8

TEMA 2 - MOVIMENTO GEOSTRÓFICO

2.1. Análise de Meso-escala da eq. do movimento

2.2. Movimento Geostrófico Barotrópico

2.3. Movimento Geostrófico Baroclínico

2.4. O Método Dinâmico

2.5. Ajustamento Geostrófico

Lista de Slides

1. Escalas Básicas

2. Esquema mov. geostrófico barotrópico

3. Resultado do Modelo do Edmo

4. Estruturas ciclônicas e anticiclônicas

5. Vento térmico - adaptação Kundu (1990)

6. Condições barotrópicas e baroclínicas

2.1. Análise de Meso-escala da Eq. do Movimento

As equações do movimento e da continuidade são dadas por

$$\frac{Du}{Dt} - fv + \tilde{f}w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + A_H \nabla_H^2 u + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + A_H \nabla_H^2 v + A_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \tilde{f}u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + A_H \nabla_H^2 w + A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

- As equações acima são complexas e compreendem todos os movimentos dos oceanos

- A análise de escalas ajuda a discernir qual o processo físico dinamicamente relevante numa particular situação de interesse.

- Para tanto, procedamos à análise de meso-escala do sistema (1)-(4) considerando as seguintes escalas básicas:

$$\boxed{\text{SLIDE : Escalas Básicas p/ Meso-escala}}$$

- Notemos que nem a escala da velocidade vertical W nem a escala da pressão foram fornecidas.

- A escala para w é obtida através da equação da continuidade:

$$\frac{W/H}{U/L} = O(1) \Rightarrow W = \frac{H}{L} U = 10^{-3}\, ms^{-1}$$

(100x menor que a velocidade horizontal)

- Para a escala da pressão, em meso-escala, o mais razoável é assumir que a força do gradiente de pressão é da mesma ordem que a força da gravidade

$$\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}{g} = O(1)$$

→ notemos que ρ cresce com a profundidade, mas no oceano, este valor não difere muito do valor médio ρ_0, ou seja:

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x,y,z,t), \quad \frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1 \qquad (5)$$

- Por hora, então, escalemos ρ por ρ_0 - o maior valor.

$$P = \rho_0 g H = 10^7\, Pa$$

- Análise de escala da componente vertical da Eq. do mov.

$$\frac{Dw}{Dt} - \tilde{f}u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g - A_H \nabla_H^2 w + A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

$$\frac{UW}{L} \quad \tilde{f}U \quad \frac{P}{\rho_0 H} \quad g \quad A_H \frac{W}{L^2} \quad A_V \frac{W}{H^2}$$

$$10^{-9} \quad 10^{-5} \quad 10 \quad 10 \quad 10^{-10} \quad 10^{-11}$$

- O balanço hidrostático domina a comp. vertical da eq. do mov. em meso-escala

- Obviamente há casos onde a aceleração vertical é importante. O exemplo mais evidente seria o das ondas de gravidade curtas.

- Análise de escala das componentes horizontais

$$\frac{Du}{Dt} - fv + \tilde{f}w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + A_H \nabla_H^2 u + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{U^2}{L} \quad fU \quad \tilde{f}W = \frac{1}{\rho_0}\frac{P'}{L} + A_H \frac{U}{L^2} \quad A_V \frac{U}{H^2}$$

$$10^{-7} \quad 10^{-5} \quad 10^{-7} \quad \quad 10^{-8} \quad 10^{-9}$$

- Note que a escala P não foi estabelecida. Assumamos que esta é pelo menos da ordem da força de Coriolis

- Se assim o fizermos, $P' = \rho_0 f_0 U L = 10^3$ Pa

- Esta escala é muito menor que a escala de P estimada pela equação hidrostática ($P = 10^7 Pa$)

- A razão é que:

$$p = \underbrace{p_0(z)}_{\text{pressão hidrostática básica}} + \underbrace{p'(x,y,z,t)}_{\text{pressão geostrófica}} \qquad (6)$$

- Assim, pela eq. hidrostática:

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g \quad \text{e} \quad \frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g \qquad (7)$$

- Assim, as eqs. resultantes da aprox. pela meso-escala são:

$$\left.\begin{aligned} -fv &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} \\ fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} \end{aligned}\right\} (8)$$

o movimento geostrófico é estritamente horizontal

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} \qquad (9)$$

- Integremos, então, a eq. hidrostática verticalmente entre a superfície livre η e uma profundidade z qualquer:

$$p = p_{atm} + g\int_z^{\eta'(x,y,t)} \rho \, dz \qquad (10)$$

- Considerando apenas a pressão oceanográfica, podemos calcular o gradiente horizontal de pressão e obter:

$$\nabla_H p = g\rho(z=\eta)\,\nabla_H \eta + g\int_z^{\eta} \nabla_H \rho'\, dz \qquad (11)$$

- A força do gradiente de pressão é dada por:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla_H p = -g\,\nabla_H \eta - \frac{g}{\rho}\int_z^{\eta} \nabla_H \rho'\, dz \qquad (12)$$

- o primeiro termo se refere à força do gradiente de pressão gerada por variações η. Independe da estratificação. Consiste na componente barotrópica desta força.

