# TEMA 09

## Instabilidade Barotrópica

9.1. Motivação

9.2. Ondas de Vorticidade em Escoamentos Cisalhados

9.3. Condições Necessárias p/ Instabilidade Barotrópica

## 9.1. Motivação

- Estudos realizados anteriormente mostram que a presença de um gradiente de vorticidade potencial permite a existência de ondas de freqüência subinercial que denominamos de ondas de Rossby

- Vimos que na presença de um gradiente de vorticidade planetária, ou seja, devido à variação do parâmetro de Coriolis com a latitude (conseqüência da esfericidade da Terra), ondas de vorticidade ditas planetárias existem.

- A presença do relevo submarino ou topografia, via vorticidade de estiramento, também podem criar um gradiente básico de vorticidade potencial que sustenta ondas de Rossby.

- Analogamente, a presença de uma corrente oceânica pode propiciar a existência deste gradiente, seja pela presença de um cisalhamento horizontal ou cisalhamento vertical.

- Observamos tanto no oceano como na atmosfera que há casos em que ondas superpostas ao escoamento básico crescem espontaneamente em amplitude, drenando energia das correntes básicas e dominando a estrutura do escoamento.

- Chamamos de instabilidade geofísica aos processos de crescimento exponencial das ondas de vorticidade às custas da drenagem de energia de escoamentos geostróficos.

Referimo-nos à instabilidade barotrópica como processos de instabilidade de natureza bidimensional - instabilidade de cisalhamento horizontal. A instabilidade em escoamentos estratificados (tridimensionais) é referida como instabilidade baroclínica.

LD 9 1-a

POWER POINT :

1) Imagem da CB - os três painéis do João Lorenzetti

2) Imagem da CB - dipolos verticais

→ Fazer edições nas imagens

→ Apresentar crescimento aproximado

# 9. Instabilidade Barotrópica

## 9.2. Ondas de vorticidade em escoamentos cisalhados

- A equação da VPQG num fluido homogêneo ($\rho = \rho_0 = \text{const.}$) e não-viscoso no plano $\beta$ é dada por

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right] q = 0 \qquad (1)$$

onde :

$$q = \underbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{\text{vorticidade geostrófica relativa}} + \underbrace{\beta y}_{\text{variação de vorticidade planetária}} + \underbrace{\frac{f_0}{H}(b - \eta)}_{\text{vorticidade de estiramento, devido a variações da espessura de fluido}}$$

- Por simplicidade, assumamos tampas rígidas no fundo e superfície : $b = \eta = 0$.

- Assim, $q$ se reduz à expressão da vorticidade absoluta QG. A suposição de $\eta = 0$ é equivalente a considerar que o raio de deformação externo é infinito ou que estamos interessados no limite das ondas de "Rossby barotrópicas curtas", onde o termo de vorticidade de estiramento é desprezado se comparado ao de vorticidade relativa.

• Logo,

$$q = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta y \qquad (3)$$

• Pela inspeção da Eq. (3), o gradiente de VP existe devido a efeito $\beta$ (vort. planetária) e ao gradiente de vorticidade relativa imposto pelo cisalhamento horizontal das correntes geostróficas.

• A existência destes gradientes tem consequências dinâmicas importantes:

* a translação do padrão de ondas não será uniforme pela presença do cisalhamento básico. O grau da distorção depende do padrão de cisalhamento do escoamento.

* é possível que dentro do domínio do escoamento haja um local (região) onde a velocidade de fase da onda é semelhante a da corrente básica. Este local recebe o apelido de nível crítico ou nível de acoplamento.

* No nível crítico, geralmente há vigorosa transferência de energia entre a corrente básica e a onda. Como consequência, a onda pode retirar energia da corrente e crescer no tempo. Caso isto aconteça, a corrente é dita barotropicamente instável. Nesta, pequenas perturbações podem resultar em ondas de amplitudes enormes a ponto do escoamento básico ser tão contorcido que se torna irreconhecível.

