Santelino

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO OCEANOGRÁFICO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM OCEANOGRAFIA FÍSICA
IOF 5857 - DINÂMICA DE FLUIDOS GEOFÍSICOS I
PROFESSOR: BELMIRO MENDES DE CASTRO FILHO
PERÍODO: 1.o de 2007

1. PROGRAMA

1. **Introdução:** A hipótese do contínuo. Coordenadas esféricas, polares e cartesianas. Transportes. Especificações Lagrangeana e Euleriana. Derivada material. Linhas de corrente. Trajetórias. Pressão e Tensão superficial.

2. **Forças e equações de conservação:** Forças atuantes em um elemento de volume. Teorema de conservação de propriedades da hidrodinâmica. Equações de conservação: conservação de massa, de sal, de momentum e de calor. Equação de estado. As equações num referencial ligado rigidamente à Terra. Aproximações: Boussinesq, plano beta, plano f e outras. Linearização. Equação de Bernoulli.

3. **Ondas de gravidade:** Ondas superficiais livres em um fluido inviscido e homogêneo; aproximações para ondas longas e para ondas curtas. Influência da tensão superficial: ondas capilares. Ondas internas livres em um fluido inviscido e estratificado; fluido verticalmente infinito; fluido verticalmente limitado: modos normais. Energia das ondas de gravidade. Ondas internas forçadas por movimentos sobre topografia variável. Instabilidade de Kelvin-Helmholtz; número de Richardson.

4. **Rotação:** Vorticidade e circulação. Teorema de Kelvin. Equação da vorticidade. Vorticidade potencial. Equação do vento térmico. Teorema de Taylor-Proudman.

5. **Movimentos estacionários:** Movimento geostrófico. Movimento de gradiente. Movimento ciclostrófico. Movimento inercial.

6. **Ondas de gravidade influenciadas pela rotação da Terra:** Ondas de Poincaré superficiais e internas. Ondas de Kelvin. Marés oceânicas.

7. **Teoria inviscida para águas rasas:** Modelo de águas rasas. Equação da vorticidade. Conservação da vorticidade potencial. Movimento geostrófico. Ondas de gravidade. Aproximação quase-geostrófica. Ondas de Rossby planetárias e topográficas. Energia e reflexão de ondas de Rossby.

8. **Atrito:** Tensões de Reynolds. Camada limite superficial. Camada limite de fundo.

2. REFERÊNCIAS

- Geophysical Fluid Dynamics, de J. Pedlosky;
- Waves in the Ocean and Atmosphere, de J. Pedlosky;
- Atmosphere-Ocean Dynamics, de A.E. Gill;
- Waves in the Ocean, de P.H. LeBlond e L.A. Mysak;
- Introduction to Geophysical Fluid Dynamics, de B. Cushman-Roisin;
- Fluid Mechanics; de P. Kundu.

3. AVALIAÇÃO

- Listas de exercícios: 45%;
- Exame intermediário: 25%; Exame final: 25%;
- Participação: 5%.

São Paulo, 05/03/2007 - MESTRADO EM OCEANOGRAFIA FÍSICA - IOUSP (1)

DINÂMICA DE FLUIDOS GEOFÍSICOS I

PROFESSOR: Belmiro Mendes de Castro Filho

1. INTRODUÇÃO

CONTÍNUO: o fluido é tratado como contínuo, ao invés de um conjunto de moléculas, pois a escala dos processos que serão estudados são maiores que a escala molecular

$> 10^{-8}$ m

Porém, alguns processos são moleculares, como a condução de calor. Nesse caso, a solução é a parametrização, que consiste em usar variáveis "macroscópicas" para representar o processo.

↳ do fluido contínuo

CIÊNCIA QUE ESTUDA OS "CONTÍNUOS" ⇒ DINÂMICA DE FLUIDOS < gás / líquidos

O nome "GEOFÍSICO" se refere a fluidos que sofrem efeito da rotação da TERRA (água do mar e ar atmosférico)

1.1 CAMPOS VETORIAIS

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t) = v_1(\vec{r},t)\vec{e}_1 + v_2(\vec{r},t)\vec{e}_2 + v_3(\vec{r},t)\vec{e}_3$$

$\vec{v}$: vetor velocidade

t: tempo

(v_1, v_2, v_3): componentes do vetor $\vec{v}$

$\vec{r}$: vetor posição

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

(x_1, x_2, x_3): coordenadas do ponto

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: versores coordenados (vetores unitários)

Produto Escalar : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \cdot \cos\theta$

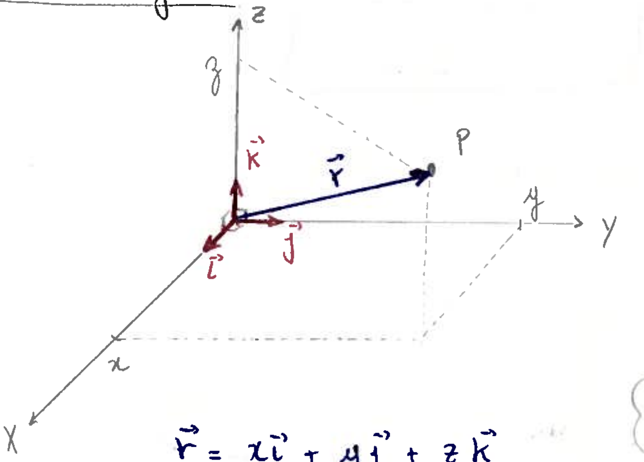
Produto Vetorial : $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(|\vec{v}_1||\vec{v}_2| \operatorname{sen}\theta\right) \vec{n}$ — versor normal ao plano $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

1.1.1. Coordenadas Cartesianas Retangulares

$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x, y, z)$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$(v_1, v_2, v_3) \rightarrow (u, v, w)$



$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \therefore$

$\therefore \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

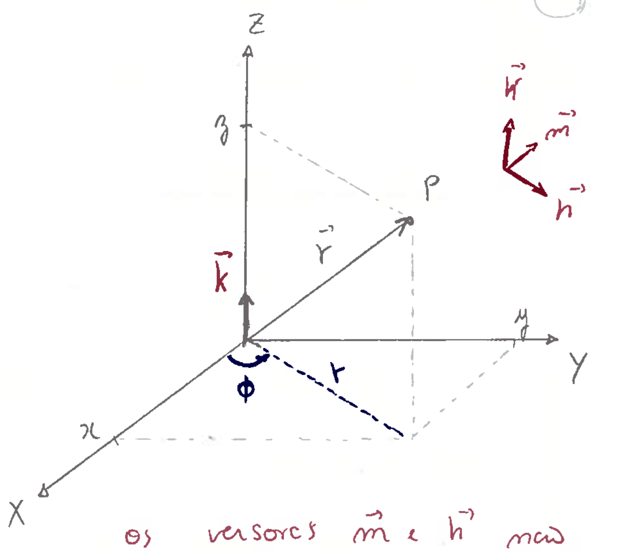
$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \ldots$$

1.1.2 Coordenadas Cilíndricas

$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (r, \phi, z)$ $\quad$ ϕ em radianos

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{h}, \vec{m}, \vec{k})$



Eq. de transformação

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\operatorname{sen}\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{h} = \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\operatorname{sen}\phi \\ \vec{m} = -\vec{i}\operatorname{sen}\phi + \vec{j}\cos\phi \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

os versores $\vec{m}$ e $\vec{h}$ não são fixos quando muda se o ponto P

OBS: $\vec{h} = \vec{h}(\phi)$ ($\vec{h}$ é funçao de ϕ)

$\vec{m} = \vec{m}(\phi)$ — vasores nao constantes $\Rightarrow$ derivada $\neq 0$

$\vec{k} = cte$ $\dfrac{\partial \vec{h}}{\partial \phi} = \vec{m}$; $\dfrac{\partial \vec{m}}{\partial \phi} = -\vec{h}$; $\dfrac{\partial \vec{k}}{\partial \phi} = 0$ $\vec{m}$

$\vec{h}$ aponta na direçao do r crescente

$\vec{r} = r\vec{h} + z\vec{k}$ $\Rightarrow$ repare que $\vec{h} = \vec{h}(\phi)$!

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cdot\vec{h}) + \frac{d}{dt}(z\vec{k})$$

fazer em casa esta passagem !

$$\boxed{\vec{v} = v_r\vec{h} + v_\phi\vec{m} + v_z\vec{k}}$$

onde: $v_r = \dfrac{dr}{dt}$; $v_\phi = \dfrac{d\phi}{dt}$; $v_z = \dfrac{dz}{dt}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = a_r\vec{h} + a_\phi\vec{m} + a_z\vec{k}$$

onde: $a_r = \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2$

$a_\phi = r\dfrac{d^2\phi}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\phi}{dt}$

$a_z = \dfrac{d^2 z}{dt^2}$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = b_r c_r + b_\phi c_\phi + b_z c_z$$

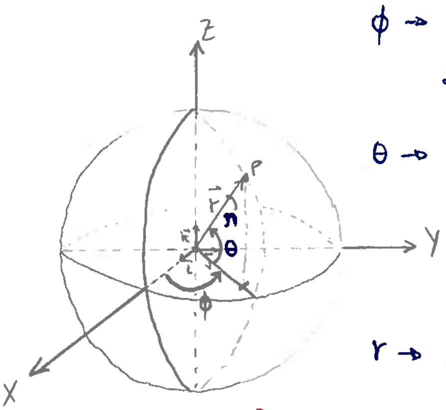
OBS: cada versor aponta na direçao crescente da sua coordenada !

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{h} & \vec{m} & \vec{k} \\ b_r & b_\phi & b_z \\ c_r & c_\phi & c_z \end{vmatrix}$$

1.1.3 Coordenadas Esféricas

$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (\phi, \theta, r)$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{m}, \vec{l}, \vec{n})$



$\phi \rightarrow$ ângulo entre os 2 "meridianos"

$\theta \rightarrow$ ângulo entre os 2 "paralelos"

$r \rightarrow$ módulo do vetor $\vec{r}$

Eq. de transformação:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \\ z = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{m} = -\vec{i}\,\text{sen}\,\phi + \vec{j}\cos\phi \\ \vec{l} = -\vec{i}\cos\phi\,\text{sen}\,\theta - \vec{j}\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta + \vec{k}\cos\theta \\ \vec{n} = \vec{i}\cos\phi\cos\theta + \vec{j}\,\text{sen}\,\phi\cos\theta + \vec{k}\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

OBS: $\vec{m} = m(\phi)$; $\vec{l} = \vec{l}(\phi,\theta)$; $\vec{n} = \vec{n}(\phi,\theta)$

→ Nenhum desses versores é constante

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial \phi} = \vec{l}\,\mathrm{sen}\,\theta - \vec{m}\cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial \vec{m}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{l}}{\partial \phi} = -\vec{m}\,\mathrm{sen}\,\theta \quad ; \quad \frac{\partial \vec{l}}{\partial \theta} = -\vec{n}$$

então, $\vec{r} = r\vec{n}$ (vetor posição)

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial \phi} = \vec{m}\cos\theta \quad ; \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial \theta} = \vec{l}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{m}) = v_\phi \vec{m} + v_\theta \vec{l} + v_r \vec{n}$$

onde:
$$\begin{cases} v_\phi = r\cos\theta \dfrac{d\phi}{dt} \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} \\ v_r = \dfrac{dr}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = a_\phi \vec{m} + a_\theta \vec{l} + a_r \vec{n}$$

onde:
$$\begin{cases} a_\phi = r\cos\theta \dfrac{d^2\phi}{dt^2} - 2r\,\mathrm{sen}\,\theta \dfrac{d\phi}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + 2\cos\theta \dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\phi}{dt} \\ a_\theta = r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2 \\ a_r = \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\cos^2\theta\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)^2 - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \end{cases}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = b_r c_r + b_\phi c_\phi + b_\theta c_\theta$$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{m} & \vec{l} & \vec{n} \\ b_\phi & b_\theta & b_r \\ c_\phi & c_\theta & c_r \end{vmatrix}$$

1.1.4 FLUXO

porção de fluido (S)

a normal sempre será definida "para fora" do volume que contém a superfície

$d\vec{\sigma} = \vec{n}\, d\sigma$ $[L^2]$ → dimensão

FLUXO DE VOLUME ATRAVÉS DE $d\sigma$: $\boxed{\vec{v} \cdot d\vec{\sigma}}$

$\left[\frac{L}{T} \cdot L^2\right] = [L^3 T^{-1}]$

$m^3 \cdot s^{-1}$ no S

usando o prod. escalar garante-se que apenas a componente normal à S está sendo considerada

FLUXO DE MASSA ATRAVÉS DE $d\sigma$: $\boxed{\rho \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}}$

$[MT^{-1}] = L^3 T^{-1} \times \frac{M}{L^3}$ → densidade (ρ)

FLUXOS ATRAVÉS DE $\underline{\underline{S}}$: Fluxo de Volume $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \mathbb{V}$; Fluxo de Massa $\iint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \mathbb{M}$

1.1.5 DIVERGENTE

$\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 F_3) \right]}$$

h_1, h_2, h_3: fatores de escala, são funções do sistema de coordenadas utilizad

x_1, x_2, x_3: coordenadas

Cartesianas: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$

Cilíndricas (r, ϕ, z): $h_1 = h_r = 1$
$h_2 = h_\phi = r$
$h_3 = h_z = 1$

Esféricas (r, θ, ϕ)
$h_1 = h_r = 1$
$h_2 = h_\theta = r$
$h_3 = h_\phi = r \cos\theta$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \Rightarrow \text{cartesianas}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r F_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \Rightarrow \text{cilíndricas}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \cos\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) \Rightarrow \text{esféricas}$$

1.1.6 Rotacional

$$\boxed{\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}}$$

... escreva em casa os rotaciona nos 3 sistemas de coorde da

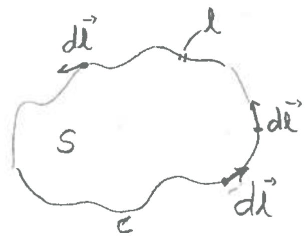
1.1.7 Teorema de Gauss (teorema da divergência)

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{\sigma} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{v}\, dV$$

(Aplicado a $\vec{v}$)

1.1.8 Teorema de Stokes

$$\iint_S (\nabla\times\vec{v})\cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l}$$



o contorno $\underline{\underline{c}}$ contém {
superfície $\underline{\underline{s}}$

(Aplicado a $\vec{v}$)

07/03/2007

1.2 Campos Escalares

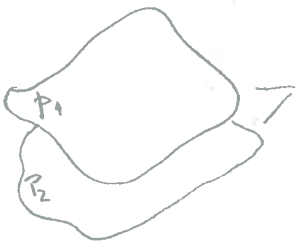
T: isotérmica

S: isohalina

p: isobáricas

ρ: isopicnais

T, S, p, ρ, Φ



superfícies equi-escalares (nunca se cruzam)

Equação da superfície equi-escalar para ψ: $\boxed{d\psi = 0}$ → diferencial total ou derivada total

Mas $\psi = \psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \psi$ é função do espaço e do tempo, daí, usando a regra da cadeia:

$$d\psi = \underbrace{\frac{\partial\psi}{\partial t}dt}_{\text{Variação Local}} + \underbrace{\nabla\psi\cdot d\vec{r}}_{\text{Variação Espacial}}$$

→ tempo fixo, grandeza varia no espaço

→ Ponto fixo, grandeza varia no tempo

1.2.1 GRADIENTE

$$\nabla\psi = \frac{\vec{e_1}}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\vec{e_2}}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \frac{\vec{e_2}}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}$$

Coordenadas Cartesianas:

$$\nabla\psi = \vec{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla\psi = \vec{h}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\vec{m}}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \vec{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Coordenadas Esféricas:

$$\nabla\psi = \frac{\vec{m}}{r\cos\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \frac{\vec{l}}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \vec{n}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

1.2.2 LAPLACIANO

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)\right]$$

Coordenadas Cartesianas

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Coordenadas Esféricas

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

<u>Divergente</u> reduz a ordem de um tensor em 1 ordem

<u>Rotacional</u> mantém a ordem

<u>Gradiente</u> eleva a ordem

<u>Laplaciano</u> mantém a ordem

TRÓPICO = paralelo

CLÍNICO = inclinado

1.2.3. CLASSIFICAÇÃO DOS CAMPOS

Campo <u>BAROTRÓPICO</u> : superfícies equi-escalares são paralelas às isobáricas (do campo)

$$\nabla\psi \times \nabla p = 0$$

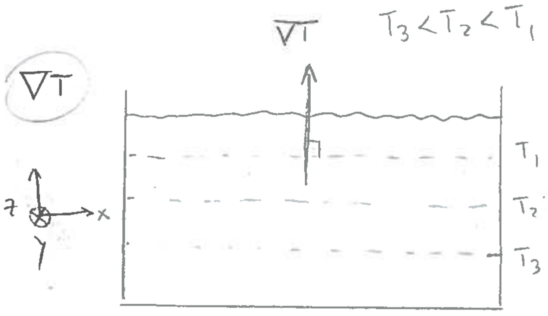
Campo <u>BAROCLÍNICO</u> = supf. equi-escalares cruzam às isobáricas

$$\nabla\psi \times \nabla p \neq 0$$

1.3 INTERPRETAÇÃO

T_1, T_2, T_3 = supf. isotérmicas

∇T



$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\overset{0}{\vec{i}} + \cancel{\frac{\partial T}{\partial y}}\overset{0}{\vec{j}} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$

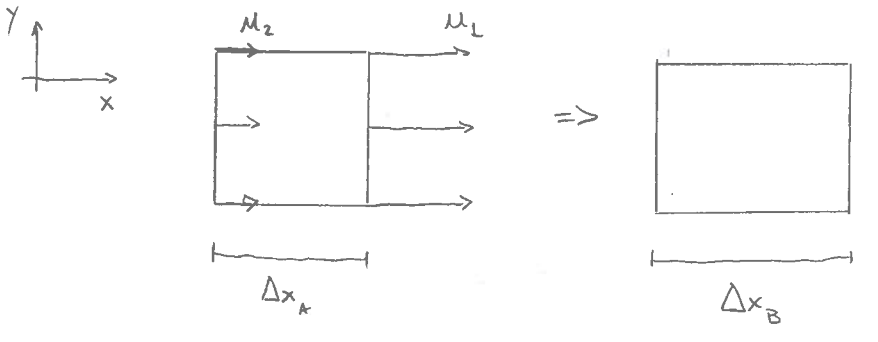
$$\nabla T = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial z}}_{+}\vec{k}$$

$\nabla T \Rightarrow$ como o escalar T varia no espaço

* o gradiente aponta sempre do menor para o maior valor do escalar, na direção da máxima variação

$\nabla \cdot \vec{v}$ $\quad \vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j}$, $\quad \nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$

* o divergente mede a variação espacial de um vetor

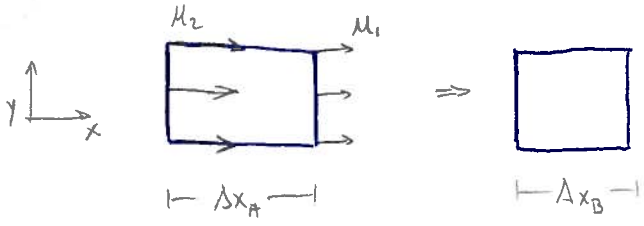


$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{v} > 0$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_1 - u_2}{\Delta x} > 0$$

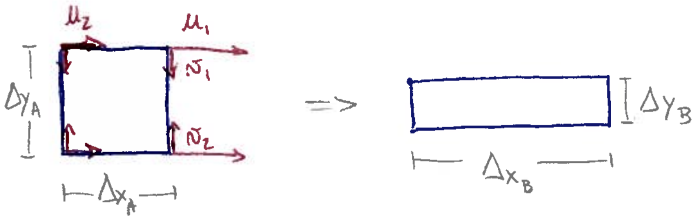
$\nabla\cdot\vec{v} > 0 \iff$ DIVERGÊNCIA



$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_1-u_2}{\Delta x_A} < 0$$

$\nabla\cdot\vec{v} < 0 \iff$ CONVERGÊNCIA

$\Delta x_B < \Delta x_A$

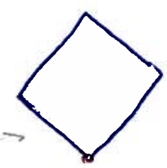


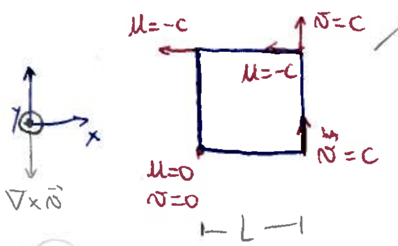
$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \approx \underbrace{\frac{u_1-u_2}{\Delta x_A}}_{+} + \underbrace{\frac{v_1-v_2}{\Delta y_A}}_{-}$$

$\Delta x_B > \Delta x_A$ e $\Delta y_B < \Delta y_A$

$\nabla\times\vec{v}$

$$\nabla\times\vec{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$





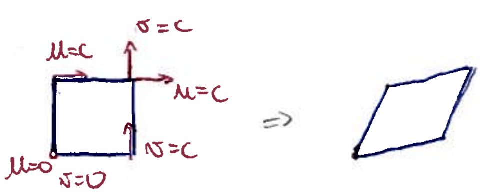
$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx \frac{c-0}{L} = \frac{c}{L}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{-c-0}{L} = -\frac{c}{L}$$

$$\nabla\times\vec{v} = \left[\frac{c}{L} - \left(-\frac{c}{L}\right)\right]\vec{k} = \frac{2c}{L}\vec{k}$$

* rotacional mede a rotação do elemento de superfície ou volume

Como a rotação se deu "em torno do eixo z" o "vetor rotacional" aponta na direção $\vec{k}$, e neste caso, no sentido p/ fora do papel.



$$\nabla\times\vec{v} \approx \left(\frac{c-0}{L} - \frac{c-0}{L}\right)\vec{k} = 0$$

1.4 DESCRIÇÕES

f: propriedade do fluido

$\vec{r}$: vetor posição

$\vec{r}_i$: posição do i-ésimo elemento de volume do fluido

<u>Descrição Euleriana</u> : $f = f(\vec{r}, t)$, equações diferenciais

<u>Descrição Lagrangeana</u> : $f = f(\vec{r}_i, t)$, equações integrais $\Rightarrow$ grande complicação matemática

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,t} dz$$

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y,z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,t} \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z,t} \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,t} \frac{dz}{dt}$$

derivada total de f em relação ao tempo

Estes índices são subentendidos, sabendo que $f = f(\vec{r}, t)$ ou $f = f(x, y, z, t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f}$$

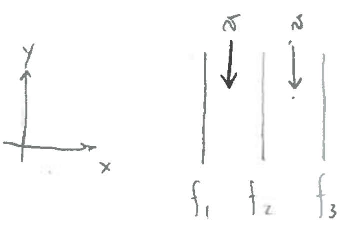
$\frac{df}{dt}$: variação total de f (ou derivada substantiva)

$\frac{\partial f}{\partial t}$: variação local de f

$\vec{v} \cdot \nabla f$: variação advectiva de f

<u>Campo Estacionário</u> $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

$$\vec{v} \cdot \nabla f = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = 0 \\ \nabla f = 0 \\ \vec{v} \perp \nabla f \end{cases}$$



$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}$

$\vec{v} = v\vec{j}$

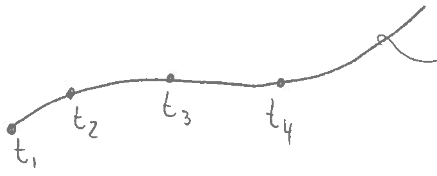
$\vec{v} \cdot \nabla f = 0$

1.5 LINHA DE CORRENTE E TRAJETÓRIA

linha de corrente ⇒ sem variação no tempo (fotografia)

Eq. da Linha de Corrente: $\boxed{d\vec{s} \times \vec{v} = 0}$

Trajetória: lugar geométrico dos pontos ocupados consecutivamente por cada elemento de volume do fluido. Representa a evolução temporal de cada partícula de fluido



Trajetória

A linha de corrente coincidirá com uma trajetória se o movimento for estacionário! Variação local é zero.

Eq. da trajetória: $\boxed{d\vec{s} = \vec{v}\,dt}$

PRINCÍPIO DE CONTINUIDADE

Elemento de Fluido → menor volume de fluido possível que se encaixe no reino do fluido, ou seja, o menor volume possível antes de se atingir o reino molecular ou atómico.

2. FORÇAS E EQUAÇÕES

2.1 FORÇAS

2.1.1. FORÇAS PROPORCIONAIS AO VOLUME (forças de corpo; força de ação à grandes dist

Forma Geral da força

$$\boxed{d\vec{F}_v = \vec{E}(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t)\,dV} \quad (2.1)$$

As força proporcionais ao volume são definidas em função de um campo $\vec{E}$

$\vec{F}_v$: força $[MLT^{-2}]$

$\vec{E}$: campo $[LT^{-2}]$ (intensidade do campo por unidade de massa)

ρ : densidade $[ML^{-3}]$

V : volume $[L^3]$

⊛ No referencial inercial (não acelerado), a única força $\propto$ ao volume, hidrodinamicamente importante é a FORÇA GRAVITACIONAL.