- o segundo termo se refere à componente gerada pela estratificação horizontal, ou seja, por variações laterais no campo de densidade. Consiste na componente baroclínica desta força.

- Vetorialmente, a expressão para o movimento geostrófico é dada por

$$f\vec{k} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla_H p \qquad (13)$$

- Assim, temos o movimento geostrófico barotrópico e o baroclínico.

2.2. Movimento Geostrófico Barotrópico

- Consideremos inicialmente o caso da comp do mov. geostrófico gerado apenas por variações da superfície livre do mar.

- Para tanto, consideremos o caso do oceano homogêneo

- Da Eq. (5), $\rho = \rho_0 = \text{const} \quad (\rho' = 0) \qquad (14)$

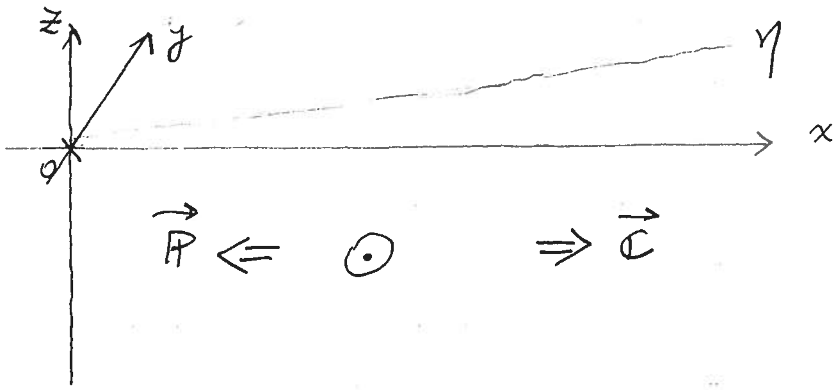
- Com as eqs. (12)-(13) sob a condição (14), as eq. do mov. geostrófico barotrópico se tornam:

$$v = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad e \quad u = -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (15)$$

- À título de exemplo, consideremos o caso simplificado em que $\eta = \eta(x)$

SLIDE: Desenho Mov. Geosh. BT com $\eta = \eta(x)$

no HS



- Como $\dfrac{\partial \eta}{\partial x} > 0$, no HS: v é negativa (para o sul) $(f<0)$

  no HN: v é positiva (para o norte) $(f>0)$

• Uma constatação das Eqs. (15) e sua interpretação é que o escoamento se dá ao longo "das curvas de nível", ou seja, é praticamente paralelo às isolinhas de η.

• Isto nos conduz à definição de uma função de corrente geostrófica

• Para tanto consideremos ou uma região relativamente pequena do oceano ou uma região onde a variação de f é razoavelmente pequena, Ou seja,

$$f = f_0 = \text{const} .$$

• Pela não-divergência horizontal:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(-\frac{g\eta}{f_0}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{g\eta}{f_0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{g\eta}{f_0} \qquad [m^2 s^{-1}] \qquad (16)$$

SLIDE: Resultado do Modelo do Edmo

SLIDE: Compreensão das estruturas ciclônicas e anticiclônicas no HS

• Mas como mostrar que em estruturas circulares não existem acelerações centrífugas importantes?

$$\frac{v^2}{R_c} = \frac{10^{-2}}{10^5} = 10^{-7}\ ms^{-2} \rightarrow \text{note que } \frac{\frac{v^2}{R_c}}{f v} = 10^{-2}!$$

• E como é a variação vertical das correntes geostróficas barotrópicas ?

• Da Eq. (7), com $\rho' = 0$, chegamos a $\frac{\partial p'}{\partial z} = 0$.

• Não há variação vertical do gradiente de pressão, o que é óbvio, visto que $\eta = \eta(x, y)$ no caso mais geral.

• Ou seja, por η não ser função de z, a derivada vertical das Eqs. (5) nos levam a

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

, ou seja u e v geostr. barotrópicos ñ variam com a profundidade.

• Esta condição é habitualmente referida no jargão DFG como Teorema Taylor - Proudman.

• É o cisalhamento vertical o principal mote para confrontarmos as diferenças entre o oceano geostr. barotrópico e baroclínico

2.3. Movimento Geostrófico Baroclínico

- Consideremos didaticamente agora o caso em que $\rho = \rho_0 + \rho'$ e $\eta = 0$ (superfície plana)

- Tomando o grad. horizontal de Eq. (7),

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla_H p' = -g \nabla_H \rho' \qquad (18)$$

