9

TEMA 04

A Circulação Gerada pelo Vento em Gande Escala

φa

Lista de Slides

1. Circulação dos oceanos em sup - Open Univ.

2. Os giros oceânicos - Open Univ.

3. Assimetria dos giros oceânicos - Open Univ

4. A Forçante do giro subtropical - Pedlosky

5. O Modelo conceitual do Giro subtropical - Cushman-Roisin

6.

6.1. A Circulação em Regiões Oceânicas

• Nesta aula, vamos discutir os padrões de circulação de grande escala forçada pelo vento.

• Consideremos, ainda que qualitativamente, os padrões médios da circulação dos oceanos:

POWERPOINT : Figura da circulação em superfície do oceano → Ocean Circulation, Fig 3.1, pg 31

• A feição mais evidente são células de circulação fechadas, centradas em 30° nos HS e HN. Estas células são chamadas de "Giros Subtropicais". (Oceanos Atlântico e Pacífico)

• No limite equatorial destes giros, as correntes são aproximadamente zonais, partindo da borda leste da bacia oceânica.

• No limite polar destes giros, as correntes também tendem a ser zonais, mas deixam a borda oeste da bacia oceânica.

• Conectando as duas bordas, estão correntes de orientação basicamente meridional: são as correntes de contorno oeste e leste.

• Nem sempre os padrões de circulação média enfatizam a característica de que as correntes no contorno oeste são mais intensas que suas contrapartes largo do contorno leste. Estas correntes desempenham um papel crucial na transferência de calor no sentido equador-polos.

• Vamos inicialmente usar argumentos qualitativos para explicar a existência dos giros oceânicos, e em particular, o giro subtropical

• Como estamos discutindo circulação média, é natural que busquemos descrever o giros como sistemas em equilíbrio dinâmico.

• Comecemos então com as equações dos movimentos estacionários geostrófico e de Ekman em superfície:

$$\begin{cases} -f v_E = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau^{(x)}}{\partial z} \\ f u_E = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tau^{(y)}}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} -f v = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ f u = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

sistema de Ekman — sistema geostrófico

POWERPOINT :	Composição das Figuras 3.23 do OC, pg 59 Figura simétrica dos Giros Ciclônicos e Anticiclonicos

⇒ comentar que variações espaciais nos padrões dos ventos geram div. e conv. na camada de Ekman superior. Estas sustentam gradientes de pressão que, por sua vez, são balanceados pela força de Coriolis – o mov. resultante são as correntes geostróficas.

⇒ estes simples argumentos explicam a existência dos giros (argumento de momentum linear), mas não justificam por que as CCOs são mais intensas que a CCL.

ASSIMETRIA

POWERPOINT : Figura do OC da Corrente do Golfo

• Antes de prosseguirmos, e adiantar que os modelos que construiremos usarão argumentos físicos ligados a momentum angular, gastemos alguns poucos minutos para falar da forçante do sistema : os ventos.

• Lembremos a relação entre a velocidade e a Tensão de cisalhamento do vento em superfície :

$$\vec{\tau} = \rho_{ar} \, C_D \, |\vec{v}| \, \vec{v}$$ → explicar Termos

POWERPOINT : Figura Tomczak de $\vec{\tau}$ (checar) X

⇒ comentar sobre a banda dos alíseos e a banda dos ventos de oeste. A região de transição coincide aproximadamente com o centro dos giros subtropicais.

⇒ comentar sobre a média zonal de $\tau^{(x)}$.

POWERPOINT : Figura Pedlosky (1989), pg 267 Perfis idealizados de $\tau^{(x)}$

6.2. Modelo para a Circulação Oceânica em Latitudes Médias

• É exatamente esta configuração de forçante que utilizaremos para construir um modelo simples de circulação para o Giro Subtropical.

• Reproduziremos aqui o desenvolvimento apresentado por Cushman-Roisin (1996) que privilegia a interpretação da dinâmica envolvida na manutenção e geometria do Giro Subtropical do Atlântico Norte.

