Universidade de São Paulo Instituto de Física

GLUONS EM ESTRELAS DE NÊUTRONS

Bruno Cezar de Souza Franzon

Orientador: Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de mestre em ciências

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (IFUSP)

Prof. Dra. Laura Paulucci Marinho (UFABC)

Prof. Dra. Frederique Marie-Brigitte Sylvie Grassi (IFUSP)

São Paulo, 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Franzon, Bruno Cézar de Souza

Gluons em Estrelas de Nêutrons. São Paulo, 2012.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Física – Depto. de Física Experimental

Orientador: Prof Dr Fernando Silveira Navarra

Área de Concentração: Física de Partículas e Astrofísica Estelar.

Unitermos: 1. Física Teórica; 2. Física Moderna; 3. Astrofísica Estelar.

USP/IF/SBI-017/2012

 \grave{A} minha mãe, irmã e vó, por tudo.

.



Agradecimentos

Todo fim de jornada deve ser seguido de agradecimentos, posto que seria impossível finalizá - la sozinho. Nesse sentido, agradeço minha família, das tias aos primos. A minha mãe e vó, pelo carinho, e que mesmo na distância, apoiaram-me. A minha irmã Érica, pelo incentivo e por seu exemplo, e também por ter me mostrado, ainda criança, o bonito caminho da educação. Sem menor mérito, ao Alessandro, por acreditar em mim.

Agradeço ao meu orientador Fernando Navarra pela possibilidade de estudar um tema tão rico e interessante. Sua paciência e sensatez também merecem saudações. Agradeço ao David, amigo e companheiro de trabalho, pelo empenho e altruísmo. Agradeço ao Jorge Horvath, pela disposição em ajudar e pelos conselhos, mostrando claramente o que devia estudar. Por isso, este trabalho também é de vocês.

Um agradecimento muito especial aos amigos de coração que fazem parte da minha vida em São Paulo: Cris, Osmar, Luciana, Kelly, Marcola, Grá, Tati, Andreza. O contato com vocês me fortaleceu em inúmeras situações e iluminou outras. Dedico também aos meus amigos que nem mesmo o tempo levou: Caio, Chiba, Paty, Tchucho, Rafa, Bika, Eric, Dudu, Renato, Line, Zulu.

Os integrantes do grupo GRHAFITE recebem também meus agradecimentos. Desde os cafés após o almoço, até as micro reuniões na primeira sala que aparecer.

Por fim, à CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O plasma de quarks e gluons (QGP) em temperatura zero e alta densidade bariônica é um sistema que pode existir no interior de estrelas densas. É possível que esse QGP frio compartilhe algumas características com o plasma quente, observado em colisões de íons pesados relativísticos, sendo também um sistema fortemente interagente. Neste trabalho, utilizamos uma equação de estado derivada a partir da QCD e a aplicamos no estudo de estrutura estelar. Mostramos que nossos resultados são compatíveis com o pulsar PSR J1614 – 2230 de massa $(1.97 \pm 0.04) \rm M_{\odot}$.

Abstract

The Quark Gluon Plasma (QGP) at zero temperature and high baryon number is a system that may exist in the core of dense stars. This cold QGP has a rich phase structure and at high enough chemical potential it is quite possible that it shares some features with the hot QGP observed in heavy ion collisions, being also a strongly interacting system. We use an equation of state derived from QCD and apply it to study of stellar structure. Our results reproduce the measured mass, $(1.97 \pm 0.04) M_{\odot}$, of the pulsar PSR J1614 – 2230.

CONTEÚDO ii

Conteúdo

1	Intr	oduçã	o	1
2	Esti	relas d	e Nêutrons	3
	2.1	Propri	iedades de Estrelas de Nêutrons	6
		2.1.1	Massa e Raio	7
		2.1.2	Rotação	10
		2.1.3	Campo Magnético	12
	2.2	Equilí	brio e Estabilidade de Estrelas de Nêutrons	15
		2.2.1	Neutralidade Elétrica	15
		2.2.2	Equilíbrio químico	16
		2.2.3	Relatividade Geral e Equações de Tolman – Oppenheimer – Volkoff	19
		2.2.4	A solução de Schwarzschild	21
		2.2.5	A TOV	22
3	$\mathbf{E}\mathbf{q}$	uação	de Estado para o QGP frio	25
	3.1	O que	é o QGP?	25
	3.2	QCD		26
	3.3	Decon	nposição do campo dos glúons	27
	3.4	Conde	ensados de gluons e massa dinâmica	28
	3.5	Lagran	ngiana efetiva	30
	3.6	Equaç	ão de estado	34
		3.6.1	Equações de movimento	34
		3.6.2	Densidade de energia e pressão	36
	3.7	Comp	aração com o Modelo de Sacola do MIT	41

CONTEÚDO	iii
----------	-----

4	Res	ultados	48
	4.1	Estabilidade da Equação de Estado	48
	4.2	Relação Massa – Raio	54
5	Con	nclusão	63

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de fase da QCD	4
2.2	Supernova de Kepler, primeiro observada em 1604. Esta imagem foi	
	feita em 2004 com esforço conjunto do telescópio Hubble e Spitzer e do	
	observatório de Raios – X Chandra. Crédito: NASA/ESA	5
2.3	Possíveis composições de uma estrela de nêutrons	6
2.4	Diagrama massa – raio para estrelas de nêutrons. O gráfico mostra a	
	massa versus o raio para algumas EoSs típicas. As faixas horizontais	
	mostram medidas de massa incluindo a massa recentemente observada	
	do pulsar J 1614 — 2230 [14]. Todas as curvas que não encontram es-	
	sas observações são excluídas, descartando as respectivas teorias que	
	descrevem o interior de estrelas de nêutrons	8
2.5	Massa de estrelas de nêutrons medidas	9
2.6	Distribuição de período de rotação de pulsares	10
2.7	Representação de uma estrela de nêutrons magnetizada e em rotação. $. $	11
2.8	Distribuição da variação do período de rotação de pulsares como função	
	do período. Esse diagrama também mostra linhas que representam	
	a idade dos pulsares e o seu campo magnético. Figura adaptada da	
	referência [41]	13
2.9	A massa M com função do raio R para um estrela de nêutrons. Essa	
	curva é parametrizada pela densidade central ε_c . Em destaque temos a	
	massa máxima e o raio correspondente	24
2.10	A massa M da estrela como função da sua densidade central ε_c . Em	
	destaque temos a massa máxima e a densidade central correspondente.	24

3.1	Formação do plasma de quarks e gluons em altas temperaturas (a) e	
	alta densidade bariônica (b)	26
3.2	Densidade de energia em função da densidade bariônica dividida pelo	
	valor correspondente do MIT: ε_0	44
3.3	Pressão em função da densidade bariônica dividida pelo valor corres-	
	pondente do MIT: p_0	44
3.4	Velocidade do som em função da densidade bariônica dividida pelo valor	
	correspondente do MIT: c_0	45
3.5	Pressão como função da densidade de energia	45
3.6	Contribuições individuais para a densidade de energia (figura superior)	
	e pressão (figura inferior): hard gluons , quarks, soft gluons e soma	
	dessas três componentes	46
3.7	EoS para diferentes valores dos condensados de dimensão dois e quatro.	47
4.1	Densidade bariônica na superfície da estrela em função da constante de	
	sacola. Cada curva representa diferentes valores da energia por partí-	
	cula: 939, 909, 879 e 849 MeV , respectivamente	50
4.2	Valores de ξ em função constante de sacola da QCD	52
4.3	Valores de ξ em função constante de sacola da QCD para diferentes	
	valores da energia por partícula: 969, 939, 909, 879 e 849 MeV, respec	
	tivamente	52
4.4	Energia por partícula em função da pressão obtida com duas equações	
	de estado hadrônicas e com a EoS da QCD	53
4.5	Equação de estado para a matéria de quarks estável. É mostrado tam-	
	bém o limite imposto pela causalidade, de modo que EoSs são proibidas	
	na região hachurada	54
4.6	Acima: massa da estrela em função de sua densidade central. Há uma	
	família de estrelas estáveis até o primeiro máximo. Abaixo: raio da	
	estrela em função da densidade central. O ponto D representa o raio	
	da estrela cuja massa máxima é encontrada no primeiro pico na figura	
	acima	56
17	Diagrama massa – raio	57

4.8	Diagrama massa — raio para diferentes valores da constante de sacola:	
	$60, 70, 80, 90 \ MeV/fm^3$	58
4.9	${\it Diagrama\ massa-raio\ para\ diferentes\ valores\ do\ acoplamento\ dos\ hard}$	
	gluons	60
4.10	Diagrama massa $-$ raio para diferentes valores da massa dinânima dos	
	gluons	61

Capítulo 1

Introdução

Umas das maneiras de investigar as propriedades da matéria sob condições físicas extremas é estudar o interior de objetos super densos [1, 2], como estrelas de nêutrons, que funcionam como laboratórios naturais no universo. A determinação da equação de estado (EoS) - relação entre pressão, densidade de energia e temperatura - no interior de estrelas compactas é fundamental para entender as propriedades da matéria em altas densidades.

Estrelas de nêutrons podem ser constituídas por matéria hadrônica e ser descritas por modelos com graus de liberdade hadrônicos. Por outro lado, estrelas de quarks também são objetos compactos e os modelos capazes de descrevê - las contêm matéria de quarks desconfinada, cuja equação de estado deve ser deduzida a partir da teoria dos quarks e gluons e suas interações, a cromodinâmica quântica ou QCD.

Existem também os modelos de estrelas híbridas, cujo interior, composto de matéria de quarks, é revestido por um envelope de matéria nuclear. Todos esses tipos de modelos podem ser usados para descrever a estrutura interna de pulsares. Segundo [2, 3, 4], se a matéria de quarks existe no interior de estrelas de nêutrons, ela deve ser composta pelos quarks mais leves (u, d, s), uma vez que os quarks pesados (c, b, t) são muito massivos para serem produzidos.

Embora o primeiro pulsar tenha sido encontrado há mais de 40 anos [5], sua natureza ainda permanece sob controvérsia. Estudos recentes [6] indicam que pulsares podem pertencer a uma nova classe de estrelas de quarks, as quark – cluster stars.

Estes objetos teriam no seu interior aglomerados de quarks, com quase a mesma quantidade de quarks u, d e s, sem, entretanto, estarem realmente na fase desconfinada.

Özel [7], analisando os dados da estrela de nêutrons EXO 0748-676, constatou que as equações de estado atuais que descrevem a matéria de quarks são muito soft e, portanto, seriam incapazes de explicar a existência dessa estrela. Por outro lado, Duarte e colaboradores em [8], concluem que pode existir matéria de quarks no interior de estrelas compactas e ela estaria na forma de CFL (color – flavor locking). Neste trabalho, os autores corroboram os resultados de Özel de que EoSs soft devem ser desconsideradas para descrever a matéria de quarks.

Vários autores [9, 10, 11, 12, 13] acreditam na existência de matéria de quarks desconfinada no interior de estrelas compactas. A recente medida de massa do pulsar PSR J1614-2230 [14] fortalece esta hipótese e estabelece que apenas quarks que interagem fortemente são compatíveis com essa medida [15, 16].

Observações também nos têm mostrado que teorias para descrever o interior dessas estrelas estão longe de ser conclusivas. A composição exata e a equação de estado que as descrevem ainda não são bem conhecidas, mas é possível obter limites de validade dos parâmetros da EoS a partir de observações [8, 15, 17].

Por simplicidade, consideramos no nosso trabalho uma estrela de quarks composta de igual quantidade de quarks u, d e s. Portanto, a condição de neutralidade de carga está satisfeita nesse sistema. Assumimos ainda que as massas desses três quarks são iguais e que eles interagem entre si fortemente.

Neste trabalho usamos uma EoS que descreve o plasma de quarks e gluons (QGP) em temperatura zero. Essa EoS serviu de *input* para as equações de Tolman – Oppenheimer – Volkoff, que foram integradas numericamente para obter o diagrama massa – raio de estrelas de quarks.

