

TEMA 28

Ondas de Rossby Baroclínicas

8. 1. As Equações de Onda

8. 2. Relações de dispersão num oceano vertical infinito

8. 3. As ondas baroclínicas num oceano verticalmente limitado

8.2. Ondas de Rossby Baroquímicas.

- Usando as considerações anteriores e relembrando que utilizaremos um oceano com função de estratificação $N(z)$, as equações linearizadas do mov., da continuidade e da conservação da tensão de sâo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + w \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{\partial p'}{\partial t} - w N^2 \bar{p} = 0 \quad (4)$$

$$w = \frac{g}{\rho_0 N^2} \frac{\partial p'}{\partial t}$$

- A aproximação das espessuras requer que a anomalia da distância vertical entre duas superfícies isoperimétricas seja $O(\delta)$ se compara das com a distância entre as mesmas sup. no estado de repouso.

Ousya,

$$Ros = \frac{\Delta H}{H} \ll 1, \text{ que se traduz em } \frac{p'}{p} \ll 1.$$

- Adotaremos a aproximação do plano β , onde o parâmetro de Coriolis é aproximado linearmente considerando-se uma expansão em série de Taylor em torno de $\theta = \theta_0$:

$$f = 2L \sin \theta_0 + 2L \cos \theta_0 \frac{y}{a} + \dots$$

argumentos
pequenos

Q8 (4)

$$f = f_0 + \beta y, \quad \beta \equiv \text{parâmetros de Rossby}.$$

- Para que o parâmetro β seja validado em métricas latitudinais,

$$\hat{\beta} = \frac{\beta L}{f_0} \ll 1 \quad (\text{nº planetário}).$$

ou seja, a variação de vort. planetária é pequena se comparada a seu valor médio

- Sob os argumentos de Ro_T, Ro_S, $\hat{\beta} \ll 1$, observamos que (1) - (2) mesclam termos grandes com termos pequenos. Os termos grandes envolvem f_0 e o grad. de pressão:

- Se considerarmos apenas os grandes, chegarmos ao balanço giroscópico numa 1^a aproximação:

$$u \approx -\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad \text{e} \quad v \approx \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (5)$$

- Substituirmos os termos grandes nos termos pequenos da eq.(1)-(2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \right) - f_0 v - \beta y \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + f_0 u - \beta y \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (7)$$

Q8 (5)

$$u = -\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) + \beta y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) \quad (8)$$

$$v = \underbrace{\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x}}_{\text{geostófico}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right)}_{\text{correções agerostóficas}} - \beta y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) \quad (9)$$

- A equação (3) também possui termos grandes e pequenos. Se substituirmos (8) e (9) nela, observamos que os termos grandes se cancelam e o resultado é:

$$\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) + \cancel{\beta y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right)}$$

$$+ \cancel{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) - \cancel{\beta y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right)}$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) = 0$$

$$\text{ou } \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) - f_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

- Eliminaremos w da Eq. (10) através de (4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) - g \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \frac{p'}{\rho_0} \right) \right] = 0 \quad (11)$$

spiral

A equação hidrostática permite a redução de (11) apenas

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g \Leftrightarrow \frac{1}{g} \frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho'$$

e obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \left(\frac{p'}{f_0 f_o} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{f_0 f_o} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p'}{f_0} \right) \right] = 0. \quad (12)$$

Se definirmos a função de constante geostófica baroclinica a partir de (5):

$$\psi = \frac{p'}{\beta f_o} \quad (13)$$

e chegarmos

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

- A equação (14) é uma forma simplificada da eq. da conservação da vort. potencial "quase-geostófica".
- A pergunta que se segue é qual solução e quais condições de contorno adotar para encontrarmos soluções para (14)
- Em aulas anteriores, mostramos que para um fluido homogêneo, à presença de um gradiente de vorticidade planetária suporta uma classe de movimentos intrigantes e de frequência muito baixa que denominamos de ondas de Rossby.

