, $\beta > 0$, $w_0 > 0$ $\Rightarrow \boxed{M_y > 0}$, ou seja, para Norte

$M_x = 2w_0 (L-x)$, onde L é a largura total da bacia

$w_0 > 0$, $L-x>0 \Rightarrow \boxed{M_x > 0}$, ou seja, para leste



Coordenadas Esféricas



Equações atuantes em coordenadas esféricas ⇒ próxima lista

Está no artigo do STOMMEL & ARONS

√ $\boxed{\text{LISTA \# 3}}$ Cai uma questão da prova 1 em relação a isso

① Mostrar que as equações do balanço geostrófico e da continuidade em coordenadas esféricas, são: bizu (utilizar a eq. hidrostática)

(1) $2\Omega\cos\theta\, v = \dfrac{g}{a\,\mathrm{sen}\,\theta}\dfrac{\partial\eta}{\partial\lambda}$

(2) $2\Omega\cos\theta\, u = -\dfrac{g}{a}\dfrac{\partial\eta}{\partial\theta}$

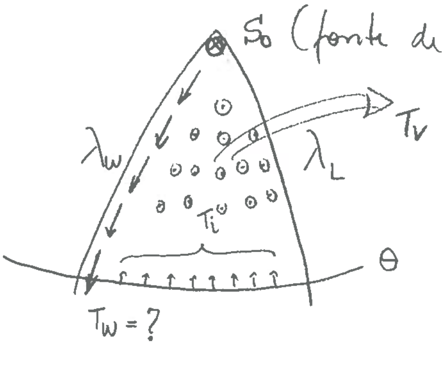
(3) $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \Rightarrow \dfrac{1}{a\,\mathrm{sen}\,\theta}\left[\dfrac{\partial u}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial}{\partial\theta}(v\,\mathrm{sen}\,\theta)\right] + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$

② Mostrar que a solução desse sistema é:

$v = \dfrac{a w_0}{h}\cot g\,\theta$

$u = \dfrac{2 w_0 a}{h}\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\lambda_L - \lambda)$

③ Encontrar a expressão para a corrente de contorno oeste para uma fonte no pólo norte



$dx = a\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\lambda$

$T_i = \displaystyle\int_{\lambda_W}^{\lambda_L} h v\cdot dx \Rightarrow T_i = \int_{\lambda_W}^{\lambda_L} h v\, a\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\lambda$

$T_V = \displaystyle\int_{\lambda_W}^{\lambda_L}\int_{\theta}^{0} w_0 (a\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\lambda)\, a\, d\theta$

$T_W + T_V = S_0 + T_i$

$\boxed{T_W = S_0 + T_i - T_V}$

④ Repetir para cada um dos casos à seguir

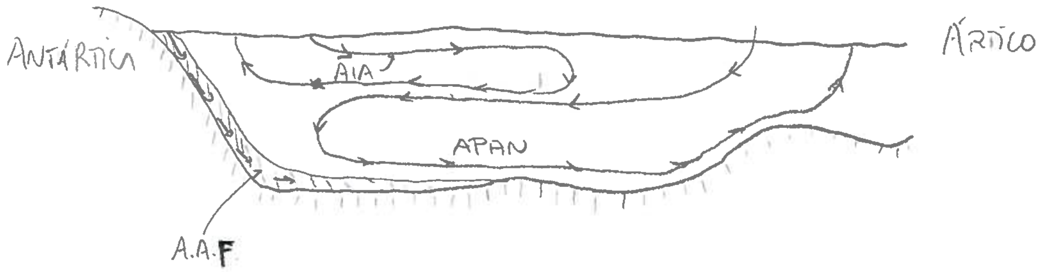
(a) fonte no canto inferior esquerdo

(b) bacia limitada por dois meridianos e dois paralelos (sem fontes)

(c) bacia fechada por paralelos ao sul e ao norte do equador (s/ fontes

(5) Comentar como fica a circulação profunda em todo o oceano.

— 22/08/2006 ————————————————



$\boxed{\text{MODELO DE KUO \& VERONIS}}$ pg 83 (apostila)

No modelo de Stommel & Arons, a circulação é:

$$\begin{cases} u = \dfrac{2W_0 a}{h} \sin\theta \left(\lambda_1 - \lambda_w\right) \\[2ex] v = \dfrac{a W_0}{h} \operatorname{cotg}\theta \end{cases}$$

Como comprovar isto de forma prática?

- Medir velocidade nessa prof. é difícil

Considere a concentração de um material passivo $C(x,y)$.