No referencial não-inercial (acelerado)^TERRA, devem ser consideradas também as FORÇAS FICTÍCIAS

GRAVITAÇÃO

- Devido ppalmente à ação da Terra, Lua e Sol

• Força gravitacional, por unid. de massa, exercida numa elem. de volume:

$$\boxed{\frac{\vec{F}_v}{m} = -\underbrace{\nabla\Phi}_{\text{potencial gravitacional}}} \quad [LT^{-2}] \text{ aceleração}$$

• TERRA : Potencial gravitacional Terrestre (força peso)

• LUA e SOL : Potencial gravitacional Astronômico (marés)

Na TERRA : $|\nabla\Phi| = |\vec{g}| = \dfrac{G(M-\Delta M)}{(a-z)^2}$

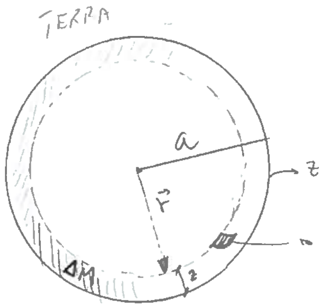
$G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2}$ (cte gravitacional)

$M = 5{,}977 \cdot 10^{24}\,kg$ (massa da Terra)

$a = 6{,}371 \cdot 10^6\,m$ (raio médio da Terra)

$z \Rightarrow$ altura do elemento de volume

$\Delta M \Rightarrow$ massa da calota esférica situada entre z e a



Demonstra-se que

$$\frac{G(M-\Delta M)}{(a-z)^2} \simeq g_0 - 2{,}244 \cdot 10^{-8} z \quad , \quad \text{onde } g_0 = 9{,}82 \ m \cdot s^{-2}$$ (aceleração gravitacional na supf. do mar)

$$\boxed{\frac{1}{m}\vec{F}_v = -\nabla\Phi = -\left(g_0 - 2{,}244 \cdot 10^{-8} z\right)\frac{\vec{r}}{r}} \quad (2.2)$$

No oceano, $|z_{máx}| = O(10^4 m)$

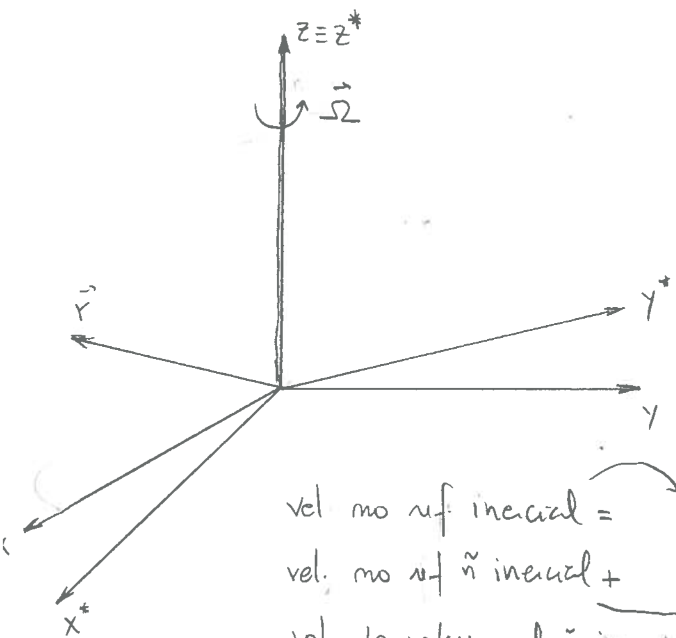
$\underbrace{g_0}_{O(10)} - \underbrace{2{,}244 \cdot 10^{-8}(z_{max})}_{O(10^{-4})} \simeq O(10)$ a correção pode ser desprezada

$a+b$, $a \gg b \Rightarrow a+b \simeq a$

$$\boxed{\frac{1}{m}\vec{F}_v = -\nabla\Phi \simeq -g_0\frac{\vec{r}}{r}} \quad (2.3)$$

$\frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow$ para dar a direção

2.1.2. REFERENCIAIS NÃO - INERCIAIS



$(x, y, z) \rightarrow$ referencial inercial

$(x^*, y^*, z^*) \rightarrow$ referencial não - inercial girando com eixo em z, junto com a Terra.

$\vec{\Omega} \Rightarrow$ velocidade angular, de rotação da Terra girando de W p/ E

vel no ref inercial =

vel. no ref ñ inercial +

vel. do referencial ñ inercial

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^*\vec{r}}{dt} + \underbrace{\vec{\Omega}\times\vec{r}}_{}$$

velocidade do ref. ñ inercial

Unidade do Geopotencial : $\frac{L}{T^2} = \frac{1}{L} \cdot \underbrace{\frac{L^2}{T^2}}_{\Phi^*}$, no S.I. $\frac{m^2}{s^2}$

Em Oceanografia, ainda, utiliza-se o Metro Dinâmico

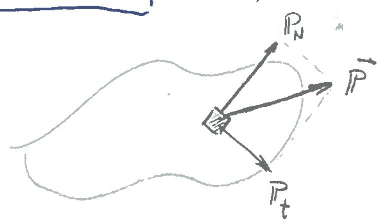
$1 \text{ mdin} = 10\, m^2/s^2 = 10\, J \cdot kg^{-1}$

Resumo: 2 forças $\propto$ ao volume no ref. ñ inercial
$\boxed{\text{FORÇA DA GRAVIDADE + FORÇA DE CORIOLIS}}$

2.1.3. FORÇAS PROPORCIONAIS À SUPERFÍCIE

$\boxed{d\vec{F}_s = \vec{\mathbb{P}}\, d\sigma}$ (2.8)

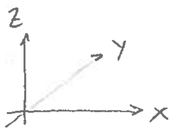
$\vec{\mathbb{P}}$: tensão $[M L^{-1} T^{-2}]$; σ: área $[L^2]$

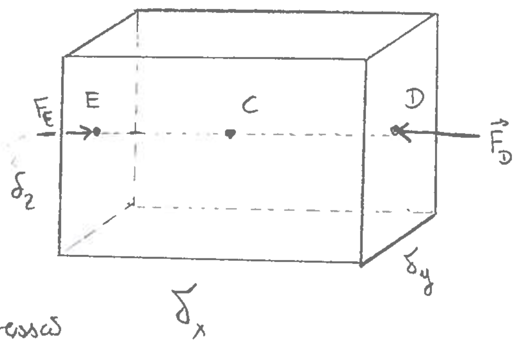


$\mathbb{P}_N$ - Tensão normal $\Rightarrow$ PRESSÃO

$\mathbb{P}_t$ - Tensão Tangencial $\Rightarrow$ ATRITO

FORÇA DO GRADIENTE DE PRESSÃO





$\delta_V = \delta_x \delta_y \delta_z$

$C\,(x_c, y_c, z_c)$

pressão em C é p_c

Nesse caso, $\vec{\mathbb{P}}$ é a chamada tensão normal, associada à pressão.

Tensão Normal = Pressão

A pressão num ponto de coordenada X_Q pode ser obtida expandindo p em série de Taylor em torno de X_c

$$p_{X_Q} = p_c + (X_Q - X_c)\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{X_c} + \frac{(X_Q - X_c)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_{X_c} + \dots$$

δ_x é infinitesimal, então $\delta_x \ll 1 \Rightarrow$ o maior termo é o 1º, os outros são desprezados

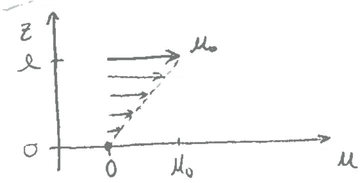
$$X_Q = X_E \Rightarrow p_E = p_c - \frac{\delta_x}{2}\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{X_c} + O[(\delta_x^2)]$$

$$X_Q = X_D \Rightarrow p_D = p_c + \frac{\delta_x}{2}\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{X_c} + O[(\delta_x^2)]$$

$$\lim_{l \to 0} \Rightarrow \frac{F}{A} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_{zx} \quad \therefore \quad \boxed{\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}} \quad (2.11) \qquad \frac{F}{A} = \text{tensão} \Downarrow \tau$$

τ_{zx} : tensão de cizalhamento devido a variação da componente $\underline{x}$ da velocidade na direção $\underline{z}$.

PRINCÍPIO DA ADERÊNCIA : Elementos de volume em contato com a placa possuem a mesma velocidade de da placa



OBS: 1) $\mu_{turbulento} >> \mu_{laminar}$

2) $\mu_{laminar} \propto$ estado físico do fluido, das prop. físicas do fluido (S, T, p) — associado

$\mu_{turbulento} \propto$ movimento do fluido

19/03/2007

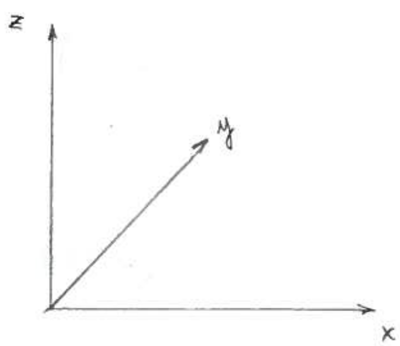
COEFICIENTE CINEMÁTICO DE VISCOSIDADE

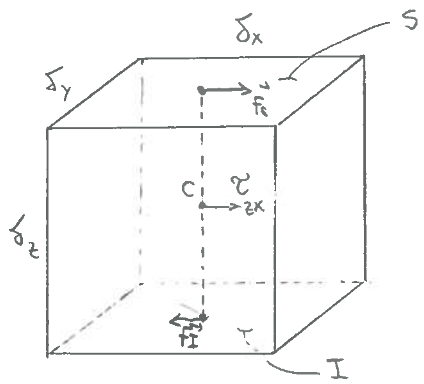
$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}} \quad [L^2 T^{-1}]$$

(*) Ex: para água em estado laminar $\nu = O(10^{-6})\ m^2 s^{-1}$

para água em estado turbulento $\nu = O(10^3 - 10^6)$ vezes maior

τ é um tensor de ordem 2, com 9 componentes





No ponto C: τ_{zx}

2.2. CONSERVAÇÃO DE PROPRIEDADE

Seja b uma propriedade específica do fluido (por unidade de massa), A quantidade total de b no volume V é:

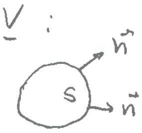
B: propriedade qq do fluido

$$\iiint \rho\, b\, dV \quad [B] \qquad b\left[\frac{B}{M}\right]$$

$$\rho\left[\frac{M}{L^3}\right] B\left[\frac{B}{M}\right] \cdot dV\left[L^3\right] = [B]$$

(1) Essa quantidade pode variar quando ocorre um transporte de b através da superfície S do volume V:

onde $d\vec{\sigma} = d\sigma\,\vec{n}$ (elem. de supf)



$$\oiint \rho\, b\, \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \quad [B T^{-1}]$$

$\downarrow$

fluxo (advecção)

$\vec{v} \cdot d\vec{\sigma} > 0 \Rightarrow \vec{v} /\!/ \vec{n}$ (b está saindo)

(2) Transporte difusivo da quantidade através de

Q_b é uma fonte ou sorvedouro dessa propriedade.

$$\iiint Q_b\, dV$$

PORTANTO,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho\, b\, dV = -\oiint \rho\, d\vec{v} \cdot d\vec{\sigma} + \iiint Q_b\, dV$$

usando o teorema de GAUSS...

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, b\, dV) = -\iiint \nabla \cdot (\rho\, b\, \vec{v})\, dV + \iiint Q_b\, dV \quad (2.18)$$ ou,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho b) = -\nabla \cdot (\rho\, b\, \vec{v}) + Q_b} \quad (2.19)$$

↳ TEOREMA DA CONSERVAÇÃO DE PROPRIEDADE

2.3. CONSERVAÇÃO PARA O OCEANO

2.3.1. CONSERVAÇÃO DE MASSA

$$\left.\begin{array}{l} B = m \\ b = \frac{m}{m} = 1 \\ Q_b = \emptyset \end{array}\right\} (2.19) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad (2\text{-}20)$$

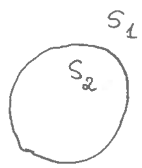
Eq. de CONSERVAÇÃO DE MASSA

2.3.2. CONSERVAÇÃO DE SAL

$B = m_{SAL}$

$b = s = \dfrac{m_{SAL}}{m_{TOTAL}}$

$Qb > 0; \; \dfrac{\partial}{\partial t} > 0 \Rightarrow Qb$ é fonte



$Q_b = -\nabla \cdot \vec{\$}$

$Qb < 0; \; \dfrac{\partial}{\partial t} < 0 \Rightarrow Qb$ é sorvedouro

$\$$: difusão de sal $[M L^{-2} T^{-1}]$

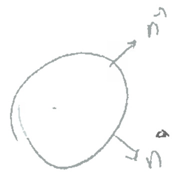
para $\nabla \cdot (\rho b \vec{v}) = 0$

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \vec{v}) = -\nabla \cdot \vec{\$}$$

subtraindo (2.20) multiplicado por S, obtemos:

Eq. de difusão de Sal

$$\boxed{\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\$}} \quad (2.24)$$



Modelo para $\vec{\$}$ ou parametrização: $\vec{\$} = -k_s \nabla s$

onde k_s é o coeficiente de difusão de sal $k_s = [M L^{-1} T^{-1}]$

(2.24) pode ser escrita:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla S = \frac{k_s}{\rho} \nabla^2 S} \quad (2.25)$$

onde S é a salinidade usada em oceanografia (‰)

Eq. DE DIFUSÃO DE SAL (também)

2.3.3. CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

$B = m \vec{v}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{b} = \dfrac{m \vec{v}}{m} = \vec{v} \\ \vec{Q}_b = \dfrac{\rho}{m} (\vec{F}_v + \vec{F}_s) \end{array}\right\} (2.19) \Rightarrow \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \frac{\rho}{m} (\vec{F}_v + \vec{F}_s)$$

Subtraindo da eq. acima, a eq (2.20) multiplicada por $\vec{v}$:

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{aceleração local}} + \overbrace{\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}^{\text{aceleração advectiva}} = \frac{1}{m} (\vec{F}_v + \vec{F}_s)$$

Eq. Geral do Movimento

(2ª Lei de Newton)

2.4 Equação do Estado

Fecha o sistema de equações (5 eq e 5 incógnitas)

$$\boxed{\rho = \rho(S, T, p)} \quad (2.28) \quad (2.28)$$

2.5 Equações num Referencial Rigidamente Ligado à Terra.

(Referencial Não Inercial)

→ Em todas as eq., $\vec{v} = \vec{v}^*$, $\frac{d}{dt} = \frac{d^*}{dt}$, ...

→ usaremos coordenadas esféricas

Equação de Conservação de Massa

$$\frac{1}{\rho}\Big(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{variação local}} + \underbrace{\frac{v_\phi}{r\cos\theta}\frac{\partial \rho}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r}}_{\text{variação advectiva}}\Big) + \dots \qquad (2.29)$$

$$\dots + \underbrace{\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \cos\theta) + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2 v_r}{r}}_{\nabla \cdot \vec{v}} = 0$$

Equação da Difusão de Sal

$$\underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\text{var. local}} + \underbrace{\frac{v_\phi}{r\cos\theta}\frac{\partial S}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial S}{\partial \theta} + v_r\frac{\partial S}{\partial r}}_{\text{var. advectiva}} = \frac{K_S}{\rho}\Big[\frac{1}{r^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\cos\theta\frac{\partial S}{\partial \theta}\Big) + \dots$$

$$\dots + \frac{2}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2}\Big] \quad (2.30) \longrightarrow \text{difusão}$$

Equação do Movimento

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v} = \frac{1}{\rho}\nabla p - \underbrace{\nabla \Phi^*}_{\nabla\Phi - \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})} + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{v} \qquad (2.31)$$

2.6 Equilíbrio Hidrostático

→ Uma solução particular para o conj. de equações

FLUIDO EM REPOUSO!

Solução: $\vec{v} = 0$ variações de p e ρ apenas na direção vertical

$\rho = \rho_0(r)$ (2.36)

$p = p_0(r)$

Das 7 equações governantes, sobrará:

$$0 = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial r} - g \Rightarrow \boxed{\frac{\partial p_0}{\partial r} = -\rho_0 g} \quad (2.37)$$

var. vertical da pressão é proporcional ao ρ_0

O oceano real nunca está em equilíbrio hidrostático, mas muitas vezes, se comporta de forma aproximadamente hidrostática.

2.7 Aproximações

2.7.1 Aproximação de Boussinesq

$$\underbrace{p(\phi,\theta,r,t)}_{\text{Total}} = \underbrace{p_0(r)}_{\text{hidrostática}} + \underbrace{\tilde{p}(\phi,\theta,r,t)}_{\text{Desvio}} \quad (2.38)$$

$$\rho(\phi,\theta,r,t) = \rho_0(r) + \tilde{\rho}(\phi,\theta,r,t)$$

, onde $\tilde{p}$ é a anomalia de p em relação ao oceano hidrostático

Escrevendo a eq do mov. usando estas notações, e multiplicando-a por ρ

$$(2.31) = (\rho_0+\tilde{\rho})\frac{d\vec{v}}{dt} + 2(\rho_0+\tilde{\rho})\vec{\Omega}\times\vec{v} = -\nabla p_0 - \nabla\tilde{p} + (\rho_0+\tilde{\rho})\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{v} \quad (2.39)$$

Mas, $-\nabla p_0 = -\frac{\partial p_0}{\partial r}\vec{n}$

$$(\rho_0+\tilde{\rho})\vec{g} = -(\rho_0+\tilde{\rho})g\vec{n} = -\rho_0 g\vec{n} - \tilde{\rho}g\vec{n}$$

usando a eq (2.37), a eq (2.39) fica:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + 2\rho(\vec{\Omega} \times \vec{v}) = -\nabla \tilde{p} + \tilde{\rho} \cdot \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (2.40)$$

aqui já não aparece a pressão hidrostática p_0

$\Rightarrow$ p/ os processos físicos do oceano, apenas a perturbação da pressão é importante

porém, de (2.38),

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho} = \rho_0 \left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)$$

Muitas vezes $\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} = O(10^{-3})$ no oceano

Nesse caso, $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right) = \rho_0 \underbrace{\left[1 + O(10^{-3})\right]}_{\approx 1} \approx \rho_0 \quad (2.41)$

$$\boxed{\text{APROXIMAÇÃO DE BOUSSINESQ} \iff \rho \approx \rho_0}$$

! o que vai indicar se podemos usar ou não a aprox. é a razão $\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}$

! usando a aproximação simplifica-se as equações, pois ρ_0 não depende de outras variáveis.

(2.41) em (2.40):

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} + \vec{g}' + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \vec{v}} \quad (2.42)$$

Eq. do Movimento sob a aproximação de boussinesq

onde $\vec{g}' = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \vec{g}$ (2.43) $\quad \vec{g}'$ é a GRAVIDADE REDUZIDA

2.7.2 Método de Análise de Escalas

$$\left.\begin{matrix} a+b \\ a \gg b \end{matrix}\right\} a+b \approx a$$

1) Identificar o movimento ou processo a ser estudado

2) Identificar as escalas típicas para o processo.

3) Usar essas escalas típicas para escrever as variáveis em forma não-dimensional

4) Comparar a ordem de grandeza (expressa pelos coeficientes) das parcelas da eq

5) Desprezar as parcelas que têm relativamente menor ordem de grandeza.

2.7.3 Equações Não-Dimensionais (Pedlosky)

Inicialmente fazemos as transformações, antes de aplicar o método de análise de escala.

! Continuaremos em coordenadas esféricas, mas trocaremos os nomes ϕ, θ, r por x, y, z !

$$x = \phi\, a \cos\theta_0 \qquad u = v_\phi$$

$$y = a(\theta - \theta_0) \qquad v = v_\theta$$

$$z = r - a \qquad w = v_r$$

2) Escalas Típicas

Distância "horizontal", zonal/meridional : L

Distância vertical : D

Tempo : $\frac{1}{\sigma}$, onde σ é a frequência do movimento

Velocidade zonal/meridional : U

Velocidade vertical : W

Pressão : $\hat{p}$

Densidade : $\hat{\rho}$

3) Variáveis e equações não-dimensionais:

$$x' = \frac{x}{L} \; ; \; y = Ly' \; ; \; z = Dz' \; ; \; u = U\cdot u' \; ; \; v = Uv' \; ; \; w = Ww' \; ; \; t = \frac{t'}{\sigma}$$

$$p = \hat{p}\,(p_0' + \tilde{p}') \; ; \; \rho = \hat{\rho}\,(\rho_0' + \tilde{\rho}')$$

Equação da Continuidade (parte de 2.29): $x', y', z' \to O(1)$

$$\frac{U}{L}\overbrace{\frac{\cos\theta_0}{(1+\gamma z')\cos\theta}}^{O(1)}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{U}{L}\overbrace{\frac{1}{1+\gamma z'}}^{O(1)}\frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{W}{D}\frac{\partial w'}{\partial z'} + \frac{W}{a}\frac{2}{1+\gamma z'}w' - \frac{U}{a}\frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\gamma z'}v' = 0$$

onde $\gamma = \dfrac{D \to O(10^3)}{a \to O(10^6)} \Rightarrow \gamma \to O(10^{-3}) \Rightarrow \boxed{1+\gamma z' \approx 1}$

Aproximação da Calota Esférica

Como $\gamma \ll 1$, para manter as 3 primeiras parcelas na equação da continuidade é necessário que:

$$O\left[\frac{U}{L}\right] = O\left[\frac{W}{D}\right] \Rightarrow \boxed{W = \frac{D}{L}\cdot U} \quad (2.45)$$

usando (2.45),

$$\frac{\cos\theta_0}{(1+\gamma z')\cos\theta}\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{(1+\gamma z')}\frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} + \gamma\frac{2}{1+\gamma z'}w' - \lambda\frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\gamma z'}v' = 0 \quad (2.46)$$

onde $\lambda = \dfrac{L}{a}$

Equação do Movimento: (2.47)

zonal: $$\varepsilon_t\frac{\partial u'}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{\cos\theta_0}{(1+\gamma z')\cos\theta}u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{1+\gamma z'}v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'} + \gamma\frac{u'w'}{1+\gamma z'} - \lambda\frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\gamma z'}u'v'\right] -$$

$$-\frac{\operatorname{sen}\theta}{|\operatorname{sen}\theta_0|}v' + \delta\frac{\cos\theta}{|\operatorname{sen}\theta_0|}w' = -\frac{\cos\theta_0}{(\rho_0' + \varepsilon F\hat{\rho}')(1+\gamma z')\cos\theta}\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{E}{2}\left[\nabla'^2 u' + \dots\right]$$

meridional: $$\varepsilon_t\frac{\partial v'}{\partial t} + \varepsilon\left[\frac{\cos\theta_0}{(1+\gamma z')\cos\theta}u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{1}{1+\gamma z'}v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'} + \gamma\frac{v'w'}{1+\gamma z'} - \lambda\frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\gamma z'}u'^2\right] +$$

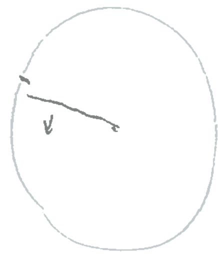
$$+\frac{\operatorname{sen}\theta}{|\operatorname{sen}\theta_0|}u' = -\frac{1}{(\rho_0' + \varepsilon F\hat{\rho}')(1+\gamma z')}\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{E}{2}\left[\nabla'^2 v' + \dots\right] \quad (2.48)$$

vertical: $$\varepsilon_t\delta^2\left[\frac{\cos\theta_0}{(1+\gamma z')\cos\theta}u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{1}{1+\gamma z'}v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'} - \frac{\lambda}{\delta}\frac{1}{1+\gamma z'}v'^2 - \frac{\lambda}{\delta}\frac{1}{1+\gamma z'}u'^2\right]$$

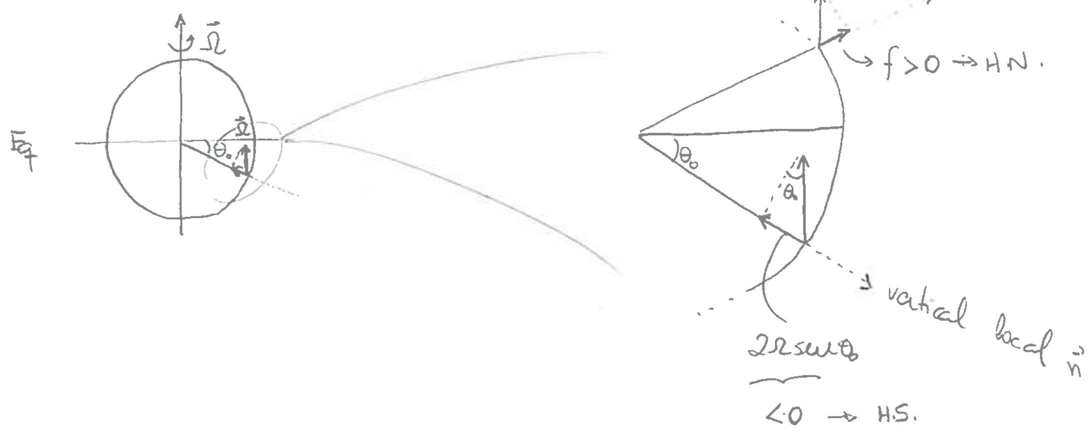
$$-\delta\frac{\cos\theta}{|\operatorname{sen}\theta_0|}u' = -\frac{1}{\rho_0' + \varepsilon F\hat{\rho}'}\frac{\partial p'}{\partial z'} - \frac{\hat{\rho}'}{\rho_0' + \varepsilon F\hat{\rho}'} + \delta^2\frac{E}{2}\left[\nabla'^2 w' + \dots\right] \quad (2.49)$$

26/03/2007

Definições: Números não-dimensionais



1) $2\Omega \operatorname{sen} \Theta_0 = f_0$: parâmetro de Coriolis



2) $\varepsilon_t = \dfrac{\sigma}{|f_0|}$: Número de Rossby Local

$\varepsilon_t > 1 \Rightarrow$ movimento supra-inercial

$\varepsilon_t < 1 \Rightarrow$ movimento subinercial

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\varepsilon_t} + \underbrace{\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}}_{\varepsilon}$$

3) $\varepsilon = \dfrac{U}{L|f_0|}$: Número de Rossby Advectivo

4) $\delta = \dfrac{D}{L}$: Razão de Aspecto

$\delta \ll 1 \Rightarrow$ movimento quase-horizontal

5) $F = \dfrac{f_0^2 L^2}{gD}$: Número de Froude

6) $R = \dfrac{\sqrt{gD}}{|f_0|}$ $[L]$: Raio de Deformação de Rossby

Exemplo: lat média $(30°-40°)$: $f_0 = O(10^{-5})\,s^{-1}$, $D = 10^3\,m$ $\Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{10 \times 10^3}}{10^{-5}} = 10^7\,m = 10^4\,km$

7) $F = \left(\dfrac{L}{R}\right)^2$: Número de Froude, outra forma

$F \ll 1 \Rightarrow$ rotação da Terra não é importante no movimento

8) $E = \dfrac{2\mu}{|f_0| L^2}$: Número de Ekman

$E \ll 1 \Rightarrow$ força de atrito pode ser desprezada

9) $\tilde{p}' = \varepsilon F \hat{p}'$ $\Rightarrow$ para obter escalas diferentes entre p_0 e $\tilde{p}$ e ρ_0 e $\tilde{\rho}$,
$\tilde{\rho}' = \varepsilon F \hat{\rho}'$ pois comparativamente, têm tamanhos bem díspares.

Continuando a escrever as eq. na forma não-dimensional

Equação da Difusão de Sal

$$\varepsilon_t \frac{\partial s'}{\partial t'} + \varepsilon \left[\frac{\cos\theta_0}{(1+\gamma z')\cos\theta} u' \frac{\partial s'}{\partial x'} + \frac{1}{1+\gamma z'} v' \frac{\partial s'}{\partial y'} + w' \frac{\partial s'}{\partial z'} \right] = \frac{k_S}{\rho|f_0|} \left(\frac{\partial^2 s'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 s'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 s'}{\partial z'^2} \right) \tag{2.51}$$

Equação da Condução de Calor

$$\varepsilon_t \frac{\partial T'}{\partial t'} + \varepsilon \left[\frac{\cos\theta_0}{(1+\gamma z')\cos\theta} u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{1}{1+\gamma z'} v' \frac{\partial T'}{\partial y'} + w' \frac{\partial s'}{\partial z'} \right] = \frac{k_T}{c_p \rho |f_0|} \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} \right) \tag{2.52}$$

onde $S = \hat{S} s'$ e $T = \hat{T} T'$.