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira. No capítulo 2, discutimos aspectos gerais de estrelas de nêutrons, como massa, raio, rotação e campo magnético. No capítulo 3, mostramos a dedução da equação de estado para o QGP frio. No capítulo 4, apresentamos os resultados dos modelos estelares. A conclusão da dissertação está no capítulo 5. Há também quatro apêndices: o primeiro, sobre o grupo SU(3) de cor; o segundo, sobre o campo de Dirac; o terceiro contêm a dedução do tensor energia momento a partir de uma lagrangeana com derivada de ordem superior nos campos e no quarto mostramos a dedução da equação relativística de equilíbrio hidrostático.

Capítulo 2

Estrelas de Nêutrons

O termo estrelas compactas inclui estrelas de nêutrons e anãs brancas [18]. As primeiras podem ser subdivididas de acordo com sua estrutura microscópica em estrela de nêutrons, estrela de quarks, estrelas híbridas e até mesmo estrelas estranhas (que contêm o quark de sabor s). Elas são observadas como pulsares ¹, que podem ser fontes isoladas ou pertecerem a um sistema binário com uma estrela associada de densidade menor, usualmente uma anã branca. São objetos densos, com densidade típica $\rho \sim 10^{15} gcm^{-3},$ e se caracterizam também pela presença de um forte campo magnético $\sim 10^{12}\,G$, período de rotação de aproximadamente 1 segundo e nascem com uma temperatura da ordem de T $\sim 10^{11}\,K,$ que em unidades onde a constante de Boltzman vale $k_B = 1$, equivale a $T \sim 10 \, MeV$. Durante sua evolução, a temperatura decresce chegando a valores da ordem de KeV. Além disso, a temperatura é muito menor do que o potencial químico das partículas no interior da estrela, $T \ll \mu$, o que implica que T=0 é uma boa aproximação em muitos casos. Essas características fazem desses objetos alvos de teste para a teoria da relatividade geral e permitem investigar a região de altas densidades e baixas temperaturas do diagrama de fase da QCD, como mostra a Fig. 2.1.

Uma das primeiras investigações sobre a estrutura e a natureza do equilíbrio em estrelas densas foi feita por Landau [19]. A densidade da matéria seria tão grande que

¹Pulsares são objetos que produzem pulsos periódicos de radiação eletromagnética e são associados a estrelas de nêutrons magnetizadas e em rotação.

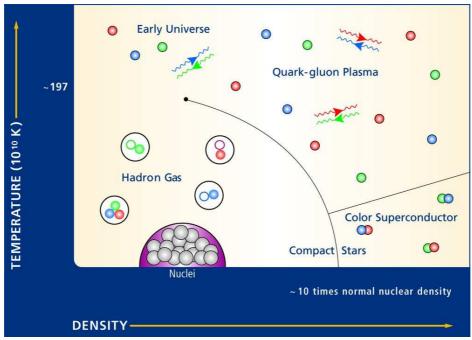


Figura 2.1: Diagrama de fase da QCD.

os núcleos se fundiriam, formando uma matéria altamente condensada. Após a descoberta do nêutron [20], foi sugerido em [21] que estrelas de nêutrons poderiam ser o resultado da evolução de uma supernova ². Apesar de não fazer parte do escopo deste trabalho um estudo aprofundado de supernovas, vamos mencionar algumas propriedades de estrelas de nêutrons que podem estar relacionadas a elas. A Fig. 2.2 mostra a supernova de Kepler, que evidencia um provável núcleo emissor nas frequências de raios – X, luz ultravioleta e vísivel.

Após a explosão de uma supernova, o gradiente de pressão espalha a maior parte da massa da estrela pelo universo. A atração gravitacional da massa remanescente supera a pressão de Fermi dos elétrons, que são capturados pelos prótons do núcleo dos átomos para formar nêutrons e neutrinos ³. O resultado é uma estrela composta essencialmente por nêutrons, tendo a emissão de neutrinos um papel fundamental no seu resfriamento, pois eles possuem um livre caminho médio grande, da ordem do raio da Terra e, portanto, quase não interagem com a matéria no interior, carregando energia para fora da estrela. A emissão de neutrinos acontece via duas reações que recebem o nome de processo URCA:

 $^{^2}$ nome dado a corpos celestes originados de explosões de estrelas com mais de $10 {\rm M}_{\odot}$

³A captura eletrônica pode ser representada pela reação: $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$.

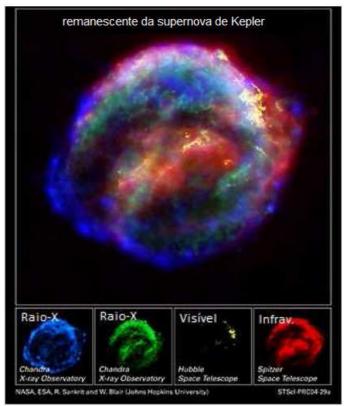


Figura 2.2: Supernova de Kepler, primeiro observada em 1604. Esta imagem foi feita em 2004 com esforço conjunto do telescópio Hubble e Spitzer e do observatório de Raios – X Chandra. Crédito: NASA/ESA.

$$n \to p + e^- + \bar{\nu_e},\tag{2.1}$$

$$p + e^- \to n + \nu_e. \tag{2.2}$$

Se a compressão prossegue, os bárions podem se desintegrar em subpartículas fundamentais, os quarks. Como a energia gravitacional não muda, essa transição implica numa compressão da estrela. Com a possibilidade da existência de matéria de quarks desconfinada no interior de estrelas de nêutrons, sua estrutura interna (com quarks u, $d \in s$) foi primeiro calculada por Itoh em 1970 [11] e a ordem de magnitude encontrada para a massa desses objetos foi de $10^{-3} \rm M_{\odot}$, valor muito diferente dos resultados atuais.

2.1 Propriedades de Estrelas de Nêutrons

A principal fonte de informação sobre propriedades como massa, raio, temperatura e campo magnético são os fótons emitidos na superfície da estrela. Nesse trabalho damos atenção à relação massa – raio e procuramos reproduzir esses observáveis macroscópicos a partir da equação de estado da QCD, ou seja, a partir das características microscópica da estrela. Como veremos no capítulo 4, sua massa e seu raio são determinados pela equação de estado (EoS) e pela equação de Tolman – Oppenheimer – Volkoff (TOV) via integração numérica. A figura 2.3 resume algumas composições possíveis de uma estrela de nêutrons.

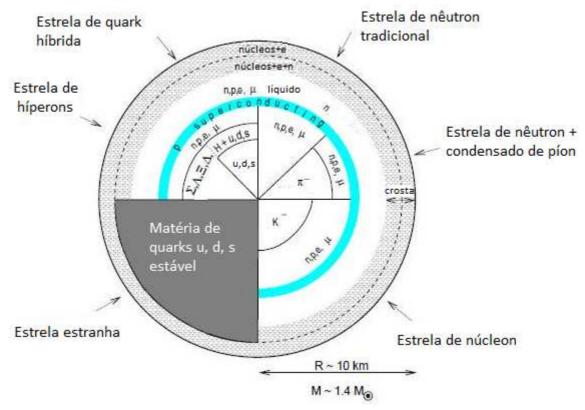


Figura 2.3: Possíveis composições de uma estrela de nêutrons.

Embora a figura 2.3 permita modelar o interior de uma estrela de nêutrons com uma grande variedade de partículas (e portanto EoSs), a deteção recente do pulsar PSRJ1614 – 2230 [14] exclui boa parte das composições propostas, posto que elas não explicam sua massa de $(1.97 \pm 0.04) \rm M_{\odot}$ (ver Figura 2.4). Além disso, de acordo com

[14], a presença de quarks que interagem fortemente seria fundamental para explicar a sua estabilidade e a sua massa.

Essa observação tem restringido as equações de estado e permitido determinar a região de validade de seus parâmetros. Trabalhos recentes [15, 16, 17] têm explorado essas regiões e mostrado que realmente efeitos de interação forte devem ser levados em conta.

2.1.1 Massa e Raio

A determinação da massa é desafiadora tanto do ponto de vista teórico quanto observacional. A primeira estimativa da massa de uma estrela de nêutrons foi feita em [22], usando uma EoS para um gás de nêutrons relativístico, e levou a uma massa de $0.7 \rm M_{\odot}$, conhecida na literatura por limite de Oppenheimer — Volkoff. Além disso, baseado na equação de equilíbrio hidrostático relativística e no princípio da causalidade foi estabelecido que a massa máxima de uma estrela de nêutrons não pode exceder $3.2 \, M_{\odot}$ [23].

De acordo com a tabela 2.1, podem existir no interior desses objetos compactos: prótons (p), nêutrons (n), pions (π) , híperons (H), quarks (Q) e kaóns (K). Como os modelos utilizam abordagens teóricas distintas, mesmo com a mesma composição interna eles diferem no valor da máxima massa da estrela [24].

EoS	Autores	Referência	Composição
PS	Pand e Smith (1976)	[25]	$n\pi^0$
FP	Friedman e Pandharipande(1981)	[26]	np
MPA(1-2)	Muller, Prakash e Ainsworth (1987)	[27]	np
WFF(1-3)	Wiringa, Fiks e Fabrocine (1988)	[28]	np
PAL	Prakash et al. (1988)	[29]	np
GM	Glendenning e Moszkowski (1991)	[30]	npH
PCL(1-2)	Prakash, Cooke e Lattimer(1995)	[31]	npHQ
SQM(1-3)	Prakash et al.(1995)	[32]	Q(u,d,s)
ENG	Engvik et al.(1996)	[33]	np
MS(0-2)	Muller e Serot(1996)	[34]	np
AP(1-4)	Akmal e Pandharipande(1997)	[35]	np
GS(1-2)	Glendenning e Schaffner-Bielich(1999)	[36]	npK

Tabela 2.1: EoSs para alguns modelos de composição estelar.

A figura 2.4 mostra linhas horizontais que representam estrelas de nêutrons obervadas recentemente. Nesta figura, a menor massa máxima possível de uma estrela de nêutrons é da ordem de $1.4\,\mathrm{M}_\odot$, prevista pelo modelo GS1. Todos os outros modelos prevêem massas acima desse valor. Do modelo SQM, o único que contém matéria de quark s, a massa da estrela cresce com o aumento do raio até encontrar o valor máximo, sendo a massa da estrela proporcional ao seu volume, $M \propto R^3$. Já para modelos com matéria nuclear, quanto maior a massa da estrela menor o seu raio.

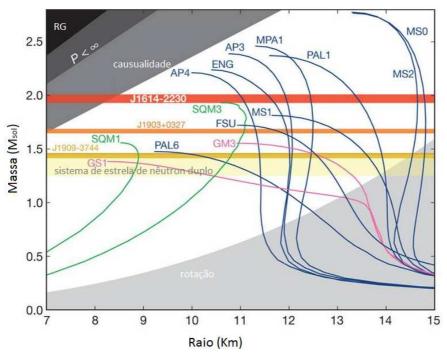


Figura 2.4: Diagrama massa – raio para estrelas de nêutrons. O gráfico mostra a massa versus o raio para algumas EoSs típicas. As faixas horizontais mostram medidas de massa incluindo a massa recentemente observada do pulsar $\rm J1614-2230$ [14]. Todas as curvas que não encontram essas observações são excluídas, descartando as respectivas teorias que descrevem o interior de estrelas de nêutrons.