A equação da conservação desse indivíduo é:

$$\frac{dC}{dt} = \text{fontes} + \text{sorvedouros} \quad \therefore \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla C = \ldots$$

↳ Integrar no espaço para obter a solução

$\boxed{\text{LISTA 4}}$ Última

Utilizando o campo de velocidades do modelo de Stommel & Arons obter a distribuição espacial de $C=C(x,y)$ nos oceanos mundiais

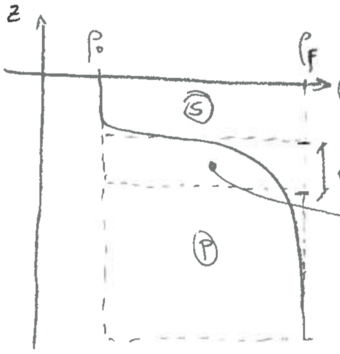
DICA: Seguir o paper do Kuo & Veronis, fazer um diagnóstico

- Sem dar muita ênfase a matemática → centrar na interpretação.

Uma boa fonte tb é: Evolution of Physical Oceanography
Newlman & Pearson

Como resultado, dizer se o modelo de Stommel e Arons é Robusto.

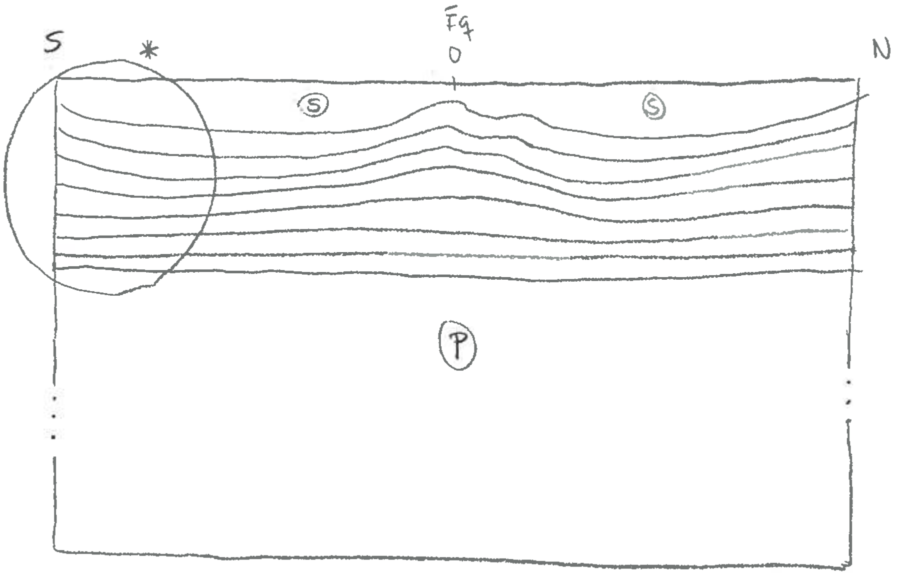
$\boxed{\text{TERMOCLINA}}$ $\Rightarrow$ sem cobrança na parte matemática



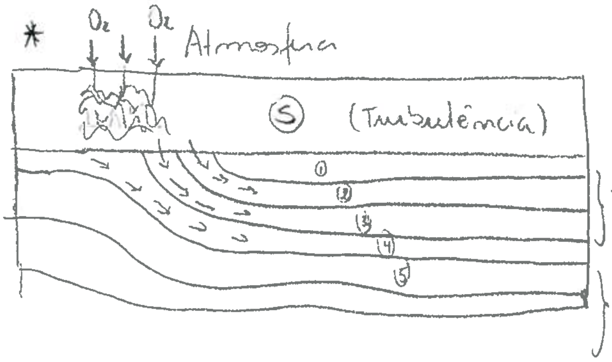
espessura da termoclina

Existe circulação na termoclina!

No mundo real



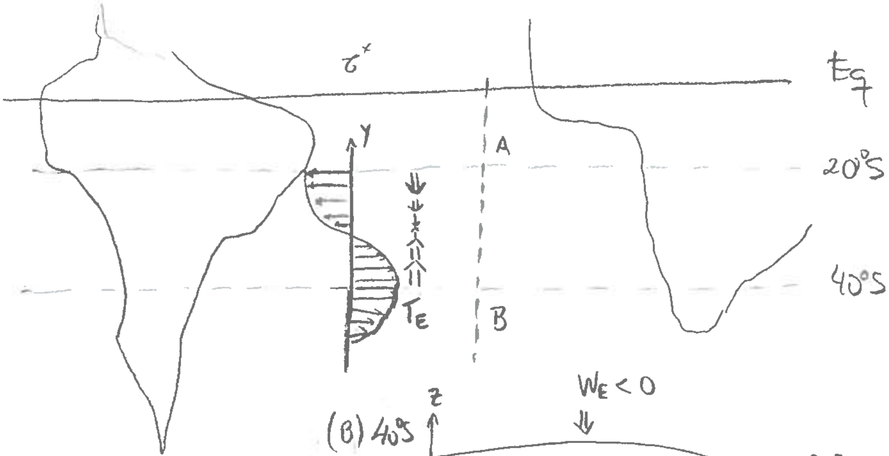
The ventilated Thermocline (..., Schott, ...)