Próximo passo do Método da Análise de Escalas: comparar termos

2.7.4 Aproximação de Boussinesq

Nas equações, para desprezar ②, $\varepsilon F \ll 1$

$$\underbrace{\rho_0'}_{①} + \underbrace{\varepsilon F \hat{\rho}'}_{②}$$

$$\boxed{\text{Aproximação de Boussinesq} \Leftrightarrow \varepsilon F \ll 1}$$

↳ Teste p/ o uso da Aproximação

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0' + \varepsilon F \hat{\rho}' \approx \rho_0'}$$

2.7.5 Aproximação da Calota Esférica

$\gamma = \frac{D}{a}$ Válida sempre!

No oceano, $D_{máx} = 10^4$ m $\therefore$ $\gamma \ll 1 \Rightarrow \boxed{1+\gamma_z \approx 1}$

2.7.6 Aproximação segundo o Plano Beta

Introdução: É possível simplificar as equações em coordenadas esféricas para obter equações em coordenadas cartesianas?

Resposta: Vamos supor que $\lambda = \frac{L}{a} < 1$ (escala horizontal < raio da Terra)

Nesse caso: $y = a(\theta - \theta_0) \therefore \theta = \frac{y}{a} + \theta_0 \therefore \theta = \frac{Ly'}{a} + \theta_0 \therefore \theta = \lambda y' + \theta_0$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\underbrace{\lambda y'}_{<1} + \theta_0) = \cos\theta_0\left[\operatorname{tg}\theta_0 + \lambda y' + O(\lambda^2)\right]$$

expansão em cossenos → ver livro de cálculo (expansão em série trigonométrica, possível qdo sen(a+b) e a<1.)

$$\Rightarrow \cos\theta = \cos(\underbrace{\lambda y'}_{<1} + \theta_0) = \cos\theta_0\left[1 - \lambda y' \operatorname{tg}\theta_0 + O(\lambda^2)\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\underbrace{\lambda y'}_{<1} + \theta_0) = \operatorname{tg}\theta_0 + \frac{\lambda y'}{\cos^2\theta_0} + O(\lambda^2)$$

Em movimentos para os quais:

$$\boxed{\begin{matrix}\lambda^2 \ll 1 \\ \lambda \operatorname{tg}\theta \ll 1\end{matrix}} \text{ condições}$$

É possível utilizar a aproximação segundo o plano β.

Não é válida em regiões de altas latitudes pois $\operatorname{tg}\theta$ é muito grande

Fazendo a aproximação, as equações na forma dimensional ficam assim:

Eq da Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (2.53)$$

Ainda é uma eq. em coordenadas esféricas!! Mas é como se estivesse trabalhando em c. cartesianas

Eq do movimento: sistema quase-cartesiano

	A.loc.	A. Advectiva	A. Coriolis	FGP/m	FAt./m	A.Gr.	
zonal:	$\frac{\partial u}{\partial t}$	$+ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$	$- fv + \tilde{f}w$	$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$	$+ \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$		(2.54)
meridional:	$\frac{\partial v}{\partial t}$	$+ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$	$+ fu$	$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$	$+ \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$		(2.55)
vertical:	$\frac{\partial w}{\partial t}$	$+ u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{u^2+v^2}{a}$	$- \tilde{f}u$	$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$	$+ \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$	$-g$	(2.56)

difusão de sal: $$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} + w\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{k_s}{\rho}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) \qquad (2.57)$$

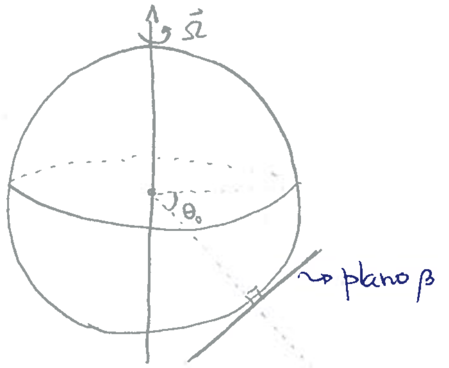
cond. de calor: $$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k_T}{c_p\rho}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right) \qquad (2.58)$$

onde: $$f = 2\Omega \operatorname{sen}\theta_0 + \underbrace{\frac{2\Omega\cos\theta_0}{a}}_{\beta} y = f_0 + \beta y \quad \therefore$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f = f_0 + \beta y & (2.59) \\ \tilde{f} = 2\Omega\cos\theta_0 & (2.60) \end{array}}$$

Obs: As equações em coordenadas esféricas (2.53) a (2.58) poderiam ser obtidas partindo das equações vetoriais e escrevendo-as utilizando coordenadas cartesianas, com excessão de:

fv em (2.54); fu em (2.55) e $\frac{u^2+v^2}{a}$ em (2.56)



Nas proximidades do equador, $\theta_0 \to 0$, e $f_0 \to 0$. Isto é,

$\boxed{f \approx \beta y}$ Plano β equatorial

Em latitudes médias, quando $f_0 >> \beta y$, $\boxed{f \approx f_0}$ Plano f

$f_0 >> \beta y \Rightarrow \underline{\lambda \operatorname{cotg}\theta_0 << 1}$

condição p/ usar o plano f (proibida no equador)

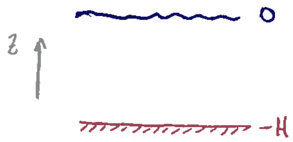
2.7.7. Outras Aproximações

1) $\rho(x,y,z,t) = \rho_0(z) + \tilde{\rho}(x,y,z,t)$

Em qual, a variação vertical de ρ_0 é da ordem de 10^{-2}.

Definindo,

$$\bar{\rho} = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} \rho_0(z)\, dz$$



$\bar{\rho} \rightarrow$ densidade média na coluna de água

$$\rho_0 = \underset{\underset{O(10^3)}{\downarrow}}{\bar{\rho}} + O(10^{-2}) \approx \bar{\rho}$$

2) $\tilde{f}w$ em (2.51) pode ser desprezada quando comparada a fv se

$\delta \cdot \cot g\, \theta_0 \ll 1$

3) $\tilde{f}u$ em (2.53) pode ser desprezada quando comparada a g' se

$\delta \cot g\, \theta_0 \ll 1$

4) $\frac{u^2+v^2}{a}$ em (2.53) pode ser desprezada quando comparada a g' se

$\gamma \cdot \varepsilon \ll 1$

28/03/2007

2.8 EQUAÇÕES APROXIMADAS

Na forma não-dimensional

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \qquad (2.67)$$

$$\varepsilon_t \frac{\partial u'}{\partial t'} + \varepsilon\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right) - \alpha v' = -\frac{1}{\bar{\rho}'}\frac{\partial \hat{p}'}{\partial x'} + \frac{E}{2}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2}\right) \qquad (2.68)$$

$$\varepsilon_t \frac{\partial v'}{\partial t'} + \varepsilon\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right) + \alpha u' = -\frac{1}{\bar{\rho}'}\frac{\partial \hat{p}'}{\partial x'} + \frac{E}{2}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2}\right) \qquad (2.69)$$

$$\varepsilon_t \delta^2 \frac{\partial w'}{\partial t'} + \varepsilon\delta^2\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right) = -\frac{1}{\bar{\rho}'}\frac{\partial \hat{p}'}{\partial z'} - \frac{\hat{\rho}'}{\bar{\rho}'} + \delta^2\frac{E}{2}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}\right) \qquad (2.70)$$

$$\mathcal{E}_t \frac{\partial T'}{\partial t'} + \mathcal{E}\left(u'\frac{\partial T'}{\partial x'} + v'\frac{\partial T'}{\partial y'} + w'\frac{\partial T'}{\partial z}\right) = \frac{K_T}{\bar{\rho}' c_p |f_0|} \nabla'^2 T' \qquad (2.72)$$

$$\mathcal{E}_t \frac{\partial s'}{\partial t'} + \mathcal{E}\left(u'\frac{\partial s'}{\partial x'} + v'\frac{\partial s'}{\partial y'} + w'\frac{\partial s'}{\partial z'}\right) = \frac{K_s}{\bar{\rho}' |f_0|} \nabla'^2 s' \qquad (2.73)$$

onde $\quad \sigma = \dfrac{f}{|f|}$

Na forma dimensional,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (2.74)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (2.75)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\mu}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad (2.76)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} + w\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{K_s}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) \qquad (2.77)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{K_T}{\bar{\rho} c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad (2.78)$$

No plano β: $f = f_0 + \beta y$ $\qquad$ No plano f: $f = f_0$

2.9 LINEARIZAÇÃO

Estado básico + Perturbação

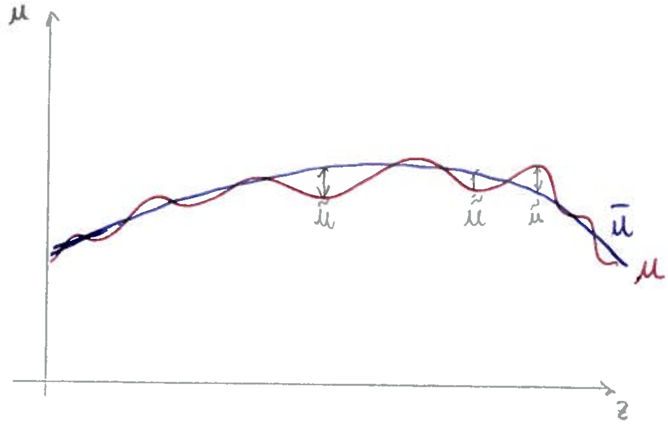
Ex: $u(x,y,z,t) = \bar{u}(z) + \tilde{u}(x,y,z,t)$

$\quad v(x,y,z,t) = \bar{v}(z) + \tilde{v}(x,y,z,t)$

Pensando nas parcelas: $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = (\bar{u}+\tilde{u})\dfrac{\partial}{\partial x}(\bar{u}+\tilde{u}) + (\bar{v}+\tilde{v})\dfrac{\partial}{\partial y}(\bar{u}+\tilde{u}) =$

$$= \bar{u}\cancelto{0}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} + \bar{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u}\cancelto{0}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \bar{v}\cancelto{0}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \bar{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{v}\cancelto{0}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$$

$$\bar{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}$$



CONDIÇÃO PARA LINEARIZAÇÃO

A linearização só funciona se a perturbação for pequena se comparada ao estado básico

$$\tilde{u} \ll \bar{u} \iff \left|\frac{\tilde{u}}{\bar{u}}\right| \ll 1$$

$$\tilde{v} \ll \bar{v} \iff \left|\frac{\tilde{v}}{\bar{v}}\right| \ll 1$$

Daí,

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}} = (\bar{u}+\tilde{u})\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + (\bar{v}+\tilde{v})\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} \approx \boxed{\bar{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}}$$

NÃO LINEARES

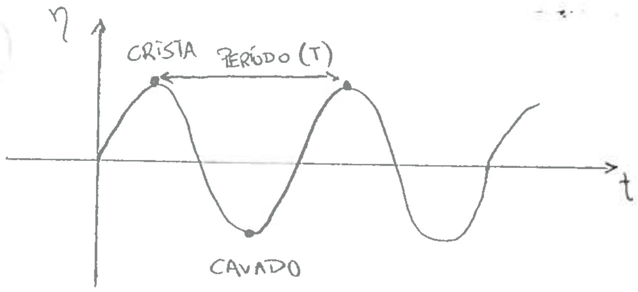
LINEARES

↓

$\bar{u}$ e $\bar{v}$ não são mais incógnitas, são dados...

3. Ondas de Gravidade

Gill / Leblond e Mysak



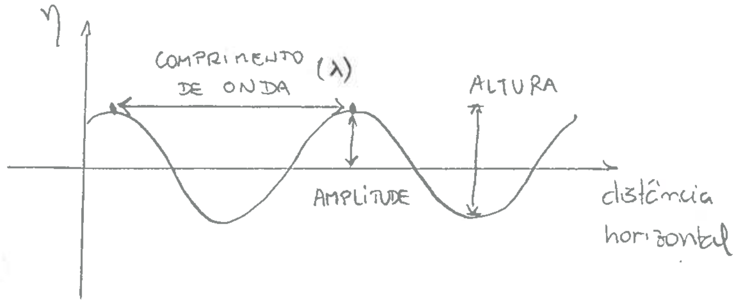
$\sigma = \frac{1}{T}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (frequência)

↓

quantas ondas cabem em 2π segundos

η: elevação da superfície livre do mar

$$\eta = \eta(x, y, t)$$



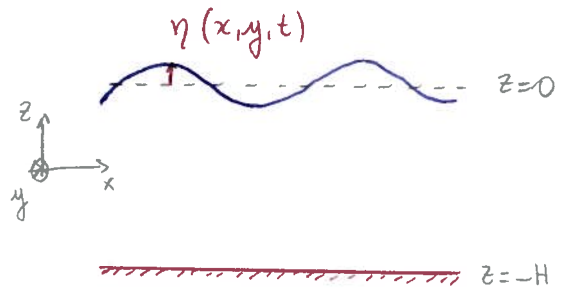
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$: Número de onda

↓

quantas ondas cabem em 2π metros

3.1 ONDAS DE GRAVIDADE SUPERFICIAIS NUM FLUIDO INVÍSCIDO E HOMOGÊNEO

1) $\rho = \bar{\rho} = \text{cte}$



2) Estado básico de repouso : $\vec{v} = 0$

$$u(x,y,z,t) = \tilde{u}(x,y,z,t)$$
$$v(x,y,z,t) = \tilde{v}(x,y,z,t) \qquad (3.1)$$
$$w(x,y,z,t) = \tilde{w}(x,y,z,t)$$

3) $p(x,y,z,t) = p_0(z) + \tilde{p}(x,y,z,t) \qquad (3.2)$

lembrando que : $\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\bar{\rho} g \qquad (3.3)$

4) $\lambda = O(10^2 m) \Rightarrow \frac{L}{a} \ll 1$

5) Latitudes médias :

$\frac{L}{a} \operatorname{tg}\theta \ll 1$ e $\frac{L}{a} \operatorname{cotg}\theta \ll 1 \Rightarrow$ Aproximação do plano f

6) $\eta \ll H \Rightarrow$ linearização

Com os 6 considerações, obtemos as seguintes equações:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \qquad (3.4)$$

Equações

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - f_0 \tilde{v} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \qquad (3.4\text{A}) \xrightarrow{7)} \boxed{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}} \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + f_0 \tilde{u} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \qquad (3.4\text{B}) \xrightarrow{7)} \boxed{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}} \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \qquad (3.4\text{C}) \qquad \boxed{\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}} \qquad (3.7)$$

aceleração de coriolis pode ser desprezada

7) $T = O(10\,s) \Rightarrow \varepsilon_t = \frac{1}{|f_0| T} = \frac{1}{10^{-4} \cdot 10} = 10^3 \gg 1 \Rightarrow$ rotação não importa

Sistema (3.4), (3.5), (3.6), (3.7)

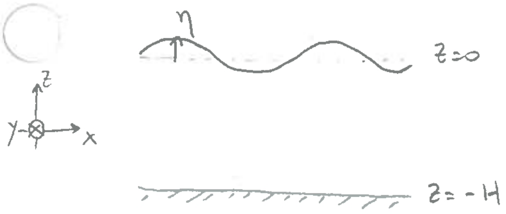
4 eq x 4 incógnitas $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p})$

Recordar eq dif ordinária de 2ª ordem homogênea

Obs: Balanço expresso pelas equações (3.5) a (3.7) é entre a aceleração local e a força de gradiente de pressão por unidade de massa.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{BALANÇO DE ONDA DE GRAVIDADE}}$

02/04/2007



Hipóteses simplificadoras:

1) Oceano é horizontalmente infinito $(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$

2) $H =$ cte

Condições de contorno:

1) Em $z=-H$ (interface água - terra)

$\boxed{\tilde{w} = 0 \text{ em } z = -H}$ (3.8)

Condição de contorno cinemática

2) Em $z=\eta$ (interface água - ar) $\Rightarrow$ continuidade de tensões e velocidades através da superfície livre.

$$\begin{cases} p_{oceano} = p_{atmosfera} \quad \text{em} \quad z = \eta \quad (3.9) \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d\eta}{dt} \quad \text{em} \quad z = \eta \quad (3.10) \end{cases}$$

$\downarrow$

$w = \dfrac{d\eta}{dt}$ em $z = \eta$ (3.11)

$(3.9) \Rightarrow p_0(\eta) + \tilde{p}(x,y,\eta,t) = p_{atm}$, em $z = \eta$ (3.12)

$(3.11) \Rightarrow \tilde{w}(x,y,\eta,t) = \frac{d\eta}{dt}$, em $z = \eta$ (3.13)

Expandir (3.12) e (3.13) em Série de Taylor em torno de $z = 0$

$$(3.12) \Rightarrow p_0(0) + \eta \left.\frac{\partial p_0}{\partial z}\right|_{z=0} + \frac{\eta^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 p_0}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \dots +$$

$$+ \tilde{p}(x,y,0,t) + \eta \left.\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}\right|_{z=0} + \frac{\eta^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \dots = p_{atm} \quad (3.14) \quad \text{em } z=0\,!$$

$$(3.13) \Rightarrow \tilde{w}(x,y,0,t) + \eta \left.\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\right|_{z=0} + \frac{\eta^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \dots =$$

$$= \frac{\partial \eta}{\partial t} + \tilde{u}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \tilde{v}\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (3.15) \quad \text{em } z=0\,!$$

O problema para o interior (da coluna de agua, $-H < z < \eta$), composto pelas equações (3.4) a (3.7), é <u>linear</u>. Portanto, podemos linearizar também as condições de contorno, equações (3.14) e (3.15)

$$p_0(0) + \eta(-\bar{\rho} g) + \tilde{p}(x,y,0,t) = p_{atm} \quad (3.16) \quad \text{em } z=0\,!$$

$$\tilde{w}(x,y,0,t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3.17) \quad \text{em } z=0\,!$$

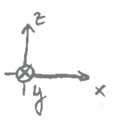
Combinando (3.16) e (3.17), supondo que $p_{atm} = cte$:

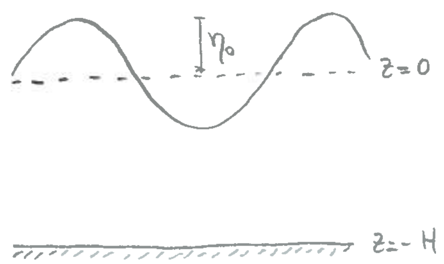
$$\boxed{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} - \bar{\rho} g \tilde{w} = 0 \quad \text{em } z = 0} \quad (3.18)$$

Condição de contorno dinâmica

<u>Condição</u> <u>Inicial</u>: em $t=0$, existe uma onda

$\eta(x,y,0) = \eta_0 \cos(kx + ly)$ (3.18A)

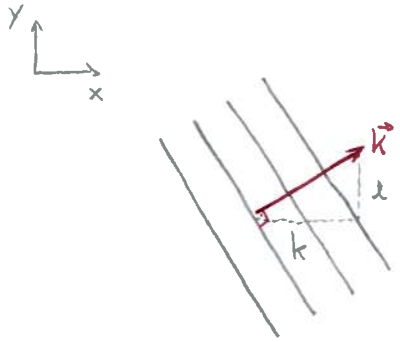




Em qq t,

$\eta(x,y,t) = \eta_0 \cos(kx + ly - \omega t)$ (3.18B) onde $\vec{k} = k\vec{i} + l\vec{j}$ $\quad\quad |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, frequência angular



Cristas

Obs: $e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i\,\mathrm{sen}\,\alpha$

$$\Rightarrow \eta(x,y,t) = \eta_0 \, \mathrm{Re}\left[e^{i(kx+ly-\omega t)} \right]$$

Vamos resolver o problema (3.4) a (3.7) para $-H < z < 0$, sob as condições de contorno (3.8) e (3.18) e condição inicial (3.18 A). Este é um problema matemático de Condições Iniciais e de Contorno.

À partir de agora, é pura matemática, resolver as eq. diferenciais com as cond. iniciais e de contorno

→ Combinar as eqs até chegar a 1 eq + 1 inc.

Melhor começar por $\tilde{w}$ e $\tilde{p}$, pois essas variáveis constam nas condições de contorno. ⇒ Escolheremos $\tilde{p}$

Resolução:

1) Combinar (3.4) à (3.7) p/ eliminar $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ e $\tilde{w}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3.5) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(3.6) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(3.7) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial z^2} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(3.4) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \qquad (3.22)$$

Combinando (3.19) – (3.22):

$$\boxed{\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial z^2} = 0} \qquad (3.23)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \tilde{p} = 0 \qquad (3.24) \quad \text{Equação de Laplace}$$

De (3.18 B), como o problema é linear:

$$\tilde{p}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\hat{p}(z)\, e^{i(kx + ly - \omega t)}\right]; \quad \omega > 0 \qquad (3.34)$$

(3.34) em (3.23):

$$\boxed{\frac{d^2\hat{p}}{dz^2} - (k^2 + l^2)\,\hat{p} = 0} \qquad (3.35)$$

De (3.8), (3.7) e (3.34):

$$\boxed{\frac{d\hat{p}}{dz} = 0, \quad \text{em } z = -H} \qquad (3.36)$$

De (3.18), (3.7) e (3.34):

$$\boxed{g\frac{d\hat{p}}{dz} - \omega^2 \hat{p} = 0, \quad \text{em } z = 0} \qquad (3.37)$$

Solução geral de (3.35) é:

$$\hat{p}(z) = a_1 \cdot e^{\sqrt{k^2+l^2}\, z} + a_2 \cdot e^{-\sqrt{k^2+l^2}\, z} \qquad (3.38)$$

(3.38) em (3.36):

$$a_1 = a_2 e^{2\left(\sqrt{k^2+l^2}\right)H} \qquad (3.39)$$

(3.38) e (3.39) $\Rightarrow$

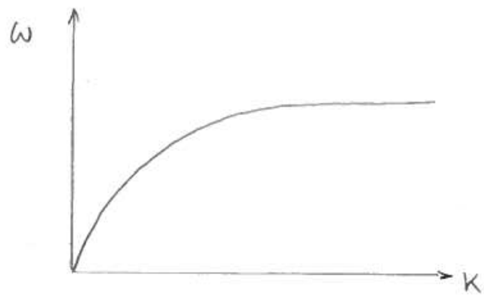
$$\hat{p}(z) = a_2 \left(e^{2KH} \cdot e^{Kz} + e^{-Kz} \right) \quad (3.40) \qquad \text{onde} \quad K = \sqrt{k^2 + l^2}$$

(3.40) em (3.37):

$$g a_2 K \left(e^{2KH} - 1 \right) - \omega^2 a_2 \left(e^{2KH} + 1 \right) = 0$$

para $a_2 \neq 0$, obtemos:

$$\boxed{\omega^2 = gK \frac{e^{KH} - e^{-KH}}{e^{KH} + e^{-KH}} = gK \tanh(KH)} \quad (3.42)$$



Relação de Dispersão para OGS

↳ Onda de Gravidade Superficial

A relação de Dispersão é a identidade de uma onda. A relação entre frequência e número de onda.

09/04/2007 – Revisão –> ondas

Velocidade de fase : $\vec{C} = \frac{\omega}{K} \frac{\vec{K}}{K}$

(celeridade)

Fase : $\Theta = kx + ly - \omega t$, $\vec{K} = \nabla\Theta = k\vec{i} + l\vec{j}$, $\omega = -\frac{\partial\Theta}{\partial t}$

Para um observador que acompanha a onda:

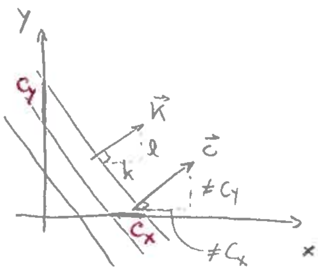
$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\Theta = 0 \iff |\vec{v}| = \frac{-\left|\frac{\partial\Theta}{\partial t}\right|}{|\nabla\Theta|} = -\frac{-\omega}{|\vec{K}|} = |\vec{C}|$$

→ A velocidade de fase é então, a velocidade que uma crista se propaga por exemplo.