Do lado obervacional, na figura 2.5, temos as massas de estrelas de nêutrons observadas [16]. Essa figura é um upgrade da figura contida em [37] e inclui a massa do pulsar J1614 – 2230. Também se estimou em [37] uma massa média da ordem de $1.34\,M_{\odot}$ para estrelas de nêutrons. Esse valor pode ser usado num cálculo simples do raio de uma estrela, supondo que um ponto no seu equador esteja em equilíbrio dinâmico, ou seja, a aceleração gravitacional é igual à aceleração centrífuga. Nessas condições, o raio é dado por:

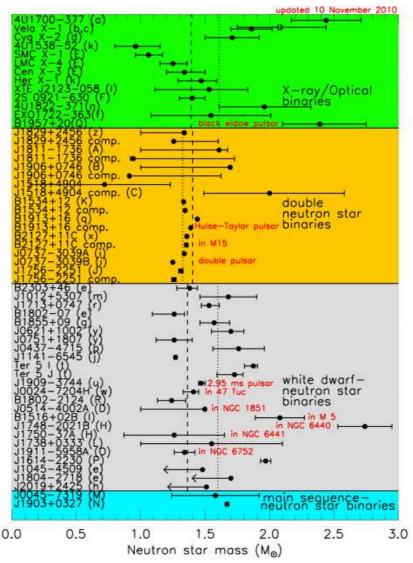


Figura 2.5: Massa de estrelas de nêutrons medidas.

$$R = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}},\tag{2.3}$$

sendo G a constante gravitacional de Newton, M a massa da estrela e P o período. Para $P=1\,ms$, encontramos $R\sim 15\,km$. Com um raio dessa ordem de grandeza, claramente esses objetos são muito densos e a densidade média é dada por:

$$\rho \simeq \frac{3M}{4\pi R^3} \simeq 1.5 \times 10^{14} gcm^{-3},$$
(2.4)

enquanto que a densidade da matéria nuclear no estado fundamental é $\rho_0 \simeq 2 \times 10^{14} \ gcm^{-3}$. De acordo com a solução das equações de Tolman – Oppenheimer – Volkoff, a pressão no interior da estrela decresce monotonicamente com o raio. O mesmo comportamento vale também para a densidade de matéria, cujo valor central é, portanto, maior que a densidade média calculada em (2.4). Neste sentido, a densidade central da estrela atinge facilmente valores maiores que a densidade nuclear ρ_0 , fazendo do centro da estrela uma região onde os graus de liberdade de quarks e gluons podem ter um papel importante.

2.1.2 Rotação

Pulsares têm períodos de rotação extremamente altos e isso se deve à conservação do momento angular durante a sua formação. Costuma-se separar esses objetos em dois grupos, pulsares de milisegundos (ou reciclados) e pulsares canônicos, que se distinguem pela intensidade do campo magnético, idade e período de revolução. A figura 2.6 mostra o número de pulsares como função do período de rotação. Podemos observar que a maior parte deles tem períodos de aproximadamente 1s (os canônicos) e uma minoria tem períodos de $\sim 1ms$ (os de milisegundos).

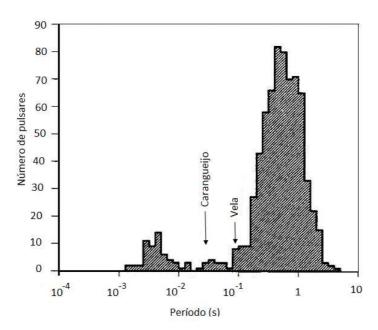


Figura 2.6: Distribuição de período de rotação de pulsares.

A ideia do pulsar surgiu para explicar a radiação que vinha do centro da galáxia [5]. O período desse pulsar seria de $P \sim 1.3\,s$, ou seja, um ponto no equador desta estrela teria uma velocidade de $2\pi R/1.3\,s \sim 50\,km/s$, muito maior, por exemplo, do que a velocidade num ponto no equador terrestre, que vale $0.5\,km/s$. Desde então, a teoria de pulsares se desenvolveu muito e a descoberta do pulsar PSR B0531+21 $(P=33\,ms)$ registrado na nebulosa de Carangueijo [38] foi um forte indício de que os pulsos emitidos eram gerados por uma estrela de nêutrons magnetizada e em rotação.

Como proposto em [39, 40], um dipolo magnético não alinhado com o eixo de rotação do pulsar pode ser sua fonte de radiação. Na figura 2.7 temos um pulsar típico com velocidade angular Ω e campo magnético B, em torno do qual se forma um cone de radiação, que oscila com a rotação da estrela e define um período cada vez que passa pelo campo visual do observador. Desta maneira, o período P do pulsar é exatamente o período de revolução da estrela.

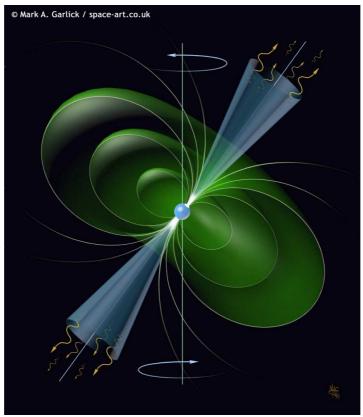


Figura 2.7: Representação de uma estrela de nêutrons magnetizada e em rotação.

Pulsares tem períodos muito bem definidos e estáveis, como o pulsar PRS 1937+214, com P=0.00155780644887275s. Essa precisão é possível devido a grande quantidade

de medidas que podem ser feitas, uma vez que os pulsos são extremamente curtos. Em geral, devido à acreção de massa, eles apresentam um aumento gradual de período dado por $\dot{P}=dP/dt$, tipicamente com $\dot{P}\sim 10^{-15}$. Essas variações costumam ser regulares, mas podem acontecer aleatoriamente recebendo o nome de *glitches*.

A maior parte dos pulsos são detectados em frequência de rádio e, por isso, pulsares ganham no nome a sigla PRS, originada das iniciais das palavras *Pulsating Radio Source*, que em português significa fonte de rádio pulsante. Os números que completam o nome do pulsar são a ascensão reta (α) e a declinação (δ) ⁴, por exemplo, o pulsar PRS 1919+21, é identificado com $\alpha = 19^{\rm h}19^{\rm m}$ e $\delta = +21^{\rm o}$.

As caracteríscas descritas são componentes básicas de pulsares. Contudo, para estabelecer a conexão entre pulsares e estrelas de nêutrons e compreender seus processos físicos é crucial conhecer outra componente, o campo magnético. Nem todas as estrelas de nêutrons se comportam como pulsares. Restringimos os termos pulsar a objetos que pulsam periodicamente e estrela de neutrons a objetos teóricos com massa $\sim M_{\odot}$ e raio da ordem de kilômetros.

2.1.3 Campo Magnético

Uma ferramenta útil no estudo da evolução de pulsares é o diagrama \dot{P} -P, sendo P o seu período e \dot{P} a sua variação (Fig. 2.8). Percebe-se que os pulsares não estão uniformemente distribuídos e, sim, em grupos, que recebem uma interpretação evolucionária de acordo com a posição ocupada na figura.

Os pulsares de milisegundos estão localizados no canto inferir esquerdo (elipse à esquerda) e possuem campo magnético da ordem de $B \sim 10^8 - 10^{10} G$ e os pulsares canônicos (elipse central) ocupam o canto superior direito e têm um campo magnético da ordem de $B \sim 10^{12} G$. Essa é a região mais populada do diagrama e é onde estão os pulsares mais jovens. Existe também um outro grupo, que possui campo magnético da ordem de $10^{14} - 10^{15} G$ e períodos da ordem de 10s, conhecidos como magnetares (elipse à direita). Ainda nesta figura, podemos ver que a idade dos pulsares pode variar de mil anos até 100 bilhões de anos, com uma população mais concentrada em torno de idade de 1 milhão de anos. Informações adicionais são obtidas quando relacionamos

⁴Posição angular dos astros segundo um sistema de coordenadas equatoriais.

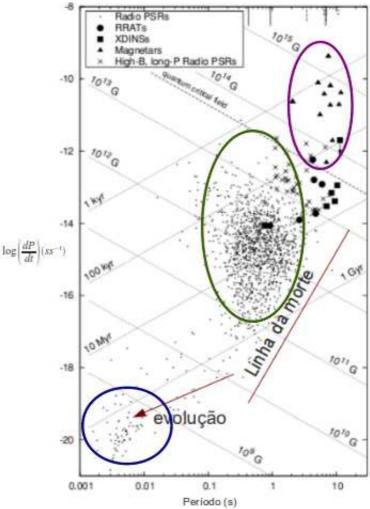


Figura 2.8: Distribuição da variação do período de rotação de pulsares como função do período. Esse diagrama também mostra linhas que representam a idade dos pulsares e o seu campo magnético. Figura adaptada da referência [41].

a figura 2.6 com o diagrama \dot{P} –P. O histograma da figura 2.6 mostra que a maioria dos pulsares tem períodos em torno de 1s e esse mesmo grupo (os pulsares canônicos) segundo a figura 2.8, tem uma variação de período da ordem de 10^{-15} , correspondendo a uma idade característica de 10^6 anos e campo magnético da ordem de $10^{12}G$. Por outro lado, pulsares de milisegundos são mais escassos, têm uma idade típica de 10^9 anos, possuem um campo magnético mais fraco, da ordem de 10^8G , e variam $10^{-20}s$ do seu período por segundo.

Pulsares de milisegundos usualmente formam um sistema binário com uma anã branca, enquanto que os canônicos são encontrados isolados. Os primeiros possuem períodos de rotação maiores devido a acreção de matéria da estrela associada durante o

período evolutivo do sistema. Espera-se que a acreção seja lenta, explicando a pequena variação de seus períodos, como mostrado no diagrama \dot{P} -P.

Portanto, a intensidade do campo magnético e o período de rotação são indícios de uma possível evolução de pulsares canônicos para pulsares de milisegundos [42]. Dependendo da intensidade do campo magnético e da frequência, o mecanismo de radiação cessa e os pulsares canônicos não são mais observados no diagrama \dot{P} -P, cruzando a "linha da morte" numa faixa de frequência de cerca de 1-10 Hz.

Espera-se que os pulsares de milisegundo sejam a evolução de pulsares que estão à direita da "linha da morte", conhecidos como estrelas de rádio silenciosas [42]. Pelo processo de acreção, essas estrelas adicionam massa de uma companheira de densidade menor. O impacto energético da matéria acrescida com a superfície do pulsar seja fonte de raios – X e que o campo magnético seja parcialmente destruído durante o processo. De acordo com [42, 43], quanto maior a taxa de acreção de massa, maior a variação do momento angular da estrela o que, numa escala de tempo grande, significa uma diminuição no período.

Supondo que os pulsares sejam objetos esfericamente simétricos, a variação da energia de rotação vale:

$$E_{rot} = \frac{I}{2}\Omega^2, \tag{2.5}$$

$$\frac{dE_{rot}}{dt} = I\Omega\dot{\Omega},\tag{2.6}$$

onde I é o momento de inércia e Ω a velocidade angular da estrela. Por outro lado, a variação de energia de um dipólo magnético em rotação é dada por:

$$\frac{dE_{dip}}{dt} = \frac{2}{3}R^6B^2\Omega^4\sin^2\alpha,\tag{2.7}$$

sendo α o ângulo formado com o eixo de rotação e R o raio do dipolo. Supondo que a energia de rotação perdida seja devido à radiação do dipolo, relacionamos as equações (2.6) e (2.7) para conseguir a expressão:

$$B = \sqrt{\frac{3I}{8\pi^2 R^6 sin^2 \alpha} P\dot{P}},\tag{2.8}$$

que estabelece a proporcionalidade entre o período de rotação e o campo magnético do pulsar. Além disso, a sua estrutura responde à acreção de massa variando o período e se a acreção permanece por muito tempo, a estrela de nêutron pode atravessar a "linha da morte" ou se tornar um buraco negro [42].

Isoladas ou em sistema binário, estrelas de nêutrons são objetos únicos na natureza, pois podem ter um campo magnético cerca de bilhões de vezes maiores do que aqueles produzidos em laboratório. Além disso, são objetos compactos extremamente densos que podem girar até 1000 vezes em um segundo. A constituição e comportamento da matéria no interior dessas estrelas ainda é uma questão em aberto e muitas abordagens teóricas têm sido desenvolvidas.

2.2 Equilíbrio e Estabilidade de Estrelas de Nêutrons

Configurações de equilíbrio de uma estrela de nêutrons satisfazem três condições: neutralidade de carga, equilíbrio químico e equilíbrio hidrostático. A estabilidade, por sua vez, está associada a existência de uma massa máxima e pode ser vista, por exemplo, nos diagramas massa – raio da estrela M versus R e também em curvas de M versus ε_c , onde ε_c é a densidade no centro da estrela.