→ caberá aos Srs. alunos transpor, em lista de exercícios, o que aqui será apresentado para o Giro Subtropical do Atl. Sul.

• Hipóteses :
- oceano retangular de fundo plano
- preenchido com fluido homogêneo de $\rho = \rho_0$.
- plano β
- dimensões zonal (L_1) e meridional (L_2) da $O(10^6 m)$.

→ nº de Rossby é pequeno e termos ñ lineares podem ser desprezados

→ o efeito do atrito está confinado a duas delgadas camadas limite :

- de superfície - sujeita à ação da TCV
- de fundo - onde a velocidade é trazida a zero

- Nosso modelo consistirá, portanto, de três "camadas" dinâmicas:

Modelo Conceitual do Giro

POWERPOINT : Figura 8-1, Cushman-Roisin (1996), pg 110

1) A camada de Ekman de superfície - onde a velocidade vertical é zero em superfície e é prescrita em sua base pelo bombeamento de Ekman:

$$w_{Top} = \frac{1}{\rho_0 f_0} \left(\cancel{\frac{\partial \tau^{(y)}}{\partial x}} - \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \right) \quad (1)$$

~0 pela nossa consideração de $\vec{\tau} = \tau^{(x)}(y)\,\vec{i}$

2) A camada de Ekman de fundo - onde a velocidade vertical zero junto ao fundo e depende da vorticidade do escoamento acima desta camada limite. É prescrita em termos de

$$w_{bot} = \frac{d}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2), \text{ onde } d = \sqrt{\frac{2A_V}{|f_0|}}.$$

3) O interior geostrófico - região onde os efeitos da viscosidade são desprezíveis:

$$-(f_0 + \beta y)\, v = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3)$$

$$(f_0 + \beta y)\, u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4)$$

p é a pressão geostrófica

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5)$$

juntamente com a eq. da continuidade.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (6)$$

- A aproximação do plano β está em seu limite, onde o nº planetário $\hat{\beta}$ é:

$$\hat{\beta} = O\left(\frac{\beta y}{f_0}\right) = O\left(\frac{\beta L}{f_0}\right) = 10^{-11}\,10^{6}\,10^{4} = 10^{-1}$$

- Velocidade vertical - $\boxed{\text{mostrar POWERPOINT do modelo}}$

→ existe $\underline{w}$ no interior geostrófico. Como veremos a seguir, ele ocorre devido à divergência no mov. geostrófico no plano β. Ademais, $\underline{w}$ precisa ser contínuo através de nossas camadas dinâmicas de forma a se aproximar aos valores w_{Top} e w_{bot} nas interfaces entre elas.

- CENÁRIO:
  - os ventos sopram sobre o oceano e estabelecem uma camada de Ekman em superfície. Como a tensão de cisalhamento destes ventos tem rotacional $\neq 0$, velocidade vertical é gerada e comunicada para as águas na camada interior.

  - na camada interior, a velocidade vertical só pode ser acomodada pela existência de conv/div do escoamento geostrófico no plano β.
    Em outras palavras, é necessário que estabeleçamos um escoamento geostrófico em resposta/reação ao bombeamento de Ekman de superfície

- Este escoamento geostrófico atinge o fundo e sua fricção contra ele estabelece a camada de Ekman de fundo, que em resposta à vorticidade das correntes, gera velocidade vertical adicionalmente.

Caberá ao escoamento geostrófico acomodá-la.

- Mas vamos entender mais a relação entre w e o efeito β no interior. Para tanto, tomemos o rotacional das Eqs. (3) e (4):

$$\underset{-\partial/\partial y}{(3)} \quad \underset{+\partial/\partial x}{(4)}$$

$$(f_0+\beta y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\beta v=0$$

- Como consideramos $\hat{\beta}$ pequeno, $f_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\beta v=0$

- Substituindo a eq. da continuidade:

$$\boxed{f_0\frac{\partial w}{\partial z}=\beta v} \qquad (7)$$

- (7) produz um resultado importante: se não há efeito β, não há gradiente vertical de w.

- Sem gradiente vertical de w, não seria possível fazê-la contínua entre interfaces.