A velocidade com que a fase se propaga ao longo dos eixos x e y é:

$$C_x = \frac{\omega}{k} \; ; \quad C_y = \frac{\omega}{l}$$

Obs: c_x e c_y não são componentes de $\vec{c}$



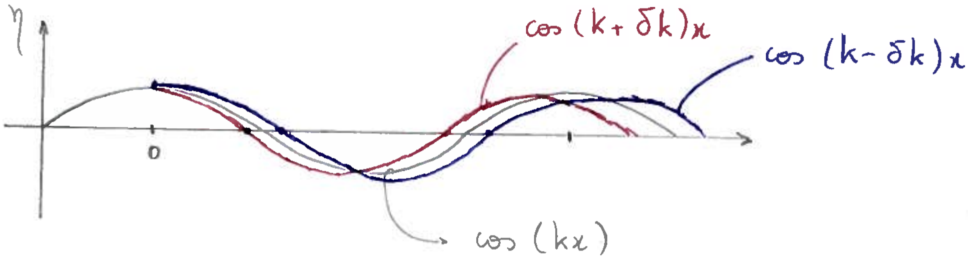
Em geral, $c^2 \neq c_x^2 + c_y^2$

Sobreposição de duas ondas senoidais aproximadamente iguais:

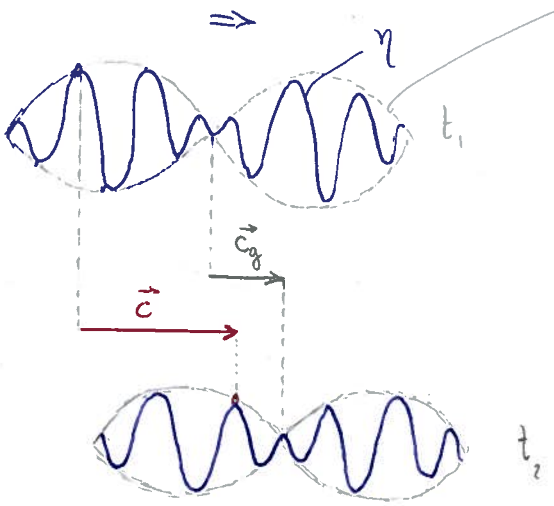
$$\eta = \cos[(k+\delta k)x - (\omega+\delta\omega)t] + \cos[(k-\delta k)x - (\omega-\delta\omega)t]$$

→ relações trigonométricas

$$\eta = 2\cos(kx-\omega t)\cos[(\delta k)x - (\delta\omega)t]$$



"Envoltória" ou "Trem de Ondas"



$$|\vec{c}| = \frac{\omega}{k}$$

$$|\vec{c_g}| = \frac{\delta\omega}{\delta k}$$

Velocidade de Grupo

No caso geral: $\boxed{\vec{c_g} = \nabla_k \omega}$ ⇒ $\frac{\partial\omega}{\partial k}\vec{i} + \frac{\partial\omega}{\partial \ell}\vec{j} + \frac{\partial\omega}{\partial m}\vec{k}$

$$c_{g_x} = \frac{\partial\omega}{\partial k} \; ; \; c_{g_y} = \frac{\partial\omega}{\partial \ell}$$

– Fim da Revisão – onda

De (3.42),

$$|\vec{c}| = c = \frac{\omega}{k} = \left[\frac{g}{k}\tanh(kH)\right]^{1/2} \qquad (3.43)$$

$$|\vec{c}_g| = c_g = \frac{c}{2}\left[\frac{2kH}{\operatorname{senh}(2kH)} + 1\right] \qquad (3.44)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{c}_g \neq \vec{c} \iff \text{OGS é DISPERSIVA}}$

Relembrando:

$$\hat{p}(z) = a_2\left(e^{2kH}e^{kz} + e^{kz}\right) \qquad (3.40)$$

Usando (3.16):

$$\tilde{p}(x,y,0,t) = p_{atm} + \bar{\rho} g \eta \qquad (3.49)$$

Mas, de (3.34):

$$\tilde{p}(x,y,0,t) = \hat{p}(0)\, e^{i(kx + ly - \omega t)} \qquad (3.50)$$

Comparando (3.49) e (3.50):

$$a_2 = \frac{\bar{\rho} g \eta_0}{e^{2kH} + 1} \qquad (3.54)$$

Lembrando que: η_0 é condição inicial

$$\eta = \eta_0 \cos(kx + ly - \omega t)$$

$\tilde{w}$ está fora de fase em $\frac{\pi}{2}$

$\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{v}$ estão em fase

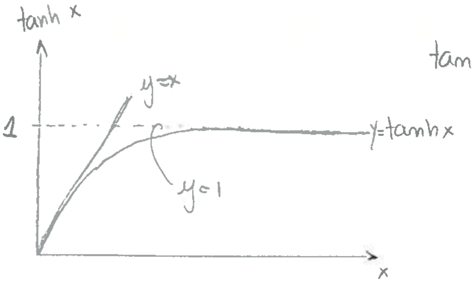
Verificamos que a_2 depende do valor inicial η_0. Consequentemente,

$$\tilde{p}(x,y,z,t) = \frac{\bar{\rho} g \eta_0}{\cosh(kH)} \cosh[k(z+H)] \cos(kx + ly - \omega t) \qquad (3.55)$$

$$\tilde{w}(x,y,z,t) = \frac{k g \eta_0}{\omega \cosh(kH)} \operatorname{senh}[k(z+H)] \operatorname{sen}(kx + ly - \omega t) \qquad (3.56)$$

$$\tilde{u}(x,y,z,t) = \frac{k g \eta_0}{\omega \cosh(kH)} \cosh[k(z+H)] \cos(kx + ly - \omega t) \qquad (3.57)$$

$$\tilde{v}(x,y,z,t) = \frac{l g \eta_0}{\omega \cosh(kH)} \cosh[k(z+H)] \cos(kx + ly - \omega t) \qquad (3.58)$$



$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

x pequeno $\Rightarrow \tanh x \approx x$

x grande $\Rightarrow \tanh x \approx 1$

segue aproximações

Rel. de dispersão

$\omega^2 = gk\tanh(kH)$, lembrando que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$

Aproximações :

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

① $kH \ll 1 \Rightarrow H \ll \frac{1}{k} \Rightarrow H \ll \lambda$, $H < \frac{\lambda}{20}$ (5% de erro)

$$\boxed{\omega^2 \approx gHk^2} \qquad (3.60)$$

Aproximação de águas rasas ou de ondas longas

$c \approx \sqrt{gH}$; $c_g \approx \sqrt{gH}$ $\Rightarrow$ OGS - longa não é dispersiva

$$(3.55) \Rightarrow \tilde{p}(x,y,z,t) \approx \bar{\rho} g \eta_0 \cos(kx + ly - \omega t) \qquad (3.62)$$

$\tilde{p}$ é independente de z !

$\tilde{p}$ no caso da OGS é a perturbação de pressão causada pela altura da onda

② $kH \gg 1 \Rightarrow H \gg \frac{1}{k} \Rightarrow H \gg \lambda$, $H > \frac{\lambda}{2}$ (5% de erro)

$$\boxed{\omega^2 \approx gk} \qquad (3.59)$$

Aproximação de águas profundas ou de ondas curtas

$c \approx \sqrt{\frac{g}{k}}$; $c_g \approx \frac{c}{2}$ $\Rightarrow$ OGS - curta é dispersiva

$$(3.55) \Rightarrow \tilde{p}(x,y,z,t) \approx \bar{\rho} g \eta_0 e^{kz} \cos(kx + ly + \omega t) \qquad (3.61)$$

$\tilde{p}$ decai exponencialmente com z !

11/04/2007

3.2 ONDAS INTERNAS EM UM FLUIDO INVÍSCIDO

3.2.1 OCEANO INFINITO – Horizontalmente e Verticalmente

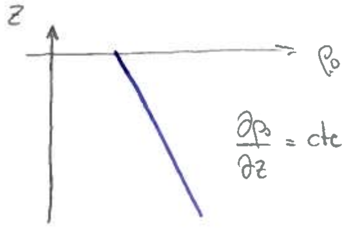
- ESTADO BÁSICO : repouso

$$u(x,y,z,t) = \tilde{u}(x,y,z,t)$$
$$v(x,y,z,t) = \tilde{v}(x,y,z,t) \qquad (3.63)$$
$$w(x,y,z,t) = \tilde{w}(x,y,z,t)$$

- DENSIDADE :

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_0(z) + \tilde{\rho}(x,y,z,t) \qquad (3.64)$$

Suposição : ρ_0 é uma função linear de z



- PRESSÃO :

$$p(x,y,z,t) = p_0(z) + \tilde{p}(x,y,z,t) \qquad (3.65)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g \qquad (3.66)$$

- EQUAÇÕES :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \qquad (3.67)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} \qquad (3.68)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} g \qquad (3.69)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \qquad (3.70)$$

p/ fechar o sistema, a eq da densidade sob aproximação de boussinesq

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{w}\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \qquad (3.71)$$

- CONDIÇÕES DE CONTORNO : Não há!

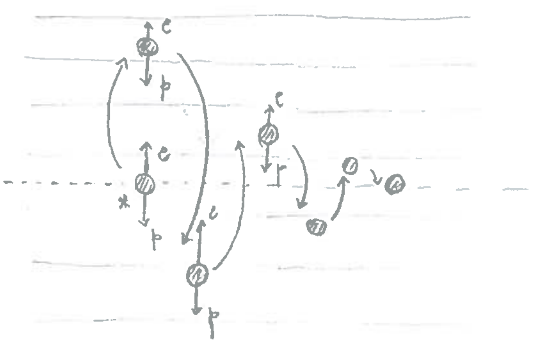
→ combinando (3.67) à (3.71) :

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla^2 \tilde{w}\right) + N^2 \nabla_H^2 \tilde{w} = 0} \qquad (3.72)$$

onde : $N^2 = -\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}$

é o quadrado da Frequência de Brunt - Vaisala

É a frequência máxima de oscilação de um elemento de fluido quando ele é deslocado verticalmente de sua posição de repouso.



↳ situação com atrito

Se não há atrito, o elemento não volta a posição inicial, fica oscilando com frequência igual a frequência de Brunt - Vaisala.

- CONDIÇÃO INICIAL → análogo ao η.

$$\tilde{w}(x,y,z,0) = Q\cos(kx + ly + mz)$$

Para qualquer t :

$$\tilde{w}(x,y,z,t) = Q\cos(kx + ly + mz - \omega t)$$ chamaremos Q de $\hat{w}$

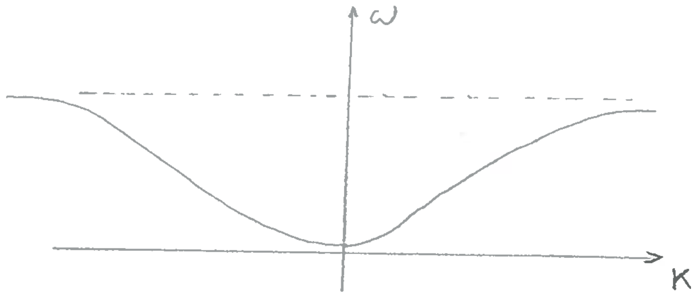
$$\tilde{w} = Re\left[\hat{w}\, e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}\right] \qquad (3.73)$$

Introduzindo (3.73) em (3.72)

$$\boxed{\omega^2 = \frac{(k^2+l^2)N^2}{k^2+l^2+m^2}} \qquad (3.74)$$

Relação de dispersão para OGI

obs: $0 \leq \omega \leq N$



- Velocidade de Fase

$$\vec{c} = \frac{\omega}{K}\frac{\vec{K}}{K} = \frac{N K_H}{K^2}\frac{\vec{K}}{K} \Rightarrow |\vec{c}| = c = \frac{N K_H}{K^2} \qquad (3.75)$$

- Velocidade de Grupo

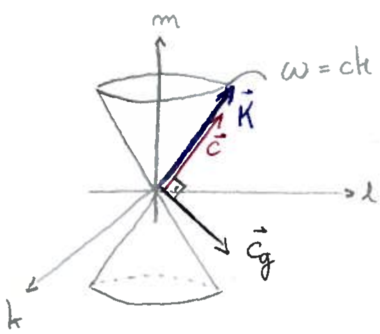
$$\vec{c}_g = \nabla_K \omega = \frac{N m^2}{K^3 K_H}\left(\vec{K}_H - \frac{K_H^2}{m}\vec{k}\right) \qquad (3.76)$$

$\Rightarrow \vec{c} \neq \vec{c}_g \Rightarrow$ OGI são dispersivas

obs: 1) $\vec{c} \cdot \vec{c}_g = 0 \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{c}_g$

2) $(3.74) \Rightarrow \omega^2 = \frac{N^2 K_H^2}{K^2} = N^2 \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre $\vec{K}$ e $\vec{K}_H$

os lugares geométricos para $\omega = cte$ têm a forma de cones simétricos, com geratriz no eixo m



$(3.73) \Rightarrow \tilde{w} = \hat{w}\cos(kx + ly + mz - \omega t)$

(3.73) em $(3.71) \Rightarrow \tilde{\rho} = -\dfrac{\bar{\rho} N^2 \hat{w}}{\omega g} \operatorname{sen}(kx + ly + mz - \omega t)$ (3.78)

(3.73) e $(3.78) \Rightarrow \tilde{p} = -\dfrac{\bar{\rho}\,\omega m \hat{w}}{k^2 + l^2}\cos(kx + ly + mz - \omega t)$ (3.77)

(3.77) em $(3.67) \Rightarrow \tilde{u} = -\dfrac{k m \tilde{w}}{k^2 + l^2}\cos(kx + ly + mz - \omega t)$ (3.79)

(3.77) em $(3.68) \Rightarrow \tilde{v} = -\dfrac{l m \tilde{w}}{k^2 + l^2}\cos(kx + ly + mz - \omega t)$ (3.80)

Verificar o que acontece quando $\theta \to 0$ e quando $\theta \to \frac{\pi}{2}$

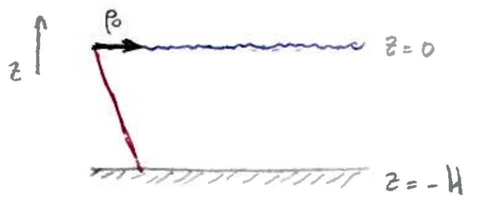
3.2.2 OCEANO VERTICALMENTE FINITO

Todo desenvolvimento de onda interna em um oceano infinito é o mesmo aqui, até as condições de contorno.

→ EQUAÇÃO DE ONDA

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\bar{\nabla}^2 \tilde{w}\right) + N^2 \nabla_H^2 \tilde{w} = 0 \qquad (3.81)$$

→ CONDIÇÕES DE CONTORNO



- Em $z = -H \Rightarrow$ condição cinemática

$$\tilde{w} = 0 \quad \text{em} \quad z = -H \qquad (3.82)$$

- Em $z = 0 \Rightarrow$ condição cinemática

$\tilde{w} = 0$ em $z = 0 \Rightarrow$ Aproximação da Tampa Rígida (3.83)

→ CONDIÇÃO INICIAL

$$\tilde{w}(x,y,z,0) = Q(z)\cos(kx + ly + mz)$$

EM qualquer t:

$$\tilde{w} = Re\left[\hat{w}(z) \cdot e^{i(kx+ly-\omega t)}\right] \qquad (3.84)$$

A forma complexa permite retirar a dependência em z da parte complexa, pois ela aparece em $\tilde{w}(z)$. Logo se na solução final tiver que aparecer dependência em z, ela aparecerá. Essa é uma das vantagens de se trabalhar na forma complexa

(3.84) em (3.81):

$$\frac{d^2\hat{w}}{dz^2} - (k^2+l^2)\left(1-\frac{N^2}{\omega^2}\right)\hat{w} = 0 \qquad (3.85)$$

↳ Eq dif ordinária homogênea de coef. constantes

(X) 1º CASO: $N^2 \leq \omega^2 \Rightarrow \left(1-\frac{N^2}{\omega^2}\right) \geq 0$,

eq característica:

$$r^2 - (k^2+l^2)\left(1-\frac{N^2}{\omega^2}\right) = 0$$

$$\hat{w} = a_1 e^{rz} + a_2 e^{-rz} \qquad (3.86)$$

onde $r = \left[(k^2+l^2)\left(1-\frac{N^2}{\omega^2}\right)\right]^{1/2}$, $r \in \mathbb{R}$

c.cont (3.82) em (3.86) $\Rightarrow a_1 = -a_2 e^{2rH}$ (3.87)

$$\Rightarrow \hat{w} = a_2\left(e^{-rz} - e^{2rH} e^{rz}\right) \qquad (3.88)$$

c.cont (3.83) em (3.88) $\Rightarrow a_2\left(1-e^{2rH}\right) = 0$ (3.89)

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow \hat{w} = 0 \Rightarrow \tilde{w} = 0 \quad \text{(Sol. Trivial)} \\ 1-e^{2rH} = 0 \Rightarrow 2rH = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \tilde{w} = 0 \end{cases}$$

(✓) 2º CASO: $N^2 > \omega^2 \Rightarrow \left(1-\frac{N^2}{\omega^2}\right) < 0 \Rightarrow r \notin \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{C}$

(3.90): $\hat{w} = a_1 e^{i\alpha z} + a_2 \cdot e^{-i\alpha z}$, onde $\alpha = \left[(k^2+l^2)\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)\right]^{1/2} \in \mathbb{R}$, $\alpha = Re(r)$

c. cont (3.83) em (3.90) $\Rightarrow a_2 = -a_1$ (3.90 A)

$$\hat{w} = a_1\left[e^{i\alpha z} - e^{-i\alpha z}\right] \qquad (3.91)$$

Cont. (3.82) em (3.91) $\Rightarrow$

$$a_1\left(e^{-i\alpha H} - e^{i\alpha H}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \text{solução trivial} \\ e^{-i\alpha H} - e^{i\alpha H} = 0 \Rightarrow e^{2i\alpha H} = 1 \Rightarrow * \end{cases}$$

$* \cos(2\alpha H) + i \,\text{sen}(2\alpha H) = 1$

Re: $\cos(2\alpha H) = 1$

e $\quad \Big\rangle\; 2\alpha H = 2n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{H}, \quad n \in \mathbb{N}^*$ (3.93)

Im: $\text{sen}(2\alpha H) = 0$

De (3.90A) e (3.93),

$$\boxed{\omega_n^2 = \frac{(k^2+l^2)N^2}{k^2 + l^2 + \frac{n^2}{H^2}\pi^2}} \quad (3.94) \qquad m^2 = \frac{n^2}{H^2}\pi^2 \rightarrow \text{nº de onda vertical}$$

Rel. de dispersão para OGI em um oceano finito verticalmente

$m = n\frac{\pi}{H}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

16/04/2007

De (3.84), (3.91) e (3.93):

$$\tilde{w}(x,y,z,t) = -a_1\left[\cos\left(kx + ly - \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right) - \cos\left(kx + ly + \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right)\right] \quad (3.96)$$

Obs: 1) $\tilde{w} = \text{Re}\left[\hat{w}(z).e^{i(kx+ly-\omega t)}\right] \Rightarrow$ apesar de não aparecer nº de onda vertical aqui, na solução aparece.

2) Sobreposição de duas ondas:

$\sim -\frac{n\pi}{H}.z \Rightarrow c_z = \frac{\omega}{m} = \frac{\omega}{-\frac{n\pi}{H}} < 0 \downarrow$ propaga a fase para baixo

$\sim \frac{n\pi}{H}z \Rightarrow c_z = \frac{\omega}{m} = \frac{\omega}{\frac{n\pi}{H}} > 0 \uparrow$ propaga a fase para cima

(3.96) em (3.71):

$$\tilde{\rho}(x,y,z,t) = -\frac{a_1 \bar{\rho} N^2}{g\omega}\left[\operatorname{sen}\left(kx + ly + \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right) - \operatorname{sen}\left(kx + ly - \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right)\right] \quad (3.97)$$

(3.96) e (3.97) em (3.69):

$$\tilde{p}(x,y,z,t) = -\frac{a_1 \bar{\rho}}{\omega}\frac{\frac{n\pi}{H}N^2}{k^2 + l^2 + \frac{n^2\pi^2}{H^2}}\left[\cos\left(kx + ly + \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right) + \cos\left(kx + ly - \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right)\right] \quad (3.98)$$

(3.98) em (3.67)

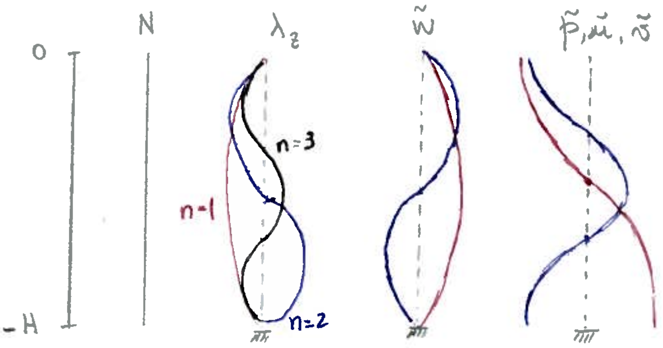
$$\tilde{u}(x,y,z,t) = -\frac{a_1 k}{\omega^2}\frac{\frac{n\pi}{H}N^2}{k^2 + l^2 + \frac{n^2\pi^2}{H^2}}\left[\cos\left(kx + ly + \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right) + \cos\left(kx + ly - \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right)\right] \quad (3.99)$$

(3.98) em (3.68)

$$\tilde{v}(x,y,z,t) = -\frac{a_1 l}{\omega^2}\frac{\frac{n\pi}{H}N^2}{k^2 + l^2 + \frac{n^2\pi^2}{H^2}}\left[\cos\left(kx + ly + \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right) + \cos\left(kx + ly - \frac{n\pi}{H}z - \omega t\right)\right] \quad (3.100)$$

n	m	λ_z
1	$\frac{\pi}{H}$	$2H$
2	$\frac{2\pi}{H}$	H
3	$\frac{3\pi}{H}$	$\frac{2H}{3}$

$\Rightarrow$ O maior comprimento de onda possível é o dobro da coluna de água.



3.3 ENERGIA : OGS.

Def: Média sobre um período

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A\, d\theta \quad , \quad \text{onde } \theta \text{ é a fase} \Rightarrow \theta = kx + ly - \omega t$$

Energia cinética média, por unidade de área, na coluna de água, para propagação ao longo do eixo x:

$$E_c = \left\langle \int_{-H}^{\eta} \frac{\bar{\rho}}{2}(\vec{v})^2 dz \right\rangle = \frac{\bar{\rho}}{2}\cdot\left\langle \int_{-H}^{\eta}(\vec{v})^2 dz \right\rangle \text{, linearizando : } E_c \approx \frac{\bar{\rho}}{2}\int_{-H}^{0}\langle(\vec{v})^2\rangle dz \qquad [MT^{-2}]$$

De (3.56) e (3.58):

$$E_c = \frac{\bar{\rho}}{2}\int_{-H}^{0}\frac{k^2 g^2 \eta_0^2}{\omega^2 \cosh^2(kH)}\left\{\cosh^2[k(z+H)]\langle\cos^2\theta\rangle + \operatorname{senh}^2[k(z+H)]\langle\operatorname{sen}^2\theta\rangle\right\} dz$$

$$E_c = \frac{\bar{\rho}}{4}\,\frac{k^2 g^2 \eta_0^2}{\omega^2}\,\frac{\operatorname{senh}(2kH)}{2k\cosh^2(kH)}$$

ou, usando (3.42)

$$\boxed{E_c = \frac{1}{4}\bar{\rho} g \eta_0^2} \qquad (3.101)$$

Energia potencial média, por unidade de área, devida à onda, para propagação em x:

$$E_p = \left\langle \int_0^{\eta}\bar{\rho} g z\, dz \right\rangle \quad [MT^{-2}] \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_p = \frac{1}{4}\bar{\rho} g \eta_0^2} \qquad (3.102)$$

$E_p = E_c \Rightarrow$ equipartição de energia

Energia mecânica total média, por unidade de área é:

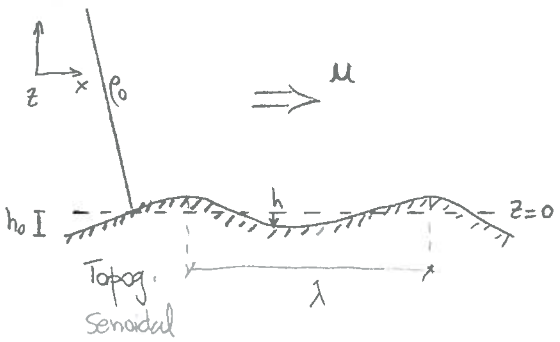
$$E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}\bar{\rho} g \eta_0^2$$

Fluxo de energia mecânica (trabalho da FGP) através de uma superfície vertical de largura unitária:

$$\langle \tilde{p}\cdot\tilde{u} \rangle = \frac{1}{2}\bar{\rho} g \eta_0^2 \left[\frac{\omega}{2k}\left(1+\frac{2kH}{\operatorname{senh}(2kH)}\right)\right] \quad [MLT^{-3}] \qquad (3.104)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \tilde{p}\tilde{u} \rangle = E_T \, C_{g_x}} \qquad (3.106)$$

3.4 EXEMPLO DE ONDA FORÇADA



Fluido semi-infinito

Suporemos fluido em repouso e fundo movendo-se com velocidade $-u$, isto é,

$$h = h_0 \operatorname{sen}(\alpha x - \omega t) \qquad (3.125)$$

onde: $\alpha = \dfrac{2\pi}{\lambda}$; $c = \dfrac{\omega}{\alpha} = -u$

Fazendo:

$$\tilde{w} = Re\left[\hat{w}(z)\, e^{i(\alpha x - \omega t)}\right] \qquad (3.126)$$

A equação para $\hat{w}$ é (ver 3.85):

$$\boxed{\frac{d^2\hat{w}}{dz^2} - \alpha^2\left(1-\frac{N^2}{\omega^2}\right)\hat{w} = 0} \qquad (3.127)$$

Condição de contorno no fundo (linearizada):

$\tilde{w} = 0$ em $z=0$; $\quad \tilde{w} = \dfrac{dh}{dt} = -\omega h_0 \cos(\alpha x - \omega t)$, em $z=0$

De (3.126) e (3.128):

$$\boxed{\hat{w} = -\omega h_0 \quad \text{em} \quad z=0} \qquad (3.129)$$

1º caso: $N^2 < \omega^2$ → fisicamente sem sentido ⇒ é necessário que $a_1 = 0$, p/ que $\hat{w}$ permaneça finito quando $z \to \infty$

$$\hat{w} = a_1 e^{rz} + a_2 e^{-rz} \qquad (3.130)$$

onde $r = \left[\alpha^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)\right]^{1/2} \in \mathbb{R}$

(3.130) em (3.129) ⇒ $a_2 = -a_1 - \omega h_0$ ⇒ $a_2 = -\omega h_0$

(3.130) ⇒ $\hat{w} = -\omega h_0 e^{-rz}$

(3.126) ⇒ $$\boxed{\tilde{w} = -\omega h_0 e^{-\alpha\left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)^{1/2} z} \cos(\alpha x - \omega t)} \qquad (3.132)$$

→ $\tilde{w}$ decresce exponencialmente com z. A onda OGI fica confinada nas proximidades do fundo. Diz-se também que a estrutura da onda é evanescente na direção z.

2º caso: $N^2 > \omega^2$ → denotam propag. vertical da onda

$$\hat{w} = a_1 \cdot e^{isz} + a_2 \cdot e^{-isz} \qquad (3.133)$$

onde $s = \left[\alpha^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right)\right]^{1/2} \in \mathbb{R}$, é o nº de onda vertical

Fisicamente, é necessário que $(c_g)_z > 0$, isto é, $\frac{\partial \omega}{\partial s} > 0$. Lembrando que:

$$\omega^2 = \frac{\alpha^2 N^2}{\alpha^2 + s^2} \quad \text{(rel. de dispersão)}$$

→ condição radiativa ⇓ obriga que a onda se propague em uma determinada direção apenas

concluímos que $a_2 = 0$.

De (3.129) ⇒ $a_1 = -\omega h_0$ e:

$$\boxed{\tilde{w} = -\omega h_0 \cos(\alpha x + sz - \omega t)} \qquad (3.134)$$

→ A onda aqui não fica confinada e se propaga verticalmente

4. Rotação

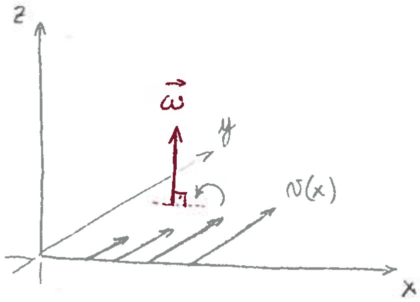
4.1 Vorticidade ($\vec{\omega}$)

$$\boxed{\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}} \qquad (4.1)$$

$[T^{-1}]$ (dimensão de velocidade angular)

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.2) \qquad ; \qquad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.3) \qquad ; \qquad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.4)$$

1)

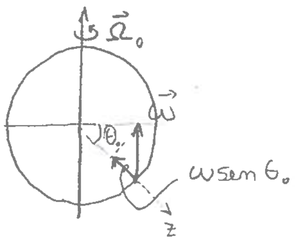


$\vec{v} = v(x)\vec{j}$

$\vec{\omega} = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{k}$

o vetor $\vec{\omega}$ tem a direção do eixo de rotação do fluido

2)



$\vec{v} = \vec{\Omega}_o \times \vec{r}$

$\vec{\omega} = \nabla \times (\vec{\Omega}_o \times \vec{r})$

$$\boxed{\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}_o} \qquad (4.5)$$

Obs: $f_o = 2\Omega_o \,\mathrm{sen}\, \theta_o$

$f_o = \omega \,\mathrm{sen}\, \theta_o$

f_o é a componente vertical do vetor vorticidade da Terra

por isso $f_o < 0$ no H.S. e $f_o > 0$ no H.N.