$\boxed{\text{POWER POINT: Figura 7-3, do Cushman-Roisin, pg 105}}$

## 9.3. Teoria linear de Instabilidade Barotrópica

- Consideremos aqui uma corrente geostrófica zonal $\bar{u}$ que apresenta um certo perfil meridional conhecido:

$$u(x,y,t) = \bar{u}(y) + u'(x,y,t)$$
$$v(x,y,t) = v'(x,y,t) \qquad (4)$$

- Por (4) é possível escrever:

$$q = \bar{q}(y) + q'(x,y,t) \quad , \text{ onde}$$

$$\bar{q} = \beta y - \frac{d\bar{u}}{dy} \qquad (5a)$$

$$q' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \qquad (5b)$$

- Como o sistema quase geostrófico é horizontalmente não divergente, podemos definir a função de corrente geostrófica perturbada:

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad e \quad v' = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (6)$$

A substituição de (5) e (6) em (1), após linearização:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi + \frac{d\bar{q}}{dy}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad (7)$$

- Notemos que

$$\boxed{\frac{d\bar{q}}{dy} = \beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2}} \qquad (8)$$

é o gradiente de VPQG básico que permite a existência das ondas de vorticidade.

- Observemos que a Eq. (7) apresenta coeficientes que só dependem só de $y$. Assim, uma onda de vorticidade senoidal de propagação zonal é solução. Ou seja,

$$\psi(x,y,t) = \phi(y)\, e^{ik(x-ct)} \qquad (9)$$

onde $c$ é a velocidade de fase zonal: $c = \dfrac{\omega}{k}$.

- Com a substituição de (9) em (8), chegamos a:

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi + \frac{d\bar{q}/dy}{(\bar{u}(y)-c)}\,\phi = 0} \qquad (10)$$

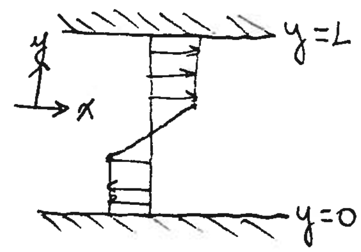
- A Eq. (10) é conhecida como a Eq. de Rayleigh no plano $\beta$.

- Originalmente Rayleigh (1916) a derivou para o plano $f$. Deve-se à Kuo (1947) a forma final de (10).

- Pouco pode ser dito a respeito da Eq (10) sem o estabelecimento de condições de contorno apropriadas.

• Sigamos aqui o desenvolvimento de Kuo (1947) e confinemos as perturbações num canal zonal de largura $L$.

• Nas bordas deste canal, as velocidades normais às paredes devem ser nulas. Ou seja,




$$v' = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, L \tag{11}$$

• Como consequência, $\psi$ tem de ter valor constante nas bordas. Portanto, consistentemente com (9) e (11)

$$\phi = 0 \quad \text{em} \quad y = 0, L \tag{12}$$

• O sistema de equações (10)-(12) consiste num problema de autovalor: a solução é trivial ($\phi = 0$), a menos que a velocidade de fase assuma valores específicos (os ditos autovalores). Para estes valores, a função (ou autofunção) $\phi$ pode ser determinada.

• $c(k)$ são os autovalores, normalmente complexos
• $\phi$ são os autovetores ou autofunções dos problemas

• Ou seja, $c = c_r + i c_i$. Se $c$ admite um complexo conjugado, $c^* = c_r - i c_i$, também é possível $\phi^*$.
Tanto $c$ como $c^*$ são soluções (autovalores).

Para $c \rightarrow \psi \propto e^{kc_i t} e^{ik(x - c_r t)}$ MODO INSTÁVEL

Para $c^* \rightarrow \propto e^{-kc_i t} e^{ik(x-c_r t)}$ MODO EVANESCENTE

Para cada modo instável, há um modo evanescente!

- O produto $\sigma = k c_i$ é conhecido como Taxa de crescimento.

IMPORTANTE: A presença de um valor não-nulo da parte imaginária de $c$ garante automaticamente a existência de uma perturbação exponencialmente crescente, e por consequência, a instabilidade da corrente básica.

- Como é impossível determinar $c$ para um perfil genérico $\bar{u}(y)$, desenvolveremos a seguir Teoremas integrais visando o estabelecimento de critérios de instabilidade.