2.2.1 Neutralidade Elétrica

Estrelas de nêutrons em equilíbrio são eletricamente neutras. Seja uma estrela de raio R, massa M e carga líquida Z_{liq} . A estrela é composta por A bárions de massa m. Devido à energia de ligação gravitacional entre as massas m, esperamos que M < mA. Se trouxermos do infinito até a superfície da estrela um próton de carga e e massa m a configuração de equilíbrio da estrela é:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_{liq}e^2}{R^2} \le \frac{GMm}{R^2} < \frac{G(Am)m}{R^2},\tag{2.9}$$

que nos dá a carga líquida por nucleon em termos de constantes fundamentais:

$$\frac{Z_{liq}}{A} < \frac{4\pi\epsilon_0 Gm^2}{e^2},\tag{2.10}$$

com m a massa do próton, ϵ_0 é a permissividade no vácuo, G a constante de Newton e e a carga do elétron, obtemos:

$$\frac{Z_{liq}}{A} < 10^{-36}. (2.11)$$

A carga líquida da estrela pode ser interpretada como o seu número de prótons e, portanto, o limite em (2.11) refere-se a cargas positivas. Para o equilíbrio de estrelas com cargas negativas, em vez do próton, um elétron é trazido do infinito até a superfície da estrela. Fazendo o balanço entre força elétrica e gravitacional como feito acima, encontramos $Z_{liq}/A \sim 10^{-39}$. Assim sendo, a carga líquida (positiva ou negativa) por nucleon é praticamente zero, por isso, estrelas são objetos neutros de carga. Ressalvase que essa condição é global e não local, desse modo, podem existir regiões na estrela onde a densidade de carga seja diferente de zero. O resultado obtido em (2.11) mostra o quão fraca é a gravitação quando comparada com a interação eletromagnética, posto que uma pequena carga distribuída sobre a estrela é suficiente para superar a ação da gravidade.

2.2.2 Equilíbrio químico

Estrelas de nêutrons também devem satisfazer as condições de equilíbrio químico. Reações químicas como, por exemplo,

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \tag{2.12}$$

acontecem no interior de estrelas até que a quantidade dos componentes (que nesse caso são $n, p, e^-, \bar{\nu}_e$) fique inalterada. Nessa situação, o sistema atingiu o equilíbrio químico. A reação química acima é reescrita como:

$$\sum_{i} \nu_i A_i = 0, \tag{2.13}$$

com ν_i os coeficientes que acompanham os componentes A_i da reação. Por exemplo, para (2.12) temos $\nu_n = -\nu_p = -\nu_{e^-} = -\nu_{\bar{\nu}_{e^-}} = 1$. Além disso, vamos admitir reações

acontecendo em pressão e temperatura constantes. Nesse sentido, para descrever um número de partículas N_i de cada elemento da reação usamos a energia livre de Gibbs:

$$G = G(p, T, N_i) = U - TS + PV,$$
 (2.14)

com $U = U(S, V, N_1, N_2, ...)$, sendo U a energia interna, T a temperatura, S a entropia, P a pressão, V o volume e N_i o número de partículas de um dos elementos da reação. Usando a regra da cadeia, a variação de (2.14) é dada por:

$$dG = \sum_{i} \frac{\partial G}{\partial N_i} dN_i. \tag{2.15}$$

Definindo o potencial químico como:

$$\mu_i \equiv \frac{\partial G}{\partial N_i},\tag{2.16}$$

e assumindo que o elemento i sofra uma variação $dN_i = \nu_i$, reescrevemos (2.15) para obter a forma final da energia livre de Gibbs:

$$dG = \sum_{i} \nu_{i} \mu_{i}. \tag{2.17}$$

A condição necessária para o equilíbrio estável de um sistema a temperatura e pressão constantes é dada por dG = 0. Assim sendo, (2.17) nos dá:

$$\sum_{i} \nu_i \mu_i = 0, \tag{2.18}$$

que representa a condição de quilíbrio químico. Isso pode ser obtido diretamente de (2.13) com a substituição $A_i \to \mu_i$.

Para exemplificar, vamos supor uma estrela de nêutrons composta por um gás de prótons e nêutrons em temperatura zero. Nêutrons são instáveis via decaimento β , como pode ser visto em (2.12). O processo inverso também é possível, isto é, um próton captura um elétron para formar um nêutron e um neutrino:

$$p + e^- \to n + \nu_{e^-}.$$
 (2.19)

Supondo que todas as reações estejam em equilíbrio químico, a equação (2.18) assegura que:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_{e^-},\tag{2.20}$$

já que o potencial químico dos neutrinos pode ser desconsiderado, uma vez que eles escapam da estrela sem interagir. Além disso, como estrelas de nêutrons têm carga total nula, temos:

$$n_p = n_{e^-},$$
 (2.21)

onde n=N/V é a densidade volumétrica de partícula. Para um gás fermiônico quântico em T=0, temos:

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2},\tag{2.22}$$

com k_F o momento de Fermi. Assim, a partir de (2.21) encontramos:

$$k_{F,p} = k_{F,e^-},$$
 (2.23)

e, portanto, o momento de Fermi dos prótons e elétrons deve ser igual. O potencial químico pode ser escrito também como a energia relativística de cada partícula, assim:

$$\mu_i = \frac{\partial \epsilon_i}{\partial n_i} = \sqrt{k_{F,i}^2 + m^2}, \quad i = p, n, e^-.$$
(2.24)

Esse resultado em (2.20) nos dá:

$$\sqrt{k_{F,n}^2 + m_n^2} = \sqrt{k_{F,p}^2 + m_p^2} + \sqrt{k_{F,e}^2 + m_{e^-}^2}.$$
 (2.25)

Agora, usamos a equação (2.23) em (2.25) para obter o momento de Fermi do próton em função do momento de Fermi do nêutron:

$$k_{F,p}^{2} = \frac{(k_{F,n}^{2} + m_{n}^{2} - m_{e^{-}}^{2})^{2} - 2(k_{F,n}^{2} + m_{n}^{2} + m_{e^{-}}^{2})m_{p}^{2} + m_{p}^{4}}{4(k_{F,n}^{2} + m_{n}^{2})}.$$
 (2.26)

Para extrair significado físico da expressão acima, vamos primeiro assumir que não há próton na estrela, assim $k_{F,p} = 0$. Neste caso, usamos a equação (2.25) para obter:

$$k_{F,n}^2 = (m_p + m_e)^2 - m_n^2, (2.27)$$

que com $m_p = 938.3$ MeV, $m_n = 939.6$ MeV e $m_e = 0.511$ MeV, encontramos $k_{F,n}^2 < 0$. Portanto, $k_{F,p} = 0$ é impossível e sempre deve existir pelo menos uma fração de prótons.

Por outro lado, se tomarmos $k_{F,n} = 0$ em (2.26), ficamos com:

$$k_{F,p}^2 = \left(\frac{m_n + m_{e^-} - m_p}{2m_n}\right)^2 - m_{e^-}^2 \sim 1.4 MeV^2,$$
 (2.28)

definindo um valor abaixo do qual não existem nêutrons e o sistema é neutro de carga e está em equilíbrio – β com igual densidade numérica de prótons e elétrons.

2.2.3 Relatividade Geral e Equações de Tolman – Oppenheimer – Volkoff

Primeiramente vamos recapitular algumas definições e relações da relatividade geral. Detalhes dos cálculos se encontram no apêndice D. O símbolos de Cristoffel podem ser definidos como:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right). \tag{2.29}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. A definição de derivada covariante para um quadri – vetor A_{μ} é dada por:

$$A_{\mu;\nu} \equiv \frac{dA_{\mu}}{dx^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda}. \tag{2.30}$$

O tensor de Riemann é definido como:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}. \tag{2.31}$$

Do tensor de Riemann obtemos o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\nu\rho},\tag{2.32}$$

e a curvatura escalar:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.33}$$

A identidade de Bianchi é dada por:

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0, \qquad (2.34)$$

que multiplicamos pelo tensor métrico $g^{\mu\nu}$ para chegar em:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\nu} = 0. \tag{2.35}$$

Dos resultados acima podemos escrever as equações de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu},$$
 (2.36)

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Einstein e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia – momento. Para um fluido ideal o tensor energia – momento é dado por:

$$T_0^0 = \varepsilon, \tag{2.37}$$

$$T_i^{\ i} = -p, \quad i = 1, 2, 3,$$
 (2.38)

com a pressão p e a densidade de energia ε . Aplicaremos as expressões acima em uma estrela esférica, assim, é adequado utilizarmos coordenadas esféricas. O elemento de linha pode ser escrito como:

$$d\tau^{2} = e^{2\nu(r)}dt^{2} - e^{2\lambda(r)}dr^{2} - r^{2}d\theta^{2} - r^{2}\sin^{2}(\theta) d\phi^{2}.$$
 (2.39)

Comparando com $d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$, obtemos:

$$g_{00} = e^{2\nu(r)},$$

 $g_{11} = -e^{2\lambda(r)},$ (2.40)
 $g_{22} = -r^2,$
 $g_{33} = -r^2 sin^2(\theta),$

e também $g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=0$ quando $\mu\neq\nu$. Para esta métrica, encontramos as seguintes componentes para o tensor de Ricci:

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right)e^{2(\nu-\lambda)},$$

$$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r},$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1,$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta,$$
(2.41)

onde o símbolo ' representa a primeira derivada com respeito a coordenada r.

2.2.4 A solução de Schwarzschild

Fora da estrela a densidade de energia e a pressão não devem contribuir para o tensor energia – momento. Assim, reescrevemos as equações de Einstein como:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$
 (2.42)

Com a definição de R em (2.33) é fácil verificar que R=0. Aplicando (2.41), determinamos as funções $e^{\nu(r)}$ e $e^{\lambda(r)}$. Usando essas soluções em (2.42), encontramos as soluções de Schwarzschild:

$$g_{00} = e^{2\nu(r)} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right),$$

$$g_{11} = -e^{2\lambda(r)} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1},$$

$$g_{22} = -r^{2},$$

$$g_{33} = -r^{2}\sin^{2}(\theta),$$
(2.43)

M e G foram introduzidas como constantes de integração. M corresponde à massa da estrela e G é a constante gravitacional de Newton.

2.2.5 A TOV

No interior da estrela a pressão e a densidade de energia contribuem para o tensor energia – momento. Usando (2.43) em (2.36), obtemos a função $e^{-2\lambda(r)}$, que agora depende de ε :

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{r} \int_0^r \varepsilon(r') r'^2 dr'. \tag{2.44}$$

Comparando (2.44) com (2.43) podemos definir:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon(r')r'^2 dr', \qquad (2.45)$$

M(r) define a massa da estrela contida numa distância r do seu centro. Assim, a massa total da estrela é $M \equiv M(r=R)$. Aplicamos (2.43) nas equações de campo de Einstein para obter λ' , ν' , ν'' e ν'^2 em termos de p, p' e ε . Com essas relações p' pode ser expresso em termos de p e ε . Com isso obtemos as equações de Tolman – Oppenheimer – Volkoff:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\varepsilon(r)M(r)}{r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1}, \tag{2.46}$$

com

$$dM(r) = 4\pi r^2 \varepsilon(r) dr. \tag{2.47}$$

As equações (2.46) e (2.47) expressam o balanço entre a força gravitacional e a pressão interna que age numa casca de massa dM(r) e espessura dr. Elas são as equações de equilíbrio hidrostático para a Relatividade Geral.

O primeiro fator em (2.46) pode ser obtido a partir mecânica clássica e é válido em regimes onde a massa da estrela não é grande o suficiente para que efeitos da relatividade geral sejam importantes. Estes são relevantes quando a razão GM/r torna-se considerável. Os dois primeiros fatores em colchetes em (2.46) representam correções da relatividade especial da ordem de v^2/c^2 . O último termo é uma correção da relatividade geral e tem origem na definição do tempo próprio de uma esfera. Todos os fatores de correção são positivos e, assim, a atração gravitacional é mais intensa do que seria na gravidade Newtoniana.