- Usando as relações geostróficas,

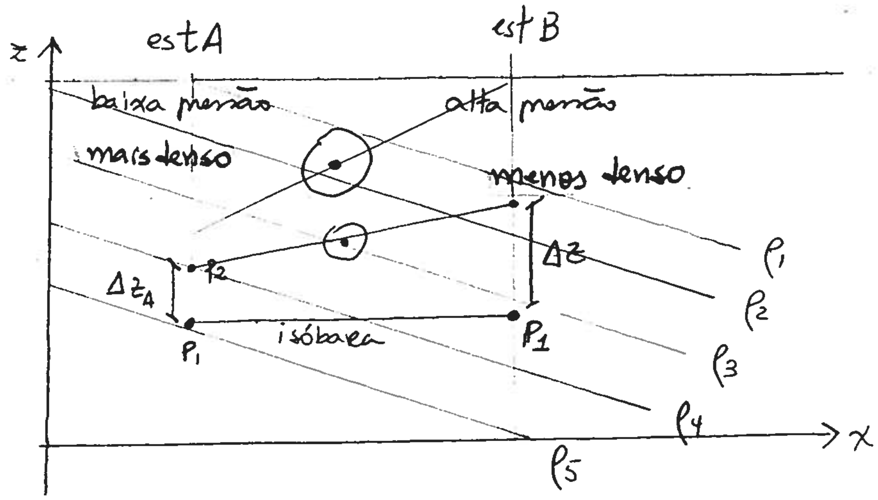
$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{g}{\rho f} \frac{\partial \rho'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\rho f} \frac{\partial \rho'}{\partial y} \qquad (19)$$

- As relações da Eq. (19) foram denominadas pelo meteorologistas de equações (relações) do vento Térmico e expressam que na presença de variações laterais de densidade, há cisalhamento vertical da velocidade geostrófica.

- Tentemos entender este princípio graficamente:

$$\boxed{\text{SLIDE: Vento Térmico do Kundu (1990)}}$$



$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$

na localidade (A) : $\Delta p_A = \bar{\rho}_A \, g \, \Delta z_A$

na localidade (B) : $\Delta p_B = \bar{\rho}_B \, g \, \Delta z_B$

Mas . $\Delta p_A = \Delta p_B = \Delta p = p_1 - p_2$,

e $\bar{\rho}_A > \bar{\rho}_B \Rightarrow \boxed{\Delta z_B > \Delta z_A}$

→ Consideremos a Eq (18) : (comp. x)

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial z} v}_{\text{variação vertical de } v \text{ é negativa}} = \underbrace{-\frac{g}{f\rho}}_{>0} \underbrace{\overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x}}^{\text{const e negativa}}}_{<0}$$

⇒ v cresce em magnitude

v é mais negativo próx. à superfície

$$\boxed{\text{SLIDE : Condições barotrópicas e baroclínicas}}$$

2.4. O Método Dinâmico

• A parte baroclínica das correntes geostróficas pode ser estimada se conhecida a estrutura de densidade.

• Para tanto, integramos as equações do vento térmico entre o nível z qualquer e o nível $-H_0$, onde assumimos ou que as isopicnais são // às isóbaras ou há ausência da mudança de inflexão nas isopicnais.

• Obtemos assim:

$$v(z) - \cancelto{0}{v(-H_0)} = -\frac{g}{f} \int_{-H_0}^{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \, dz' \qquad (20)$$

$$u(z) - \cancelto{0}{u(-H_0)} = \frac{g}{f} \int_{-H_0}^{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \, dz'$$

• Estas expressões podem ser avaliadas via série de perfis de densidade, inferidos pela equação de estado a partir dos perfis observados de temperatura.

• Em termos de velocidade, o nível $z = -H_0$ pode ser entendido como uma profundidade em torno da qual a velocidade é considerada zero. Por isto, historicamente $z = -H_0$ é conhecido como nível de movimento nulo.

• Estas equações, quando discretizadas, se constituem no Método Dinâmico.

- O uso do método Dinâmico é mais comum em coordenadas isobáricas. Para tanto, utilizados a equação hidrostática:

$$v(p) = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial x}\int_{p_0}^{p} \alpha \, dp$$

$$u(p) = -\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}\int_{p_0}^{p} \alpha \, dp \qquad (21)$$

onde $\alpha = \rho^{-1}$, o volume específico

$$\left[\text{Lembrar que } \frac{\partial}{\partial x}\alpha^{-1} = -\alpha^{-2}\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right]$$

- A quantidade integral é conhecida como geopotencial

$$\Phi = \int_{p_0}^{p} \alpha \, dp \, , \qquad \alpha = \bar{\alpha}(p) + \delta(x,y,p)$$

$$[m^2 s^{-2}]$$

$$\Phi = \underbrace{\bar{\Phi}(p)}_{\text{geopotencial padrão}} + \underbrace{\Delta\Phi(x,y,p)}_{\text{anomalia do geopotencial}}$$

- Assim, podemos reescrever (21) como

$$v(p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta\Phi}{f_0}\right), \quad u(p) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Delta\Phi}{f_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \frac{\Delta\Phi}{f_0}}$$ função de corrente geostr. baroclínica

SLIDE: Topografia dinâmica

Ajustamento geostrofico (Rossby, 1938)

- Consideremos as equações do movimento num oceano homôgeneo de fundo plano ($z=-H$) no plano f ($f=f_0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (2)$$