- Com (14), podemos estender esta teoria às ondas de Rossby oceânicas num oceano estratificado

- As ondas de Rossby num fluido homogêneo não tem a capacidade de se propagar verticalmente - visto que não existe estratificação que o permita. A propagação é horizontal, e segue a forma de

$$\psi_{BT} \sim e^{i(Rx+ly-\omega t)}$$

- No oceano estratificado, há a possibilidade, como vimos anteriormente no estudo de ondas de gravidade e de Kelvin internas.

- Por simplicidade, assumamos uma variação linear de ρ tal que $N^2 = \text{const}$. A solução para (14) neste caso seria:

$$\psi(x, y, z, t) \sim e^{i(Rx+ly+mz-\omega t)} \quad (15)$$

onde m é nº de onda vertical. Tais ondas são hidrostáticas

$$\frac{Rl}{m} \ll 1$$

- A obtenção da relação de dispersão para as ondas de Rossby internas, nesse caso, seria dada por (15) em (14):
de pequena amplitude

$$\omega = - \frac{\beta R}{(R^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N^2} m^2)} \quad (16)$$

- A questão que surge é o quanto realista é esta solução para o oceano, visto que este apresenta limites verticais (topo e fundo) tão desmonstrados em diferenças de densidade.

8 / 10

- As amplitudes Ψ_i são obtidas pela projeção do modo $F_i(z)$ no $\Psi(x, y, z, t)$:

$$\Psi_i(x, y, t) = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \Psi(x, y, z, t) F_i(z) dz \quad (22)$$

- Exploraremos agora o caráter das soluções do sistema (18)-(19) para o caso mais simples de $N^2 = \text{const}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} F_i + \frac{f_0^2}{N^2} \lambda_i F_i = 0 \quad (23)$$

que tem solução geral: $F_i(z) = A_i e^{\alpha_i z} + B_i e^{-\alpha_i z} \quad (24)$

onde $\alpha_i = \frac{N}{f_0} \lambda_i^{1/2}$.

Com a cond $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ em $z=0$, chegamos a

$$A_i = B_i$$

$\underbrace{A_i}_{\text{c.c.}}$

$$F_i(z) = 2A_i \cos\left(\frac{N}{f_0} \lambda_i^{1/2} z\right)$$

Com a cond. $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ em $z=-H$, $\sin\left(\frac{N}{f_0} \lambda_i^{1/2} H\right) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_i = \frac{n^2 \pi^2}{H^2} \frac{f_0^2}{N^2} = R_d^{-2}} \quad (25)$$

- Os autovalores são determinados pela condição orthonormalidade
(21) :

$$\frac{1}{H} \int_{-H}^0 F_i^2 dz = 0 \quad (26)$$

→ notemos que este problema sempre um auto valor zero. Este autovalor é caracterizado por F_i que não apresenta variações verticais - corresponde ao modo barotrópico sob a approximação da tampa rígida:

$$\lambda_0 = 0, R_{d0}^2 = \infty \quad (\text{comp. muito lento se compara do aos baroclinicos})$$

$$\frac{1}{H} \int_{-H}^0 A_i^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{H}z\right) dz \Rightarrow A_0^2 = \frac{1}{\frac{1}{H} \int_{-H}^0 \cos^2(0) dz} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0 = 1}$$

- para $i \neq 0$,

$$A_i^2 = \frac{1}{\frac{1}{H} \int_{-H}^0 \cos^2\left(\frac{n\pi}{H}z\right) dz} = \frac{1}{\frac{1}{H} \left[\frac{1}{2}z + \frac{H}{2\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{H}z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{H}z\right) \right]_{-H}^0}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{H}(0+H)} = 2 \Rightarrow \boxed{A_i = \sqrt{2}} \quad \text{para } i \neq 0$$

SLIDE: Modos normais para $N = \text{const}$

8 (9)

- Com (16) em (14), chegamos à

$$-\frac{1}{\frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial t}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \bar{\Psi}_i + \beta \frac{\partial \bar{\Psi}_i}{\partial x} \right) = \frac{1}{F_i} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial F_i}{\partial z} \right) = -\lambda_i \quad (17)$$

onde λ_i é a constante de separação entre as partes vertical e espaço horizontal-temporal da eq (17)