- (7) pode ser interpretada como resultado da conservação de vorticidade e de volume e, portanto, vorticidade potencial em grande escala.

POWER POINT : Figura 8-2, Cushman-Roisin, pg 113

- A Figura 8-2 mostra como (7) atua para o norte

→ se $\frac{\partial w}{\partial z} > 0$, o elemento de volume é estirado.

→ Para conservar volume, tem de se estreitar e precisa ganhar vorticidade para conservar circulação.

→ Em grande escala, a vort. abs. é praticamente a planetária. O elemento de volume não consegue gerar vort rel. e, no caso do HN, tem de migrar meridionalmente para o norte.

$$\beta \boxed{v} = f_0 \boxed{\frac{\partial w}{\partial z}} \quad \text{estiramento}$$

	β	v	f_0	$\frac{\partial w}{\partial z}$
No HN:	>0	>0 → p/o norte	>0	>0
No HS:	>0	<0 → p/o sul	<0	>0

- As derivadas verticais de (3) e (4) indicam que as velocidades horizontais não variam verticalmente → Taylor-Proudman

- Como consequência, $\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = \text{const}}$ na camada interior

logo, $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{w_{top} - w_{bot}}{H}$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0 f_0 H}\left(-\frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y}\right) - \frac{d}{2H}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)} \quad (8)$$

- Utilizando (8) em (7), chegamos a

$$\beta v = \left[\frac{1}{\rho_0 f_0 H}\left(-\frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y}\right) - \frac{d}{2H}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] f_0$$

- O uso das relações geostróficas permitem reescrevê-la como

$$\beta\left(\frac{1}{\rho_0 f_0}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \left[-\frac{1}{\rho_0 \cancel{f_0} H}\left(\frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y}\right) - \frac{d}{2H}\left(\frac{\nabla^2 p}{\rho_0 \cancel{f_0}}\right)\right] \cancel{f_0}$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{f_0}{\beta H}\frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} - \left(\frac{f_0 d}{2\beta H}\right)\nabla^2 p} \qquad (9)$$

- Avaliemos a quantidade entre parênteses ...

$$L_s = \frac{f_0 d}{2\beta H} \rightarrow \text{tem dimensão de comprimento}$$

$\rightarrow$ $A_v = 10^{-2}\ m^2 s^{-1}$

$d = \sqrt{\frac{A_v}{f_0}} = \sqrt{10^2} = 10$

$\beta = 10^{-11}\ (ms)^{-1}$

$H = 10^3\ m$

$f_0 = 10^{-4}\ s^{-1}$

$A_v : 10^{-4} - 10^{-1}\ m^2 s^{-1}$
segundo Pedlosky (1979)

$$L_s = \underbrace{10^{-4}\, 10}_{10^{-3}}\ \underbrace{10^{11}\, 10^{-3}}_{10^{7}}$$

$$L_s = 10^4\ m$$

- Computemos a razão entre o 1º e o 3º termo de (9):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = O\left(\frac{P}{L}\right) \quad ; \quad L_s \nabla^2 p = O\left(L_s \frac{P}{L^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{L_s \nabla^2 p}{\partial p/\partial x} = \frac{L_s L^{-2}}{L^{-1}} = \frac{L_s}{L} = 10^{-2}}$$

6.3. O Modelo de Sverdrup

Assim, o balanço dominante na eq. (9) é dado por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{f_0}{\beta H} \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \qquad (10)$$

ou

$$v = - \frac{1}{\rho_0 \beta H} \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \qquad (11)$$

(10)-(11) são conhecidas como a Relação de Sverdrup (1947).
→ a velocidade meridional na camada interior, em todas as localidades, é função do rotacional do vento localmente.

- No HN, $\frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} > 0$, o que implica em transporte p/ sul → $v < 0$.