## 9.4. Condições Necessárias Para Instabilidade

Se multiplicarmos a Eq. (10) por $\phi^*$ e integrarmos, por partes, no domínio meridional:

$$-\int_0^L \left( \left|\frac{d\phi}{dy}\right|^2 + k^2|\phi|^2 \right) dy + \int_0^L \frac{d\bar{q}/dy}{\bar{u}-c} |\phi|^2 \, dy = 0 \qquad (13)$$

A parte imaginária da expressão é:

$$c_i \left[ \int_0^L \frac{d\bar{q}}{dy} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u}-c|^2} \, dy \right] = 0 \qquad (14)$$

- se $c_i = 0 \rightarrow$ escoamento estável
- se $c_i \neq 0 \rightarrow$ existe modo instável

- Comentemos sobre as condições necessárias para instabilidade:

→ Como a quantidade $\frac{|\phi|^2}{|\bar{u}-c|^2}$ é positiva definita, a única chance que a integral seja nula é que $d\bar{q}/dy$ mude de sinal dentro do domínio.

→ Se $d\bar{q}/dy$ troca de sinal, significa que é nulo dentro do domínio em pelo menos um ponto. Fisicamente, isto significa que $\bar{q}$ precisa apresentar um valor extremo dentro do domínio para que instabilidades sejam possíveis.

⇒ é o critério do ponto de inflexão

→ Na ausência de $\beta$, a condição necessária requer apenas que $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}$ seja zero em algum ponto do domínio.

→ Como $\beta > 0$, há tendência de estabilização do escoamento.

- Podemos seguir Fjørtoft (1950) e tornar o critério de Rayleigh mais robusto. Para tanto tomemos a parte real (13) agora:

$$\int_0^L (\bar{u}-c_r)\frac{d\bar{q}}{dy}\frac{|\phi|^2}{|\bar{u}-c|^2}\,dy = \int_0^L \left(\left|\frac{d\phi}{dy}\right|^2 + k^2|\phi|^2\right)dy \tag{15}$$

- Sabemos que no evento de instabilidade, a integral de (14) é nula.

• Multiplicando (14) por $(c_r - \bar{u}_0)$, onde $\bar{u}_0$ é uma constante real e somando à (15), atentando para o membro direito de (15) ser positivo definido, obtemos

$$\int_0^L (\bar{u} - u_0) \frac{d\bar{q}}{dy} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} \, dy > 0 \qquad (16)$$

ou seja, a inequação demanda que

$$(\bar{u} - u_0) \frac{d\bar{q}}{dy} > 0$$ numa porção finita do domínio.

→ $\bar{u}_0$ é um valor arbitrário, mas normalmente associado ao valor de $\bar{u}(y)$ no ponto de inflexão $\left( \frac{d\bar{q}}{dy} = 0 \right)$.

→ PLANO f ←

POWER POINT : Preparar configuração de jato instável avaliando a condição de Rayleigh e Fjørtoft.
usar perfis do próprio livro do Kundu (1990)

pg 103 - ex: 7-1

POWERPOINT : Filme do André - Dinâmica de Contornos

# RESUMO - TEMA 9 - Instabilidade Geofísica

## Teoria de Instabilidade Barotrópica

→ instabilidade de cisalhamento horizontal

• Sob aproximação QG, num fluido homogêneo,

$$\frac{\partial}{\partial t} q + J(\psi, q) = 0 \qquad (1)$$

$$q = \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\text{vort. relativa}} + \underbrace{\beta y}_{\text{variação de vort. planet.}} + \underbrace{\frac{f_0}{H}(b - \eta)}_{\text{vort. estiramento}} \qquad (2)$$

→ assumamos tampa rígidas e fundo plano : $b = \eta = 0$ :

$$q = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \beta y \qquad (3)$$

→ aproximação equivale à considerar $R_{de} \to \infty$, ou o limite das ondas curtas de Rossby

(3) permite ver que existe um gradiente básico de vort. planetária pode haver grad. básico de vort. relativa associada à uma corrente cisalhante média ⇒ sustentam ondas de Rossby.