- A equação de estrutura vertical toma forma de um problema de auto-valor tipo Sturm-Liouville:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial F_i}{\partial z} + \lambda_i F_i = 0 \quad (18)$$

- Com (16) em (15): $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ em $z=0, -H$ (19)

- Por tradição em oceanografia, os autovalores λ_i se relacionam com os raios de deformações barocínicas e as profundidades equivalentes

$$\lambda_i = R_{d_i}^{-2} \quad \text{e} \quad \lambda_i = \frac{f_0^2}{g h_{ei}} \quad (20)$$

- Os autovetores, os摸os dinâmicos de estrutura vertical, formam um conjunto ortogonal / orthonormal em termos da prof. média k respeito $z=-H$,

$$\frac{1}{H} \int_{-H}^0 F_i F_j dz = \delta_{ij} \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad (21)$$

- onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker.

- Uma alternativa é supor que a perturbação original ocorre numa região bastante longe dos contornos do oceano.
- É claro que novamente podemos nos perguntar o quanto realista isso através da inspeção da razão $\frac{m}{H}$ onde H é a espessura média da coluna de fluido.
- Obviamente, o ideal é não negligenciar a presença dos limites verticais do oceano. Em outras palavras, consideremos a existência física da superfície (interface ar-mar) em $z=0$ e do fundo (interface mar-assoalhos oceânicos) em $z=-H$.
- Condições de contorno, então, precisam ser impostas à Eq. (11)

$$w = 0 \quad \text{em } z = 0, -H \quad \rightarrow \text{sup. e fundo planos}$$

$$w = -\frac{f_0}{N^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{em } z=0, H \quad (15)$$

- A imposição dos contornos verticais no oceano estatificado impõem a solução na forma de onda plana. E, em contraste com o oceano sem limites verticais, há somente um conjunto discreto de soluções que satisfazem o problema.
- Assim a superposição das soluções toma a forma de

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i(x, y, t) F_i(z) \quad (16)$$

- (16) forma de separação de variáveis.

SLIDE: Exemplo para corrente do Brasil ao longo da BC

- Vale discutir a interpretação física dos modos normais: podem ser interpretados como modos estacionários verticalmente, resultando da superposição entre um modo que se propaga verticalmente para cima e outro para baixo. (Philander, 1989)

- A equação do evolução da amplitude é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla_H^2 \Psi_i - \frac{1}{R_{di}^2} \Psi_i \right) + \beta \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

- Assumindo uma solução para $\Psi_i \sim e^{i(Rx + ly - \omega t)}$, chegamos a

$$\omega = - \frac{\beta R}{k^2 + l^2 + R_{di}^{-2}} \quad (28)$$

que é a relação das ondas planetárias.

$$\rightarrow \text{ondas de baixa freqüência: } R_{di} \ll 1 \rightarrow (f_{0T})^{-1} \ll 1$$

$$\frac{\omega}{f_0} \ll 1$$

- limite de ondas curtas: $L < R_{di} \Leftrightarrow L^2 \ll R_{di}^2$

$$\omega_c \sim \beta L$$

• limite de ondas longas: $L^2 \gg R_{di}^2$

$$\omega_L \sim BL \left(\frac{R_{di}^2}{L^2} \right)$$

$$\rightarrow \omega_L \ll \omega_c$$

• velocidade de fase

$$c_{\alpha} = \frac{\omega}{k} = -\beta \frac{R_{di}^2}{1 + R_{di}^2 (k^2 + l^2)}$$

\rightarrow sempre para oeste

$\rightarrow c_{\alpha}$ tem sentido mais determinado

• velocidade de grupo

$$c_g x = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

$$= -\beta \frac{R_{di}^2 (k^2 - l^2)}{\left[1 + R_{di}^2 (k^2 + l^2) \right]^2}$$

$$= 0 \left[-\beta R_{di}^2 \frac{1 - \frac{R_{di}^2}{L^2}}{\left(1 + \frac{R_{di}^2}{L^2} \right)^2} \right]$$