- Esta banda de movimentos para o sul existe entre os máximos de intensidade dos alísios e dos ventos de oeste

[EXIBIR novamente POWERPOINT Pedlosky (1996)]

- Em termos do campo de pressão, a solução de (10) é

$$p = P_1(y) - \frac{f_0}{\beta H} \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} x \qquad (12)$$

• Utilizando as relações geostróficas (1) e (2), obtemos

$$\begin{cases} u = -\dfrac{1}{\rho_0 f_0}\dfrac{\partial P_1(y)}{\partial y} + \dfrac{1}{\rho_0 \beta H}\dfrac{\partial^2 \tau^{(x)}}{\partial y^2}\, x & (13) \\ v = -\dfrac{1}{\rho_0 \beta H}\dfrac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} & (14) \end{cases}$$

• A eq. (10) é de 1ª ordem em $\underline{x}$ e só há uma função de integração.

• Como consequência, a condição de vel. normal à costa nula só pode ser obedecida ou em $x=0$ ou $x=L_1$.

• Note também que $v<0$ em toda a bacia, exceto nos limites $y=0$ e $y=L_2$.

• Conseguentemente, a continuidade é ferida e a solução para manter o modelo de Sverdrup fisicamente válido é manter o domínio aberto num de seus extremos zonais.

• Mas podemos comentar mais sobre este modelo...

– se o vento não tiver vorticidade, $v=0$. Ou seja, o escoamento geostrófico conserva VP e segue as linhas de vorticidade planetária (isolinhas de $y=$const). Por isso, v precisa ser zero. $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y}=0$ delimita as bordas dos giros.

– na Relação de Sverdrup, o fluido se move cruzando linhas de f, $y=$const, pois vorticidade é introduzida na coluna de água pelo vento

6.4. O Modelo de Stommel

Voltemos a analisar a eq. (9) da vorticidade

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{f_0}{\beta H}\frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \underset{(+)}{-} \frac{L_s}{H_S}\nabla^2 p$$

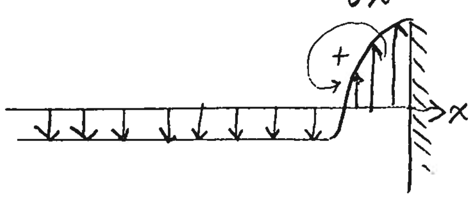
• Retendo o termo pequeno, obtemos uma eq. dif. de 2ª ordem e conseguiremos resolver as duas condições de contorno para a velocidade zonal $\underline{u}$.

• Mas, como o coeficiente da derivada de 2ª é pequeno, o 3º termo só será relevante se as derivadas forem grandes. É de se supor que estes efeitos sejam importantes numa região confinada da bacia - numa camada limite.

• Vejamos ONDE colocar essa camada limite: no lado leste ou no lado oeste?

POWERPOINT: Figura 8-3, Cushman-Roisin, pg 116

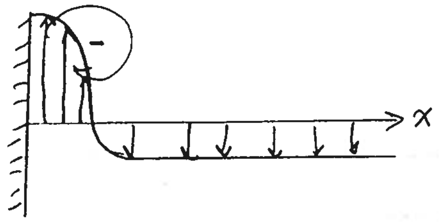
LADO LESTE: $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$ grande o suficiente para compensar o escoamento de Sverdrup



$w_{bot} > 0$ como consequência

⇒ injeção de fluido no interior geostrófico ⇒ fere a continuidade pelas duas camadas Ekman

LADO OESTE : $\frac{\partial v}{\partial x} < 0$ e grande



$w_{bot} < 0$ como consequência

$\Rightarrow$ a velocidade vertical é negativa e pode ser acomodada pela camada de fundo.

- A camada limite é na borda oeste. A intensificação é na borda oeste!

- Voltando à eq. (9), consideremos que $\frac{\partial u}{\partial y}$ é muito pequeno dentro da camada limite oeste.