De acordo com (2.46), a pressão decresce monotonicamente na estrela, uma vez que o gradiente de pressão é negativo. Assim, a pressão é máxima no centro da estrela e vai a zero na sua superfície. A TOV pode ser integrada, numericamente, da origem (r=0) com as condições iniciais M(0)=0 e $\varepsilon(0)=\varepsilon_c$, até a superfície da estrela, quando p(R)=0, sendo R o raio da estrela. A partir de (2.47), existe uma relação única entre ε_c e a massa da estrela, portanto, para cada EoS $(p=p(\varepsilon))$ existe uma família de estrelas parametrizadas por ε_c (ou pela pressão central, $p_c=p(\varepsilon_c)$).

O equilíbrio hidrostático de uma estrela de nêutrons relativística está contido nas equações de Tolman – Oppenheimer – Volkoff. A TOV também assegura a existência de uma massa limite acima da qual configurações hidrostáticas estáveis são impossíveis. Como estamos tratando de estrelas frias, a pressão térmica é desconsiderada. Nesse sentido, qualquer variação na pressão e/ou densidade de energia é causada apenas por variação na densidade de matéria.

A relação entre densidade de energia e densidade de matéria é dada por $\varepsilon = \rho c^2$. Desse modo, um aumento na densidade ρ resulta num aumento proporcional na densidade de energia ε , correspondendo a um aumento na atração gravitacional. Para balancear este aumento, o sistema deve responder com um aumento na pressão. A pressão e a densidade de energia se relacionam através da velocidade do som $v_{som}^2 = \partial p/\partial \varepsilon$ e para assegurar a conexão causal entre as partículas da estrela devemos ter $v_{som} \leq c$. Assim sendo, um aumento da densidade resulta num aumento da atração gravitacional, que não pode ser balanceada por um aumento da pressão, pois $\partial p/\partial \varepsilon \leq c^2$, dando origem a uma massa limite para objetos compactos.

A teoria de Newton não prevê a existência da massa limite, pois ela não contém um limite superior para a velocidade do som. Como vimos, a TOV introduz correções relativísticas para o equilíbrio hidrostático obtido na mecânica clássica.

A massa máxima pode ser observada no diagrama $M \times R$, como mostra a figura 2.9. Essa mesma informação está contida no figura 2.10 com o diagrama $M \times \varepsilon_c$. A análise das oscilações radiais [44, 45] desta família de estrelas mostra que elas são estáveis à esquerda do máximo na figura 2.10. À direita elas são instáveis e podem sofrer colapso gravitacional, o que restringe a condição de estabilidade $dM/d\varepsilon_c > 0$ até o primeiro pico (modo de oscilação fundamental). Essa condição também está contida

no diagrama $M \times R$, pois ele é parametrizado pela densidade central ε_c , que é crescente e acompanha a curva desde valores próximos de zero até o fim do caracol.

No próximo capítulo veremos a equação de estado para o QGP frio, que será usada nas equações de Tolman – Oppenheimer – Volkoff para construir os modelos estelares.

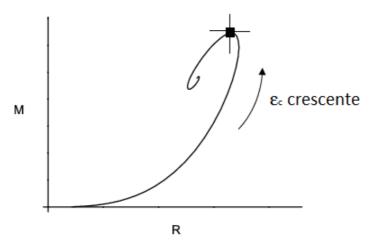


Figura 2.9: A massa M com função do raio R para um estrela de nêutrons. Essa curva é parametrizada pela densidade central ε_c . Em destaque temos a massa máxima e o raio correspondente .

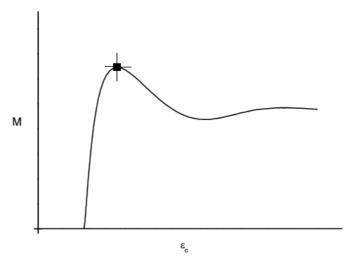


Figura 2.10: A massa M da estrela como função da sua densidade central ε_c . Em destaque temos a massa máxima e a densidade central correspondente.

Capítulo 3

Equação de Estado para o QGP frio

A equação de estado para o QGP frio usada neste trabalho foi deduzida em [46]. Neste capítulo apresentamos esta dedução em detalhe.

3.1 O que é o QGP?

O plasma de quarks e gluons (QGP) é o estado da matéria no qual os graus de liberdade relevantes são os quarks e os gluons. A teoria que estuda a dinâmica das partículas fortemente interagentes é a cromodinâmica quântica (QCD). Ela prevê que a matéria ordinária composta por prótons e nêutrons pode sofrer transição de fase para o QGP quente, um sistema a altas temperaturas $T_c \geq 150 MeV$ e baixo potencial químico; e, também, para o QGP frio, um sistema muito denso $\rho_c \sim 10^{15} \, gcm^{-3}$ e em baixa temperatura.

A fig. 3.1(a) ilustra a criação do QGP. Acima de temperatura crítica T_c , o sistema hadrônico torna-se um sistema composto por quarks e gluons, o QGP. Já na fig. 3.1(b), o sistema tem alta densidade bariônica e é comprimido adiabaticamente até que os bárions se superponham numa certa densidade crítica ρ_c para formar um sistema composto de quarks.

Esperamos encontrar QGP em três lugares: no universo primordial, cerca de $10^{-5}s$ após o Big Bang; no interior de estrelas superdensas e em colisões de íons pesados relativísticos. Já foi observado, no Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), um sistema a altas temperaturas e potencial químico próximo de zero. Um sistema similar

3.2 QCD 26

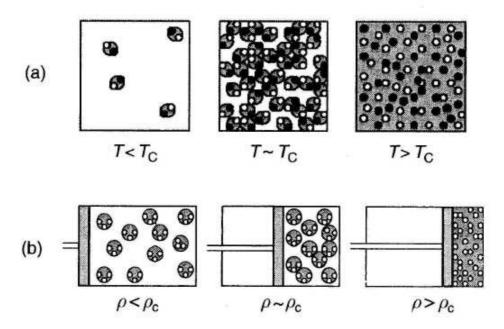


Figura 3.1: Formação do plasma de quarks e gluons em altas temperaturas (a) e alta densidade bariônica (b).

com potencial químico alto e temperatura próxima de zero pode existir no interior de estrelas compactas. Em [46] foi proposto que em tais sistemas as interações são parcialmente devidas a efeitos não – perturbativos, os quais sobrevivem mesmo após o desconfinamento e que estão relacionados com a presença de condensados de gluons no QGP.

3.2 QCD

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria que descreve a interação entre os quarks e os glúons que compõem os hádrons. A QCD é uma teoria quântica de campos não abeliana e que desfruta de duas propriedades peculiares: o confinamento, segundo o qual seria necessária energia infinita para separar dois quarks (quarks estão sempre ligados dentro dos hádrons); e a liberdade assintótica, segundo a qual quarks e gluons interagem fracamente a pequenas distâncias (em reações de altas energias). A dinâmica dessas partículas é controlada pela densidade de Lagrangiana da QCD, que de acordo com [47, 48, 49], é escrita como:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \sum_{q=1}^{N_f} \bar{\psi}_i^q \left[i \gamma^\mu (\delta_{ij} \partial_\mu - ig T^a_{ij} G^a_\mu) - \delta_{ij} m \right] \psi_j^q, \tag{3.1}$$

com a soma em q feita no número de sabores dos quarks N_f . Também temos:

$$F^{a\mu\nu} = \partial^{\mu}G^{a\nu} - \partial^{\nu}G^{a\mu} + gf^{abc}G^{b\mu}G^{c\nu}, \tag{3.2}$$

sendo g a constante de acoplamento da teoria, $G^{a\mu}$ e ψ_i^q o campo dos gluons e dos quarks, T_{ij}^a sendo os geradores e f^{abc} as constantes de estrutura do grupo SU(3) de cor (ver apêndice A):

3.3 Decomposição do campo dos glúons

O campo dos gluons pode ser dividido como em [50, 51]:

$$G^{a\mu}(k) = A^{a\mu}(k) + \alpha^{a\mu}(k), \tag{3.3}$$

Na expressão acima $A^{a\mu}(k)$ representa a componente dos "soft gluons", portadores de baixos momentos e responsáveis pelas interações de longo alcance e com características não perturbativas. Ainda na expressão acima, $\alpha^{a\mu}(k)$ caracteriza os "hard gluons", que carregam altos momentos e são responsáveis pelos processos perturbativos. Na aproximação feita em [46], $A^{a\mu}(k)$ são os modos que populam o vácuo e têm forte acoplamento e $\alpha^{a\mu}(k)$ são os modos com constante de acoplamento pequena. No espaço de configuração, a Eq.(3.3) ganha a forma:

$$G^{a\mu}(x) = A^{a\mu}(x) + \alpha^{a\mu}(x), \tag{3.4}$$

com a relação entre a componente do campo dos soft gluons no espaço dos momentos e de configuração dada pela transformada de Fourier:

$$A^{a\mu}(x) = \int d^4k \ A^{a\mu}(k) \ e^{ikx},$$

ou seja:

$$\partial^{\nu} A^{a\mu}(x) = \int d^4k \ ik^{\nu} \ A^{a\mu}(k) \ e^{ikx}.$$

Como $A^{a\mu}(k)$ contém principalmente baixos momentos, fazendo a aproximação $k^{\nu} \cong 0$, encontramos:

$$\partial^{\nu} A^{a\mu}(x) \cong 0. \tag{3.5}$$

Vemos assim que o campo dos soft gluons $A^{a\mu}(k)$ é, em boa aproximação, independente da posição e do tempo.

3.4 Condensados de gluons e massa dinâmica

Em vários cálculos feitos em QCD na rede (como, por exemplo, em [52]) observa-se que o condensado de gluons sobrevive após o desconfinamento. A partir de considerações de simetria, as propriedades do valor esperado do produto de campos dos soft gluons no QGP frio são dadas por:

$$\langle A^{a\mu} \rangle = 0,$$

$$\langle A^{a\mu} A^{b\nu} A^{c\rho} \rangle = 0,$$

$$\langle A^{a\mu} A^{b\nu} \rangle \neq 0,$$

$$\langle A^{a\mu} A^{b\nu} A^{c\rho} A^{d\eta} \rangle \neq 0.$$
(3.6)

Dessa maneira, produtos com número ímpar de campos desaparecem. O produto de dois campos é conhecido como condensado de dimensão 2 e é definido como:

$$\langle g^2 A^{a\mu} A^a_{\mu} \rangle \equiv \langle A^2 \rangle, \tag{3.7}$$

enquanto que o produto de quatro campos é conhecido como condensado de dimensão 4, escrito como:

$$\left\langle \frac{\alpha_S}{\pi} F^{a\mu\nu} F_{a\mu\nu} \right\rangle = \left\langle \frac{g^2}{4\pi^2} F^{a\mu\nu} F_{a\mu\nu} \right\rangle = \left\langle \frac{g^4}{4\pi^2} A^4 \right\rangle \equiv \langle F^2 \rangle.$$
 (3.8)

A partir da decomposição do campo dos gluons em (3.3) e de acordo com a equação (3.1), a constante de acoplamento g assumirá valores $g = g_{soft} \equiv g_s$, que corresponde ao acoplamento dos soft gluons e $g = g_{hard} \equiv g_h$ correspondendo ao acoplamento dos hard gluons. Para o produto dos campos dos soft gluons $A^{a\mu}$ e dos hard gluons $\alpha^{a\mu}$ denotaremos a constante de acoplamento por g. Podemos parametrizar os valores esperados dos campos $A^{a\mu}$ em termos de escalas de energias:

$$\langle g_s^2 A^{a\mu} A^{b\nu} \rangle = -\frac{\delta^{ab}}{8} \frac{g^{\mu\nu}}{4} \mu_0^2 = -\frac{\delta^{ab} g^{\mu\nu}}{32} \mu_0^2,$$
 (3.9)

е

$$\langle g_s^2 A_\mu^a A_\nu^b A^{c\rho} A^{d\eta} \rangle = \frac{\phi_0^4}{(32)(34)} \Big[g_{\mu\nu} g^{\rho\eta} \delta^{ab} \delta^{cd} + g_\mu{}^\rho g_\nu{}^\eta \delta^{ac} \delta^{bd} + g_\mu{}^\eta g_\nu{}^\rho \delta^{ad} \delta^{bc} \Big].$$
(3.10)

Com a expressão em (3.10) calculamos:

$$-\frac{1}{4}\langle F^{a\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\rangle = -\frac{\pi^2}{g_s^2}\langle \frac{\alpha_s}{\pi}F^{a\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\rangle = -\frac{\pi^2}{g_s^2}\langle F^2\rangle = -b\phi_0^4, \tag{3.11}$$

sendo o parâmetro constante b dado por:

$$b \equiv \frac{9}{4(34)},\tag{3.12}$$

e μ_0 e ϕ_0 escalas de energia. Definimos a massa dinâmica do gluon como em [50, 51]:

$$m_G^2 \equiv \frac{9}{32}\mu_0^2, \tag{3.13}$$

 μ_0 e ϕ_0 são constantes e podem ser independentes ou relacionadas a partir da fatorização dos condensados de dimensão quatro em produtos de condensados de dimensão dois, como, por exemplo, $\langle A_\mu^a A_\nu^b A^{c\rho} A^{d\eta} \rangle = \langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle \langle A^{c\rho} A^{d\eta} \rangle$.