A Eq. da continuidade e' dada por

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3) \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{1}{H}\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Tomando a divergência de (1)-(2) e usando (3) para eliminar o termo da divergência:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - f_0\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$+$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + f_0\frac{\partial u}{\partial y} = -g\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - f_0\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + g\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \boxed{\underbrace{gH}_{c^2}}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) + f_0 H \zeta = 0 \qquad (4)$$

Agora, tomemos o rotacional de (1) e (2) para obter a equação da vorticidade absoluta

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + f_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \qquad (5)$$

Novamente usamos (3) para substituir a divergência horizontal

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta - \frac{f_0}{H} \eta \right) = 0 \qquad (6)$$

(6) é forma linearizada da conservação de vorticidade potencial. A quantidade entre parênteses é:

$$Q = \frac{q}{H} = \frac{\zeta}{H} - \frac{f_0}{H^2} \eta$$

é a anomalia da vorticidade potencial.

Por (6), Q é conservada, ou seja,

$$Q(x,y,t) = Q(x,y,0) \qquad (7)$$

Consideremos uma condição inicial em que:

$$u = v = 0 \quad e \quad \eta = -\eta_0 \, \mathrm{sgn}(x) \qquad (8)$$

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0 \\ -1 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Assim, $$\frac{\zeta}{H} - \frac{f_0}{H^2}\eta = \frac{f_0}{H^2}\eta_0 \, \mathrm{sgn}(x) \qquad (9)$$

Com (9) em (4) para eliminar ζ,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \nabla_H^2 \eta + f_0^2 \eta = -f_0^2 \eta_0 \, \mathrm{sgn}(x) \qquad (10)$$

Solução Estacionária

De volta às eqs. (1)-(3), com $\frac{\partial}{\partial t} = 0$:

$$f_0 u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad ; \quad f_0 v = g \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \;\; (12) \iff u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (13)$$

Por (11) e (13) : $f_0 \psi = g\eta = p'/\rho$.

$$\zeta = \frac{g}{f_0} \nabla_H^2 \eta = \nabla^2 \psi \qquad (14)$$

A versão estacionária de (10) e considerando $\eta = \eta(x)$ é

$$-c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + f_0^2 \eta = -f_0^2 \eta_0 \, \mathrm{sgn}(x) \qquad (15)$$

A solução que é contínua e assimétrica em torno de $x = 0$ é:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \begin{cases} -1 + e^{-x/R_{de}} & \text{para } x > 0 \\ 1 - e^{+x/R_{de}} & \text{para } x < 0 \end{cases} \qquad (16)$$

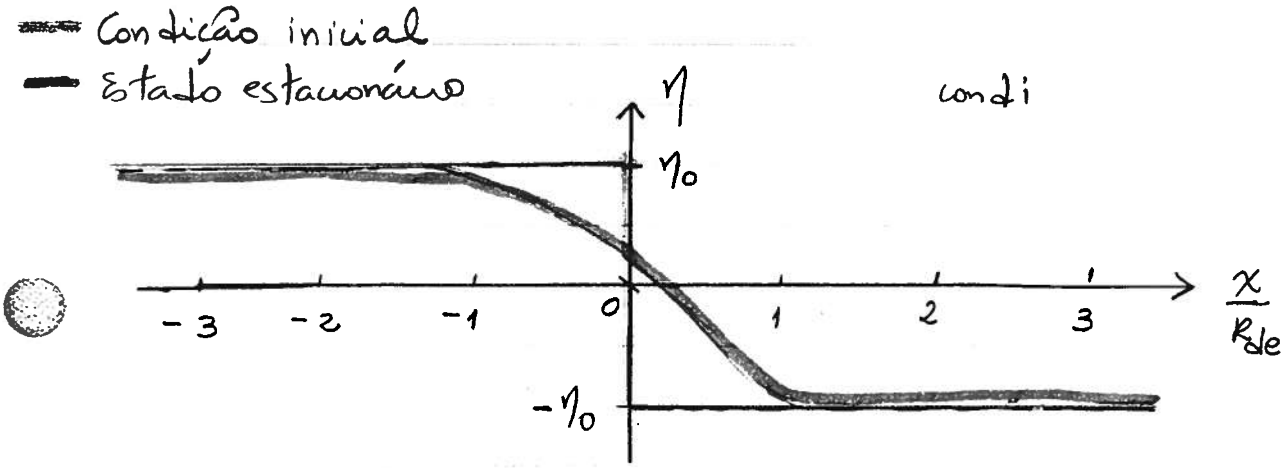
onde : $R_{de} = \dfrac{c}{|f_0|} = \dfrac{\sqrt{gH}}{|f_0|}$