- Assim, (9) é simplificada para

$$L_s \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (15)$$

cuja solução geral é:

$$p(x,y) = P_2(y) + P_3(y)\, e^{-x/L_s}$$

sinal negativo
↓
decaimento p/ Peste

- Se aplicarmos a solução fazendo $x \gg L_s$ e considerando p contínuo através da região interior e camada limite oeste; via uso da eq. (12):

$$p = P_1(y) - \frac{f_0}{\beta H}\frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} + P_3(y)\, e^{-x/L_s} \qquad (16)$$

- As duas funções arbitrárias de integração $P_1(y)$ e $P_2(y)$ são encontradas usando

$$u = 0 \quad \text{em } x = 0, L_1 \quad \text{ou}$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \quad '' \quad .$$

- No lado leste, $P_1(y) = \dfrac{f_0 L_1}{\beta H} \dfrac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y}$. (17)

- No lado oeste, $P_3(y) = -P_1(y)$. (18)

- A solução final do modelo de Stommel (1948) é então

$$p = \frac{f_0 L_1}{\beta H} \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \left[1 - \frac{x}{L_1} - e^{-x/L_s} \right] \qquad (19)$$

$$u = \frac{-L_1}{\rho_0 \beta H} \frac{\partial^2 \tau^{(x)}}{\partial y^2} \left[1 - \frac{x}{L_1} - e^{-x/L_s} \right] \qquad (20)$$

$$v = \frac{1}{\rho_0 \beta H} \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \left[-1 + \frac{L_1}{L_s} e^{-x/L_s} \right] \qquad (21)$$

POWERPOINT : Fig. 8-4, Cushman-Roisin (96), pg 117

O CENÁRIO DA INTENSIFICAÇÃO DA BORDA OESTE

- O sistema de ventos em grande-escala geram tensão de cisalhamento na superfície do oceano

- Como a água do mar é ligeiramente viscosa e a rotação é importante, uma delgada camada limita a ação direta do vento a 15 m de prof.

- O efeito da rotação causa convergência nesta camada, resultando num bombeamento de água para o interior do oceano.

- Tal efeito faz com que as parcelas de fluido sejam comprimidas verticalmente. Em resposta, as parcelas se achatam e alargam. Para conservar circulação, a vorticidade ambiente precisa decrescer. Isto resulta numa migração para o sul - é o transporte de Sverdrup.

- A camada de Ekman de fundo - ou o atrito c/ o fundo - é determinante no estabelecimento da direção da velocidade zonal. A camada limite oeste precisa estar na borda oeste.

- Na porção final da bacia, as parcelas então guinam para oeste, se agrupam e adentram a camada limite

- Este escoamento se torna uma corrente intensa para norte. Tão intensa que gera junto à camada limite de fundo um bombeamento para baixo, que provoca estiramento nas parcelas da camada geostrófica.

- Este $w_{bot} < 0$ permite às parcelas de fluido retomarem sua altura original. No limite norte da Bacia, deixam a camada limite e reiniciam a viagem.

6.5. O Modelo de Munk (1950)

- O modelo de Stommel explicou a intensificação da borda oeste. O papel crucial do efeito β em permitir o ajustamento do escoamento na camada geostrófica.

- O atrito com o fundo permitiu o estabelecimento de uma camada limite oeste que reproduziu a intensificação da borda oeste, que caracteriza correntes como a do Golfo, Kuroshio, do Brasil, etc.

- Entretanto, ao conceber o modelo apresentado, concentramo-nos em entender o papel das camadas de Ekman no estabelecimento do escoamento na camada geostrófica.

- Atrito lateral pode e, no oceano real, é mais relevante no estabelecimento da camada limite oeste. Este foi o problema estudado por Munk (1950).

- Para tanto retornemos à eq. (9) e incluamos o termo de dissipação lateral

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{f_0}{\beta H}\frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} - L_S \nabla^2 p + \frac{A_H}{\beta}\nabla^4 p \qquad (22)$$

- Examinemos a dimensão do coef. do termo de fricção lateral

$$\frac{A_H}{\beta} = \frac{10 \ m^2 s^{-1}}{10^{-11} \ m^{-1} s^{-1}} = 10^{12} \ m^3$$

$$\boxed{A_H : 10 - 10^4 \ \frac{m^2}{s}}$$

segundo Pedlosky (1989)

$$\boxed{L_M = \sqrt[3]{\frac{A_H}{\beta}} = 10^4 \ m}$$

- Se optarmos como Munk (1950) por resolvermos (9) sob a aproximação de

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{f_0}{\beta H}\frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} + \frac{A_H}{\beta}\nabla^4 p \qquad (23)$$