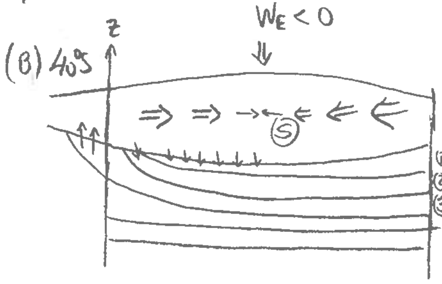


Termoclina Ventilada

Isopicnais atingem a cam. de mistura
1, 2, 3, 4

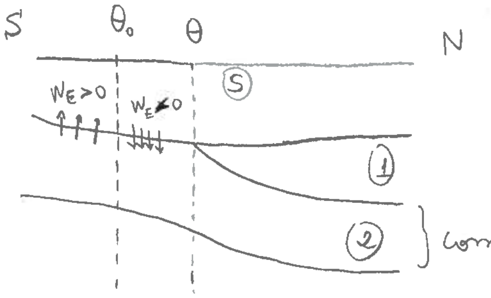
Termoclina não-ventilada 5, 6





} ganham fluido → ventiladas

③ → perde fluido → ñ é ventilada

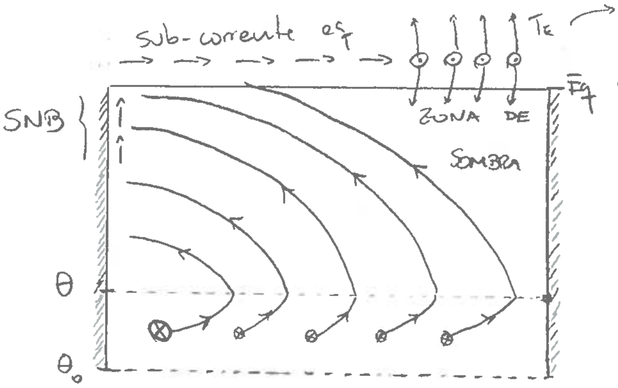


} como é o fluxo nessa camada?

Eventualmen[te]
afunda, retorn[a]
ndo a termoc[lina]

Resultado do Estudo (Termoclina ventilada)

→ devolve água p/ o interior do giro



fatia horizontal da camada ②

29/8/2006

TRABALHO FINAL → p/ 14/07

T de equilíbrio => $T_{recebida} = T_{emitida}$

$E = \sigma T^4$

Recebe e Emite Radiação

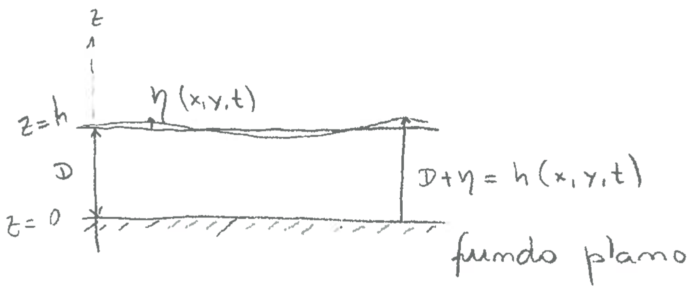
ONDAS EQUATORIAIS

ONDAS NÃO - GEOSTRÓFICAS

Ref: Pedlosky 3.1 - 3.9

Gill 10.3 - 10.5

Escala Horizontal >> Escala vertical



D= prof. média

$$h(x,y,t) = D + \eta(x,y,t)$$

Equações do Movimento

Assumindo aproximação hidrostática

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \longrightarrow g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{dw}{dt} \to 0$$

Considere a pressão dinâmica $\hat{p} = \frac{p}{\rho}$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)u - fv = -g\frac{\partial h}{\partial x} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)v + fu = -g\frac{\partial h}{\partial y} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)h + w(z=h) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_{z=0}^{z=D+\eta} (\text{eq da continuidade})\, dz$$

$$W(z=h) = \frac{dh}{dt} = \frac{d\eta}{dt} \rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{\text{desprezados}}$$