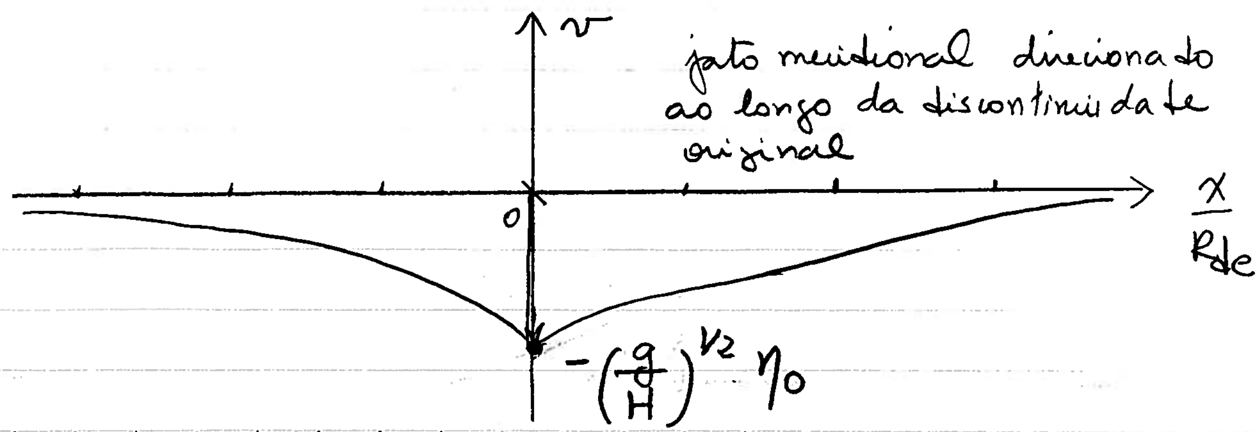
→ Notem que a escala fundamental da solução é o raio externo de deformação

O campo de velocidades a ser obtido resulta da aplicação de (16) em (11):

$$u = 0$$

$$v = -\frac{g}{f_0}\eta_0 \left(\frac{1}{R_{de}} e^{-\frac{x}{R_{de}}} \right) \qquad (17)$$





RESUMO - Movimento Geostrófico

- Análise de Meso-escala da Eq. do Movimento

- O sistema de equações hidrodinâmicas é dado por

$$\frac{Du}{Dt} - fv + \tilde{f}w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + A_H \nabla_H^2 u + A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + A_H \nabla_H^2 v + A_V \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \qquad (2)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - \tilde{f}u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g + A_H \nabla_H^2 w + A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (4)$$

- As eq. acima são complexas e compreendem todos os movimentos dos oceanos.
- Fluido-dinamicistas introduziram o conceito de análise de escalas de movimento para discernir qual o balanço dominante numa particular situação de interesse.
- Estas escalas, ao invés de serem quantidades definidas precisamente, consistem em estimativas e devem ser entendidas apenas em termos de ordem de grandeza.
- Na maioria dos problemas físicos, as escalas-chave são tempo (T), velocidade (V), comprimento (L).
- Em meso-escala, comumente referida, com $L = 10^5$ m, as escalas básicas são. → mencionar anisotropia espacial $(H, \overline{W})$
- Parâmetros / coeficientes: $A_H = 10^3\ m^2 s^{-1}$, $A_V = 10^{-2}\ m^2 s^{-1}$, $f = \tilde{f} = 10^{-4} s^{-1}$
- Pela continuidade, $\overline{W} = \frac{H}{L} V = \delta V = 10^{-3}\ m\,s^{-1}$.

• A Inspeção de (1)-(3) leva a nos d[illegible] a escala da pressão e da densidade. Para a pressão, [illegible], num primeiro momento assumir que a força do grad de pressão vertical/massa é da ordem da força da gravidade:

$$\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}{g} = O(1) \qquad (5)$$

• Chamamos atenção que a densidade cresce com a profundidade e pode tb variar lateralmente. No entanto, este valor pouco difere do valor médio ρ_0, ou seja,

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x,y,z,t) \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \ll 1$$

$$\underset{\text{escala básica}}{\rho_0}, \qquad \underset{\text{escala de var de } \rho}{\Delta\rho} \qquad (6)$$

• Por hora escalemos a pressão usando a rel hidrostática e o maior valor de referência de $\rho : \rho_0$: $P = \rho_0 g H = O(10^7 \text{ Pa})$

• Certamente, pela suposição da eq. (5), a comp vertical da Eq. mov:

$$\underset{10^{-9}}{\frac{Dw}{Dt}} - \underset{10^{-5}}{\tilde{f}u} = \boxed{-\underset{10}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}} - \underset{10}{g}} - \underset{10^{-10}}{A_H \nabla_H^2 w} + \underset{10^{-11}}{A_V \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}$$

• Para exemplificar a análise de meso-escala da eq. mov. horizontal
→ comp. zonal:

$$\underset{10^{-7}}{\frac{Du}{Dt}} - \underset{10^{-5}}{fv} + \underset{10^{-7}}{\tilde{f}w} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \underset{10^{-8}}{A_H \nabla_H^2 u} + \underset{10^{-9}}{A_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

• Caso usemos a escala de pressão determinada anteriormente, a força do gradiente horizontal de pressão seria muito maior que os demais Termos.

