# TEMA 06

# A Aprox ção Geostrófica no Estratificado

6.1. O Princípio da Aproximação QG (item 5)

6.2. Interpretando o nº de Rossby (item 5)

6.3. Aplicação da Aproximação QG no Oceano Estratificado

6.4. O Teorema de Ertel e a Aproximação QG

## 6.3. A Aproximação Quase-Geostrófica num Oceano Estratificado

- Quando estudamos a aproximação QG no oceano homogêneo, observamos que $\psi = \psi(x,y,t)$ pois a pressão geostrófica não é função da profundidade.

- No oceano baroclínico, $\psi = \psi(x,y,z,t)$ pois

$$p = \bar{p}(z) + p'(x,y,z,t) \qquad (6)$$

$$\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x,y,z,t) \qquad (7)$$

- Assumimos aqui que $\rho' = R_0$, o que equivalente à aproximação das espessuras $\bar{\rho}$ no oceano barotrópico.

- O balanço de ordem zero é dado por

$$u_g = -\frac{1}{\rho_0 f_0}\frac{\partial p'}{\partial y} \quad e \quad v_g = \frac{1}{\rho_0 f_0}\frac{\partial p'}{\partial x} . \qquad (8)$$

- O balanço de primeira ordem é dado

$$\frac{D_g}{Dt} u_g - f_0 v_a - \beta y v_g = 0$$

$$\frac{D_g}{Dt} v_g + f_0 u_a + \beta y u_g = 0 \qquad (9)$$

Q6 Q7

- A comp vertical da eq. é novamente obtida pelo rotacional de (22), mas a reescrevemos de forma distinta de (12):

$$\frac{D_g}{Dt}(\zeta_g+\beta y) - f_0\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (10)$$

- Usamos a equação da conservação de densidade sob as aproximações geostrófica e das espessuras:

$$\frac{D_g}{Dt}\rho' + w\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0 \quad , \qquad (11)$$

que permite encontrar $w$ : $w = -\frac{1}{\partial\bar{\rho}/\partial z}\frac{D_g}{Dt}\rho'$

- Com (12) em (11),

$$\frac{D_g}{Dt}(\zeta_g+\beta y) + f_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\partial\bar{\rho}/\partial z}\right)\frac{D_g}{Dt}\rho' = 0$$

$$\frac{D_g}{Dt}(\zeta_g+\beta y) + \frac{D_g}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0}{\partial\bar{\rho}/\partial z}\rho'\right) = 0 \qquad (13)$$

- Definamos a função de corrente geostrófica baroclínica

$$\psi = \frac{p'}{\rho_0 f_0} \qquad (14)$$

10 25 8

- A equação hidrostática

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = -\rho' g$$ pode ser escrita em termos

de $\psi$:

$$\rho' = -\frac{\rho_0 f_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (15)$$

$$(12) \Rightarrow w = \frac{f_0}{N^2} \frac{D_g}{Dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$$

- Com (15) em (13),

$$\frac{D_g}{Dt}\left(\nabla^2 \psi + \beta y\right) - \frac{D_g}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_0 f_0^2}{g\, \partial \bar{\rho}/\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0 \qquad (28)$$

Usando a definição $N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}$, obtemos

$$\frac{D_g}{Dt} q = 0$$

mas $q = \nabla^2 \psi + \beta y + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}}_{\text{vort de estiramento}}$, a VPQG

no oceano estratificado.

- Comparemos os termos de estiramento dos modelos BT e BC:

BAROTRÓPICO

$$O\left(\frac{\psi}{R_{de}^2}\right)$$

BAROCLÍNICO

$$O\left(\frac{f_0^2}{N^2 H^2}\psi\right) = O\left(\frac{\psi}{R_{d_i}^2}\right)$$

- A relação entre vorticidade relativa e de estiramento resulta em importante implicação dinâmica que tornam distintos os mecanismos de conservação de vorticidade potencial em meso e grande escalas:

$$Bu = O\left(\frac{\text{vort. relativa}}{\text{vort. de estiramento}}\right) = \frac{\Psi L^{-2}}{\Psi R_{d_i}^{-2}} = \frac{R_{d_i}^{2}}{L^{2}}$$

→ Para pequenos Bu, $NH \ll f_0 L$, a estratificação é fraca ou estamos em regime de grande escala. A vorticidade de estiramento domina e o balanço resguarda semelhanças com o fluido homogêneo.

→ Para grandes Bu, $NH \gg f_0 L$, e estamos em regime de intensa estratificação ou no limite das menores escalas. A vorticidade relativa domina e a estratificação reduz o acoplamento vertical e cada "camada" tende a se comportar como um estrutura praticamente bidimensional.

→ Se $Bu \sim O(1)$, como em meso-escala, vorticidade relativa e de estiramento competem de forma similar no balanço.