Vorticidade da Terra = Vorticidade Planetária

VORTICIDADE ABSOLUTA :

$$\vec{\omega}_a = \nabla \times \vec{v}_a = \underbrace{\nabla \times (\vec{v}}_{\text{Vorticidade Relativa}} + \overbrace{\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}}^{\text{velocidade da Terra}})$$

$$\boxed{\vec{\omega}_a = \vec{\omega} + 2\vec{\Omega}_0} \qquad (4.6)$$

relativa pois é medida em relação à Terra, ou seja, em um referencial não-inercial

$\vec{\omega}_a$: vorticidade absoluta

$\vec{\omega}$: vorticidade relativa

$2\vec{\Omega}_0$: vorticidade planetária

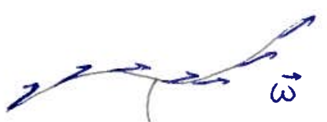
OBS: MOVIMENTO QUASE-HORIZONTAL

Estimar a razão entre as vorticidades relativa e planetária

$$\frac{|\vec{\omega}|}{|2\vec{\Omega}_0|} = \frac{\left|\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right|}{|f_0|} = O\left(\frac{\frac{U}{L}}{|f_0|}\right) = O\left(\frac{U}{|f_0|L}\right) = \varepsilon$$

ESCOAMENTO ONDE $\varepsilon \ll 1 \Rightarrow V_{plan} \gg V_{rel}$

LINHA DE VÓRTICE



t_{fixo}

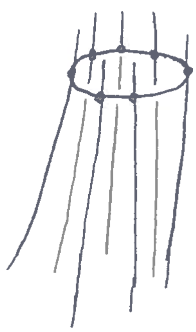
$\vec{\omega}$

linha de vórtice

ou linha de vorticidade

ou filamento de vórtice

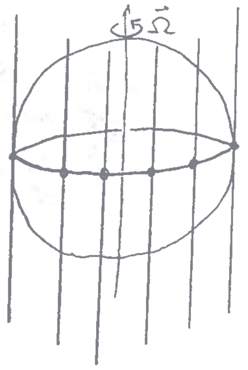
TUBO DE VÓRTICE



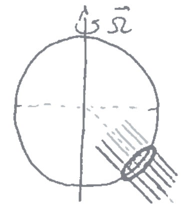
$\Rightarrow$ linhas de vórtice

Exemplos:

1) Tubo de vórtice da Terra



2) Tubo de vórtice de um movimento horizontal na Terra



* Olhar no pedlosky propriedades dos tubos de vórtice

OBS: $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$

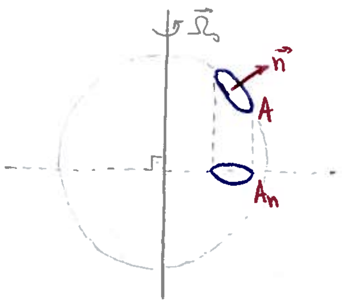
$\nabla \cdot \vec{\omega}_a = 0$

FLUXO DE UM TUBO DE VÓRTICE

$$\Gamma_a = \iint_A \vec{\omega}_a \cdot \vec{n} \, dA \qquad [L^2T^{-1}] \qquad (4.10)$$

(4.6) em (4.10): $\Gamma_a = \Gamma + 2\Omega_0 A_n \qquad (4.11)$

$\hookrightarrow \Gamma = \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dA$ é o fluxo do tubo de vorticidade relativa e A_n é área da projeção de A sobre um plano perpendicular a $\vec{\Omega}_0$.



Se A está no eixo de rotação: $A_n = A$

Se A está no eixo do equador: $A_n = 0$

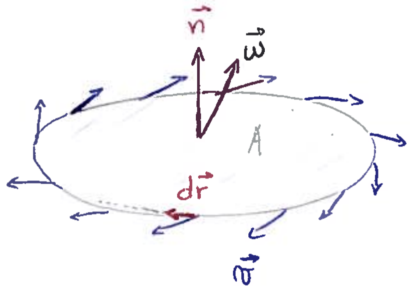
4.2 CIRCULAÇÃO (C)

$$\boxed{C_a = \oint \vec{v}_a \cdot d\vec{r}} \qquad [L^2T^{-1}] \qquad (4.12)$$

VORTICIDADE É PONTUAL

CIRCULAÇÃO É MEDIDA EM UM CONTORNO FECHADO

> Ambos medem ROTAÇÃO



$\boxed{\vec{v}_a \cdot d\vec{r}}$ é tangente ao contorno

Teorema de Stokes em (4.12)

$$C_a = \oint \vec{v}_a \cdot d\vec{r} = \iint_A \vec{\omega}_a \cdot \vec{n}\, dA \quad \Leftrightarrow \quad C_a = \Gamma_a \qquad (4.13)$$

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dA \quad \Leftrightarrow \quad C = \Gamma \qquad (4.14)$$

$$\frac{dC}{dt} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \cancel{\oint \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{r})}^{\to 0} \qquad [L^2T^{-2}]$$

$$\frac{dC}{dt} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \qquad (4.15)$$

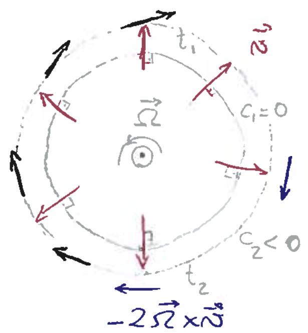
Usando a equação do movimento

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = -\underbrace{\oint (2\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{r}}_{(1)} - \underbrace{\oint \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r}}_{(2)} + \underbrace{\oint \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \cdot d\vec{r}}_{(3)}} \qquad (4.16) \qquad \left(\oint \vec{g} \cdot d\vec{r} = 0 \right)$$

Teorema da Circulação ou

Equação da Circulação

(1) Acção da força de coriolis

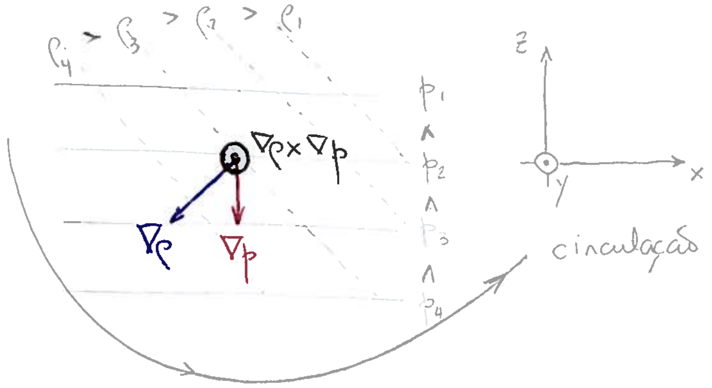


$$-\oint(2\vec{\Omega}\times\vec{v})\cdot d\vec{r} = -2\Omega\frac{dA_n}{dt} \quad (4.17)$$

A $\vec{v}_a$ das partículas de fluido é igual em t_1 e t_2

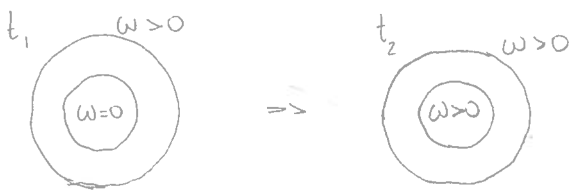
(2) Acção da FGP : $-\oint\frac{\nabla p}{\rho}\cdot d\vec{r} = \iint_A \frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2}\cdot\vec{n}\,dA$ (4.18)

a FGP só é capaz de influenciar a circulação se o fluido for baroclínico $(\nabla\rho\times\nabla p\neq 0)$



circulação ⇒ $C>0$ (o fluido sempre tenta se tornar barotrópico)

(3) Acção da Força de Atrito :



4.3 CASOS PARTICULARES

- No caso invíscido ($\vec{F}_{at} = 0$) é:

$$\frac{dc}{dt} = -\oint (2\vec{\Omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{r} - \oint \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} \qquad (4.17)$$

Teorema da circulação de Bjerknes

- No caso invíscido e barotrópico:

$$\frac{dc}{dt} = -\oint (2\vec{\Omega} \times \vec{v}) \qquad (4.18)$$

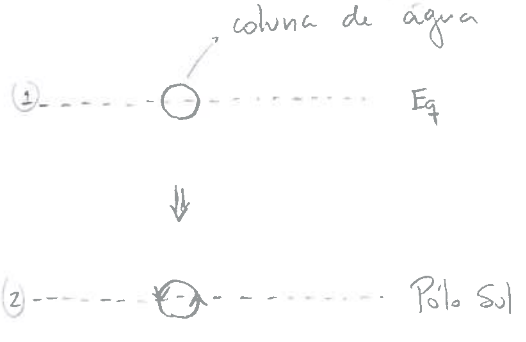
Teorema da circulação de Kelvin

Nesse último caso, $\frac{dC_a}{dt} = 0 \qquad (4.19)$

↳ a circulação absoluta é conservada

$$\boxed{\frac{dc}{dt} + 2\Omega \frac{dA_n}{dt} = 0} \qquad (4.23)$$

Ex:



$$(4.23) \Rightarrow \int_{C_1}^{C_2} dC = -2\Omega \int_{A_1}^{A_2} dA_n$$

$$C_2 - C_1 = -2\Omega \, (A_2 \operatorname{sen}\theta_2 - A_1 \operatorname{sen}\theta_1)$$

No exemplo, $\theta_1 = 0$ e supondo que $C_1 = 0$

$$C_2 = -2\Omega A_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

No pólo sul, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e

$$C_2 = 2\Omega A_2$$

4.4 TEOREMA DA VORTICIDADE

- Partindo da equação do movimento:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \times \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\left(\Phi - \frac{|\vec{v}|^2}{2}\right) + \frac{\vec{F}at}{\rho} \qquad (4.25)$$

- Aplicando o operador $\nabla \times$:

$$\boxed{\frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = \underbrace{(\vec{\omega}_a \cdot \nabla)\vec{v}}_{(1)} - \underbrace{\vec{\omega}_a \nabla \cdot \vec{v}}_{(2)} + \underbrace{\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}}_{(3)} + \underbrace{\nabla \times \frac{\vec{F}at}{\rho}}_{(4)}} \qquad (4.26)$$

Equação da Vorticidade

No 2º membro aparecem os mecanismos físicos que são capazes de alterar a vorticidade absoluta.

(3) e (4), são respectivamente as influências do atrito e da baroclinicidade

(1) e (2), são relativos à influência da rotação da Terra

Para analizar (1) e (2), faremos $\vec{\omega}_a = (\omega_a)_z \vec{k}$, e:

$$\underbrace{(\vec{\omega}_a \cdot \nabla)\vec{v}}_{(1)} - \underbrace{\vec{\omega}_a \nabla \cdot \vec{v}}_{(2)} = \underbrace{\vec{i}\,(\omega_a)_z \frac{\partial u}{\partial z} + \vec{j}\,(\omega_a)_z \frac{\partial v}{\partial z}}_{(1)} - \underbrace{\vec{k}\,(\omega_a)_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{(2)} \qquad (4.27)$$

(4.27) => supondo que a vorticidade só tem componente vertical

Obs: Note que (1) está associada ao cizalhamento da corrente e (2), à divergência da corrente.

(2) $-(\omega_a)_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$

ESTIRAMENTO DO TUBO DE VÓRTICE

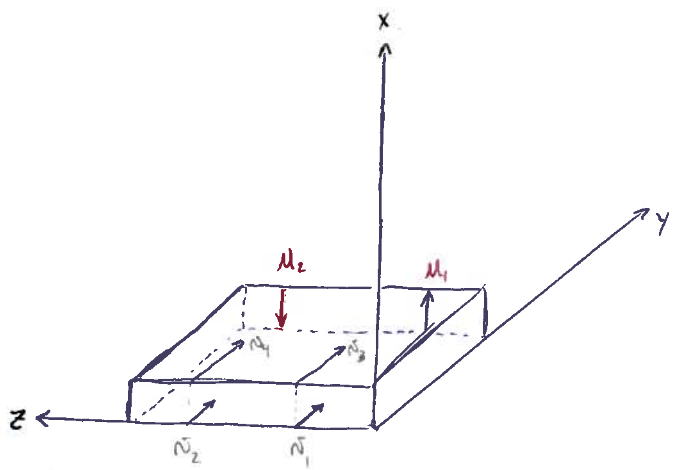
$$\nabla_H \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}_a}{dt} > 0$$

(1) $\vec{i}\,(\omega_a)_z \dfrac{\partial u}{\partial z} + \vec{j}\,(\omega_a)_z \dfrac{\partial v}{\partial z}$

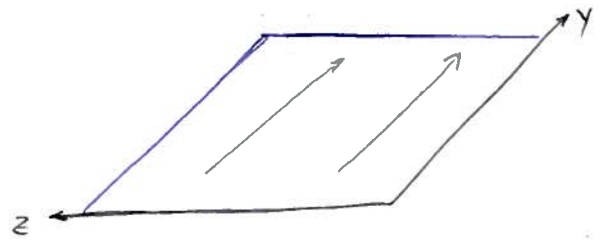
Na direção x, por exemplo

$$(\omega_a)_z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}} + f_0 \frac{\partial u}{\partial z}$$

Por simplicidade, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} < 0$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} > 0$

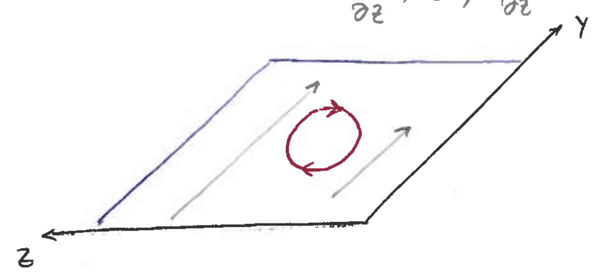


t=1 $\quad \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$



INCLINAÇÃO DO TUBO DE VÓRTICE

t=2 $\quad \dfrac{\partial v}{\partial z} \neq 0 , \ \dfrac{\partial v}{\partial z} > 0$



$$\frac{\partial v}{\partial z} > 0 \Rightarrow \omega_x < 0$$

Em movimentos quase horizontais, (4.26) fica:

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = \underbrace{-(\zeta+f)\nabla\cdot\vec{v}}_{\text{Estiramento}} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)}_{\text{Vetor baroclínico}} - \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{\text{inclinação}} + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_{at\,y}}{\rho}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_{at\,x}}{\rho}\right)\right]}_{\text{Atrito}} \qquad (4.26)$$

onde $\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = \omega_z$

4.5 VORTICIDADE POTENCIAL

Para achar a equação da vorticidade potencial, partimos da equação da vorticidade e eliminamos o $\nabla \cdot \vec{v}$ através da equação da conservação de massa.

Eliminando $\nabla \cdot \vec{v}$ de (4.26) pelo uso de $\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega_a}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\omega_a}}{\rho} \cdot \nabla\right)\vec{v} + \nabla\rho \times \frac{\nabla p}{\rho^3} + \left(\nabla \times \frac{\vec{Fat}}{\rho}\right)\frac{1}{\rho} \qquad (4.29)$$

Seja λ uma propriedade escalar do fluido, tal que:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \psi$$

Fazendo o produto escalar de $\nabla\lambda$ e (4.29):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega_a}}{\rho} \cdot \nabla\lambda\right) = \frac{\vec{\omega_a}}{\rho} \cdot \nabla\psi + \nabla\lambda \cdot \left(\frac{\nabla\rho \times \nabla p}{\rho^3}\right) + \frac{\nabla\lambda}{\rho} \cdot \left(\nabla \times \frac{\vec{Fat}}{\rho}\right)} \qquad (4.33)$$

Equação da Vorticidade Potencial — Teorema de Ertel

De (4.33), se:

(1) λ é conservativa ($\psi = 0$);

(2) o fluido é invíscido ($\vec{Fat} = 0$);

(3) o fluido é barotrópico ($\nabla\rho \times \nabla p = 0$), então:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega_a}}{\rho} \cdot \nabla\lambda\right) = 0}$$

A grandeza conservada:

$\frac{\vec{\omega_a}}{\rho} \cdot \nabla\lambda = \frac{\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}}{\rho} \cdot \nabla\lambda = \Pi$ é chamada vorticidade potencial

4.6 EQUAÇÃO DO VENTO TÉRMICO

É obtida através de uma simplificação da equação da vorticidade

A eq. da vorticidade (4.26) para: • $\vec{\omega} \ll 2\vec{\Omega}$, ou seja, $\varepsilon \ll 1$

• $\vec{Fat} = 0$

$$2(\vec{\Omega}\cdot\nabla)\vec{v} - 2\vec{\Omega}\,\nabla\cdot\vec{v} = -\frac{\nabla\rho\times\nabla p}{\rho^2} \qquad (4.36)$$

Para $z /\!/ \vec{\Omega}$:

$$2\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \qquad (4.37)$$

$$2\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \qquad (4.38)$$

$$2\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \qquad (4.39)$$

De (4.37) e (4.38), ou seja, componentes horizontais de (4.36), verificamos que o cizalhamento vertical da corrente horizontal é proporcional a variações horizontais de densidade

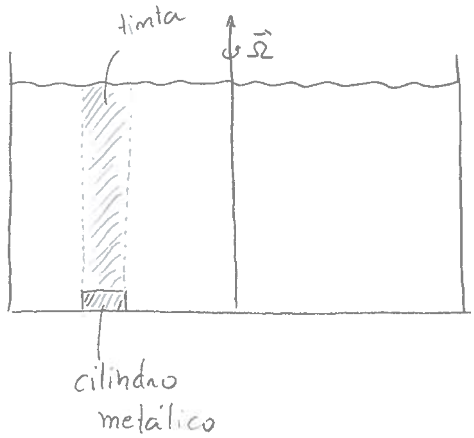
Essa relação é conhecida como a $\boxed{\text{RELAÇÃO DO VENTO TÉRMICO}}$

4.7. TEOREMA DE TAYLOR - PROUDMAN

Se, além de $\vec{\omega} \ll 2\vec{\Omega}$, $\vec{fat} = 0$, $\nabla\rho\times\nabla p = 0$, então:

$$\left.\begin{aligned} &(4.37) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ &(4.38) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ &(4.39) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \;\hookrightarrow\; \nabla_H\cdot\vec{v} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.41)$$

Isto é, não há cisalhamento vertical da corrente horizontal e o movimento é horizontalmente não-divergente. Além disso, $\frac{\partial w}{\partial z}=0$, pela eq. da continuidade, ou seja, a velocidade vertical não varia em z.



A água colorida acompanha sempre o cilindro, se ele for deslocado horizontalmente.

9/5/2007

5. MOVIMENTOS ESTACIONÁRIOS

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=0$$

5.1 MOVIMENTO GEOSTRÓFICO

$$\frac{d\vec{v}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}+\vec{g}+\frac{\vec{F}_{at}}{\rho} \qquad (5.1)$$

$$\frac{\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|}{|2\vec{\Omega}\times\vec{v}|}=\frac{\left|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right|}{|2\vec{\Omega}\times\vec{v}|}=O\left[\frac{\frac{U}{\tau},\frac{U^2}{L}}{2\Omega U}\right]=O\left[\frac{1}{2\Omega\tau},\frac{U}{2\Omega L}\right]=O\left[\varepsilon_t,\varepsilon\right]$$

No caso,

$$\varepsilon_t \ll 1\ , \quad \varepsilon \ll 1$$

$$(5.1) \Rightarrow \quad 2\vec{\Omega}\times\vec{v}=-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}+\vec{g}+\frac{\vec{F}_{at}}{\rho} \qquad (5.2)$$

$$\frac{|\vec{F}_{at}/\rho|}{|2\vec{\Omega}\times\vec{v}|} = O\left[\frac{\nu}{2\Omega L^2}\right] = O[E] \qquad (5.3)$$

No caso de $E \ll 1$,

$$(5.2) \Rightarrow \qquad 2\vec{\Omega}\times\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} \qquad (5.4)$$

(5.4) aberta em componentes:

$$-2\Omega v \,\text{sen}\,\theta + 2\Omega w\cos\theta = -\frac{1}{\rho r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} \qquad (5.5)$$

$$2\Omega u\,\text{sen}\,\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} \qquad (5.6)$$

$$-2\Omega u\cos\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - g \qquad (5.7)$$

Usando a partição:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(r) + \tilde{\rho}(\phi,\theta,r) \\ p &= p_0(r) + \tilde{p}(\phi,\theta,r) \end{aligned} \qquad (5.8)$$

onde, por definição:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = -\rho_0 g \qquad (5.9)$$

(5.8) em (5.5), (5.6) e (5.7) e multiplicando por ρ

$$(\rho_0+\tilde{\rho})[-2\Omega v\,\text{sen}\,\theta + 2\Omega w\cos\theta] = -\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \phi} \qquad (5.10)$$

$$(\rho_0+\tilde{\rho})[2\Omega u\,\text{sen}\,\theta] = -\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \qquad (5.11)$$

$$-(\rho_0+\tilde{\rho})2\Omega u\cos\theta = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} - \tilde{\rho} g \qquad (5.12)$$

Lembrando que:

$$\frac{|W|}{|u|} = \frac{D}{L} = \delta = O(\delta) \qquad (5.13)$$

No caso de $\delta \ll 1$: $\quad |2\Omega w \cos\theta| \ll |2\Omega v \,\text{sen}\, \theta|$

De (5.10) simplificada e (5.11):

$$\tilde{p} = O(\rho 2\Omega U L) \qquad (r.\theta) = (L)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} = O\left(\frac{\tilde{p}}{D}\right) = O\left(\frac{2\Omega U L \rho}{D}\right)$$

$$\rho 2\Omega \bar{U} \cos\theta = O(2\Omega \bar{U} \rho)$$

$$\frac{|\rho 2\Omega \bar{U} \cos\theta|}{\left|\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r}\right|} = O\left(\frac{D}{L}\right) = O(\delta) \ll 1 \qquad (5.14)$$

$\Rightarrow$ Negligencia-se a comp. vertical da ac. de coriolis

Consequentemente,

$$(\rho_0 + \tilde{\rho})(-2\Omega v \,\text{sen}\, \theta) = -\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \phi} \qquad (5.15)$$

$$(\rho_0 + \tilde{\rho})(2\Omega u \,\text{sen}\, \theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \qquad (5.16)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0 + \tilde{\rho}} g \qquad (5.17)$$

De (5.17) $\Rightarrow \tilde{\rho} = O\left(\frac{\tilde{p}}{gD}\right) = O\left(\frac{\rho 2\Omega \bar{U} L}{gD}\right) \Rightarrow \frac{\tilde{\rho}}{\rho} = O\left(\frac{2\Omega \bar{U} L}{gD}\right) = O(\mathcal{E}F)$

No caso de: $\mathcal{E}F \ll 1 \Rightarrow \tilde{\rho} \ll \rho \Rightarrow \rho \approx \rho_0$, Aproximação de Boussinesq

Finalmente:

$$(5.15) \Rightarrow \quad -fv = -\frac{1}{\rho_0 r \cos\theta}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \phi} \qquad (5.22)$$

$$(5.16) \Rightarrow \quad fu = -\frac{1}{\rho_0 r}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \qquad (5.23)$$

$$(5.17) \Rightarrow \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g \qquad (5.24)$$

Fazendo $z = r - a$,

1) Coord. Esféricas

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0 a \cos\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} \qquad (5.25)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_0 a}\frac{\partial p}{\partial \theta} \qquad (5.26)$$

$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z} \qquad (5.27)$$

$\tilde{p} = p$ para os grad. horizontais

pois $\frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \phi}$

$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta}$

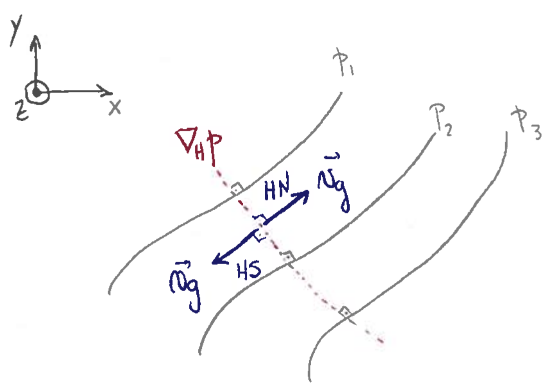
(5.25) e (5.26) Exprimem o <u>BALANÇO</u> <u>GEOSTRÓFICO</u> (balanço entre força de coriolis e a força do gradiente de pressão)

Fazendo $\vec{v}_g = u\vec{i} + v\vec{j}$, obtemos de (5.25) e (5.26):

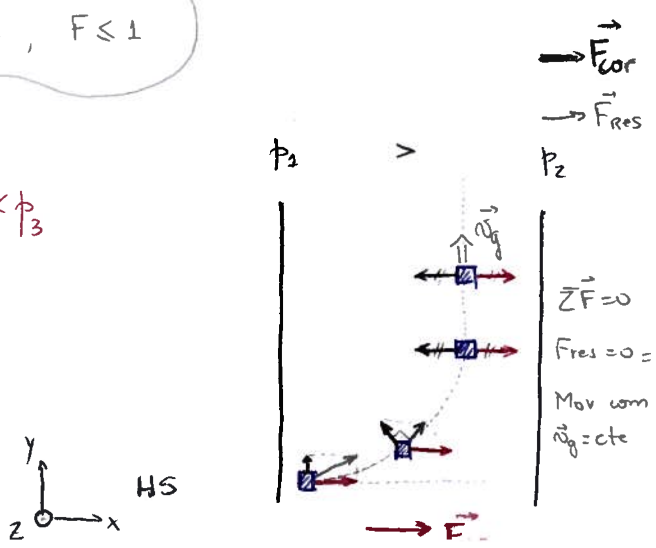
$$\boxed{\vec{v}_g = \frac{1}{\rho_0 f}\,\vec{k} \times \nabla_H p} \qquad (5.28)$$

lembrando que (5.28) é válida se:

$\varepsilon_t \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$, $E \ll 1$, $\delta \ll 1$, $F \leq 1$



$p_1 < p_2 < p_3$



2) $\vec{v}_g$ em coordenadas isobáricas

$$\vec{v} = \frac{g}{f} \vec{k} \times (\nabla z)_p \qquad (5.29)$$

$$fv = \frac{g}{a\cos\theta} \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)_p \qquad (5.30)$$

$$fu = -\frac{g}{a} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_p \qquad (5.31)$$

3) $\vec{v}_g$ usando o geopotencial: $d\Phi = g dz$

$$\vec{v}_g = \frac{1}{f} \vec{k} \times (\nabla \Phi)_p \qquad (5.32)$$

$$fv = \frac{1}{a\cos\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)_p \qquad (5.33)$$

$$fu = -\frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)_p \qquad (5.34)$$

4) Cizalhamento vertical de $\vec{v}_g$

$$\frac{\partial}{\partial z}(5.25) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{f\rho a\cos\theta} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \phi}\right)_p \qquad (5.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(5.26) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{f\rho a} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)_p \qquad (5.37)$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = -\frac{g}{\rho f} \vec{k} \times (\nabla \rho)_p} \qquad (5.38)$$

Equação do Vento Térmico

$\Rightarrow$ Não há cizalhamento vertical de $\vec{v}_g$ em um fluido barotrópico, pois $(\nabla \rho)_p = 0$.