3.5 Lagrangiana efetiva

Para obter a Lagrangiana efetiva a partir da decomposição do campo dos gluons em (3.3), consideraremos em (3.1) os quarks leves u,d e s de mesma massa m e sem soma nos sabores. O número de sabores dos quarks será recuperado no fator de degenerescência γ_Q que aparecerá na densidade de energia, densidade de quarks e pressão do QGP. Assim, reescrevemos a equação (3.1) como:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \bar{\psi}_i \Big[i\gamma^{\mu} (\delta_{ij}\partial_{\mu} - igT^a_{ij}G^a_{\mu}) - \delta_{ij} m \Big] \psi_j. \tag{3.14}$$

Usando a Eq.(3.4) em (3.14) e lembrando da aproximação (3.5), a Lagrangiana efetiva $\mathcal{L}'_{\mathcal{QCD}}$ é escrita como:

$$\mathcal{L}'_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}(G^{a\mu} = A^{a\mu} + \alpha^{a\mu}, \psi),$$

ou seja,

$$\mathcal{L}'_{QCD} = -\frac{1}{4} F'^{a}_{\mu\nu} F'^{a\mu\nu} + \bar{\psi}_i \left\{ i \gamma^{\mu} \left[\delta_{ij} \partial_{\mu} - ig T^{a}_{ij} (A^{a\mu} + \alpha^{a\mu}) \right] - \delta_{ij} m \right\} \psi_j, \qquad (3.15)$$

com:

$$F^{\prime a\mu\nu} = \partial^{\mu}\alpha^{a\nu} - \partial^{\nu}\alpha^{a\mu} + gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu} + gf^{abc}\alpha^{b\mu}\alpha^{c\nu} +$$

$$+ gf^{abc}A^{b\mu}\alpha^{c\nu} + gf^{abc}\alpha^{b\mu}A^{c\nu}.$$
(3.16)

Usando a relação acima, o primeiro termo de (3.15) é escrito como:

$$\begin{split} -\frac{1}{4}F^{\prime a}_{\mu\nu}F^{\prime a\mu\nu} &= -\frac{1}{4}\Big[gf^{abc}A^b_{\mu}A^c_{\nu} + (\partial_{\mu}\alpha^a_{\nu} - \partial_{\nu}\alpha^a_{\mu} + gf^{abc}\alpha^b_{\mu}\alpha^c_{\nu}) + gf^{abc}A^b_{\mu}\alpha^c_{\nu} \\ + gf^{abc}\alpha^b_{\mu}A^c_{\nu}\Big]\Big[gf^{abc}A^{b\mu}A^{c\nu} + (\partial^{\mu}\alpha^{a\nu} - \partial^{\nu}\alpha^{a\mu} + gf^{abc}\alpha^{b\mu}\alpha^{c\nu}) + gf^{abc}A^{b\mu}\alpha^{c\nu} \\ &\quad + gf^{abc}\alpha^{b\mu}A^{c\nu}\Big]. \end{split}$$

Definindo a função $\Gamma^{\alpha\mu\nu}$:

$$\Gamma^{a\mu\nu} = \partial^{\mu}\alpha^{a\nu} - \partial^{\nu}\alpha^{a\mu} + g_h f^{abc}\alpha^{b\mu}\alpha^{c\nu}, \tag{3.17}$$

obtemos:

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\prime a}F^{\prime a\mu\nu} = -\frac{1}{4}\Big\{\Gamma_{\mu\nu}^{a}\Gamma^{a\mu\nu} + 2gf^{abc}\Gamma_{\mu\nu}^{a}(A^{b\mu}\alpha^{c\nu} + \alpha^{b\mu}A^{c\nu} + A^{b\mu}A^{c\nu}) + g^{2}f^{abc}f^{ade}(A_{\mu}^{b}\alpha_{\nu}^{c} + \alpha_{\mu}^{b}A_{\nu}^{c} + A_{\mu}^{b}A_{\nu}^{c})(A^{d\mu}\alpha^{e\nu} + \alpha^{d\mu}A^{e\nu} + A^{d\mu}A^{e\nu})\Big\}.$$
(3.18)

Fazemos o uso da equação (3.18) em (3.15) para obter:

$$\mathcal{L}'_{QCD} = -\frac{1}{4} \Gamma^{a}_{\mu\nu} \Gamma^{a\mu\nu} - \frac{g f^{abc}}{2} \Gamma^{a}_{\mu\nu} (A^{b\mu} \alpha^{c\nu} + \alpha^{b\mu} A^{c\nu} + A^{b\mu} A^{c\nu})$$

$$-\frac{g^{2} f^{abc} f^{ade}}{4} \left[A^{b}_{\mu} A^{c}_{\nu} A^{d\mu} A^{e\nu} + A^{b}_{\mu} A^{c}_{\nu} A^{d\mu} A^{e\nu} A^{$$

com as constantes de acoplamento podendo ter os valores g, g_s e g_h , reescrevemos:

$$\mathcal{L}'_{QCD} = -\frac{1}{4} \Gamma^{a}_{\mu\nu} \Gamma^{a\mu\nu} - \frac{f^{abc}}{2} \Gamma^{a}_{\mu\nu} (gA^{b\mu}\alpha^{c\nu} + g\alpha^{b\mu}A^{c\nu} + g_{s}A^{b\mu}A^{c\nu})$$

$$-\frac{f^{abc}f^{ade}}{4} \Big[g_{s}^{2} A_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} A^{d\mu}A^{e\nu}$$

$$+ g^{2} A_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} A^{d\mu}\alpha^{e\nu} + g^{2} A_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} \alpha^{d\mu}A^{e\nu} + g^{2} A_{\mu}^{b} \alpha_{\nu}^{c} A^{d\mu}A^{e\nu} + g^{2} \alpha_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} A^{d\mu}A^{e\nu}$$

$$+ g^{2} A_{\mu}^{b} \alpha_{\nu}^{c} \alpha^{d\mu}A^{e\nu} + g^{2} A_{\mu}^{b} \alpha_{\nu}^{c} A^{d\mu}\alpha^{e\nu} + g^{2} \alpha_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} A^{d\mu}\alpha^{e\nu} + g^{2} \alpha_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} \alpha^{d\mu}A^{e\nu}$$

$$+ g^{2} A_{\mu}^{b} \alpha_{\nu}^{c} \alpha^{d\mu}A^{e\nu} + g^{2} A_{\mu}^{b} \alpha_{\nu}^{c} A^{d\mu}\alpha^{e\nu} + g^{2} \alpha_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} A^{d\mu}\alpha^{e\nu} + g^{2} \alpha_{\mu}^{b} A_{\nu}^{c} \alpha^{d\mu}A^{e\nu} \Big]$$

$$+ \bar{\psi}_{i} \Big\{ i \gamma^{\mu} [\delta_{ij} \partial_{\mu} - i T_{ij}^{a} (g_{s} A_{\mu}^{a} + g_{h} \alpha_{\mu}^{a})] - \delta_{ij} m \Big\} \psi_{j}, \qquad (3.20)$$

que é uma Lagrangiana efetiva em termos dos campos dos soft gluons, dos hard gluons e das respectivas constantes de acoplamento. Vamos agora substituir o produto de campos de baixos momentos pelos seus valores esperados no QGP frio. Desse modo, a Lagrangiana acima ganha a forma:

$$\mathcal{L}'_{QCD} = -\frac{1}{4} \Gamma^{a}_{\mu\nu} \Gamma^{a\mu\nu} - \frac{f^{abc}}{2} \Gamma^{a}_{\mu\nu} \left(\langle gA^{b\mu} \rangle \alpha^{c\nu} + \alpha^{b\mu} \langle gA^{c\nu} \rangle + \langle g_s A^{b\mu} A^{c\nu} \rangle \right)$$

$$-\frac{f^{abc} f^{ade}}{4} \left[\langle g_s^2 A^b_{\mu} A^c_{\nu} A^{d\mu} A^{e\nu} \rangle$$

$$+ \langle g^2 A^b_{\mu} A^c_{\nu} A^{d\mu} \rangle \alpha^{e\nu} + \langle g^2 A^b_{\mu} A^c_{\nu} A^{e\nu} \rangle \alpha^{d\mu} + \alpha^c_{\nu} \langle g^2 A^b_{\mu} A^{d\mu} A^{e\nu} \rangle + \alpha^b_{\mu} \langle g^2 A^c_{\nu} A^{d\mu} A^{e\nu} \rangle$$

$$+\alpha^c_{\nu} \langle g_s^2 A^b_{\mu} A^{e\nu} \rangle \alpha^{d\mu} + \alpha^c_{\nu} \langle g_s^2 A^b_{\mu} A^{d\mu} \rangle \alpha^{e\nu} + \alpha^b_{\mu} \langle g_s^2 A^c_{\nu} A^{d\mu} \rangle \alpha^{e\nu} + \alpha^b_{\mu} \langle g_s^2 A^c_{\nu} A^{e\nu} \rangle \alpha^{d\mu} \right]$$

$$+\bar{\psi}_i \Big\{ i \gamma^{\mu} [\delta_{ij} \partial_{\mu} - i T^a_{ij} (\langle g_s A^a_{\mu} \rangle + g_h \alpha^a_{\mu})] - \delta_{ij} m \Big\} \psi_j. \tag{3.21}$$

Usando agora as equações (3.6) – (3.10) na equação acima encontramos:

$$\mathcal{L}'_{QCD} = -\frac{1}{4} \Gamma^{a}_{\mu\nu} \Gamma^{a\mu\nu} - \frac{f^{abc}}{2} \Gamma^{a}_{\mu\nu} \langle g_s A^{b\mu} A^{c\nu} \rangle$$

$$-\frac{f^{abc} f^{ade}}{4} \frac{\phi_0^4}{(32)(34)} \Big[g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \delta^{bc} \delta^{de} + g_{\mu}{}^{\mu} g_{\nu}{}^{\nu} \delta^{bd} \delta^{ce} + g_{\mu}{}^{\nu} g_{\nu}{}^{\mu} \delta^{be} \delta^{cd} \Big]$$

$$-\frac{f^{abc} f^{ade}}{4} \alpha^{c}_{\nu} \langle g_s^2 A^b_{\mu} A^{e\nu} \rangle \alpha^{d\mu} - \frac{f^{abc} f^{ade}}{4} \alpha^{c}_{\nu} \langle g_s^2 A^b_{\mu} A^{d\mu} \rangle \alpha^{e\nu}$$

$$-\frac{f^{abc} f^{ade}}{4} \alpha^{b}_{\mu} \langle g_s^2 A^{c}_{\nu} A^{d\mu} \rangle \alpha^{e\nu} - \frac{f^{abc} f^{ade}}{4} \alpha^{b}_{\mu} \langle g_s^2 A^{c}_{\nu} A^{e\nu} \rangle \alpha^{d\mu}$$

$$+ \bar{\psi}_i \Big[i \gamma^{\mu} (\delta_{ij} \partial_{\mu} - i g_h T^a_{ij} \alpha^a_{\mu}) - \delta_{ij} m \Big] \psi_j.$$