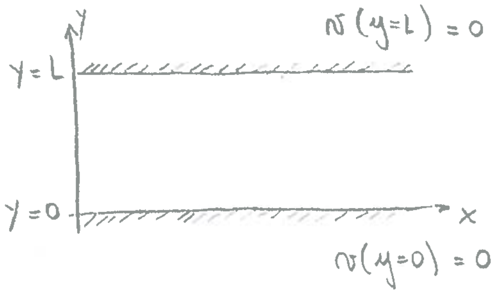
$$\Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) h + \frac{d\eta}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

linearizando tb as equações (1) e (2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\dfrac{\partial \eta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\dfrac{\partial \eta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + D\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\eta = gD\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla_H^2 \eta\right)}$$

Assumir:



$$\eta(x,y,t) = A(y)\cdot e^{i(kx-\sigma t)}$$

$\downarrow$

Substituindo uma onda na equação de onda

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \left(\frac{\sigma^2 - f^2}{gD} - k^2\right) A = 0$$

usando as condições de contorno $v_L = v_0 = 0$

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{fk}{\sigma}\cdot A = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, L$$

Dois casos para analisar:

(1) $\alpha^2 = \dfrac{\sigma^2 - f^2}{gD} - k^2 > 0 \rightarrow \boxed{A(y) = a\sin(\alpha y) + b\cos(\alpha y)}$

(2) $\alpha^2 < 0 \rightarrow \boxed{A(y) = ae^{-my} + b\cdot e^{my},\ m \in \mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Caso (1)}}$ $A(y) = a \sin(\alpha y) + b \cos(\alpha y)$

Relação de dispersão

$$\Rightarrow (\sigma^2 - f^2)(\sigma^2 - gDk^2)\sin(\alpha L) = 0$$

(i) $\cancel{\sigma^2 = f^2}$ $\Rightarrow$ $\sigma = \pm f$ (onda inercial)

(ii) $\cancel{\sigma = \pm\sqrt{gD}\cdot k}$ $\Rightarrow$ (ondas de kelvin)

(iii) $\sin(\alpha L) = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \sigma = \pm\left[f^2 + gD\left(k^2 + n^2\frac{\pi^2}{L}\right)\right]^{1/2} \Rightarrow \text{(onda de Poincaré)}$$

Onda de gravidade afetada pela rotação

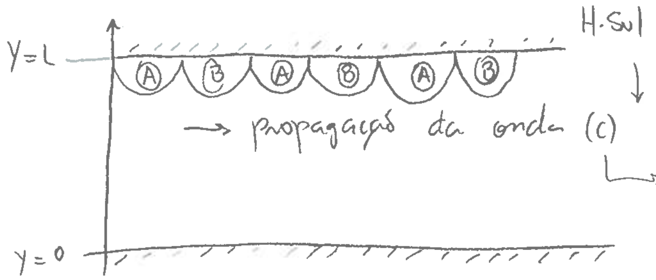
$\boxed{\text{para } \alpha^2 > 0 \Rightarrow \text{apenas ondas de Poincaré}}$

$\boxed{\text{CASO (2)}}$ $A(y) = ae^{-my} + be^{my}$

$\alpha^2 < 0$ $(\sigma^2 - f^2)(\sigma^2 - gDk^2) = 0$ $\Big\{$ ondas de Kelvin / ondas Inerciais

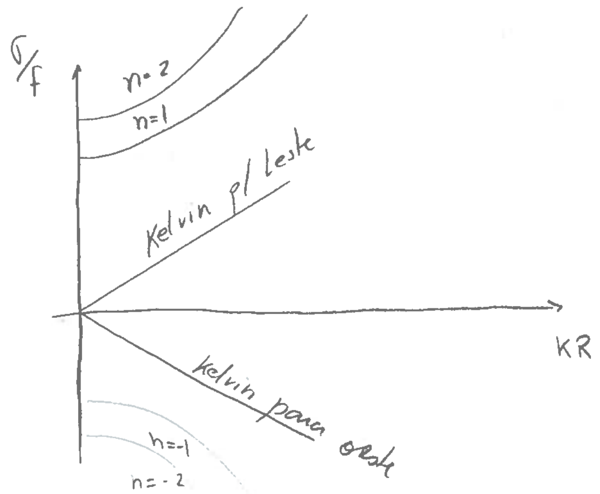
$\boxed{\text{ONDA DE KELVIN}}$

$$\sigma = -\sqrt{gD}\,k \Rightarrow A(y) = e^{f(y-L)/\sqrt{gD}}$$



↓ Amplitude decresce com y

↳ velocidade de fase



$$R_0 = \sqrt{\frac{gD}{f}}$$

ONDAS EQUATORIAIS

Compare frequência das ondas de Poincaré com ondas de Rossby

$\sigma^2 = f^2 + gD(k^2 + l^2) \geq f^2$ sub-inercial → Poincaré

$\sigma^2 = \dfrac{\beta^2 k^2}{(k^2 + l^2 + f^2/gD)^2} \leq \dfrac{\beta^2 gD}{f^2}$ supra-inercial → Rossby