ondas curtas $\frac{R_{di}^2}{L^2} \gg 1$

$\rightarrow c_{gx} > 0$

ondas longas $\frac{R_{di}^2}{L^2} \ll 1$

$\rightarrow c_{gx} < 0$

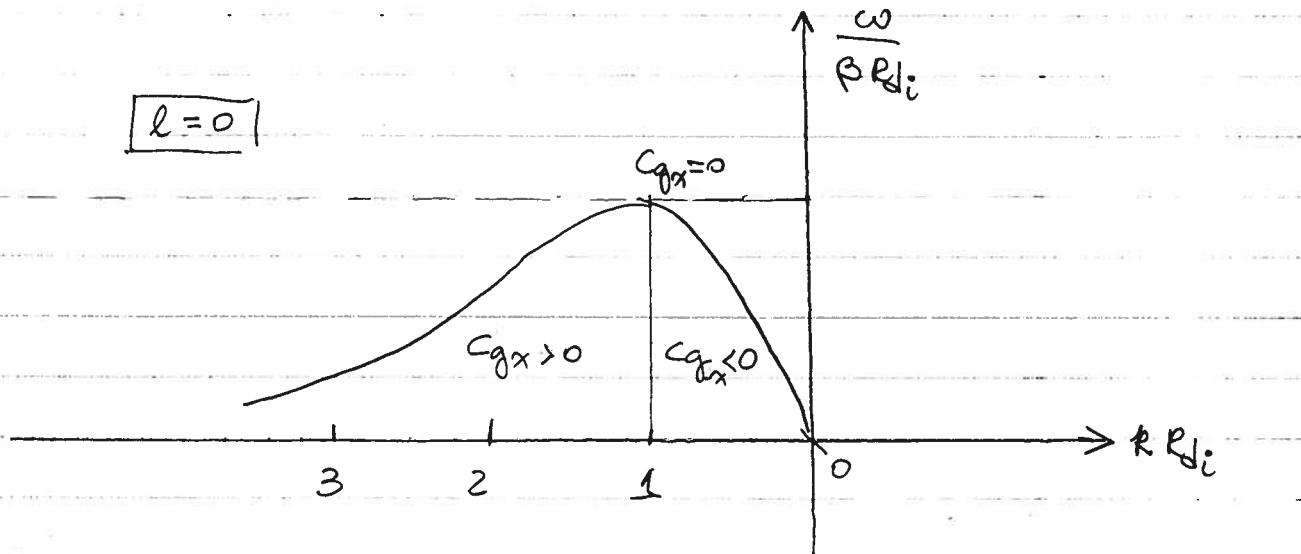
propagação energia/p/leste

- ondas longas || || p/oeste

- No limite das ondas longas :

$$\zeta_i g_x \rightarrow -\beta R_d^2 = \zeta_x \quad (\text{ondas nô dispersoes})$$

$$l=0$$



- Como a estratificação afeta as ondas baroclinicas?

$$B_u = \frac{\text{vort. relativa}}{\text{vort. de rotação}} = 0 \quad (\forall L^{-1})$$

$$B_u = \frac{R_d}{L} = 0 \quad (\forall R_d^{-1})$$

$$B_u = \frac{R_d^2}{L^2}$$

B_u pequeno - vort. de estratos domina - semelhante com o oceano BT

B_u grande - " relativa domina - estratificação reduz o acoplamento vertical

$B_u \sim 0(1)$ - ambos mecanismos competem

9. Ondas de Rossby Baroclinicas

- Equações fundamentais: (aprox. de Boussinesq): $\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$
(lineares, inviscidas)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + w \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

→ aproximações das espessuras: $Ros = \frac{\Delta H}{H} \ll 1 \rightarrow \frac{f'}{f} \ll 1$.