Usando agora (3.9), a álgebra de SU (3) descrita no apêncice A e a definição (3.17) chegamos a:

$$\mathcal{L}'_{QCD} = -\frac{1}{2} \Big[(\partial_{\mu} \alpha_{\nu}^{a}) \partial^{\mu} \alpha^{a\nu} - (\partial_{\nu} \alpha_{\mu}^{a}) \partial^{\mu} \alpha^{a\nu} \Big] + \frac{9}{64} \mu_{0}^{2} \alpha_{\nu}^{a} \alpha^{a\nu} +$$

$$-\frac{1}{4} \Big[g_{h} f^{abc} \alpha^{b\mu} \alpha^{c\nu} (\partial_{\mu} \alpha_{\nu}^{a} - \partial_{\nu} \alpha_{\mu}^{a}) + g_{h} f^{abc} \alpha_{\mu}^{b} \alpha_{\nu}^{c} (\partial^{\mu} \alpha^{a\nu} - \partial^{\nu} \alpha^{a\mu}) \Big] +$$

$$-\frac{g_{h}^{2} f^{abc} f^{ade}}{4} \alpha_{\mu}^{b} \alpha_{\nu}^{c} \alpha^{d\mu} \alpha^{e\nu} - \frac{9}{4(34)} \phi_{0}^{4} +$$

$$+ \bar{\psi}_{i} \Big[i \gamma^{\mu} (\delta_{ij} \partial_{\mu} - i g_{h} T_{ij}^{a} \alpha_{\mu}^{a}) - \delta_{ij} m \Big] \psi_{j}.$$

$$(3.22)$$

A partir da Lagrangiana acima podemos encontrar a ação da QCD como segue:

$$S_{QCD} = \int d^4x \ \mathcal{L'}_{QCD}.$$

Inserindo (3.22) em S_{QCD} e integrando por partes o primeiro termo de \mathcal{L}'_{QCD} encontramos:

$$-\frac{1}{2} \int d^4x \left[(\partial_{\mu}\alpha_{\nu}^a) \partial^{\mu}\alpha^{a\nu} - (\partial_{\nu}\alpha_{\mu}^a) \partial^{\mu}\alpha^{a\nu} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\alpha_{\nu}^a (\partial^{\mu}\alpha^{a\nu}) - \alpha_{\mu}^a (\partial^{\mu}\alpha^{a\nu}) \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int d^4x \left[\alpha_{\nu}^a (\partial_{\mu}\partial^{\mu}\alpha^{a\nu}) - \alpha_{\mu}^a (\partial_{\nu}\partial^{\mu}\alpha^{a\nu}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x \left[\alpha_{\nu}^a (\partial_{\mu}\partial^{\mu}\alpha^{a\nu}) - \alpha_{\mu}^a (\partial_{\nu}\partial^{\mu}\alpha^{a\nu}) \right], \tag{3.23}$$

pois o termo de superfície vai a zero. Reescremos (3.22) com o auxílio de (3.23):

$$\mathcal{L}'_{QCD} = \frac{1}{2} \left[\alpha_{\nu}^{a} (\partial_{\mu} \partial^{\mu} \alpha^{a\nu}) - \alpha_{\mu}^{a} (\partial_{\nu} \partial^{\mu} \alpha^{a\nu}) \right] - \frac{1}{4} \left[g_{h} f^{abc} \alpha^{b\mu} \alpha^{c\nu} (\partial_{\mu} \alpha_{\nu}^{a} - \partial_{\nu} \alpha_{\mu}^{a}) + g_{h} f^{abc} \alpha_{\mu}^{b} \alpha_{\nu}^{c} (\partial^{\mu} \alpha^{a\nu} - \partial^{\nu} \alpha^{a\mu}) \right] - \frac{g_{h}^{2} f^{abc} f^{ade}}{4} \alpha_{\mu}^{b} \alpha_{\nu}^{c} \alpha^{d\mu} \alpha^{e\nu} + \frac{9}{4(34)} \phi_{0}^{4} + \frac{9}{64} \mu_{0}^{2} \alpha_{\nu}^{a} \alpha^{a\nu} + \frac{1}{4} \psi_{i} \left[i \gamma^{\mu} (\delta_{ij} \partial_{\mu} - i g_{h} T_{ij}^{a} \alpha_{\mu}^{a}) - \delta_{ij} m \right] \psi_{j}.$$

$$(3.24)$$

Encontramos uma Lagrangiana efetiva escrita em termos do campo dos hard gluons, do campo dos quarks, das constantes μ_0 e ϕ_0 e da constante de acoplamento dos hard gluons g_h (g_s foi incorporada aos valores esperados dos campos dos soft gluons no

QGP). Agora, para o campo dos hard gluons, α_{μ}^{a} , faremos a aproximação de campo médio do tipo "Walecka" [53, 54], conforme já aplicado para a QCD em [55, 56]. O plasma de quarks e gluons frio tem densidade muito maior do que a matéria nuclear, implicando num grande número de fontes para o campo dos hard gluons, os quais têm grande número de ocupação em todos os níveis de energia e, portanto, podem ser tratado como campos clássicos. A aproximação consite em tomar:

$$\alpha_{\mu}^{a} \to \langle \alpha_{\mu}^{a} \rangle \equiv \alpha_{0}^{a} \delta_{\mu 0},$$
 (3.25)

com $\alpha_0^a=\alpha_0^a(\vec{x},t)$. Inserindo a relação (3.25) na equação da Lagrangiana (3.24), obtemos:

$$\mathcal{L}_{0} = \frac{1}{2} \left[\alpha_{0}^{a} (\partial_{\mu} \partial^{\mu} \alpha_{0}^{a}) - \alpha_{0}^{a} (\partial_{0} \partial^{0} \alpha_{0}^{a}) \right] +$$

$$-\frac{1}{4} \left[(\partial_{0} \alpha_{0}^{a} - \partial_{0} \alpha_{0}^{a}) g_{h} f^{abc} \alpha_{0}^{b} \alpha_{0}^{c} + g_{h} f^{abc} \alpha_{0}^{b} \alpha_{0}^{c} (\partial^{0} \alpha_{0}^{a} - \partial^{0} \alpha_{0}^{a}) \right] - \frac{g_{h}^{2} f^{abc} f^{ade}}{4} \alpha_{0}^{b} \alpha_{0}^{c} \alpha_{0}^{d} \alpha_{0}^{e} +$$

$$-\frac{9}{4(34)} \phi_{0}^{4} + \frac{9}{64} \mu_{0}^{2} \alpha_{0}^{a} \alpha_{0}^{a} +$$

$$+ \bar{\psi}_{i} \left[i \gamma^{\mu} (\delta_{ij} \partial_{\mu} - i g_{h} T_{ij}^{a} \alpha_{0}^{a} \delta_{\mu 0}) - \delta_{ij} m \right] \psi_{j}.$$

Por causa da antissimetria das constantes de estrutura, os termos da segunda linha se anulam e encontramos finalmente:

$$\mathcal{L}_{0} = -\frac{1}{2}\alpha_{0}^{a}(\vec{\nabla}^{2}\alpha_{0}^{a}) + \frac{m_{G}^{2}}{2}\alpha_{0}^{a}\alpha_{0}^{a} - b\phi_{0}^{4} + + \bar{\psi}_{i}\left(i\delta_{ij}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + g_{h}\gamma^{0}T_{ij}^{a}\alpha_{0}^{a} - \delta_{ij}m\right)\psi_{j},$$

$$(3.26)$$

onde utilizamos as definições (3.12) e (3.13).

3.6 Equação de estado

3.6.1 Equações de movimento

As equações de movimento para o campo dos hard gluons e o campo dos quarks são obtidas a partir da Lagrangiana (3.26) por meio das equações de Euler – Lagrange

com dependência de derivadas de segunda ordem nos campos [57, 58]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_i)} + \partial_\nu \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \eta_i)} \right] = 0. \tag{3.27}$$

No nosso caso $\eta_1 = \alpha_0^a$, $\eta_2 = \bar{\psi}$ e $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. Para o campo bosônico η_1 a Eq.(3.27) fica:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \alpha_0^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \alpha_0^a)} + \partial_\nu \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \alpha_0^a)} \right] = 0,$$

ou:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \alpha_0^a} + \vec{\nabla}^2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\vec{\nabla}^2 \alpha_0^a)} \right] = 0, \tag{3.28}$$

que nos dá a equação de movimento para o campo α_0^a :

$$-\vec{\nabla}^2 \alpha_0^a + m_G^2 \alpha_0^a = -g_h \rho^a, \tag{3.29}$$

onde ρ^a é a componente temporal do quadri – vetor densidade de corrente:

$$j^{a\nu} = \bar{\psi}_i \gamma^{\nu} T^a_{ij} \psi_j, \tag{3.30}$$

dada por:

$$j^{a0} = \rho^a = \bar{\psi}_i \gamma^0 T^a_{ij} \psi_j = \psi_i^{\dagger} T^a_{ij} \psi_j. \tag{3.31}$$

A equação de movimento para $\bar{\psi}$ é:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \bar{\psi}} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_{\mu} \bar{\psi})} + \partial_{\nu} \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \bar{\psi})} \right] = 0,$$

uma vez que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \bar{\psi}} = 0, \tag{3.32}$$

resulta na equação de movimento para o campo dos quarks:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + g_{h}\gamma^{0}T^{a}\alpha_{0}^{a} - m\right)\psi = 0. \tag{3.33}$$

A aproximação de campo médio estabelece que as fontes do campo dos gluons são intensas e seu acoplamento com o campo dos quarks é forte. Além disso, como nos modelos da matéria nuclear, trataremos a matéria como estática, homogênea e isotrópica. Dessa maneira, podemos desconsiderar o termo com derivadas no campo dos hard gluons em (3.29). Assim, a solução para o campo α_0^a é :

$$\alpha_0^a = -\frac{g_h}{m_G^2} \rho^a. {(3.34)}$$

No apêndice B deduzimos as seguintes relações para o campo ψ :

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\gamma^{0}m)\psi \longrightarrow 3\frac{\gamma_{Q}}{2\pi^{2}}\int_{0}^{k_{F}}dk\;k^{2}\sqrt{\vec{k}^{2}+m^{2}},$$
(3.35)

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\psi \longrightarrow 3\frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \, k^2 \left\{ \frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right\},$$
(3.36)

$$\rho = \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} k_F^3,\tag{3.37}$$

onde γ_Q é o fator de degenerescência, \vec{k} o momento dos quarks de massa m, k_F o momento de Fermi e ρ a densidade de quarks.