Consideremos:
$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \bar{u}(y) + u'(x,y,t) \\ v(x,y,t) &= v'(x,y,t) \end{aligned} \qquad (4)$$

Por (3), podemos: $q = \bar{q}(y) + q'(x,y,t)$

$$\bar{q} = \beta y - \frac{d\bar{u}}{dy} \qquad (5a)$$

$$q' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \qquad (5b)$$

Definindo a função de corrente perturbada $\psi$, reescrevemos (1)-(2) como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi + \left(\frac{d\bar{q}}{dy}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad (6)$$

após linearizar.

onde: $\boxed{\frac{d\bar{q}}{dy} = \beta - \frac{d^2\bar{u}}{dy^2}}$ gradiente meridional básico de VPQG

↓

podemos ter soluções ondulatórias

Assumimos solução da forma $\psi = \phi(y)\, e^{ik(x-ct)}$ (7),

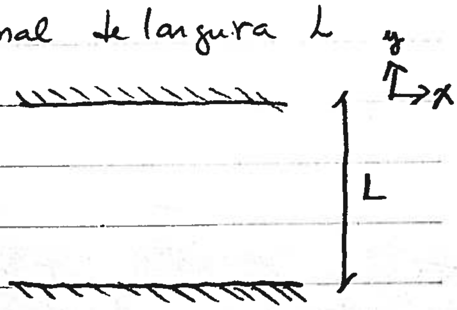
onde $c = \frac{\omega}{k}$ ≡ vel. de fase zonal

Com (7) em (6):

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} - k^2\phi + \left[\frac{d\bar{q}}{dy}\frac{1}{(\bar{u}-c)}\right]\phi = 0 \qquad (8)$$

é a eq. de Rayleigh no plano $\beta$. Kuo (1947) foi quem a derivou.

Condições de contorno para (8): canal zonal de largura $L$




$v' = 0$ em $y = 0, L$

↓

$\phi = 0$ em $y = 0, L$ (9)

($\phi$ tem que ser const. nas bordas)

→ o sistema (8)-(9) é um problema de auto-valor
[a solução é trivial a menos que a velocidade fase assuma valores específicos ]

autovalores : $c(k)$ - normalmente complexos
autovetores : $\phi$ - ou autofunções de estrutura meridional

→ se $c = c_r + i c_i$ , há $c^* = c_r - i c_i$
→ idem com $\phi$, há $\phi^*$

**IMPORTANTE** : para $c \rightarrow \psi \propto e^{\overset{\sigma}{kc_i}t} e^{ik(x - c_r t)}$ MODO INSTÁVEL
para $c^* \rightarrow \psi \propto e^{-kc_i t} e^{ik(x - c_r t)}$ MODO EVANESCENTE

$\sigma$ - taxa de crescimento

→ É impossível determinar $c$ para perfil genérico de $\bar{u}(y)$
→ urge que desenvolvamos Teoremas integrais para estabelecer critérios para estabilidade do escoamento

## Condições Necessárias Para Instabilidade Barotrópica

Se multiplicarmos (8) por $\phi^*$ e integrarmos, por partes, no domínio meridional:

$$- \int_0^L \left( \left| \frac{d^2\phi}{dy^2} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 \right) dy + \int_0^L \frac{d\bar{q}}{dy} \frac{|\phi|^2}{(\bar{u} - c)} dy = 0 \qquad (9)$$

cuja parte imaginária é:

$$c_i \left[ \int_0^L \frac{d\bar{q}}{dy} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} dy \right] = 0 \qquad (10)$$

→ se $c_i = 0$, escoamento é estável
se $c_i \neq 0$, " é instável

⇒ A integral tem de ser nula então

→ $\frac{d\bar{q}}{dy}$ tem que trocar de sinal dentro do domínio

→ $\bar{q}$ precisa apresentar um valor extremo dentro do domínio

→ é o chamado critério do ponto de inflexão de Rayleigh

→ Na ausência de $\beta$, a condição necessária requer apenas do $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}$ seja zero dentro do domínio

→ como $\beta > 0$, há tendência de estabilização do escoamento

• Sigamos Fjortoft (1950) e tomemos a parte real de (9)

$$\int_0^L (\bar{u} - c_r) \frac{d\bar{q}}{dy} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} dy = \int_0^L \left( \left| \frac{d\phi}{dy} \right|^2 + k^2 |\phi|^2 \right) dy \qquad (11)$$

• Multiplicando (10) por $(c_r - \bar{u}_0)$, somamos à (11), atentando que o lado direito de (11) é positivo definido.

Logo,

$$\int_0^L (\bar{u} - \bar{u}_0) \frac{d\bar{q}}{dy} \frac{|\phi|^2}{|\bar{u} - c|^2} dy > 0 \qquad (12)$$

ou seja, $(\bar{u} - \bar{u}_0) \frac{d\bar{q}}{dy} > 0$ numa porção finita do domínio.