→ " " to planos β : $\beta = f_0 + \beta_y$; $\hat{\beta} = \frac{\beta L}{|f_0|} \ll 1$

→ " " geostrofica: $R_o, R_{oT}, \delta \ll L$

• Termos grandes de (1)-(2): $u = -\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (5)$

$$v = \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (6)$$

• Com (5) e (6) nos termos pequenos de (1)-(2),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \right) - f_0 v - \beta_y \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + f_0 u - \beta_y \left(\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (8)$$

$$u = -\frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) + \beta y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) \quad (9)$$

$$v = \frac{1}{\rho_0 f_0} \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) - \beta y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) \quad (10)$$

quântifico

conceitos aeroestáticos

- A eq. (3) também possui termos grandes e pequenos. Com (9) e (10) em 3:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{p'}{\rho_0 f_0^2} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

$$\rightarrow \text{rearranjando: } \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) - f_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

Eliminamos w usando (4) em (12),

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) - g \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \frac{p'}{\rho_0} \right) \right] = 0 \quad (11)$$

- Pela equação hidrostática $\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho_0 f_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{p'}{\rho_0} \right) \right] = 0 \quad (12)$$

- Com a definição da função de conveção geotrófica

$$\psi = \frac{p'}{\rho_0 f_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \psi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \psi' \right] = 0 \quad (14)$$

→ eq. VPQG linearizada.

- Há presença de grad. de vorticidade planetária \rightarrow ondas de Rossby existência

- No oceano BT, não há prop. vertical, solução sua

$$\psi(x, y, t) \sim e^{i(Rx + ly - \omega t)} \quad (15)$$

- No oceano BC, há propagação vertical. Assumimos por simplicidade $N^2 = \text{const.}$. A solução análoga a (15) seria:

$$\psi(x, y, z, t) \sim e^{i(Rx + ly + mz - \omega t)} \quad (15')$$

como todos os ondas são hidrostáticas: $R, l \ll 1$

- Relações de dispersão num oceano sem limites laterais:

$$\omega = - \frac{\beta R}{R^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N^2} m^2} \quad (16)$$

→ mas é realista? o oceano é razoável ter limites verticais bem definidos (topo e fundo)

→ podemos usar isso através da integral da razão $\frac{m}{H}$, onde H é a espessura média do fluido

- O ideal é na negligença os limites verticais!

- Isto impõe condições de contorno à eq. (14),

$$w = 0 \text{ em } z = 0, -H$$

$$w = -\frac{f_0}{N^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0 \text{ em } z = 0, -H \quad (15)$$

- Solução: $\psi(x, y, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(x, y, t) F_i(z) \quad (16)$

- Com (16) em (12) e (15),

$$\frac{-1}{\partial \tilde{\Psi}_i / \partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \tilde{\Psi}_i + \beta \frac{\partial \tilde{\Psi}_i}{\partial x} \right) = \frac{1}{F_i} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial F_i}{\partial z} \right) = -\lambda_i \quad (17)$$

↓
const. de separação

- Eq. à estrutura vertical: $\frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial F_i}{\partial z} + \lambda_i F_i = 0 \quad (18)$

Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \frac{\partial F_i}{\partial z} = 0 & \text{em } z = 0, -H \end{cases} \quad (19)$$

- Por tradição/definição $\lambda_i = R_{d_i}^{-2} \in \lambda_i = \frac{f_0^2}{g h_i}$ $\quad (20)$

- Ortonormalidade: $\frac{1}{H} \int_{-H}^0 F_i F_j dz = \delta_{ij} \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (21)$

R / Q8/05

• Amplitudes: $\bar{F}_i(x, y, t) = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 \psi(x, y, z, t) F_i(z) dz$ (22)

• Vamos a explorar a cond. $N^2 = \text{const.}$, a solucion de (18) es:

$$F_i(z) = A_i e^{\alpha_i z} + B_i e^{-\alpha_i z} \quad (23)$$

onde $\alpha_i = N \frac{\lambda_i^{1/2}}{f_0}$.