• Usemos um raciocínio análogo ao da densidade e suponhamos que:

$$p = p_0(z) + p'(x,y,z,t) \qquad (7)$$
$$\quad P \qquad\quad \Delta P$$

• O razoável é assumir que ΔP tenha uma determinada grandeza que balanceie a força de Coriolis, logo:

$$\Delta P = \rho_0 f U L = 10^3\ Pa$$

• Nesta hipótese, as eq. resultantes são:

$$\left.\begin{aligned} -fv &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} \\ fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} \end{aligned}\right\} (8) \quad \begin{aligned}&\text{mov. solutamente horizontal} \\ &\rightarrow \text{geostrófico}\end{aligned}$$

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g \ ; \ \frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g \quad (9)$$

• ANÁLISE DE (8)-(9):

- para típicos fluidos geofísicos, a pressão é muito menor que aquela hidrostática básica devido ao peso do fluido.
- o movimento se dá ao longo das isobaras - as parcelas de fluido fluem ao longo de $p = const$ (ou $p' = const$)
- não há trabalho no fluido pela pressão ou pelo fluido na pressão - ou seja uma vez inicial, o escoamento pode persistir sem uma contínua da fonte de energia.
- o movimento geostrófico é isobárico. isóbaras são linhas de corrente geostróficas.

R 02 04

- Integração vertical da eq. (9): $p = p_{atm} + g \int_z^{\eta(x,y)} \rho \, dz$ (10)

- Usando a Regra de Leibnitz, podemos calcular o grad. horizontal de pressão:

$$\nabla_H p = g\,\rho(z=\eta)\,\nabla_H \eta + g \int_z^{\eta} \nabla_H \rho \, dz \qquad (11)$$

- a força do grad: $-\frac{1}{\rho}\nabla_H p = \underbrace{-g\,\nabla_H \eta}_{\text{depende da topografia da sup. livre do mar}} \underbrace{- g \int_z^{\eta} \nabla_H \rho \, dz}_{\text{depende da topografia das isopicnais}}$ (12)

depende da topografia da sup. livre do mar

BAROTRÓPICA

depende da topografia das isopicnais
→ variações laterais de densidade

BAROCLÍNICA

Movimento Geostrófico Barotrópico

- Isolemos o efeito de η : $\rho' = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0$

- (8) → $v = \frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial x}$, $u = -\frac{g}{f}\frac{\partial \eta}{\partial y}$ (13)

→ faça gráfico usando $\eta = \eta(x)$, por simplicidade < ex: HN / ex: HS

- E caso os movimentos sejam circulares? Em coord. naturais, as acelerações inerciais tomaram forma de $\frac{v^2}{R_c}$ → raio do vort. $\xrightarrow{\text{MESO}} 10^{-7}\ m\,s^{-1}$

- Com $\rho' = 0 \rightarrow \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ (14) } Teorema de Taylor Proudman

EXPLORAR COERÊNCIA VERTICAL

- Caso olhemos para uma região onde $f \sim$ const, podemos definir uma função de corrente visto que $\nabla_H \cdot \vec{V} = 0$.

$$\Psi = \frac{g}{f}\eta \qquad (15)$$ → as curvas de nível da sup. oceânica são linhas de corrente geostróficas

Movimento Geostrófico Baroclínico

- Façamos agora $\eta = 0$, $\rho = \rho_0 + \rho'$

- Tomando o ∇_H (7) : $\dfrac{\partial}{\partial z} \nabla_H p' = -g \nabla_H \rho'$ (16)

pode omitir → ρ_0 = cte

- Fazendo $\dfrac{\partial}{\partial z}$ (8) e usando (16) : $\dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{g}{\rho f} \dfrac{\partial \rho'}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{g}{\rho f} \dfrac{\partial \rho'}{\partial y}$ (17)

→ relações do do vento térmico : há cisalhamento vertical de correntes se houver gradientes laterais de densidade.

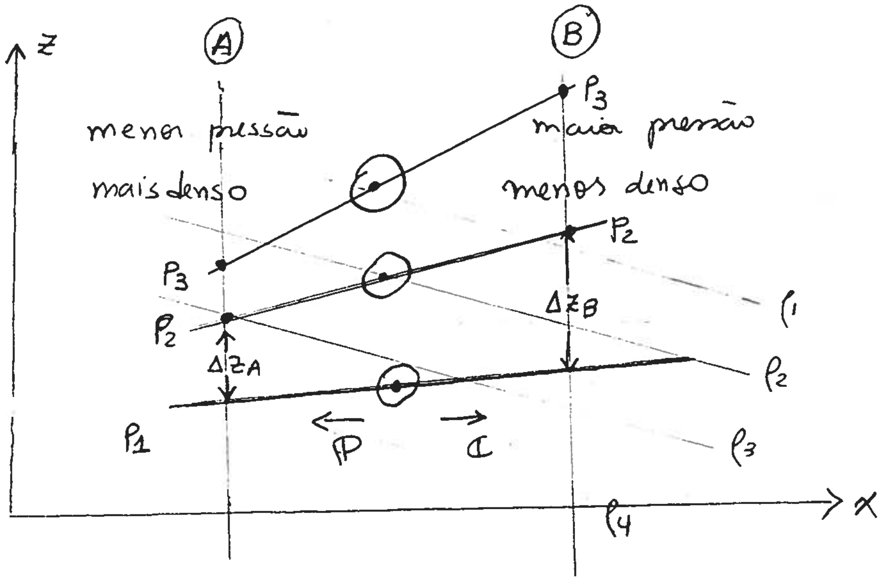
→ comparar com Taylor - Proudman → quebra na "coerência - rigidez" vertical