- As novas condições de contorno requerem que incluamos os limites norte e sul para satisfazer as quatro condições:

(24) • $u, v = 0$ em $x = 0, L_1$ (não-escorregamento)

(25) • $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ em $y = 0, L_2$ (não-gradiente)

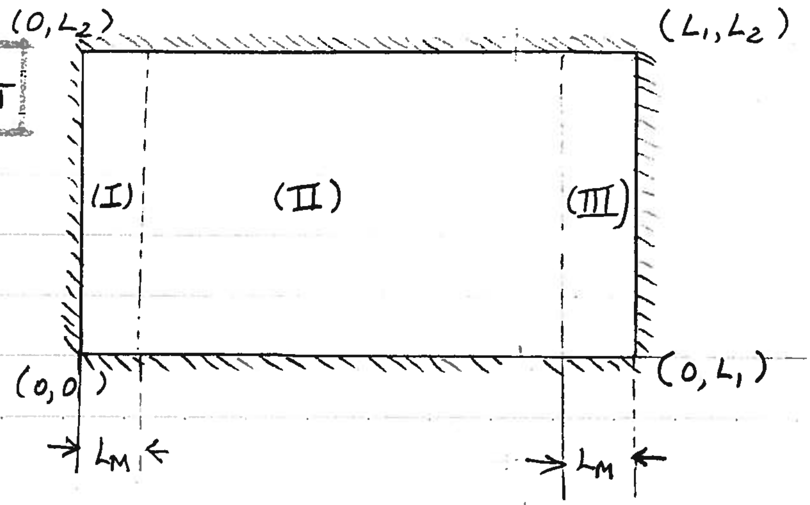
- Estas quatro condições são suplementadas escolhendo $p = \text{const} = 0$ ao longo dos limites da bacia oceânica.

- A condição (25) é conveniente pois não impõe camadas limites nas bordas norte e sul.

- Entretanto, (24) faz com que exista uma camada limite lateral no lado leste.

- Assim, a solução de Munk é composta de três regiões dinamicamente distintas:

Fazer: POWER POINT



Regiões : (I) camada limite oeste
(II) interior Sverdrupiano
(III) camada limite leste

- Solução para a Região (II) :

$$P_{(II)} = \frac{f_0 L_1}{\beta H} \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \left[1 - \frac{x}{L_1} \right] \quad (26)$$

, que é a solução Sverdrupiana.

- Solução para a Região (III) :

$$P_{(III)} = \frac{f_0 L_1}{\beta H} \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \left[1 - \frac{x}{L_1} + \frac{L_M}{L_1} e^{-\frac{(L_1 - x)}{L_M}} - \frac{L_M}{L_1} \right] \quad (27)$$

→ note que o transporte de Sverdrup é afetado em apenas $O\left(\frac{L_M}{L_1}\right)$ dentro da Região III.

- Solução para Região (I) :

$$P_{(I)} = \frac{f_0 L_1}{\beta H} \frac{\partial \tau^{(x)}}{\partial y} \left[1 - \frac{x}{L_1} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2L_M}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x}{L_M} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \quad (28)$$

→ Presença de contra-corrente ao largo das CCOs.

→ solução ondulatória c/ amplitude decaindo expon. com x.

$$\lambda \approx \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot (2 L_M).$$

COMPARAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE MUNK VS. STOMMEL

POWERPOINT : Figura 4, Abarbanel & Yong (1986), pg 224

- Stommel: fluido deixa camada limite oeste suavemente
- Munk : " deixa " " " se move rapidamente para o sul criando uma contra-corrente neste sentido antes de atingir o valor Sverdrupiano.

- Máx. vel. p/norte em Stommel: em $x = 0$
  em Munk : em $x \cong 1{,}2\, L_M$.

- Velocidade nula em Stommel : —
  " em Munk : $x \approx \frac{2\pi}{\sqrt{3}} L_M$