• Com a cond. $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ em $z=0$, $A_i = B_i$ (24)

$$A_i$$

$$\rightarrow F_i = \underbrace{2 A_i}_{\alpha_i} \cos \left(\frac{N \lambda_i^{1/2}}{f_0} z \right)$$

• Com $\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0$ em $z=-H$, $\sin \left(\frac{N \lambda_i^{1/2}}{f_0} H \right) = 0$

$$\rightarrow \boxed{\lambda_i = \frac{n^2 \pi^2}{H^2} \frac{f_0^2}{N^2} = R_{d_i}^{-2}} \quad (25)$$

• Encontramos F_i através de (21): $\frac{1}{H} \int_{-H}^0 F_i^2 dz = 0$ (26)

• Sempre ha' $\lambda_0 = 0 \rightarrow R_{d_0}^{-2} = \infty$ (muito longo se compara BC)

$$\therefore \frac{1}{H} \int_{-H}^0 A_0^2 \cos^2 \left(\frac{n \pi z}{H} \right) dz$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{1}{\frac{1}{H} \int_{-H}^0 \cos^2(0) dz} = 1 \Rightarrow A_0 = 1$$

para $i \neq 0$, $A_i^2 = \frac{1}{H \cdot \left[\frac{1}{2} z + \frac{H}{2\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{H} z\right) \cos\left(\frac{n\pi}{H} z\right) \right]_{-H}^0}$

$$A_i^2 = \frac{2}{\frac{1}{H} (0+H)} = 2 \Leftrightarrow A_i = \sqrt{2} \quad \text{para } i \neq 0$$

→ desenhar modos

• A eq. de evolução da amplitude:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla_H^2 \Psi_i - \frac{1}{R_{di}^2} \Psi_i \right) + \beta \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

para $\Psi_i \sim e^{i(Rx+ly-\omega t)}$,

$$\omega = -\frac{\beta R}{R^2 + l^2 + R_{di}^{-2}} \quad (28)$$

→ ondas de baixa freqüência: $R_0 \ll l \rightarrow \frac{\omega}{|f_0|} \ll 1$

• limite de ondas curtas: $L < R_{di} \Leftrightarrow L^2 \ll R_{di}^{-2}$

$$\omega_c \sim \beta L$$

• limite de ondas longas: $\omega_L \sim BL \left(\frac{R_{di}^2}{L^2} \right)$

→ $\omega_L \ll \omega_c$

R/Q8/Q7

- velocidade de fase: $c_x = \frac{\omega}{k}$ → sempre positiva
→ c_y tem sentido indeterminado

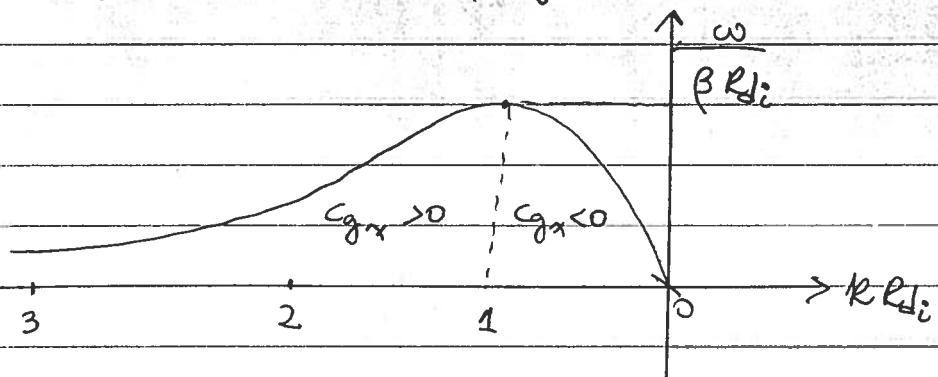
- velocidade de grupo: $c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = - \frac{\beta R_d^2 (k^2 - l^2)}{[1 + R_d^2 (k^2 + l^2)]^2}$$

$$= 0 \left[-\beta R_d^2 \frac{1 - \frac{R_d^2}{L^2}}{(1 + \frac{R_d^2}{L^2})} \right]$$

ondas curtas: $\frac{R_d^2}{L^2} \gg 1 \rightarrow c_{gx} > 0$ (leste)

ondas longas $\ll 1 \rightarrow c_{gx} < 0$ (oeste)



$$\rightarrow i \frac{R_d^2}{L^2} = Bu = \frac{\text{vort. relativa}}{\text{vort. de estiramento}}$$