Em latitudes médias, $\dfrac{\beta\sqrt{gD}}{f} \ll f$

Próximo ao Equador, $f \to 0$ e essas frequências se aproximam

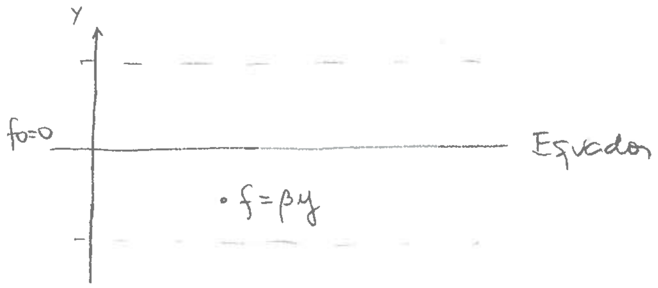
Eq. do mov. / Boussinesq / Hidrostática / s/mov. no estado básico / plano $f = \cancel{f_0} + \beta y$

$f_0 = 0$ Equador

1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = -\dfrac{\partial \hat{p}}{\partial x}$ 4) $\dfrac{\partial p_z}{\partial t} + N^2 w$ u, v, w, p

2) $\dfrac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = -\dfrac{\partial \hat{p}}{\partial y}$

3) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$



Combinando as equações (matemática complicada)

Relação de dispersão

$$\left(\sigma + \frac{kN}{m}\right)\left(\sigma^2 - \frac{kN\sigma}{m} - \frac{N\beta}{m}\right) = 0$$

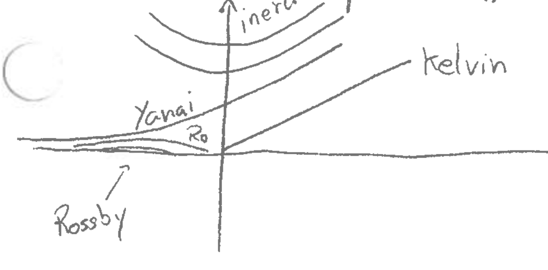
$\sigma + \dfrac{kN}{m} = 0$ ⇒ onda de Kelvin p/ leste

$\sigma - \dfrac{kN}{m} = 0$ permitido!

$\sigma + \dfrac{kN}{m} = 0$ não permitido!

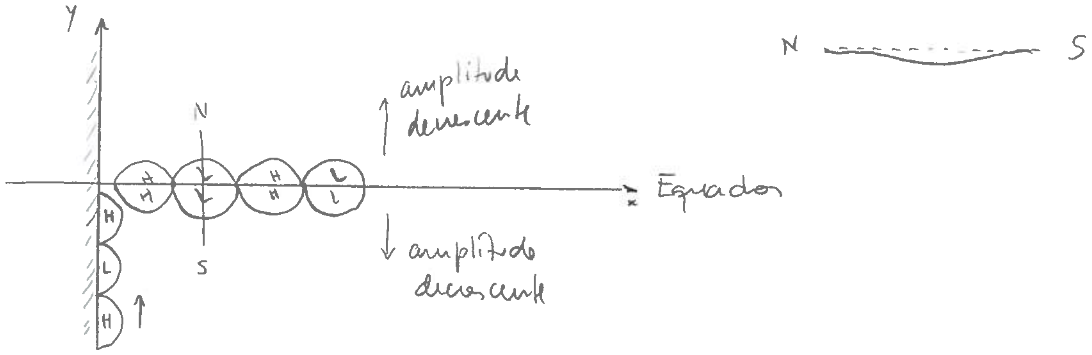
$\sigma = \pm\left(\dfrac{k^2 N^2}{m^2} + (2j+1)\dfrac{N\beta}{m}\right)^{1/2}$ ⇒ análogo a onda de Poincaré

⇒ ondas de Yanai



4 ondas equatoriais:
- Inercio-grav.
- Yanai
- Rossby
- Kelvin

Onda de Kelvin Equatorial



Onda de Yanai Equatorial