## 6.4. O Teorema de Ertel e a Aproximação QG

- $\Pi = \frac{1}{\rho_0}(\vec{\zeta} + f\vec{k}) \cdot \nabla\rho$ sob a aprox de Boussinesq.

$$= \frac{1}{\rho_0}\left[ (\zeta + f)\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial\rho'}{\partial z}\right) + \xi\frac{\partial\rho'}{\partial x} + \chi\frac{\partial\rho'}{\partial y} \right]$$

$$\sim \frac{1}{\rho_0}\left[ (\zeta_g + f)\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z} + \frac{\partial\rho'}{\partial z}\right) - \frac{\partial v_g}{\partial z}\frac{\partial\rho'}{\partial x} + \frac{\partial u_g}{\partial z}\frac{\partial\rho'}{\partial y} \right]$$

- visto que $\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} = o\left(R_0^2\frac{U}{L}\right)$ e $\frac{\partial v}{\partial z} = o\left(\frac{U}{H}\right)$.

- Usemos a aproximação das espessuras novamente,

$$\frac{\partial\rho'/\partial z}{\partial\bar{\rho}/\partial z} = o(R_0),$$

com isso, facilmente vemos que

$$\frac{\zeta_g\frac{\partial\rho'}{\partial z}}{f_0\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}} = o(R_0^2) \qquad \text{e}$$

$$\frac{\frac{\partial v_g}{\partial z}\frac{\partial\rho'}{\partial x}}{f_0\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}} = \frac{\frac{U}{H}\frac{\rho'}{L}}{f_0\frac{\bar{\rho}}{H}} = \frac{U}{f_0 L}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = o(R_0^2).$$

$$\frac{\beta y\frac{\partial\rho'}{\partial z}}{f_0\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}} = o(\hat{\beta}R_0) = o(R_0^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{\rho_0}\left[ \underbrace{f_0 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}}_{O(1)} + \underbrace{\zeta_g \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \beta y \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + f_0 \frac{\partial \rho'}{\partial z}}_{O(R_o)} + O(R_o^2) \right]$$

$$\Pi \approx \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\left[ f_0 + \zeta_g + \beta y + \frac{f_0}{\partial \bar{\rho} \partial z} \frac{\partial}{\partial z}\rho' \right]$$

$$\Pi \approx \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\left[ f_0 + \nabla^2 \psi + \beta y - \frac{\rho_0 f_0^2}{g \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]$$

$$\rho' = -\frac{1}{g}\frac{\partial p'}{\partial z} = -\frac{\rho_0 f_0}{g}\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\Pi \approx \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\left[ f_0 + \nabla^2 \psi + \beta y + \frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]$$

$$\Pi \approx \underbrace{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}(f_0)}_{\text{VP básica}} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\underbrace{(q)}_{\text{VP QG}} \qquad (N^2 = \text{const})$$

Note que $\frac{D_g \Pi}{Dt} \approx \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \boxed{\frac{D_g}{Dt} q = 0}$ .

# RESUMO - Tema 6 - Aproximação QG no Oceano Estratificado

- consiste num conjunto de 3-4 aproximações [Flierl (1978) e Young (1986)]

a) a aproximação geostrófica $Ro, Ro_T \ll 1$
hidrostática $\delta \ll 1$
e mais $E_H, E_V \ll 1$

b) a aproximação do plano $\beta$ de latitudes médias $\frac{\beta L}{|f_0|} = \hat{\beta} \ll 1$

c) a aproximação das espessuras $Ro_S = \frac{\Delta h}{H}$, nº de Rossby de estiramento

→ Fornece escalas para $U, L$ e $H$ em meso e grande escalas

$Ro_S \rightarrow \Delta h = O(10\,m)$

→ Formalmente, consiste na expansão das variáveis em termos de $Ro$

$$\varphi = \varphi_0 + Ro\,\varphi_1 + Ro^2\varphi_2 + \cdots\ ,\quad \varphi \equiv \text{variável genérica não-dimensional}$$

→ a aproximação QG: pré-elaborada por Rossby (1939)
desenvolvida por Charney (1947, 1948) e Eady (1949)

→ conduziremos a derivação heurística de Young (1986), sem formalmente realizar as expansões e não-dimensionalizar as equações.