5) $\nabla \cdot \vec{v}_g = \dfrac{1}{a\cos\theta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \phi} + \cos\theta \dfrac{\partial v}{\partial \theta} - v\,\text{sen}\,\theta\right)$ (5.39)

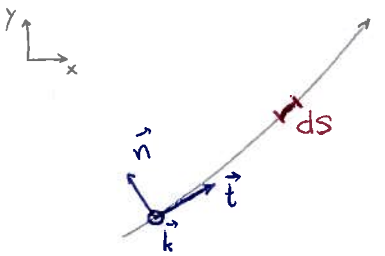
(5.26) em (5.39):

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v}_g = \frac{1}{f}\frac{v}{a}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{v}{a}\cot g\,\theta} \quad (5.40)$$

$\Rightarrow$ No plano f, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = 0$, logo, $\nabla \cdot \vec{v}_g = 0$

5.2 MOVIMENTO DE GRADIENTE

- SISTEMA DE COORDENADAS NATURAIS



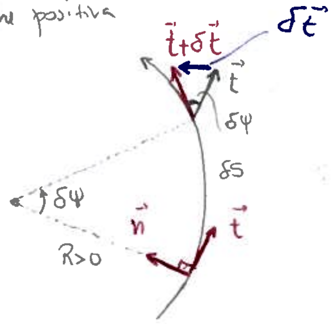
versor $\vec{t}$ paralelo à trajetória

versor $\vec{n}$ normal à trajetória, positivo sempre a esquerda do movimento

$\vec{v}_H = v\vec{t}$; $v = \dfrac{ds}{dt}$; $\dfrac{d\vec{v}_H}{dt} = \dfrac{d}{dt}(v\vec{t}) = \dfrac{dv}{dt}\vec{t} + v\dfrac{d\vec{t}}{dt}$ (o versor $\vec{t}$ varia no tempo)

sempre positiva

(5.45)



$\delta\psi = \dfrac{\delta s}{R}$

$\delta\psi \approx \dfrac{|\delta\vec{t}|}{|\vec{t}|} \Rightarrow \delta\psi = |\delta\vec{t}|$

$|\delta\vec{t}| = \dfrac{\delta s}{R}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{d\vec{t}}{ds}\right| = \dfrac{1}{R} \Rightarrow \dfrac{d\vec{t}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{R}$

$\Rightarrow \dfrac{d\vec{t}}{dt} = \dfrac{d\vec{t}}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v}{R}\vec{n}$

1) Aceleração total em coordenadas naturais

e de (5.45):

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_H}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}} \quad (5.46)$$

↳ aceleração centrífuga

2) Acceleração de Coriolis em coordenadas naturais:

$$\boxed{f\vec{v}_H \times \vec{k} = -fv\vec{n}} \qquad (5.47)$$

3) Equações horizontais para um fluido invíscido:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \qquad (\vec{t}) \qquad (5.48)$$

$$\frac{v^2}{R} + fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \qquad (\vec{n}) \qquad (5.49)$$

Se o movimento é paralelo às isóbaras,

$\frac{\partial p}{\partial s} = 0$ e $\frac{dv}{dt} = 0$, isto é, o movimento é estacionário

Nesse caso, (5.49) é a <u>EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE GRADIENTE</u>

<u>OBS</u>: 1) (5.49) exprime balanço entre:

- aceleração advectiva (aceleração centrífuga)
- aceleração de coriolis
- força do gradiente de pressão por unidade de massa

2) Se o movimento é retilíneo $\Rightarrow R \to \infty \Rightarrow \frac{v^2}{R} \to 0$,

e (5.49) fica a própria equação do movimento geostrófico

$$fv_g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

O <u>movimento geostrófico</u> é um <u>movimento de gradiente</u> com <u>trajetória retilínea</u>

3) $\frac{v^2}{R} + fv = fv_g \Rightarrow fv = fv_g - \frac{v^2}{R}$

4)

	HN	HS
$R>0$	$v_g > v$	$v_g < v$
$R<0$	$v_g < v$	$v_g > v$

5) De (5.49):

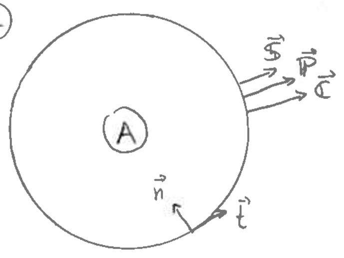
$$v = -\frac{fR}{2} \pm \left(\frac{f^2R^2}{4} - \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right)^{1/2} \qquad (5.50)$$

6) $\vec{\mathbb{P}} + \vec{\mathbb{C}} + \vec{\mathbb{S}} = 0$

Sendo: $\vec{\mathbb{P}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$; $\vec{\mathbb{C}} = -fv\vec{n}$; $\vec{\mathbb{S}} = -\frac{v^2}{R}\vec{n}$

HN	$R>0$	$R<0$
$\frac{\partial p}{\partial n} > 0$	(1) impossível	(3) Baixa Anômala Raiz (+)
$\frac{\partial p}{\partial n} < 0$	(2) Baixa Regular Raiz (+)	(4) Raiz (+) → Alta Anômala ⇒  Raiz (−) → Alta Regular

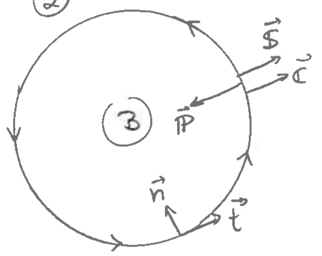
(1)



Impossível

OBSERVADOS NA NATUREZA

(2)

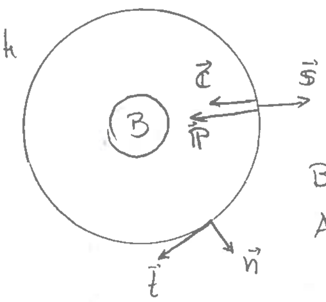


Baixa Regular

Possível

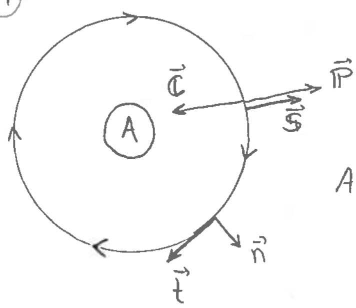
(3)

Matematicamente Possível, mas se $\vec{\mathbb{C}}=0$, o bal. geostrófico não aparece



Baixa Anômala

(4)

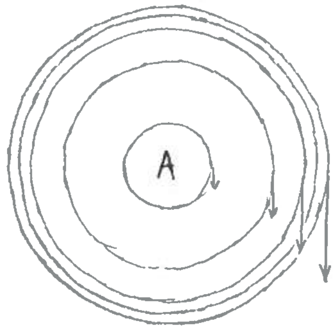


Possível

Alta Regular

Próximo ao centro:

Ⓐ $\left(R<0\,;\ \frac{\partial p}{\partial n}<0\right)$

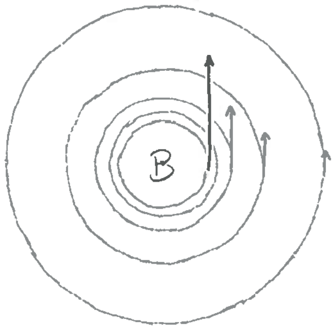


$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} < \frac{f^2R^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} < \frac{f^2R}{4}$$

$\frac{f^2R}{4}$ decresce linearmente em direção ao centro

$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$ também deve diminuir em direção ao centro

Ⓑ $\left(R>0\,;\ \frac{\partial p}{\partial n}<0\right)$



(5.50) $\Rightarrow$ não há restrição para $\frac{\partial p}{\partial n}$

$\Rightarrow$ os movimentos podem ser intensos próximo ao centro

---

16/05/2007

$\rightarrow$ www.badcoriolis.com

5.3. MOVIMENTO CICLOSTRÓFICO

$$R \ll 1 \Rightarrow \left|\frac{v^2}{R}\right| \gg |fv| \Rightarrow \boxed{\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} \qquad (5.51)$$

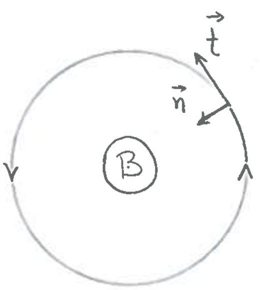
Balanço ciclostrófico

$\rightarrow$ Movimento em escala bem pequena

$$\Rightarrow v = \pm\sqrt{-\frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}} \qquad (5.52) \qquad \Rightarrow \frac{R}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} < 0$$

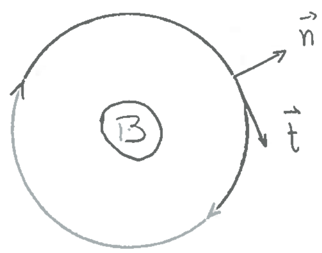
$R>0$

$\frac{\partial p}{\partial n}<0$



$R<0$

$\frac{\partial p}{\partial n}>0$



7.3 EQUAÇÃO DA VORTICIDADE POTENCIAL

para λ podemos usar a função de status, que é conservativa.

Nesse caso:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho}\cdot\nabla\lambda\right) = 0$$

Substituindo λ pela função de status:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{H}\right) = 0} \qquad (7.34)$$

Vorticidade Potencial no Modelo de Águas Rasas $\Rightarrow \dfrac{\zeta+f}{H}$

7.4 LINEARIZAÇÃO

Fazendo: $H(x,y,t) = H_0(x,y) + \eta(x,y,t)$

As condições para a linearização de (7.16), (7.17) e (7.23) são:

$$\eta \ll H_0 \qquad (7.37)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_H}{\partial t} \gg (\vec{v}_H\cdot\nabla)\vec{v}_H \qquad (7.38)$$

Nesse caso:

$$(7.16) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (7.39)$$

$$(7.17) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (7.40)$$

$$(7.23) \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H_0 u) + \frac{\partial}{\partial y}(H_0 v) = 0 \qquad (7.41)$$

Na forma de transporte por unidade de distância:

$$\vec{V} = u H_0 \cdot \vec{i} + v H_0 \vec{j} = U\vec{i} + V\vec{j} \qquad (7.42)$$

Reescrever as equações linearizadas em funções de transporte:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (7.43)$$

3 eqs + 3 incs

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (7.44)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad (7.45)$$

Combinando (7.43) a (7.45), no plano f:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right)\eta - \bar{\nabla}\cdot\left(gH_0 \nabla\eta\right)\right] - f_0 g\, J(H_0, \eta) = 0 \qquad (7.26)$$

↓ Equação de onda

1 eq + 1 inc, onde $J(A,B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$

De (7.39) e (7.40)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right) u = -g\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial x} + f_0 \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \qquad (7.48)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right) v = -g\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial y} + f_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \qquad (7.49)$$

7.6 Movimento Geostrófico

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ em (7.48) e (7.49) $\Rightarrow$

$$\boxed{u = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (7.50) \qquad v = \frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (7.51)}$$

No Modelo de Águas Rasas (M.A.R) invíscido, as soluções estacionárias correspondem ao Movimento Geostrófico.

de (7.50) e (7.51):

$$u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \quad , \quad \text{ou} \quad \vec{v}_H \cdot \nabla\eta = 0$$

$\Rightarrow \vec{v}_H \,//\,$ isolinhas de η $\Rightarrow$ isolinhas de η são linhas de corrente no movimento geostrófico no M.A.R invíscido e barotrópico.

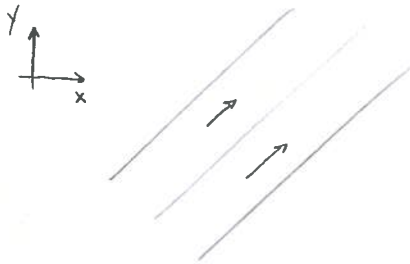
$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ em (7.46):

$$J(H_0, \eta) = 0 \qquad (7.53)$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial H_0}{\partial x}}{\frac{\partial H_0}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial\eta}{\partial x}}{\frac{\partial\eta}{\partial y}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{H_0} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\eta} \qquad (7.54)$$

Isto é, isolinhas de H_0 e η são paralelos



isolinhas de H_0 e η

7.6 ONDAS DE GRAVIDADE

Para um oceano horizontalmente infinito, com $h_B = 0$, no plano f, a solução ondulatória da eq (7.46) é:

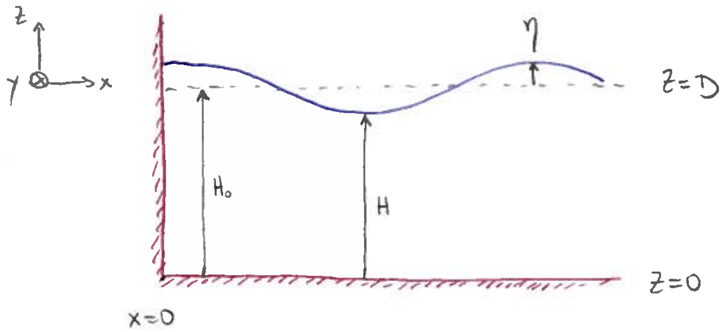
$$\eta = Re\left[\eta_0 \, e^{i(kx + ly - \omega t)}\right] \qquad (7.55)$$

Introduzindo (7.55) na eq de onda (7.46), a relação de dispersão é:

$$\boxed{\omega^2 = f_0^2 + g H_0 (k^2 + \ell^2)} \qquad (7.56)$$

Isto é, a solução ondulatória no plano f, para $h_B = 0$, é a onda de Poicaré

7.7 EFEITOS DE UM CONTORNO LATERAL: Horizontalmente semi-infinito
ONDAS DE GRAVIDADE



p/ $H_0 = \text{cte}$ ($h_B = 0$), (7.46) fica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right)\eta - g H_0 \nabla^2 \eta = 0 \qquad (7.57)$$

Condições de contorno lateral:

$$u = 0 \quad \text{em} \quad x = 0 \qquad (7.58)$$

Solução ondulatória: $\eta = Re\left[\eta_0(x) \cdot e^{i(\ell y - \omega t)}\right]$ (7.59)

(7.59) em (7.57): $$\boxed{\frac{d^2\eta_0}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2 - f_0^2}{g H_0} - \ell^2\right) = 0} \qquad (7.60)$$

(7.59) em (7.58), usando (7.48) para passar a c.c. para função de η

$$\boxed{\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{f_0 \ell}{\omega}\eta_0 = 0} \quad \text{em} \quad x = 0 \qquad (7.61)$$

1º CASO: $() \geq 0$: $\eta_0 = a e^{i\alpha x} + b e^{-i\alpha x}$ (7.62), onde $\alpha = \left(\frac{\omega^2 - f_0^2}{g H_0} - \ell^2\right)^{1/2} \in \mathbb{R}$

↳ supraihercias (7.62 a)

(7.62) em (7.61): $a = \dfrac{\alpha\omega - i f_0 \ell}{\alpha\omega + i f_0 \ell}\, b$ (7.63)

(7.63) em (7.62), usando (7.55):

$$\boxed{\eta = b\cos(-\alpha x + \ell y - \omega t) + b\cos\left(\alpha x + \ell y - \omega t - \frac{2 f_0 \ell}{\alpha\omega}\right)} \qquad (7.64)$$

A solução (7.64) representa a sobreposição de duas ondas

A onda <u>incidente</u> $\propto \cos(-\alpha x + ly - \omega t)$, pois $k<0$

A onda <u>refletida</u> $\propto \cos\left(\alpha x + ly - \omega t - \frac{2f_0 l}{\alpha\omega}\right)$, pois $k>0$

Note que há uma diferença de fase entre a onda incidente e a onda refletida, devido ao termo $-\frac{2f_0 l}{\alpha\omega}$ na onda refletida. Isso é chamado de <u>ROTATIONAL</u> <u>SPLITING</u>. Não é possível gerar uma onda estacionária dessa forma.

de (7.62a): $\boxed{\omega^2 = f_0^2 + gH_0(\alpha^2 + l^2)}$ (7.65)

Onda de Poincaré com contorno lateral

(sobreposição de 2 ondas de poincaré)

<u>2º CASO</u>: $(\,) < 0 \Rightarrow \frac{\omega^2 - f_0^2}{gH_0} - l^2 < 0 \Rightarrow \omega^2 < f_0^2 + gH_0 l^2$

↳ <u>pode</u> <u>ser</u> subinercial ...

(7.60) $\Rightarrow \eta_0 = ae^{\gamma x} + be^{-\gamma x}$ (7.66) onde $\gamma = \left(\frac{f_0^2 - \omega^2}{gH_0} + l^2\right)^{1/2} \in \mathbb{R}$ (7.67)

(7.66) em (7.61): $a(\gamma\omega - f_0 l) - b(\gamma\omega + f_0 l) = 0$ (7.68)

Para uma solução não-trivial:

$$\begin{cases} a = 0 \quad \text{e} \quad \gamma\omega + f_0 l = 0 & (1^{\underline{a}}) \\ \quad\text{ou} & \\ b = 0 \quad \text{e} \quad \gamma\omega - f_0 l = 0 & (2^{\underline{a}}) \end{cases}$$

Ambas conduzem à mesma solução. Tomando a 1ª

$\gamma\omega + f_0 l = 0 \Rightarrow \omega = -\frac{f_0 l}{\gamma}$ (7.69)

$a = 0 \Rightarrow \eta_0 = be^{-\gamma x}$ (7.70)

De (7.69) e (7.67):

$$\omega^4 - (f_0^2 + gH_0 l^2)\,\omega^2 + f_0^2 l^2 g H_0 = 0 \qquad (7.71)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^2 = f_0^2 & (7.72) \rightarrow \text{movimento inercial} \\ \omega^2 = gH_0 l^2 & (7.73) \end{cases}$$

(7.73) corresponde a uma onda de gravidade longa com propagação na direção y, ou seja, paralela à costa. Introduzindo (7.69) e (7.70) em (7.59) e daí, introduzir em (7.48) e (7.49):

$$u = 0 \qquad (7.74)$$

$$v = \frac{g\eta_0 l}{\omega}\, b e^{\frac{f_0 l}{\omega} x} \cos(ly - \omega t) \qquad (7.75)$$

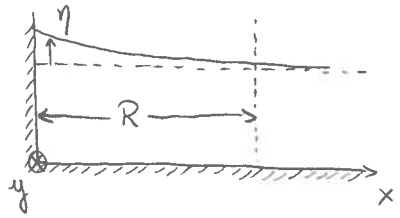
$$\eta = b e^{\frac{f_0 l}{\omega} x} \cos(ly - \omega t) \qquad (7.76)$$

De (7.76), fisicamente é necessário que $\frac{f_0 l}{\omega} < 0$, para obter uma exponencial decrescente em x.

$$\Downarrow$$

$$f_0 l < 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} HN \rightarrow l < 0 \\ HS \rightarrow l > 0 \end{array}}$$



Essa onda é unidirecional, propaga-se com a costa à sua direita (esquerda) no HN (HS).

Em $x=0$, a amplitude é $\underline{\underline{b}}$. A distância da costa em que a amplitude é $\frac{b}{e}$ (escala de decaimento neperiano) é R, o raio de deformação de Rossby $= \frac{\sqrt{gH_0}}{f_0}$. Isto é, essa onda fica confinada entre a costa e distâncias da O(R).

De (7.75) e (7.76):

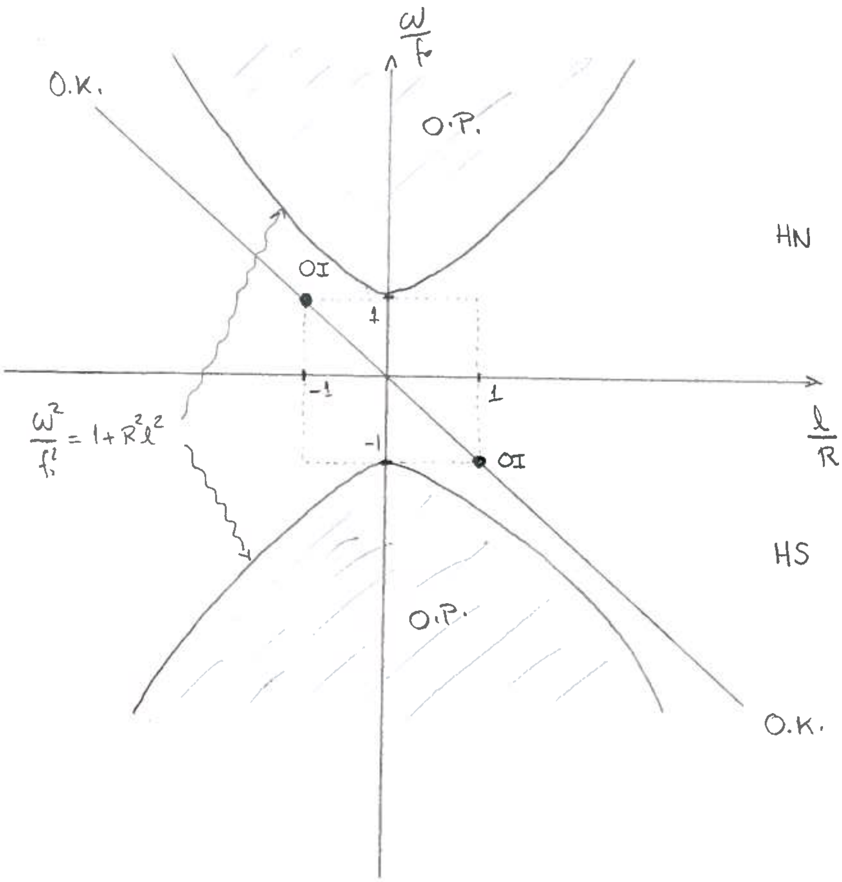
$$-f_0 v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (7.77)$$

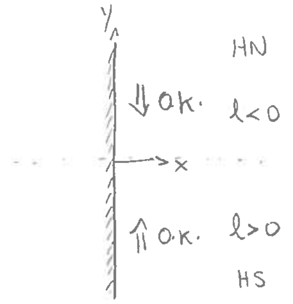
Isto é, a componente de velocidade paralela à costa é geostrófica

A onda que tem todas essas características reunidas é chamada de $\boxed{\text{ONDA DE KELVIN}}$

A onda de Kelvin é a onda que transporta a maior parte da energia das marés na plataforma continental.

24/05/07





OI = Oscilação Inercial

7.8 APROXIMAÇÃO QUASE - GEOSTRÓFICA

Usada para filtrar das soluções as ondas de gravidade

Lembrar: $H_0(x,y) = D - h_B(x,y)$

$$H(x,y,t) = H_0(x,t) + \eta(x,y,t) \qquad (7.109)$$

Daí,

$$H = D + \eta - h_B = D\left(1 + \frac{\eta}{D} - \frac{h_B}{D}\right) \qquad (7.114)$$

$$\Rightarrow H = D \underbrace{\left(1 + \varepsilon \frac{L^2}{R^2}\eta' - \frac{h_B}{D}\right)}_{H'} \qquad (7.115)$$

H' → escrevendo o H na forma não-dimensional

Reescrevendo (7.16), (7.17) e (7.23) na forma não-dimensional:

$$\varepsilon_t \frac{\partial u'}{\partial t'} + \varepsilon\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) - \frac{f}{|f|}v' = -\frac{\partial \eta'}{\partial x'} \qquad (7.117)$$

onde $F = \dfrac{f^2 L^2}{gD} = \left(\dfrac{L}{R}\right)^2$ (7.120)

$$\varepsilon_t \frac{\partial v'}{\partial t'} + \varepsilon\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right) + \frac{f}{|f|}u' = -\frac{\partial \eta'}{\partial y'} \qquad (7.118)$$

$$\varepsilon_t F \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \varepsilon F\left(u'\frac{\partial \eta'}{\partial x'} + v'\frac{\partial \eta'}{\partial y'}\right) - u'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{h_B}{D}\right) - v'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{h_B}{D}\right) + \left(1 + \varepsilon F \eta' - \frac{h_B}{D}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (7.119)$$

Assumiremos $\dfrac{\varepsilon_t}{\varepsilon} = O(1)$ (7.121)

MÉTODO DE ANÁLISE ASSINTÓTICA

Usado quando há um estado básico de magnitude maior que pequenas perturbações

1) Escrever as equações na forma não dimensional (7.117) – (7.119)

2) Identificar um coeficiente $\ll 1 \Rightarrow \varepsilon_t$ ou ε, escolhemos ε

3) Expandir as variáveis (incógnitas) em séries de potência usando o coeficiente $\ll 1$

4) Colecionar, nas equações os termos de mesma ordem

Passo 3

$u' = u'(x', y', t', \varepsilon)$ → reconhecendo que u' é tb função de ε

$$u'(x', y', t', \varepsilon) = \underbrace{u'_0(x', y', t')}_{\text{geostrófico}} + \underbrace{\varepsilon u'_1(x', y', t')}_{\substack{\text{perturbação} \\ \text{de} \\ \text{ordem } \varepsilon}} + \underbrace{\varepsilon^2 u'_2(x', y', t')}_{\substack{\text{perturbação} \\ \text{de} \\ \text{ordem } \varepsilon^2}} + \dots$$

$$u'_0 = O(1), \quad u'_1 = O(1), \quad u'_2 = O(1), \dots \qquad (7.122)$$

Se $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ velocidade puramente geostrófica

$$v'(x', y', t', \varepsilon) = v'_0(x', y', t') + \varepsilon v'_1(x', y', t') + \varepsilon^2 v'_2(x', y', t') + \dots$$

$$\eta'(x', y', t', \varepsilon) = \eta'_0(x', y', t') + \varepsilon \eta'_1(x', y', t') + \varepsilon^2 \eta'_2(x', y', t') + \dots$$

Passo 4 → tem que haver balanço entre os termos de mesma ordem

Exemplo: (7.117) ↴

$$\varepsilon_t \frac{\partial}{\partial t'}(u_0 + \varepsilon u'_1 + \varepsilon^2 u'_2 + \dots) + \varepsilon \left[(u'_0 + \varepsilon u'_1 + \varepsilon^2 u'_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial x'}(u'_0 + \varepsilon u'_1 + \varepsilon^2 u'_2 + \dots) + \dots \right.$$

$$\dots + (v'_0 + \varepsilon v'_1 + \varepsilon^2 v'_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial y'}(u'_0 + \varepsilon u'_1 + \varepsilon^2 u'_2 + \dots) - \frac{f}{|f|}(v'_0 + \varepsilon v'_1 + \varepsilon^2 v'_2 + \dots) = \dots$$

$$\ldots = -\frac{\partial}{\partial x'}(\eta_0' + \varepsilon\eta_1' + \varepsilon^2\eta_2' + \ldots)$$

A soma dos termos $O(1)$ tem que ser $= 0$

A soma dos termos $O(\varepsilon)$ tem que ser $= 0$

A soma dos termos $O(\varepsilon^2)$ tem que ser $= 0 \ldots$

Começando pelos termos de $O(1)$:

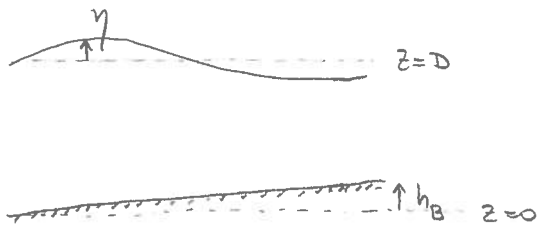
$$\boxed{-\frac{f}{|f|}v_0' = -\frac{\partial\eta_0'}{\partial x'}} \qquad (7.124)$$

→ Balanço de $O(1)$ é o balanço geostrófico

$$\boxed{\frac{f}{|f|}u_0' = -\frac{\partial\eta_0'}{\partial y'}} \qquad (7.125)$$

$$-u_0'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{h_B}{D}\right) - v_0'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{h_B}{D}\right) + \left(\frac{\partial u_0'}{\partial x'} + \frac{\partial v_0'}{\partial y'}\right) - \frac{h_B}{D}\left(\frac{\partial u_0'}{\partial x'} + \frac{\partial v_0'}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (7.126)$$

Assumindo que a topografia é uma perturbação em relação a espessura da coluna de água H.