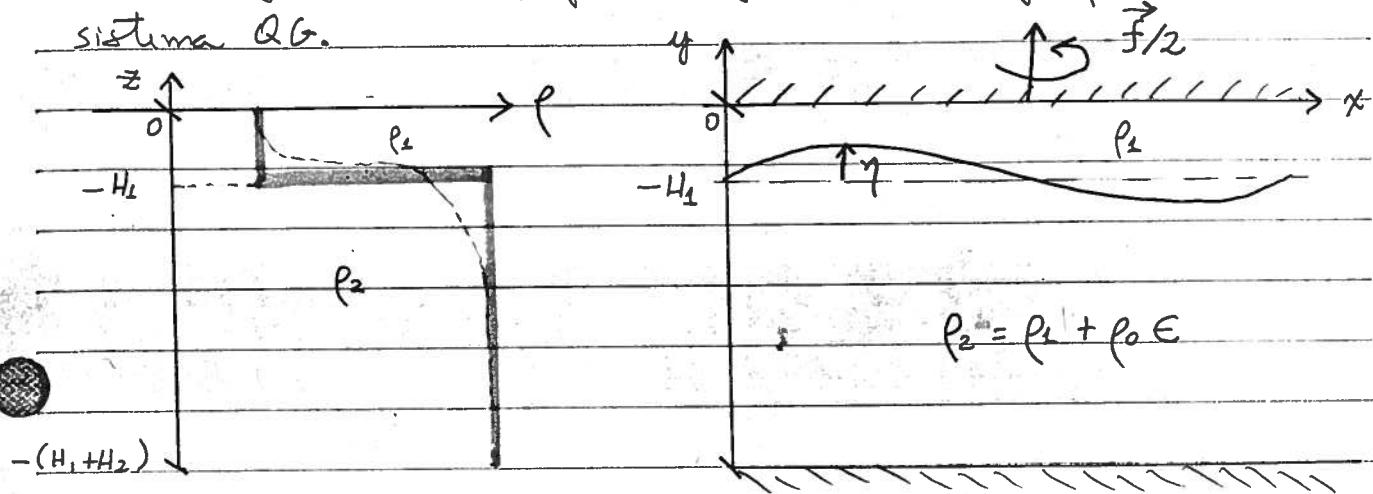
- ondas curtas (Bu grande) - vort. relativa domina estratificação no fluxo acoplamento vertical

- ondas longas (Bu pequeno) - vort. estir.: domina semelhante ao oceano BT

- ondas normais ($Bu \sim O(1)$) - os dois mecanismos competem

O Modelo de Duas Camadas

- O modelo de duas camadas foi criado por Phillips (1951) com o objetivo de simplificar o efeito da stratificação no sistema QG.



$$\epsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_0}, \quad N^2 \sim \underbrace{E g}_{\text{gravidade reduzida}} \underbrace{\delta(z - H_1)}_{\text{delta de Dirac}}$$

- O sistema QG discretizado é dado por

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + J(\psi_1, \cdot) \right] q_1 = 0 \quad (29)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + J(\psi_2, \cdot) \right] q_2 = 0$$

onde as relações de invariabilidade são:

$$q_1 = \nabla^2 \psi_1 + \beta y + \frac{f_0^2}{E g H_1} (\psi_2 - \psi_1) \quad (30)$$

$$q_2 = \nabla^2 \psi_2 + \beta y + \frac{f_0^2}{E g H_2} (\psi_1 - \psi_2)$$

- A solução para (29) - (30) tem a forma

$$\psi_i(x, y, t) = \sum_{i=0}^1 \Psi_i(x, y, t) F_i^j \quad j \in \text{índice modal} \\ i \in \text{"camada}$$

(31)

- O sistema de eq. da estrutura vertical em forma matricial é:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & \frac{-f_0^2}{EgH_1} + \lambda_j & \frac{f_0^2}{EgH_2} & F_1^j & 0 \\ \hline & \frac{f_0^2}{EgH_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \right) & -\frac{f_0^2}{EgH_1} \left(\frac{H_1}{H_2} \right) + \lambda_j & F_2^j & 0 \\ \hline \end{array} = \quad (32)$$