→ escolhemos $\bar{u}_0$ como o valor de $\bar{u}(y)$ onde $\frac{d\bar{q}}{dy}$ se anula, ou seja, no ponto de inflexão.

## A Equação da Energia

• Partamos da Eq. (6) na sua forma linearizada. Para obter a equação para a energia da perturbação $E'$ é necessário que multipliquemos (6) por $\psi$ e manipulemos as derivadas de forma a escrever a nova equação em termos de balanço de energia.

• Omitimos a pesada álgebra envolvida e apresentemos o resultado para a eq. de $E'$ obtida por Pedlosky (2003):

$$\underset{(i)}{\frac{\partial E'}{\partial t}} + \underset{(ii)}{\nabla \cdot \vec{S}} = \underset{(iii)}{+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi'}{\partial y}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} \qquad (13)$$

onde $E' = \frac{(\nabla \psi)^2}{2}$ é a energia cinética das perturbações

e $\vec{S}$ representa o vetor fluxo da energia das perturbações dado por

$$\vec{S} = -\psi'\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla \psi\right] + \vec{i}\left[-\frac{\partial \bar{q}}{\partial y}\frac{\psi}{2} + \bar{u}E' + \psi(\nabla\psi \cdot \nabla\bar{u})\right]$$

$$+ \psi \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\nabla\psi. \qquad (14)$$

• O primeiro membro de (13) é formado pela variação local de $E'$ (termo (i)) e pela divergência do fluxo de energia (termo (ii)).

• Se integrarmos (13) entre $z = 0, H$ e $y = 0, L$ e considerarmos a função $\psi$ periódica em $x$, como feito anteriormente, os termos de fluxo ñ contribuem para o resultado integrado no balanço de energia.

• O vetor fluxo de energia simplesmente move energia de um local para outro sem criar ou destruir energia.

• O Termo (iii) pode ser reescrito como

$$\int_0^H\int_0^L \left[ \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = -v u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right] dy\,dz \qquad (15)$$

e representa a integral das tensões de Reynolds horizontais pelo cisalhamento horizontal da corrente básica.

• Se a perturbações carregam valores altos de momento zonal p/ uma região de baixo momento, tenderá suavizar o cisalhamento lateral.

• Como exemplo, se $d\bar{u}/dy > 0$, $u' > 0$ e $v' > 0$, as perturbações advirão de uma região de alto momento zonal comparado a seu destino, o termo (iii) será positivo e se traduzirá em

$$\int_0^H\int_0^L \frac{\partial E'}{\partial t}\, dy\,dz > 0$$

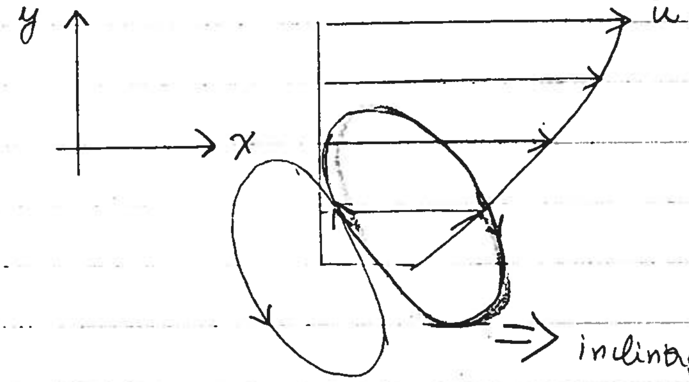
• Como consequência, a energia das perturbações crescerá às custas do decaimento de energia do escoamento básico $\bar{E}$. Isto se traduz justamente no decaimento do cisalhamento horizontal.

• Outra forma de avançar na interpretação de (iii),

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}$$

$$= -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_\psi \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \qquad (16)$$

→ linhas de $\Psi$ = const precisam então se inclinar na direção noroeste - sudeste em regiões que $\partial \bar{u}/\partial y > 0$ se a instabilidade barotrópica fomentar a energia da perturbação.



• inclinação de $\Psi$ para qual as tensões de Reynolds extraem energia de $\partial \bar{u}/\partial y$

⇓

⇒ inclinação contrária à $\bar{u}$ ⇒ conversão barotrópica