$\Rightarrow h_B \ll D \Rightarrow \frac{h_B}{D} \ll 1 =$

$\Rightarrow \frac{h_B}{D} = \varepsilon\eta_B'$

Nesse caso, $(7.126) \Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial u_0'}{\partial x'} + \frac{\partial v_0'}{\partial y'} = 0}$ (7.128)

Isto é, em $O(1)$ o movimento é geostrófico (eqs 7.124 e 7.125) e não-divergente (eq. 7.128)

Além disso, o sistema é indeterminado, pois há 3 incógnitas (u_0', v_0', η_0') e 2 equações, pois 7.128 pode ser obtida com uma combinação linear de (7.124) e (7.125)

Termos de $O(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial u_0'}{\partial t'} + u_0'\frac{\partial u_0'}{\partial x'} + v_0'\frac{\partial u_0'}{\partial y'} - \frac{f}{|f|}v_1' = -\frac{\partial \eta_1'}{\partial x'} \qquad (7.129)$$

$$\frac{\partial v_0'}{\partial t'} + u_0'\frac{\partial v_0'}{\partial x} + v_0'\frac{\partial v_0'}{\partial y'} + \frac{f}{|f|}u_1' = -\frac{\partial \eta_1'}{\partial y'} \qquad (7.130)$$

$$F\left(\frac{\partial \eta_0'}{\partial t'} + u_0'\frac{\partial \eta_0'}{\partial x'} + v_0'\frac{\partial \eta_0'}{\partial y'}\right) - u_0'\frac{\partial \eta_B'}{\partial x'} - v_0'\frac{\partial \eta_B'}{\partial y'} + \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x'} + \frac{\partial v_1'}{\partial y}\right) = 0 \qquad (7.131)$$

Velocidades de $O(\varepsilon)$: u_1' e v_1' são chamadas de VELOCIDADES AGEOSTRÓFICAS

O que impede o Balanço Geostrófico em $O(\varepsilon)$ é a variação local e advectiva da Velocidade Geostrófica de $O(1)$?

A aceleração total da Velocidade de $O(1)$ é o que impede a velocidade de $O(\varepsilon)$ de ser geostrófica!

Combinando (7.129) e (7.130), podemos obter a equação da vorticidade em $O(\varepsilon)$:

$$\boxed{\frac{\partial \zeta_0'}{\partial t'} + u_0'\frac{\partial \zeta_0'}{\partial x'} + v_0'\frac{\partial \zeta_0'}{\partial y'} = -\frac{f_0}{|f_0|}\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x'} + \frac{\partial v_1'}{\partial y'}\right)} \qquad (7.133)$$

onde: $\zeta_0' = \dfrac{\partial v_0'}{\partial x'} - \dfrac{\partial u_0'}{\partial y'} = \dfrac{f_0}{|f_0|}\nabla^2\eta_0'$ (7.132)

Eq da vorticidade relativa quase-geostrófica num modelo de Águas Rasas Invíscido e Barotrópico, na forma não dimensional

→ O mecanismo que pode modifica a vorticidade relativa de $O(1)$ é a divergência da velocidade de $O(\varepsilon)$.

Usando (7.131) para eliminar o divergente de (7.133):

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{f_0}{|f_0|}\frac{\partial \eta_0'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{f_0}{|f_0|}\frac{\partial \eta_0'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{f_0}{|f_0|}\nabla^2\eta_0' - \frac{f_0}{|f_0|}F\eta_0' + \frac{f_0}{|f_0|}\eta_B'\right) = 0} \qquad (7.135)$$

Eq da Vorticidade Potencial quase-geostrófica no modelo de Águas Rasas invíscido e homogêneo, na forma não-dimensional.

Agora o problema está fechado, pois (7.135) só tem 1 incógnita → η_0'

29/05

(7.135) → é uma equação de onda ... achemos então soluções para ela

7.9 Movimento QG Estacionário

$\frac{\partial}{\partial t'} = 0 \Rightarrow (7.135) \Rightarrow$ MOVIMENTO GEOSTRÓFICO

$\Rightarrow u_0', v_0'$; com $\vec{v}_0' \parallel \eta_0'$ e η_B'

7.10 Solução Ondulatória : Plano f

Solução harmônica: $\eta_0' = \mathrm{Re}\left[\hat{\eta}' e^{i(k'x' + l'y' - \omega' t')}\right]$ (7.136)

p/ oceano horizontalmente infinito

(7.136) em (7.135): $$\boxed{\omega' = -\frac{f_0}{|f_0|}\frac{k'\frac{\partial \eta_B'}{\partial y'} - l'\frac{\partial \eta_B'}{\partial x'}}{k'^2 + l'^2 + F}} \qquad (7.144)$$

Relação de dispersão para ondas de Rossby Topográficas

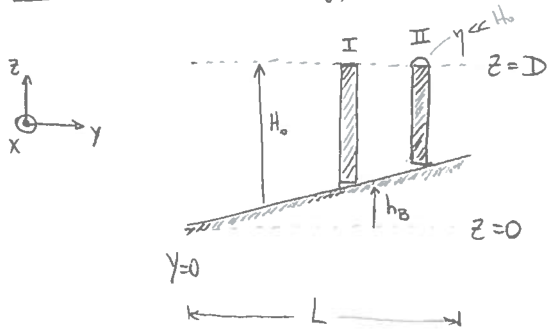
Obs 1) As ondas de gravidade foram filtradas.

2) Solução para onda não-linear.

3) ORT só existe na presença de um gradiente topográfico

$$\left(\frac{\partial \eta'_B}{\partial y'} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \eta'_B}{\partial x} \neq 0 \right)$$

Ex: $H_0 = D(1 - sy)$, $s > 0$



Em (7.144), $\frac{\partial \eta'_B}{\partial x'} = 0$

$h_B = sy$, (7.144) na forma dimensional:

$$\omega = -\frac{s f_0}{L} \frac{k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{gH_0}} \qquad (7.147)$$

Velocidade de Fase:

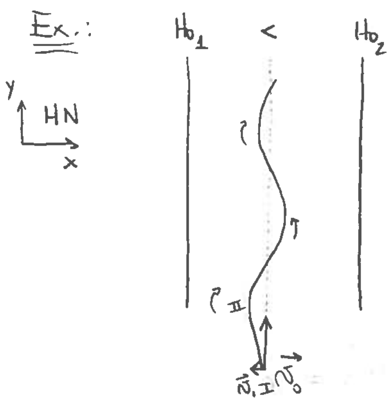
$$C_x = \frac{\omega}{k} = -\frac{s f_0}{L} \frac{1}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{gH_0}}$$

, o sinal de c_x depende de s e f_0, a onda é unidirecional!

	HN	HS
$s>0$	$C_x<0$	$C_x>0$
$s<0$	$C_x>0$	$C_x<0$

Assim, a ORT é também unidirecional. Propaga-se com a menor profundidade a sua direita (esquerda) no HN (HS)

Ex.:



$\vec{v} = \vec{v}_0 + \varepsilon \vec{v}_1$

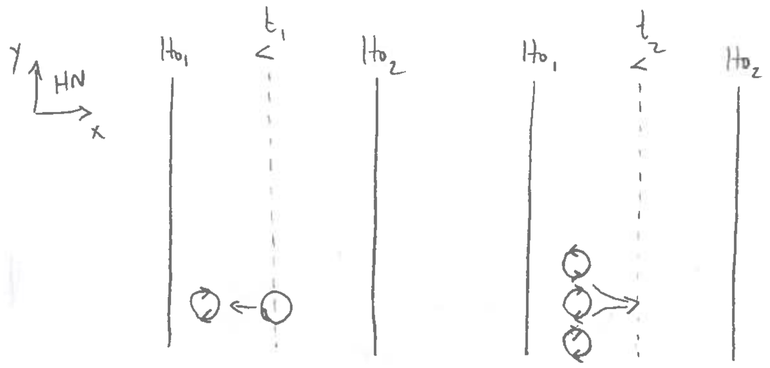
Se a coluna de água é trazida para uma região mais rasa, ganha VORTICIDADE RELATIVA NEGATIVA (Horária)

Conservação de VP $\Rightarrow$ $\Pi = \frac{\zeta + f_0}{H_0 + \eta} = \text{cte}$

$$\Pi_I = \frac{0 + f_0}{H_{0_I} + 0} \qquad \Pi_{II} = \frac{\zeta + f_0}{H_{0_{II}} + \eta} \approx \frac{\zeta + f}{H_{0_{II}}}$$

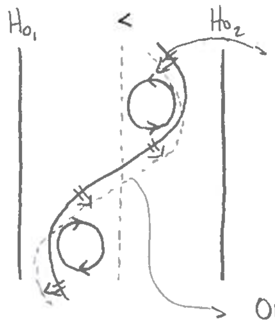
$$\Pi_I = \Pi_{II} \Rightarrow \frac{\zeta}{H_{o_{II}}} = \frac{f_0}{H_{o_I}} - \frac{f_0}{H_{o_{II}}} \Rightarrow \zeta = f_0\left[\frac{H_{o_{II}}}{H_{o_I}} - 1\right]$$

$\boxed{\zeta < 0} \Rightarrow$ no HN $\rightarrow$ ↻



o mecanismo restaurador é a conservação da VP, portanto a ORT é chamada

$\boxed{\text{ONDA DE VORTICIDADE}}$



o movimento dessa linha imaginária é associada à propagação da Onda de Rossby Topográfica

ORT propagando-se com a menor prof a sua direita (HN)

7.11 SOLUÇÃO ONDULATÓRIA : PLANO β

No plano β, a EqVPQG fica: $\qquad \beta' = \frac{L^2}{U}\beta$

$$\left(\frac{f_0}{|f_0|}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial \eta_0'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial \eta_0'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\nabla^2 \eta_0' - F\eta_0' + \eta_B' + \beta' y'\right) = 0 \qquad (7.151)$$

Por simplicidade, $\eta_B' = 0 \Rightarrow$ não há onda topográfica.

Nesse caso, (7.136) em (7.151), conduz a:

$$\boxed{\omega' = -\frac{\beta' k'}{k'^2 + l'^2 + F}}$$

Relação de dispersão para ondas de Rossby Planetárias

Obs: Há uma similaridade dinâmica entre o gradiente topográfico $\left(\frac{\partial \eta_B'}{\partial x}, \frac{\partial \eta_B'}{\partial y}\right)$ e o gradiente planetário $\left(\beta = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

(7.144) para $\frac{\partial \eta_B'}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \omega' = -\frac{f_0}{|f_0|} \frac{\frac{\partial \eta_B'}{\partial y'} k'}{k'^2 + l'^2 + F} = -\frac{f_0}{|f_0|} \frac{GDT k'}{k'^2 + l'^2 + F}$

$\frac{\partial \eta_B'}{\partial x'}$ é análogo ao $\frac{\partial f}{\partial y'}$

$$(7.152) \Rightarrow \omega' = \frac{-GDP k'}{k'^2 + l'^2 + F}$$

Nesse caso a geração de vorticidade relativa não será por estiramento do tubo de vórtice, será devida ao gradiente planetário, ou seja, movimentos meridionais da partícula no plano β.

2 MECANISMOS
- Efeito Topográfico ⇒ Ondas de Rossby Topográficas
- Efeito β ⇒ Ondas de Rossby Planetárias

Velocidade de fase:

$$C_x' = \frac{\omega'}{k'} = -\frac{\beta'}{k'^2 + l'^2 + F} \qquad (7.153)$$

$\Rightarrow C_x' < 0$ sempre!

$\boxed{\text{ORP sempre propaga fase para OESTE!}}$

$$C_y' = \frac{\omega'}{l'} = -\frac{\beta' \frac{k'}{l'}}{k'^2 + l'^2 + F} \gtrless 0$$ Não tem preferência de propagação meridional

Velocidade de Grupo:

$$C_{gx}' = \frac{\partial \omega'}{\partial k'} = \frac{\beta'(k'^2 - l'^2 - F)}{(k'^2 + l'^2 + F)^2}$$

(7.154)

$$C_{gy}' = \frac{\partial \omega'}{\partial l'} = \frac{2\beta' k' l'}{(k'^2 + l'^2 + F)^2}$$

OBS 1) ORP é dispersiva (ORT também é)

2) $C_{gx}' \gtrless 0$
- $k'^2 > l'^2 + F \Rightarrow C_{gx}' > 0 \Rightarrow$ Onda curta de Rossby
- $k'^2 < l'^2 + F \Rightarrow C_{gx}' < 0 \Rightarrow$ Onda longa de Rossby

3) $|c'_{gx}| \leq |c'_x|$

4) $\dfrac{c'_{gy}}{c'_y} = -\dfrac{2l'^2}{k'^2+l'^2+F} < 0 \Rightarrow$ Cristas para o Norte, Energia para o SUL ! / Cristas para o SUL, Energia para o NORTE !

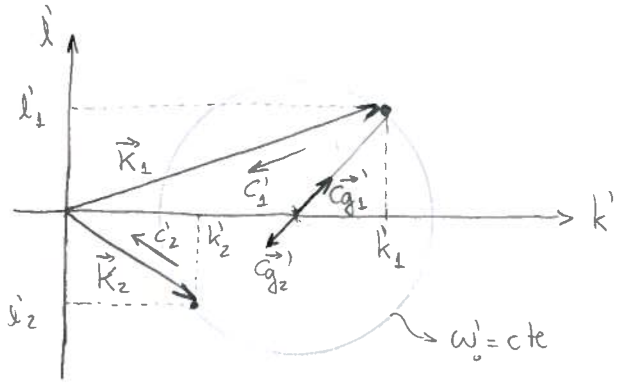
Outra forma de (7.152)

$$\left(k' - \frac{\beta'}{-2\omega'}\right)^2 + l'^2 = \frac{\beta'^2}{4\omega'^2} - F \qquad (7.163)$$

$\Rightarrow$ Eq de Circunferência no plano k', l'

CENTRO: $k' = \dfrac{\beta'}{-2\omega'}$ e $l' = 0$

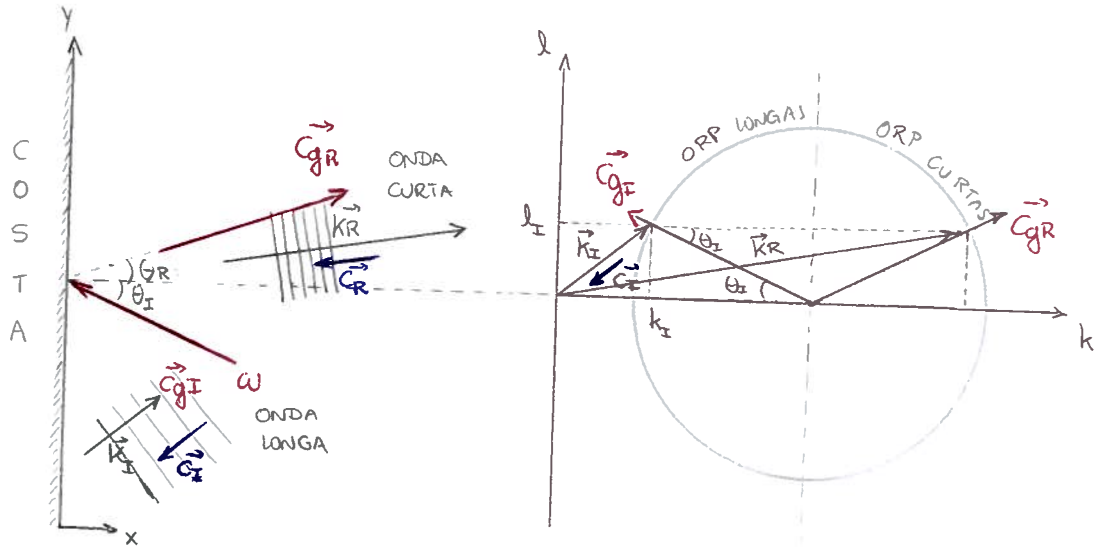
RAIO: $\sqrt{\dfrac{\beta'^2}{4\omega'^2} - F}$.



$\vec{C_g} = \nabla_k \omega$

Todos os k', l' capazes de formar uma onda de frequência ω_0 estão contidos na circunferência referente a ω'_0.

As ondas $\vec{k}'_1$ e $\vec{k}'_2$ tem frequência ω'_0 e existem infinitas outras!



→ Velocidade de fase sempre para OESTE !

→ Meridionalmente, as velocidades de grupo sempre se opõem !

7.3 EQUAÇÃO DA VORTICIDADE POTENCIAL

para λ podemos usar a função de status, que é conservativa.

Nesse caso:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla\lambda\right) = 0$$

Substituindo λ pela função de status:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta+f}{H}\right) = 0} \qquad (7.34)$$

Vorticidade Potencial no Modelo de Águas Rasas $\Rightarrow \dfrac{\zeta+f}{H}$

7.4 LINEARIZAÇÃO

Fazendo: $H(x,y,t) = H_0(x,y) + \eta(x,y,t)$

As condições para a linearização de (7.16), (7.17) e (7.23) são:

$$\eta \ll H_0 \qquad (7.37)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_H}{\partial t} \gg (\vec{v}_H \cdot \nabla)\vec{v}_H \qquad (7.38)$$

Nesse caso:

$$(7.16) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (7.39)$$

$$(7.17) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (7.40)$$

$$(7.23) \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H_0 u) + \frac{\partial}{\partial y}(H_0 v) = 0 \qquad (7.41)$$

Na forma de transporte por unidade de distância:

$$\vec{V} = u H_0 \cdot \vec{i} + v H_0 \vec{j} = U\vec{i} + V\vec{j} \qquad (7.42)$$

Reescrever as equações linearizadas em funções de transporte:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (7.43)$$

3 eqs + 3 incs

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -gH_0 \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (7.44)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad (7.45)$$

Combinando (7.43) a (7.45), no plano f:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right)\eta - \vec{\nabla}\cdot\left(gH_0 \nabla\eta\right)\right] - f_0 g\, J(H_0, \eta) = 0 \qquad (7.26)$$

↓ Equação de onda

1 eq + 1 inc, onde $J(A,B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$

De (7.39) e (7.40)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right) u = -g\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial x} + f_0 \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \qquad (7.48)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right) v = -g\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial y} + f_0 \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \qquad (7.49)$$

7.6 MOVIMENTO GEOSTRÓFICO

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ em (7.48) e (7.49) $\Rightarrow$

$$\boxed{u = -\frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (7.50) \qquad v = \frac{g}{f_0}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (7.51)}$$

No Modelo de Águas Rasas (M.A.R) invíscido, as soluções estacionárias correspondem ao Movimento Geostrófico.

de (7.50) e (7.51):

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad , \quad \text{ou} \quad \vec{v}_H \cdot \nabla \eta = 0$$

$\Rightarrow \vec{v}_H \,//\,$ isolinhas de η $\Rightarrow$ isolinhas de η são linhas de corrente no movimento geostrófico no M.A.R invíscido e barotrópico.

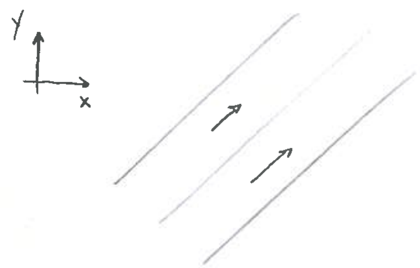
$\frac{\partial}{\partial t} = 0$ em (7.46):

$$J(H_0, \eta) = 0 \qquad (7.53)$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial H_0}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial H_0}{\partial x}}{\frac{\partial H_0}{\partial y}} = - \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial \eta}{\partial y}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{H_0} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{\eta} \qquad (7.54)$$

Isto é, isolinhas de H_0 e η são paralelas



isolinhas de H_0 e η

7.6 ONDAS DE GRAVIDADE

Para um oceano horizontalmente infinito, com $h_B = 0$, no plano f, a solução ondulatória da eq (7.46) é:

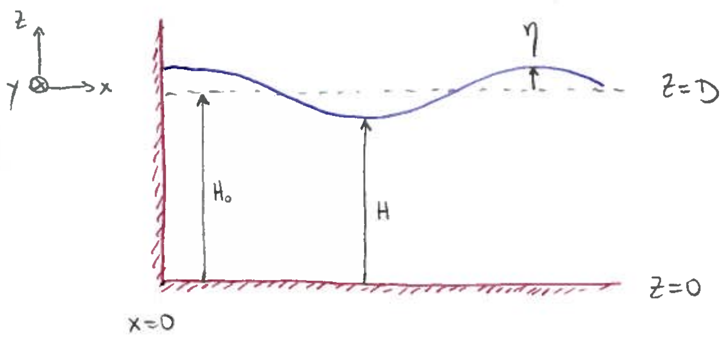
$$\eta = Re\left[\eta_0 \, e^{i(kx + ly - \omega t)}\right] \qquad (7.55)$$

Introduzindo (7.55) na eq de onda (7.46), a relação de dispersão é:

$$\boxed{\omega^2 = f_0^2 + gH_0(k^2+\ell^2)} \qquad (7.56)$$

Isto é, a solução ondulatória no plano f, para $h_B=0$, é a <u>onda de Poicaré</u>

7.7 EFEITOS DE UM CONTORNO LATERAL: Horizontalmente semi-infinito
ONDAS DE GRAVIDADE



p/ $H_0 = $ cte $(h_B=0)$, (7.46) fica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2\right)\eta - gH_0\nabla^2\eta = 0 \qquad (7.57)$$

Condição de contorno lateral:

$$u = 0 \quad \text{em} \quad x=0 \qquad (7.58)$$

Solução ondulatória: $\eta = Re\left[\eta_0(x)\,.\,e^{i(\ell y - \omega t)}\right]$ (7.59)

(7.59) em (7.57): $$\boxed{\frac{d^2\eta_0}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2-f_0^2}{gH_0} - \ell^2\right) = 0} \qquad (7.60)$$

(7.59) em (7.58), usando (7.48) para passar a c.c. para função de η

$$\boxed{\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{f_0\ell}{\omega}\eta_0 = 0} \quad \text{em} \quad x=0 \qquad (7.61)$$

<u>1º CASO</u>: $() \geq 0$: $\eta_0 = ae^{i\alpha x} + be^{-i\alpha x}$ (7.62), onde $\alpha = \left(\frac{\omega^2 - f_0^2}{gH_0} - \ell^2\right)^{1/2} \in \mathbb{R}$ (7.62a)

↳ superinerciais

(7.62) em (7.61): $a = \dfrac{\alpha\omega - if_0\ell}{\alpha\omega + if_0\ell}\, b$ (7.63)

(7.63) em (7.62), usando (7.55):

$$\boxed{\eta = b\cos(-\alpha x + \ell y - \omega t) + b\cos\left(\alpha x + \ell y - \omega t - \frac{2f_0\ell}{\alpha\omega}\right)} \qquad (7.64)$$

A solução (7.64) representa a sobreposição de duas ondas

A onda <u>incidente</u> $\propto$ $\cos(-\alpha x + ly - \omega t)$, pois $k<0$

A onda <u>refletida</u> $\propto$ $\cos\left(\alpha x + ly - \omega t - \frac{2f_0 l}{\alpha\omega}\right)$, pois $k>0$

Note que há uma diferença de fase entre a onda incidente e a onda refletida, devido ao termo $-\frac{2f_0 l}{\alpha\omega}$ na onda refletida. Isso é chamado de <u>ROTATIONAL</u> <u>SPLITING</u>. Não é possível gerar uma onda estacionária dessa forma.

de (7.62a): $\boxed{\omega^2 = f_0^2 + gH_0(\alpha^2 + l^2)}$ (7.65)

Onda de Poicaré com contorno lateral

(sobreposição de 2 ondas de poincaré)

<u>2º CASO</u>: $(\,) < 0 \Rightarrow \frac{\omega^2 - f_0^2}{gH_0} - l^2 < 0 \Rightarrow \omega^2 < f_0^2 + gH_0 l^2$

↳ <u>pode</u> <u>ser</u> subinercial ...