- A solução não-trivial é obtida calculando o determinante da matriz:

$$\lambda_j^2 - \left[\frac{H_1}{H_2} \left(\frac{f_0^2}{EgH_1} \right) - \frac{f_0^2}{EgH_2} \right] \lambda_j = 0 \quad (33)$$

$$\lambda_0 = 0, \quad R_{d_0} = \infty \quad - \text{corresponde ao modo BT}$$

$$\lambda_1 = \frac{f_0^2}{EgH_1} \left(1 + \frac{H_1}{H_2} \right) = \frac{f_0^2}{EgH_1 H_2} (H_1 + H_2) = \frac{f_0^2}{EgH_m}$$

$$R_{d_1} = \sqrt{\frac{EgH_m}{|f_0|}} \quad - \text{corresponde ao modo BC} \quad (34)$$

- Determinar os autovalores + uso cond. da ortonormalidade

$$\begin{bmatrix} -\frac{f_0^2}{EgH_1} & \frac{f_0^2}{EgH_2} \\ \frac{f_0^2}{EgH_2} & -\frac{f_0^2}{EgH_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^0 \\ F_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow F_1^0 = F_2^0 \quad (35)$$

$$\frac{1}{H} (H_1 F_1^0 + H_2 F_2^0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{H} (H_1 + H_2) F_1^0 = 1$$

$$\boxed{F_1^0 = F_2^0 = 1} \quad (36)$$

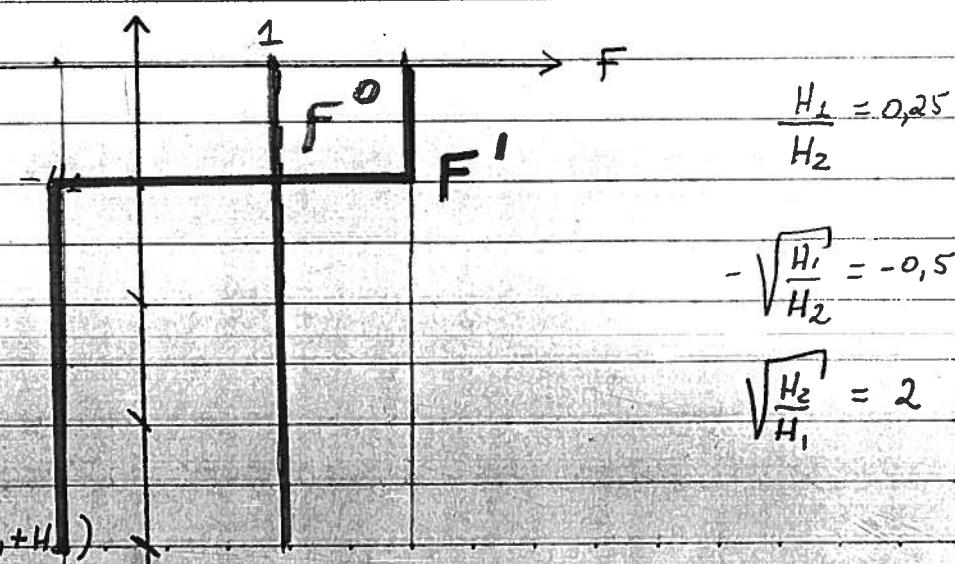
- Para $\lambda_1 = \frac{f_0^2}{Eg_{H_1, H_2}} (H_1 + H_2)$

$$\begin{bmatrix} \frac{f_0^2}{Eg_{H_2}} & \frac{f_0^2}{Eg_{H_1}} \\ \frac{f_0^2}{Eg_{H_2}} & \frac{f_0^2}{Eg_{H_1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1' \\ F_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{F_1' = -\frac{H_1}{H_2} F_2'} \quad (37)$$

e com a condição da estacionariedade

$$\frac{1}{H} \left[H_1 (F_1')^2 + H_2 \left(-\frac{H_1}{H_2} F_2' \right)^2 \right] = 1$$

$$\boxed{F_1' = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}} \quad , \quad F_2' = -\sqrt{\frac{H_1}{H_2}} \quad (36)$$



$$-\sqrt{\frac{H_1}{H_2}} = -0,5$$

$$\sqrt{\frac{H_2}{H_1}} = 2$$