R 06 2

## Interpretando o nº de Rossby

- Eq. horizontal do mov. sob Boussinesq e num oceano invíscido

$$\underset{(I)}{\frac{D}{Dt}\vec{V}_H} + \underset{(II)}{f\,\vec{k}\times\vec{V}_H} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p \qquad (1)$$

$$R_o = \frac{\text{termo (I)}}{\text{Termo (II)}}$$ , onde $T = LU^{-1}$

$R_{oT} \sim R_o$

- Se $R_o \ll 1$, (1) em suas comp., se torna

$$v = \frac{1}{\rho_0 f_0}\frac{\partial p}{\partial x} + O(R_o) \qquad (2)$$

onde $\hat{\beta} \ll 1$ foi utilizada

$$u = \underbrace{-\frac{1}{\rho_0 f_0}\frac{\partial p}{\partial y}}_{\text{geostróficas}} \underbrace{+\,O(R_o)}_{\text{correções}} \qquad (3)$$

- Essas correções são ageostróficas. Se retomarmos a expansão em termos de $R_o$:

$$u = u_g + u_a \qquad \rightarrow \qquad \frac{u_a, v_a}{u_g, v_g} = O(R_o) \quad (6)$$

$$v = u_g + v_a \qquad (4)$$

- Pela equação da continuidade:

em $O(R_o^0)$: $$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$

em $O(R_o)$: $$\frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w_a}{\partial z} = 0 \qquad (8)$$ $\sim R_o$ em meso

$\rightarrow$ a escala de $w_a$ é $W = O\left(R_o U \overset{\lambda}{\frac{H}{L}}\right)$

$= O(R_o^2 U)$

## Vorticidade Relativa e Planetária

$$\vec{\zeta} = \nabla\times\vec{V} = \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)}_{\xi}\vec{i} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{\chi}\vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\zeta}\vec{k} \quad (9)$$

→ num fluido em rotação de corpo sólido com velocidade angular $\Omega_0 \perp$ ao plano horizontal

$$\vec{\Omega} = \Omega_0\vec{k} \rightarrow \vec{V} = \Omega_0\vec{k}\times\vec{r}, \text{ onde } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{\zeta} = \nabla\times\vec{V} = \nabla\times(\Omega_0\vec{k}\times\vec{r}) = 2\Omega_0\vec{k} \quad (10)$$

→ num plano tg à sup. da terra a velocidade angular é $\Omega \operatorname{sen}\theta$, onde $\Omega = 7,29\times10^{-5}\ s^{-1}$, por (10)

$$\vec{\zeta}_p = 2\Omega\operatorname{sen}\theta\ \vec{k} = f\vec{k} \rightarrow \text{vorticidade planetária}$$

vorticidade absoluta: $\vec{\zeta}_a = \vec{\zeta} + f\vec{k}$ → $Ro = \frac{\zeta}{|f_0|} \ll 1$

- Aceitemos que a comp. vertical é mais relevante dinamicamente que as horizontais,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\zeta - \Big(\underbrace{\overset{(a)}{\xi\frac{\partial}{\partial x}} + \chi\frac{\partial}{\partial y}}_{\text{inclinação}} + \underbrace{\overset{(b)}{\zeta\frac{\partial}{\partial z}}\Big)w - \overset{(c)}{f\frac{\partial w}{\partial z}}}_{\text{estiramento}} + \beta v = 0$$

Razão: $$\frac{\xi\frac{\partial}{\partial x}w_a,\ \chi\frac{\partial}{\partial y}w_a}{f_0\frac{\partial w_a}{\partial z}} = \frac{\frac{U}{HL}}{\frac{f_0}{H}} = \frac{U}{f_0 L} = O(Ro)$$

→ os termos de inclinação são $O(Ro)$ se comparados aos de estiramento

# A Aproximação QG num Oceano Estratificado

→ no oceano BT : $\psi = \psi(x,y,t)$ por Taylor-Proudman

→ no oceano BC : $\psi = \psi(x,y,z,t)$ :

$$p = \bar{p}(z) + p'(x,y,z,t)$$

$$\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'(x,y,z,t)$$

onde consideramos $\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \ll 1$ , o que podemos ser análogo à aproximação das espessuras

EQ. do MOVIMENTO

- Em ordem zero : $u_g = -\frac{1}{\rho_0 f_0}\frac{\partial p'}{\partial y}$ , $v_g = -\frac{1}{\rho_0 f_0}\frac{\partial p'}{\partial x}$ . (12)

- Em ordem Ro :

$$\frac{D_g}{Dt} u_g - f_0 v_a - \beta y\, v_g = 0$$

$$\frac{D_g}{Dt} v_g + f_0 u_a + \beta y\, u_g = 0$$

(13)

- Tomando o Rotacional : $\frac{D_g}{Dt}(\zeta_g + \beta y) - f_0 \frac{\partial w_a}{\partial z} = 0$ (14)

- Considerando a Eq. da conservação de densidade sob Ro, $\frac{\rho'}{\rho} \ll 1$,

$$\frac{D_g}{Dt}\rho' + w_a \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

- Com (15) em (14) : $\frac{D_g}{Dt}(\zeta_g + \beta y) + \frac{D_g}{Dt}\left(\frac{f_0}{\partial \bar{\rho}/\partial z}\rho'\right) = 0$ (16)