(7.60) $\Rightarrow$ $\eta_0 = ae^{\gamma x} + be^{-\gamma x}$ (7.66) onde $\gamma = \left(\frac{f_0^2 - \omega^2}{gH_0} + l^2\right)^{1/2} \in \mathbb{R}$ (7.67)

(7.66) em (7.61): $a(\gamma\omega - f_0 l) - b(\gamma\omega + f_0 l) = 0$ (7.68)

Para uma solução não-trivial:

$$\begin{cases} a = 0 \quad e \quad \gamma\omega + f_0 l = 0 & (1^a) \\ \text{ou} \\ b = 0 \quad e \quad \gamma\omega - f_0 l = 0 & (2^a) \end{cases}$$

Ambas conduzem à mesma solução. Tomando a 1ª

$\gamma\omega + f_0 l = 0 \Rightarrow \omega = -\frac{f_0 l}{\gamma}$ (7.69)

$a = 0 \Rightarrow \eta_0 = be^{-\gamma x}$ (7.70)

De (7.69) e (7.67):

$$\omega^4 - (f_0^2 + gH_0 l^2)\,\omega^2 + f_0^2 l^2 g H_0 = 0 \qquad (7.71)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^2 = f_0^2 & (7.72) \quad \rightarrow \text{movimento inercial} \\ \omega^2 = gH_0 l^2 & (7.73) \end{cases}$$

(7.73) corresponde a uma onda de gravidade longa com propagação na direção y, ou seja, paralela à costa. Introduzindo (7.69) e (7.70) em (7.59) e daí, introduzir em (7.48) e (7.49):

$$u = 0 \qquad (7.74)$$

$$v = \frac{g\eta_0 l}{\omega}\, b e^{\frac{f_0 l}{\omega}x} \cos(ly - \omega t) \qquad (7.75)$$

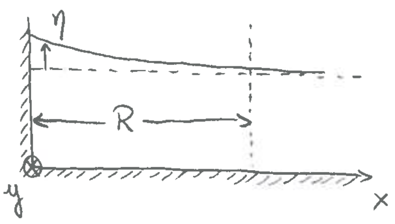
$$\eta = b e^{\frac{f_0 l}{\omega}x} \cos(ly - \omega t) \qquad (7.76)$$

De (7.76), fisicamente é necessário que $\frac{f_0 l}{\omega} < 0$, para obter uma exponencial decrescente em x.

$$\Downarrow$$

$$f_0 l < 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} HN \rightarrow l < 0 \\ HS \rightarrow l > 0 \end{array}}$$



Essa onda é unidirecional, propaga-se com a costa à sua direita (esquerda) no HN (HS).

Em $x=0$, a amplitude é $\underline{\underline{b}}$. A distância da costa em que a amplitude é $\frac{b}{e}$ (escala de decaimento neperiano) é R, o raio de deformação de Rossby $= \frac{\sqrt{gH_0}}{f_0}$. Isto é, essa onda fica confinada entre a costa e distâncias da $O(R)$.

De (7.75) e (7.76):

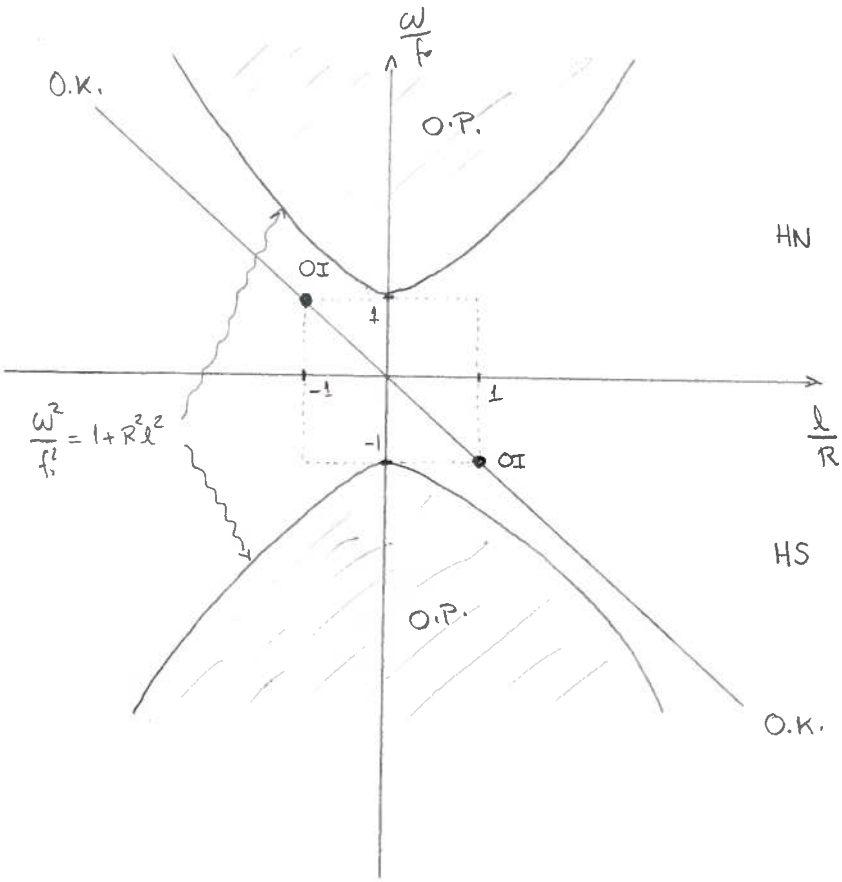
$$-f_0 v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (7.77)$$

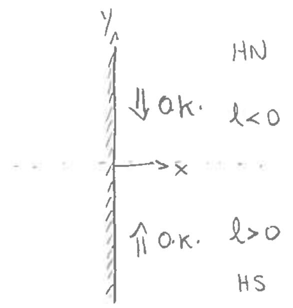
Isto é, a componente de velocidade paralela à costa é geostrófica

A onda que tem todas essas características reunidas é chamada de $\boxed{\text{ONDA DE KELVIN}}$

A onda de Kelvin é a onda que transporta a maior parte da energia das marés na plataforma continental.

24/05/07





OI = Oscilação Inercial

7.8 APROXIMAÇÃO QUASE - GEOSTRÓFICA

Usada para filtrar das soluções as ondas de gravidade

lembrar: $H_0(x,y) = D - h_B(x,y)$

$$H(x,y,t) = H_0(x,t) + \eta(x,y,t) \qquad (7.109)$$

Daí,

$$H = D + \eta - h_B = D\left(1 + \frac{\eta}{D} - \frac{h_B}{D}\right) \qquad (7.114)$$

$$\Rightarrow H = D\underbrace{\left(1 + \varepsilon\frac{L^2}{R^2}\eta' - \frac{h_B}{D}\right)}_{H'} \qquad (7.115)$$

$\rightarrow$ escrevendo o H na forma não-dimensional

Reescrevendo (7.16), (7.17) e (7.23) na forma não-dimensional:

$$\varepsilon_t \frac{\partial u'}{\partial t'} + \varepsilon\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right) - \frac{f}{|f|}v' = -\frac{\partial \eta'}{\partial x'} \qquad (7.117)$$

onde $F = \dfrac{f^2 L^2}{gD} = \left(\dfrac{L}{R}\right)^2$ (7.120)

$$\varepsilon_t \frac{\partial v'}{\partial t'} + \varepsilon\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right) + \frac{f}{|f|}u' = -\frac{\partial \eta'}{\partial y'} \qquad (7.118)$$

$$\varepsilon_t F\frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \varepsilon F\left(u'\frac{\partial \eta'}{\partial x'} + v'\frac{\partial \eta'}{\partial y'}\right) - u'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{h_B}{D}\right) - v'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{h_B}{D}\right) + \left(1 + \varepsilon F\eta' - \frac{h_B}{D}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (7.119)$$

Assumiremos $\dfrac{\varepsilon_t}{\varepsilon} = O(1)$ (7.121)

MÉTODO DE ANÁLISE ASSINTÓTICA

Usado quando há um estado básico de magnitude maior que pequenas perturbações

1) Escrever as equações na forma não dimensional (7.117) – (7.119)

2) Identificar um coeficiente $\ll 1$ $\Rightarrow$ ε_t ou ε, escolhemos ε

3) Expandir as variáveis (incógnitas) em séries de potência usando o coeficiente $\ll 1$

4) Colecionar, nas equações os termos de mesma ordem

Passo 3

$$u' = u'(x', y', t', \varepsilon) \quad \rightarrow \text{reconhecendo que } u' \text{ é tb função de } \varepsilon$$

$$u'(x', y', t', \varepsilon) = \underbrace{u_0'(x', y', t')}_{\text{geostrófico}} + \underbrace{\varepsilon u_1'(x', y', t')}_{\text{perturbação de ordem } \varepsilon} + \underbrace{\varepsilon^2 u_2'(x', y', t')}_{\text{perturbação de ordem } \varepsilon^2} + \dots$$

$$u_0' = O(1), \quad u_1' = O(1), \quad u_2' = O(1), \dots \qquad (7.122)$$

Se $\varepsilon = 0$ $\Rightarrow$ velocidade puramente geostrófica

$$v'(x', y', t', \varepsilon) = v_0'(x', y', t') + \varepsilon v_1'(x', y', t') + \varepsilon^2 v_2'(x', y', t') + \dots$$

$$\eta'(x', y', t', \varepsilon) = \eta_0'(x', y', t') + \varepsilon \eta_1'(x', y', t') + \varepsilon^2 \eta_2'(x', y', t') + \dots$$

Passo 4 $\rightarrow$ tem que haver balanço entre os termos de mesma ordem

Exemplo: (7.117) $\rightarrow$

$$\varepsilon_t \frac{\partial}{\partial t'}(u_0' + \varepsilon u_1' + \varepsilon^2 u_2' + \dots) + \varepsilon \left[(u_0' + \varepsilon u_1' + \varepsilon^2 u_2' + \dots) \frac{\partial}{\partial x'} (u_0' + \varepsilon u_1' + \varepsilon^2 u_2' + \dots) + \dots \right.$$

$$\dots + (v_0' + \varepsilon v_1' + \varepsilon^2 v_2' + \dots) \frac{\partial}{\partial y'} (u_0' + \varepsilon u_1' + \varepsilon^2 u_2' + \dots) - \frac{f}{|f|}(v_0' + \varepsilon v_1' + \varepsilon^2 v_2' + \dots) = \dots$$

$$\ldots = -\frac{\partial}{\partial x'}\left(\eta_0' + \varepsilon\eta_1' + \varepsilon^2\eta_2' + \ldots\right)$$

A soma dos termos $O(1)$ tem que ser $= 0$

A soma dos termos $O(\varepsilon)$ tem que ser $= 0$

A soma dos termos $O(\varepsilon^2)$ tem que ser $= 0$ ...

Começando pelos termos de $O(1)$:

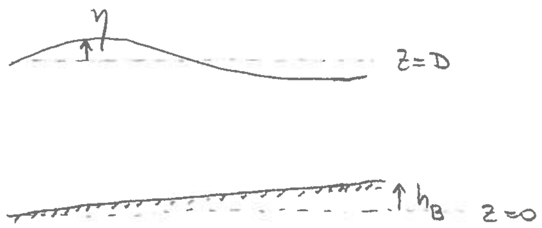
$$\boxed{-\frac{f}{|f|}v_0' = -\frac{\partial \eta_0'}{\partial x'}} \qquad (7.124)$$

$$\boxed{\frac{f}{|f|}u_0' = -\frac{\partial \eta_0'}{\partial y'}} \qquad (7.125)$$

$\rightarrow$ Balanço de $O(1)$ é o balanço geostrófico

$$-u_0'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{h_B}{D}\right) - v_0'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{h_B}{D}\right) + \left(\frac{\partial u_0'}{\partial x'} + \frac{\partial v_0'}{\partial y'}\right) - \frac{h_B}{D}\left(\frac{\partial u_0'}{\partial x'} + \frac{\partial v_0'}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (7.126)$$

Assumindo que a topografia é uma perturbação em relação a espessura da coluna de água H.



$$\Rightarrow h_B \ll D \Rightarrow \frac{h_B}{D} \ll 1 \Rightarrow \frac{h_B}{D} = \varepsilon\eta_B'$$

Nesse caso, (7.126) $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial u_0'}{\partial x'} + \frac{\partial v_0'}{\partial y'} = 0}$ (7.128)

Isto é, em $O(1)$ o movimento é geostrófico (eqs 7.124 e 7.125) e não-divergente (eq. 7.128)

Além disso, o sistema é indeterminado, pois há 3 incógnitas (u_0', v_0', η_0') e 2 equações, pois 7.128 pode ser obtida com uma combinação linear de (7.124) e (7.125)

Termos de $O(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial u_0'}{\partial t'} + u_0'\frac{\partial u_0'}{\partial x'} + v_0'\frac{\partial u_0'}{\partial y'} - \frac{f}{|f|}v_1' = -\frac{\partial \eta_1'}{\partial x'} \qquad (7.129)$$

$$\frac{\partial v_0'}{\partial t'} + u_0'\frac{\partial v_0'}{\partial x} + v_0'\frac{\partial v_0'}{\partial y'} + \frac{f}{|f|}u_1' = -\frac{\partial \eta_1'}{\partial y'} \qquad (7.130)$$

$$F\left(\frac{\partial \eta_0'}{\partial t'} + u_0'\frac{\partial \eta_0'}{\partial x'} + v_0'\frac{\partial \eta_0'}{\partial y'}\right) - u_0'\frac{\partial \eta_B'}{\partial x'} - v_0'\frac{\partial \eta_B'}{\partial y'} + \left(\frac{\partial u_1'}{\partial x'} + \frac{\partial v_1'}{\partial y}\right) = 0 \qquad (7.131)$$

Velocidades de $O(\varepsilon)$: u_1' e v_1' são chamadas de <u>VELOCIDADES AGEOSTRÓFICAS</u>

O que impede o Balanço Geostrófico em $O(\varepsilon)$ é a variação local e advectiva da Velocidade Geostrófica de $O(1)$!

A aceleração total da Velocidade de $O(1)$ é o que impede a velocidade de $O(\varepsilon)$ de ser geostrófica!

Combinando (7.129) e (7.130), podemos obter a equação da vorticidade em $O(\varepsilon)$:

$$\boxed{\frac{\partial \zeta_0'}{\partial t'} + u_0'\frac{\partial \zeta_0'}{\partial x'} + v_0'\frac{\partial \zeta_0'}{\partial y'} = -\frac{f_0}{|f_0|}\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x'} + \frac{\partial v_1'}{\partial y'}\right)} \qquad (7.133)$$

onde: $\zeta_0' = \dfrac{\partial v_0'}{\partial x'} - \dfrac{\partial u_0'}{\partial y'} = \dfrac{f_0}{|f_0|}\nabla^2\eta_0'$ (7.132)

Eq da vorticidade relativa quase-geostrófica num modelo de Águas Rasas Invíscido e Barotrópico, na forma não dimensional

→ O mecanismo que pode modifica a vorticidade relativa de $O(1)$ é a divergência da velocidade de $O(\varepsilon)$.

Usando (7.131) para eliminar o divergente de (7.133):

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{f_0}{|f_0|}\frac{\partial \eta_0'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{f_0}{|f_0|}\frac{\partial \eta_0'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{f_0}{|f_0|}\nabla^2\eta_0' - \frac{f_0}{|f_0|}F\eta_0' + \frac{f_0}{|f_0|}\eta_B'\right) = 0} \qquad (7.135)$$

Eq da Vorticidade Potencial quase-geostrófica no modelo de Águas Rasas invíscido e homogêneo, na forma não-dimensional.

Agora o problema está fechado, pois (7.135) só tem 1 incógnita → η_0'

29/05

(7.135) → é uma equação de onda ... achemos então soluções para ela

7.9 Movimento QG Estacionário

$\frac{\partial}{\partial t'} = 0 \Rightarrow (7.135) \Rightarrow$ MOVIMENTO GEOSTRÓFICO

$\Rightarrow u_0', v_0'$; com $\vec{v}_0' \parallel \eta_0'$ e η_B'

7.10 Solução Ondulatória: Plano f

Solução harmônica: $\eta_0' = \mathrm{Re}\left[\hat{\eta}' e^{i(k'x' + l'y' - \omega' t')}\right]$ (7.136)

p/ oceano horizontalmente infinito

(7.136) em (7.135):

$$\boxed{\omega' = -\frac{f_0}{|f_0|}\frac{k'\frac{\partial \eta_B'}{\partial y'} - l'\frac{\partial \eta_B'}{\partial x'}}{k'^2 + l'^2 + F}} \qquad (7.144)$$

Relação de dispersão para ondas de Rossby Topográficas

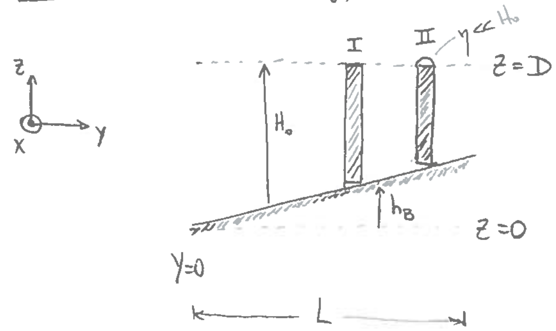
Obs 1) As ondas de gravidade foram filtradas.

2) Solução para onda não-linear.

3) ORT só existe na presença de um gradiente topográfico

$$\left(\frac{\partial \eta'_B}{\partial y'} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \eta'_B}{\partial x} \neq 0\right)$$

Ex: $H_0 = D(1 - sy)$, $s>0$



Em (7.144), $\frac{\partial \eta'_B}{\partial x'} = 0$

$h_B = sy$, (7.144) na forma dimensional:

$$\omega = -\frac{sf_0}{L} \frac{k}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{gH_0}} \qquad (7.147)$$

Velocidade de Fase:

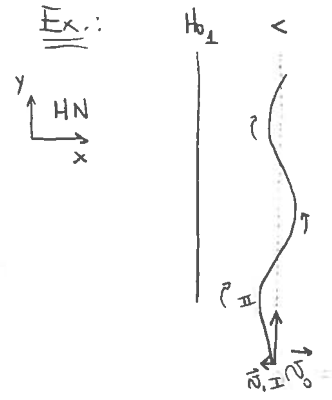
$$C_x = \frac{\omega}{k} = -\frac{sf_0}{L} \frac{1}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{gH_0}}$$

, o sinal de c_x depende de s e f_0, a onda é unidirecional!

	HN	HS
$s>0$	$C_x<0$	$C_x>0$
$s<0$	$C_x>0$	$C_x<0$

Assim, a ORT é também unidirecional. Propaga-se com a menor profundidade a sua direita (esquerda) no HN (HS)

Ex.:



$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \varepsilon \vec{v}_1$$

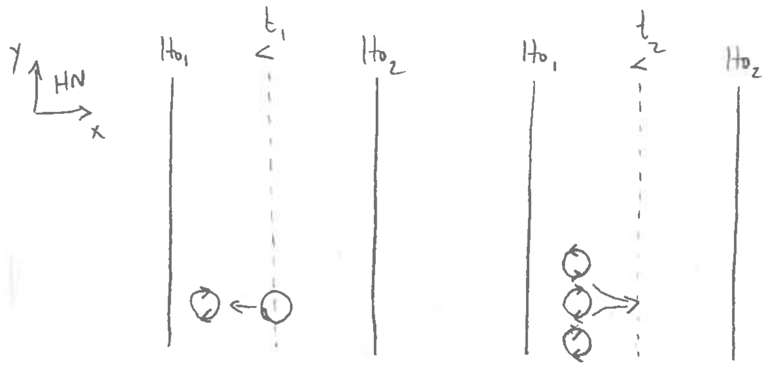
Se a coluna de água é trazida para uma região mais rasa, ganha VORTICIDADE RELATIVA NEGATIVA (Horária)

Conservação de VP $\Rightarrow$ $\Pi = \frac{\zeta + f_0}{H_0 + \eta} = \text{cte}$

$$\Pi_I = \frac{0 + f_0}{H_{0_I} + 0} \qquad \Pi_{II} = \frac{\zeta + f_0}{H_{0_{II}} + \eta} \approx \frac{\zeta + f}{H_{0_{II}}}$$

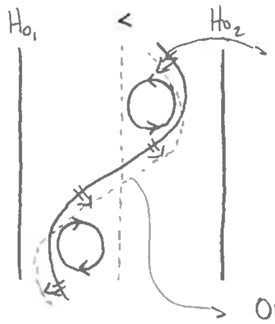
$$\Pi_I = \Pi_{II} \Rightarrow \frac{\zeta}{Ho_{II}} = \frac{f_0}{Ho_I} - \frac{f_0}{Ho_{II}} \Rightarrow \zeta = f_0\left[\frac{Ho_{II}}{Ho_I} - 1\right]$$

$\boxed{\zeta < 0} \Rightarrow$ no HN $\rightarrow$ ↻



o mecanismo restaurador é a conservação da VP, portanto a ORT é chamada

$\boxed{\text{ONDA DE VORTICIDADE}}$



o movimento dessa linha imaginária é associada à propagação da Onda de Rossby Topográfica

ORT propagando-se com a menor prof a sua direita (HN)

7.11 SOLUÇÃO ONDULATÓRIA : PLANO β

No plano β, a EqVPQG fica: $\beta' = \frac{L^2}{U}\beta$

$$\left(\frac{f_0}{|f|}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial \eta_0'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial \eta_0'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\nabla^2\eta_0' - F\eta_0' + \eta_B' + \beta' y'\right) = 0 \qquad (7.151)$$

Por simplicidade, $\eta_B' = 0 \Rightarrow$ não há onda topográfica.

Nesse caso, (7.136) em (7.151), conduz a:

$$\boxed{\omega' = -\frac{\beta' k'}{k'^2 + l'^2 + F}}$$

Relação de dispersão para ondas de Rossby Planetárias

Obs: Há uma similaridade dinâmica entre o gradiente topográfico $\left(\frac{\partial \eta_B'}{\partial x}, \frac{\partial \eta_B'}{\partial y}\right)$ e o gradiente planetário $\left(\beta = \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

(7.144) para $\frac{\partial \eta_B'}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \omega' = -\frac{f_0}{|f_0|}\frac{\frac{\partial \eta_B'}{\partial y'}k'}{k'^2+l'^2+F} = -\frac{f_0}{|f_0|}\frac{GDT k'}{k'^2+l'^2+F}$

$\frac{\partial \eta_B'}{\partial x'}$ é análogo ao $\frac{\partial f}{\partial y'}$

$$(7.152) \Rightarrow \omega' = \frac{-GDP k'}{k'^2+l'^2+F}$$

Nesse caso a geração de vorticidade relativa não será por estiramento do tubo de vórtice, será devida ao gradiente planetário, ou seja, movimentos meridionais da partícula no plano β.

2 MECANISMOS $\begin{cases} \text{Efeito Topográfico} \Rightarrow \text{Ondas de Rossby Topográficas} \\ \text{Efeito } \beta \Rightarrow \text{Ondas de Rossby Planetárias} \end{cases}$

Velocidade de fase:

$$C_x' = \frac{\omega'}{k'} = -\frac{\beta'}{k'^2+l'^2+F} \qquad (7.153)$$

$\Rightarrow C_x' < 0$ sempre! $\boxed{\text{ORP sempre propaga fase para OESTE!}}$

$$C_y' = \frac{\omega'}{l'} = -\frac{\beta'\frac{k'}{l'}}{k'^2+l'^2+F} \gtrless 0$$ Não tem preferência de propagação meridional

Velocidade de Grupo:

$$C_{gx}' = \frac{\partial \omega'}{\partial k'} = \frac{\beta'(k'^2-l'^2-F)}{(k'^2+l'^2+F)^2}$$

$$(7.154)$$

$$C_{gy}' = \frac{\partial \omega'}{\partial l'} = \frac{2\beta' k' l'}{(k'^2+l'^2+F)^2}$$

OBS 1) ORP é dispersiva (ORT também é)

2) $C_{gx}' \gtrless 0$
- $k'^2 > l'^2+F \Rightarrow C_{gx}' > 0 \Rightarrow$ Onda curta de Rossby
- $k'^2 < l'^2+F \Rightarrow C_{gx}' < 0 \Rightarrow$ Onda longa de Rossby

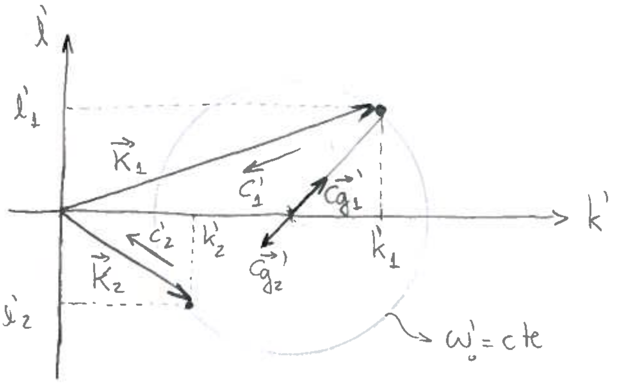
3) $|c'_{gx}| \leq |c'_x|$

4) $\dfrac{c'_{gy}}{c'_y} = -\dfrac{2l'^2}{k'^2+l'^2+F} < 0 \Rightarrow$

Cristas para o Norte, Energia para o SUL!
Cristas para o SUL, Energia para o NORTE!

Outra forma de (7.152)

$$\left(k' - \frac{\beta'}{-2\omega'}\right)^2 + l'^2 = \frac{\beta'^2}{4\omega'^2} - F \qquad (7.163) \Rightarrow \text{Eq de Circunferência no plano } k', l'$$



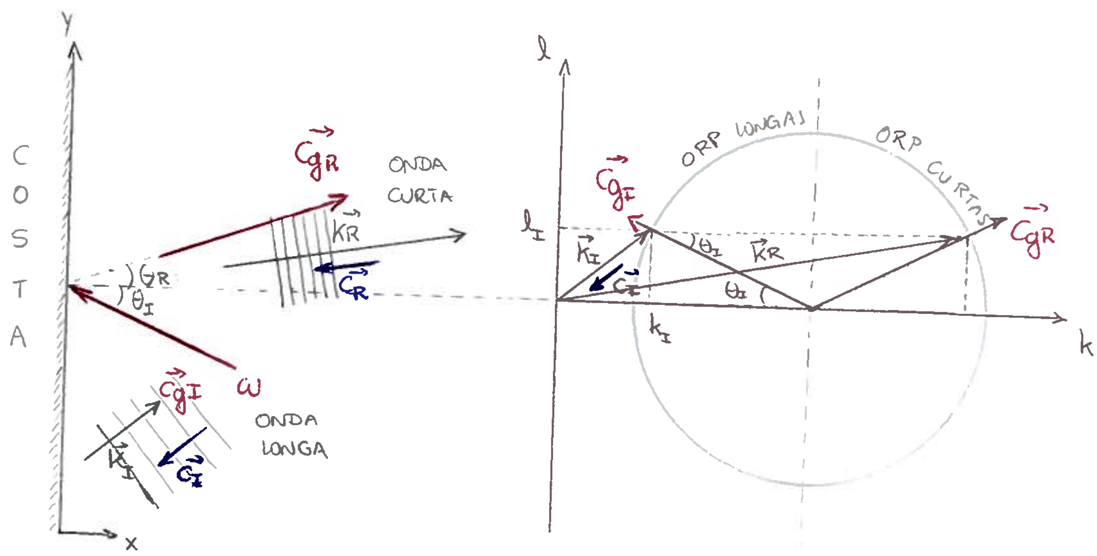
CENTRO: $k' = \dfrac{\beta'}{-2\omega'}$ e $l' = 0$

RAIO: $\sqrt{\dfrac{\beta'^2}{4\omega'^2} - F}$.

$\vec{C}_g = \nabla_k \omega$

Todos os k', l' capazes de formar uma onda de frequência ω_0 estão contidos na circunferência referente a ω'_0.

As ondas $\vec{k}_1'$ e $\vec{k}_2'$ tem frequência ω'_0 e existem infinitas outras!



→ Velocidade de fase sempre para OESTE!

→ Meridionalmente, as velocidades de grupo sempre se opõem!