- Interpretação gráfica

HS

$\dfrac{\partial \rho}{\partial x} > 0$ e

cresce em magnitude c/ em direção à sup



na localidade (A) : $\Delta p_{(A)} = \Delta p = \bar{\rho}_{(A)}\, g\, \Delta z_{(A)}$

" (B) : $\Delta p_{(B)} = \Delta p = \bar{\rho}_{(B)}\, g\, \Delta z_{(B)}$

como $\bar{\rho}_{(A)} > \bar{\rho}_{(B)}$ → $\Delta z_{(B)} > \Delta z_{(A)}$

- Voltemos à relação (17) : $\dfrac{\partial v}{\partial z} = \underbrace{-\dfrac{g}{\overset{<0}{f}\rho}}_{>0} \ \underbrace{\overset{\text{const. neg.}}{\dfrac{\partial \rho}{\partial x}}}_{<0} < 0$

variação vertical negativa → v cresce em mag.

(v torna-se mais negativo)

O Método Dinâmico

• Parte baroclínica das correntes pode ser estimada pela estrutura de densidade

$$v(z) - v(-H_0) = -g \int_{-H_0}^{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \, dz_* \quad (18)$$

$z = -H_0$, nível de referência, nível de mov. nulo p/ antigos

• Mais comum escrever (18) em coord. isobáricas:

$$v(p) = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} \int_{p_0}^{p} \alpha \, dp_* \quad (19) \quad \overset{\text{BIZU}}{\Rightarrow} \left[\frac{\partial \alpha^{-1}}{\partial x} = -\alpha^{-2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right]$$

• A quantidade integral é conhecida como geopotencial

$$\Phi = \int_{p_0}^{p} \alpha \, dp_* , \quad \alpha = \bar{\alpha}(p) + \delta_\alpha(x, y, p)$$

$$\Phi = \bar{\Phi}(p) + \underbrace{\Delta \Phi(x, y, p)}_{\text{anomalia}}$$

• (19): $v(p) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta \Phi}{f} \right)$ e analogamente, $u(p) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta \Phi}{f} \right)$

$\rightarrow \Psi = \frac{\Delta \Phi}{f}$: função de corrente quasi. baroclínica

(19)

Ajustamento Geostrófico (Rossby, 1938)

• Considere oceano barotrópico ($\rho = \rho_0$), $f = \text{const}$, inviscido

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\int_{-H}^{\eta} dz}_{u \text{ e } v \ \tilde{n} \text{ são f q de } z} + w\Big]_{-H}^{\eta} = 0$$

$w = \dfrac{D\eta}{Dt}$ em sup. e $w = 0$ no fundo plano

$$\frac{D\eta}{Dt} + (H+\eta)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

→ linearizar assumindo que $\dfrac{\vec{V}_H \cdot \nabla\eta}{\frac{\partial \eta}{\partial t}} \ll 1$ e $\dfrac{\eta}{H} \ll 1$,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \qquad (20)$$

→ analogamente, podemos linearizar as eq (1) (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad (21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (22)$$

• Fazendo $\overbrace{\frac{\partial}{\partial x}(21) + \frac{\partial}{\partial y}(22)}^{\text{divergência}}$ e usando (20):

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \underbrace{gH}_{c^2}\nabla_H^2\eta + f_0 H \zeta = 0, \qquad (23)} \qquad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

• Fazendo $-\frac{\partial}{\partial y}(21) + \frac{\partial}{\partial x}(22)$: $\frac{\partial \zeta}{\partial t} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$ (24)

• Com (20) em (24): $\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\zeta - \frac{f}{H}\eta\right)}_{Q\text{ - forma linearizada da VP de Ertel}} = 0$ (25)

• De acordo com (25), $Q(x,y,t) = Q(x,y,0)$ (26)

• Consideremos uma cond. inicial tal que:

$$u = v = 0 \text{ e } \eta = -\eta_0 \,\text{sinal}(x) \begin{cases} 1, & p/\ x > 0 \\ -1 & p/\ x < 0 \end{cases} \qquad (27)$$

→ (27) em (28): $\frac{\zeta}{H} - \frac{f_0}{H^2}\eta = \frac{f_0}{H^2}\eta_0 \,\text{sinal}(x)$ (28)

(28) em (23) p/ eliminar ζ:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \nabla_H^2 \eta + f_0^2 \eta = -f_0^2 \eta_0 \,\text{sinal}(x) \qquad (29)$$