- Definindo : $\psi = \frac{p'}{\rho_0 f_0}$ , reescrevemos a eq. hidrostática para $p'$ e $\rho'$ como

$$\rho' = -\frac{\rho_0 f_0}{g}\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (17)$$

Com (17) em (16):

$$\frac{D_g}{Dt}\left(\nabla^2\psi + \beta y\right) + \frac{D_g}{Dt}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho_0 f_0^2}{\partial\rho/\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0 \qquad (18)$$

Chegamos a $\frac{D_g}{Dt} q = \frac{\partial}{\partial t} q + J(\psi, q) = 0$

onde $q = \nabla^2\psi + \beta y \underbrace{\boxed{+\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}}}_{\text{vort. estiramento}}$ é VPQG. $N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}$

- Comparemos os termos de estiramento dos oceanos BT e BC :

$$BT : O\left(\frac{\psi}{R_{de}^2}\right) \quad ; \quad BC : O\left(\frac{f_0^2}{N^2H^2}\psi\right) = O\left(\frac{\psi}{R_{di}^2}\right)$$

→ comentar nº $Bu = \frac{\text{vort. relativa}}{\text{vort. estiramento}} = \frac{R_{di}^2}{L^2}$

Bu pequenos – vort. estiramento domina - semelhanças c/ oc. BT

Bu grande – " relativa " - estratificação reduz acoplamento vertical

Bu $\sim O(1)$ – meso-escala. ambas competem igualmente

R 06 06

## A. Aproximação QG via Teorema de Ertel

$\Pi = \frac{1}{\rho_0} (\vec{\zeta} + f\vec{k}) \cdot \nabla \rho$ sob a aprox. de Boussinesq

→ copiar pgs. (10) e (11) do Texto expandido

## Exemplo de solução para a equação VPQG baroclínica:

→ linearize e assuma solução ñ forçada, com condição de $w = 0$ em $z = 0, -H$

$$(12) \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0 \qquad \text{em } z = 0, -H$$

A eq. linearizada: $$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\psi\right] + \beta\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \qquad (19)$$

Assumamos solução da forma:

$$\psi(x,y,z,t) = \Psi_i(x,y,t)\,F_i(z) \qquad (20)$$

Com (20) em (19),

$$F_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi_i + \beta\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}F_i\right) = -\lambda_i$$

A equação da estrutura vertical se torna:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}F_i + \lambda_i F_i = 0$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0 \qquad \text{em } z = 0, -H$$

Equação da evolução da amplitude

$$-\frac{1}{\frac{\partial \Psi_i}{\partial t}}\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Psi_i + \beta\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}\right) = -\lambda_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\Psi_i - \overset{\frac{1}{R_{d_i}^2}}{\boxed{\lambda_i}}\Psi_i\right) + \beta\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = 0$$

Definições : $\lambda_i = \frac{1}{R_{d_i}^2} = \frac{f_0^2}{g h e_i}$

Se $N = \text{const}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} F + \frac{N^2}{f_0^2} \lambda_i F_i = 0$$

solução :

$$F_i(z) = A e^{a_i z} + B e^{-a_i z} , \quad a_i = \frac{N}{f_0} \lambda_i^{1/2}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0 \; z = 0 \rightarrow A_i = B_i$$

$$F_i = 2A_i \cos\left(\frac{N}{f} \lambda_i^{1/2} z\right)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial z} = 0, \; z = -H \longrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{N}{f} \lambda_i^{1/2} H\right) = 0$$

$$\frac{N^2}{f^2} \lambda_i = \frac{n^2 \pi^2}{H^2} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3$$

$$\boxed{\lambda_i = \frac{f_0^2}{N^2} \frac{n^2 \pi^2}{H^2} = R_{d_i}^{-2}}$$

Calcular amplitude dos modos:

$$\frac{1}{H} \int_{-H}^{0} F_i^2 \, dz = 1 \rightarrow \frac{A_i^2}{H} \int_{-H}^{0} \cos^2\left(\frac{n\pi}{H} z\right) = 1$$

PLOTE OS MODOS

$$\text{para } n = 0, \quad A_0^2 = \frac{1}{\frac{1}{H} \int_{-H}^{0} \cos^2(0) dz} = \frac{1}{\frac{1}{H} \int_{-H}^{0} dz} = 1$$

$$A_1^2 = \frac{1}{\frac{1}{H} \int_{-H}^{0} \cos^2\left(\frac{n\pi}{H} z\right) dz} \longleftarrow \left. \frac{1}{2} z + \frac{H}{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{H} z\right) \cos\left(\frac{\pi}{H}\right) \right]_{-H}^{0} = 2$$