• A solução estacionária de (29) para o caso simplificado $\eta = \eta(x)$,

$$-c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + f_0^2 \eta = -f_0^2 \eta_0 \,\text{sinal}(x)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{1}{R_{de}^2}\eta = \frac{1}{R_{de}^2}\eta_0 \,\text{sinal}(x) \qquad (30)$$

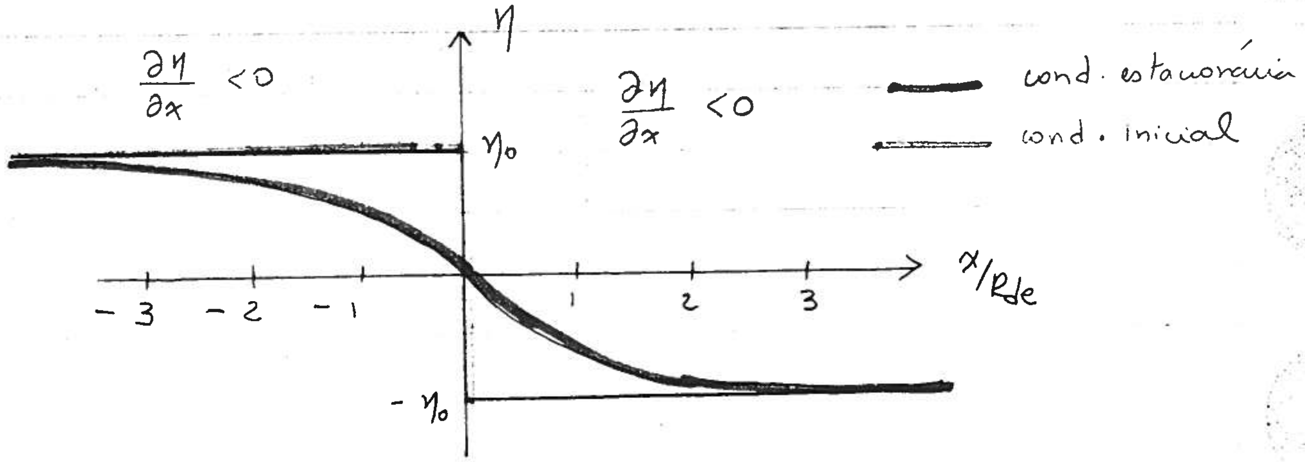
cuja solução é: $$\frac{\eta}{\eta_0} = \begin{cases} -1 + e^{-x/R_{de}} & p/\ x > 0 \\ 1 - e^{x/R_{de}} & \text{para } x < 0 \end{cases} \qquad (31)$$

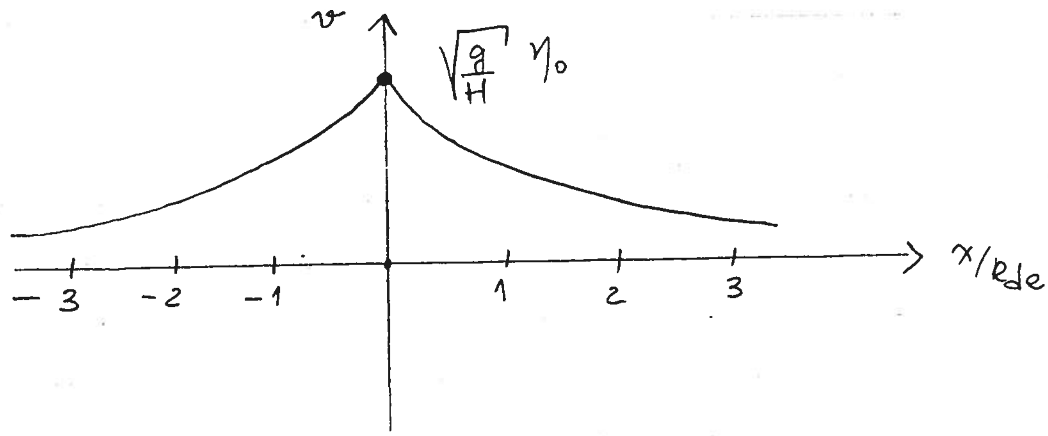
→ escala fundamental da solução é a quantidade R_{de}!

O campo de velocidade tb advém das soluções estacionárias de (21)(22), que são as relações geostróficas. Usando (31) nelas,

$$u = 0 \quad e \quad v = -\frac{g}{f}\frac{\eta_0}{R_{de}} \begin{cases} e^{-x/R_{de}} & p/\ x > 0 \\ e^{x/R_{de}} & p/\ x < 0 \end{cases}$$

$$-\frac{g}{f}\frac{|f|}{\sqrt{gH}} = -\frac{g}{-|f|}\frac{|f|}{\sqrt{gH}} = \sqrt{\frac{g}{H}}$$





→ comentar que a perturbação original conduziu ao balanço geostrófico

$v \perp \frac{\partial \eta}{\partial x} \rightarrow v \parallel \eta$!