3.6.2 Densidade de energia e pressão

O tensor de energia – momento quando tratamos de um sistema com derivadas de segunda ordem nos campos é dado por [57, 58]:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\eta_{i})}(\partial^{\nu}\eta_{i}) - g^{\mu\nu}\mathcal{L} - \left[\partial_{\beta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\partial_{\beta}\eta_{i})}\right](\partial^{\nu}\eta_{i}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\partial_{\beta}\eta_{i})}(\partial_{\beta}\partial^{\nu}\eta_{i}). \tag{3.38}$$

A densidade de energia está relacionada com a componente temporal do tensor energiamomento:

$$\varepsilon = < T_{00} > . \tag{3.39}$$

Usando a Lagrangiana efetiva (3.26) na equação (3.38) ficamos com:

$$\varepsilon = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial^0 \psi)} (\partial_0 \psi) - g_{00} \mathcal{L}_0, \tag{3.40}$$

ou seja,

$$\varepsilon = i\bar{\psi}\gamma^{0}(\partial_{0}\psi) - g_{00}\left\{\frac{m_{G}^{2}}{2}\alpha_{0}^{a}\alpha_{0}^{a} - b\phi_{0}^{4} + \bar{\psi}_{i}\left(i\delta_{ij}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + g_{h}\gamma^{0}T_{ij}^{a}\alpha_{0}^{a} - \delta_{ij}m\right)\psi_{j}\right\}.$$
(3.41)

Usando a equação de movimento (3.33), obtemos:

$$\varepsilon = -\frac{m_G^2}{2}\alpha_0^a \alpha_0^a + b\phi_0^4 + i\bar{\psi}\gamma^0(\partial_0\psi), \qquad (3.42)$$

Fazendo $\bar{\psi} \times (3.33)$ encontramos:

$$i\psi^{\dagger}(\partial_0\psi) = \psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \gamma^0 m)\psi - g_h\rho^a\alpha_0^a. \tag{3.43}$$

Inserindo a relação dada pela Eq.(3.35) em (3.43) e usando o resultado na equação da densidade de energia (3.42), temos:

$$\varepsilon = -\frac{m_G^2}{2} \alpha_0^a \alpha_0^a + b\phi_0^4 - g_h \rho^a \alpha_0^a + 3\frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ k^2 \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}.$$
 (3.44)

Completamos a forma analítica da densidade de energia acima inserindo a solução de movimento do campo dos hard gluons α_0^a dada em (3.34):

$$\varepsilon = \left(\frac{g_h^2}{2m_G^2}\right) \rho^a \rho^a + b\phi_0^4 + 3\frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \, k^2 \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}.$$
 (3.45)

A partir da equação (3.31) e do campo de Dirac descrito no apêndice B (Eq.(9)) é possível obter uma relação entre ρ^a e a densidade de quarks ρ calculando a expressão $\rho^a \rho^a$. Esse cálculo envolve o produto dos geradores T^a (a = 1... 8) pelas matrizes de cor dos quarks c_i (i = 1, 2, 3). Se tomamos a média de $\rho^a \rho^a$, obtemos:

$$\rho^a \rho^a \to \langle \rho^a \rho^a \rangle = \frac{1}{8} (\bar{\psi}_i \gamma^0 T^a_{ij} \psi_j) (\bar{\psi}_k \gamma^0 T^a_{kl} \psi_l) = \frac{1}{8} (\psi_i^{\dagger} T^a_{ij} \psi_j) (\psi_k^{\dagger} T^a_{kl} \psi_l)$$

$$= \frac{1}{8} (c_i^{\dagger} T_{ij}^a c_j) \psi^{\dagger} \psi (c_k^{\dagger} T_{kl}^a c_l) \psi^{\dagger} \psi.$$

Com $(c_i^{\dagger}T_{ij}^ac_j)(c_k^{\dagger}T_{kl}^ac_l)=3$, obtido a partir de (2) e (8) dos apêndices A e B, respectivamente, e sabendo que $\psi^{\dagger}\psi=\rho$, temos:

$$\rho^{a}\rho^{a} = \frac{1}{8} (c_{i}^{\dagger} T_{ij}^{a} c_{j}) (c_{k}^{\dagger} T_{kl}^{a} c_{l}) \rho^{2} = \frac{1}{3} \rho^{2}.$$
(3.46)

O termo com a integral dos férmions em (3.45) vale:

$$\int_0^{k_F} dk \, k^2 \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = \frac{k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2}}{4} + \frac{m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2}}{8}$$
$$-\frac{m^4}{8} ln \left[k_F + \sqrt{k_F^2 + m^2} \right] + \frac{m^4}{16} ln(m^2). \tag{3.47}$$

Finalmente, encontramos a densidade de energia em função da densidade de quarks ρ :

$$\varepsilon = \left(\frac{3g_h^2}{16m_G^2}\right)\rho^2 + b\phi_0^4 +$$

$$+ 3\frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \left\{ \frac{k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2}}{4} + \frac{m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2}}{8} +$$

$$- \frac{m^4}{8} ln \left[k_F + \sqrt{k_F^2 + m^2} \right] + \frac{m^4}{16} ln(m^2) \right\},$$
(3.48)

que em função da densidade bariônica $\rho_B=\frac{1}{3}\rho$ se torna:

$$\varepsilon = \left(\frac{27g_h^2}{16m_G^2}\right)\rho_B^2 + b\phi_0^4 + 3\frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \left\{ \frac{k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2}}{4} + \frac{m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2}}{8} - \frac{m^4}{8} ln \left[k_F + \sqrt{k_F^2 + m^2} \right] + \frac{m^4}{16} ln(m^2) \right\},$$
(3.49)

sendo o momento de Fermi (3.37) relacionado com a densidade bariônica:

$$\rho_B = \frac{\gamma_Q}{6\pi^2} k_F^3. \tag{3.50}$$

A pressão exercida pelo QGP está relacionada com as componentes espaciais do tensor energia – momento:

$$p = \frac{1}{3} < T_{ii} > . (3.51)$$

Como feito para a densidade de energia, a partir da equação do tensor energia — momento (3.38), temos :

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial^{\mu}\psi)}(\partial_{\nu}\psi) - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_0 - \left[\partial_{\beta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\partial_{\beta}\alpha_0^a)}\right](\partial_{\nu}\alpha_0^a) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\partial_{\beta}\alpha_0^a)}(\partial_{\beta}\partial_{\nu}\alpha_0^a), \quad (3.52)$$

que com a lagrangeana efetiva (3.26) passa a ser:

$$T_{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial_{\nu}\psi) - g_{\mu\nu} \left[\frac{m_{G}^{2}}{2} \alpha_{0}^{a} \alpha_{0}^{a} - b\phi_{0}^{4} + \right.$$

$$\left. + \bar{\psi}_{i} \left(i\delta_{ij}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + g_{h}\gamma^{0}T_{ij}^{a}\alpha_{0}^{a} - \delta_{ij}m \right)\psi_{j} \right] +$$

$$\left. - \left[\partial_{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\partial_{\beta}\alpha_{0}^{a})} \right] (\partial_{\nu}\alpha_{0}^{a}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\partial_{\beta}\alpha_{0}^{a})} (\partial_{\beta}\partial_{\nu}\alpha_{0}^{a}).$$

$$(3.53)$$

Entretanto, a partir da equação de movimento (3.33), obtemos:

$$T_{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma_{\mu}(\partial_{\nu}\psi) - g_{\mu\nu} \left[+ \frac{m_{G}^{2}}{2}\alpha_{0}^{a}\alpha_{0}^{a} - b\phi_{0}^{4} \right] + \left[\partial_{\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\partial_{\beta}\alpha_{0}^{a})} \right] (\partial_{\nu}\alpha_{0}^{a}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu}\partial_{\beta}\alpha_{0}^{a})} (\partial_{\beta}\partial_{\nu}\alpha_{0}^{a}).$$
(3.54)

Usando (3.54) em (3.51), conseguimos:

$$p = \frac{m_G^2}{2} \alpha_0^a \alpha_0^a - b\phi_0^4 + \frac{1}{3} \psi^{\dagger} (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \psi.$$
 (3.55)

A partir de (3.36), o último termo da expressão acima fica:

$$p = \frac{m_G^2}{2} \alpha_0^a \alpha_0^a - b\phi_0^4 + \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ k^2 \left\{ \frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right\}.$$
 (3.56)

O último termo da expressão acima representa a integral fermiônica:

$$\int_{0}^{k_{F}} dk \ k^{2} \left\{ \frac{\vec{k}^{2}}{\sqrt{\vec{k}^{2} + m^{2}}} \right\} = \frac{k_{F}^{3} \sqrt{k_{F}^{2} + m^{2}}}{4} - \frac{3m^{2} k_{F} \sqrt{k_{F}^{2} + m^{2}}}{8} + \frac{3m^{4}}{8} ln \left[k_{F} + \sqrt{k_{F}^{2} + m^{2}} \right] - \frac{3m^{4}}{16} ln(m^{2}).$$
(3.57)

Portanto, a pressão é escrita como:

$$p = \left(\frac{3g_h^2}{16m_G^2}\right) \rho^2 - b\phi_0^4 +$$

$$+ \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \left\{ \frac{k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2}}{4} - \frac{3m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2}}{8} +$$

$$+ \frac{3m^4}{8} ln \left[k_F + \sqrt{k_F^2 + m^2} \right] - \frac{3m^4}{16} ln(m^2) \right\},$$
(3.58)

que em função da densidade bariônica $\rho_B = \frac{1}{3}\rho$ fica:

$$p = \left(\frac{27g_h^2}{16m_G^2}\right)\rho_B^2 - b\phi_0^4 + \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \left\{\frac{k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2}}{4} - \frac{3m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2}}{8} + \frac{3m^4}{8} ln \left[k_F + \sqrt{k_F^2 + m^2}\right] - \frac{3m^4}{16} ln(m^2)\right\},$$
(3.59)

onde novamente o momento de Fermi é dado por (3.50). Outra quantidade de interesse é a velocidade do som dada por:

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}. (3.60)$$

Notamos que as equações (3.49) e (3.59) possuem três termos. O primeiro deles, proporcional a ρ_B , vem do termo de hard gluons que aparece na Lagrangiana e na equação de movimento dos quarks. O segundo, $b\phi_0^4$, vem exclusivamente do termo dos soft gluons e tem sinais opostos na energia e na pressão. Esse é o comportamento da constante de sacola do modelo do MIT e, como veremos mais adiante, eles estão relacionados. O último termo contém a contribuição cinética dos quarks. Em resumo,

a pressão e a densidade de energia do QGP frio dependem das contribuições dos hard gluons, dos soft gluons e dos quarks.

3.7 Comparação com o Modelo de Sacola do MIT

O Modelo de Sacola do MIT é um modelo fenomenológico cujo objetivo é incorporar o confinamento e a liberdade assintótica na descrição da matéria de quarks sem massa [59, 60]. Isto é feito supondo que a região do espaço onde o hádron é definido tenha uma energia potencial por volume \mathcal{B} , conhecida como constante de sacola. O modelo estabelece que a estrutura interna de um hádron está associada aos campos dos gluons e dos quarks que o compõem. Embora a abordagem para descrever essas partículas seja convencional em teoria de campos, os campos que descrevem os quarks nos hádrons não estão em todos os pontos do espaço, mas, apenas, em pontos no seu interior (no interior da sacola). O conjunto desses pontos é referido como "bag", à qual é conferida a propriedade de confinamento, visto que a carga de cor não pode escapar do seu interior. Desse modo, hádrons podem ser vistos como uma bolha de gás no vácuo não perturbativo da QCD.

No modelo do MIT, a densidade de energia e pressão para um gás de quarks sem massa e em temperatura zero é:

$$\varepsilon_{MIT}(\rho_B) = \varepsilon_0(\rho_B) = \left(\frac{9}{4}\right) \pi^{2/3} \left(\rho_B\right)^{4/3} + \mathcal{B},\tag{3.61}$$

е

$$p_{MIT}(\rho_B) = p_0(\rho_B) = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{4}\right) \pi^{2/3} (\rho_B)^{4/3} - \mathcal{B},$$
 (3.62)

e a velocidade do som:

$$c_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \epsilon} = \frac{1}{3},\tag{3.63}$$

com a constante \mathcal{B} somada na densidade de energia e subtraída da pressão.

Modelos fenomenológicos reproduzem o espectro de hadrons. Entretanto, a relação entre eles e a QCD ainda é pouco clara e derivá-los a partir da Lagrangiana efetiva da QCD pode ajudar nesse entendimento. Sem os termos de gluons e escolhendo massa

zero para os quarks nas equações (3.49) e (3.59), é fácil mostrar que elas coincidem com (3.61) e (3.62) para $\mathcal{B} = 0$.

Considerando, agora, o modelo do MIT com constante de sacola finita \mathcal{B} e nosso modelo sem o termo dos hard gluons e com quarks sem massa, podemos identificar o termo de gluons em (3.49) e (3.59) com a componente gluônica do modelo de sacola do MIT, representada pela constante \mathcal{B} . Dessas considerações e a partir de (3.11), a constante de sacola e o o condensado de glúons se relacionam:

$$\mathcal{B} = b\phi_0^4 = \left\langle \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F^a_{\mu\nu} \right\rangle = \mathcal{B}_{\mathcal{QCD}}, \tag{3.64}$$

como já encontrado em [52]. Assim, as equações (3.49) e (3.59) podem ser escritas em termos da "constante de sacola da QCD": $\mathcal{B}_{\mathcal{QCD}}$. Usando (3.8) em (3.11) e relacionando o resultado com (3.64), conseguimos uma expressão para o condensado de dimensão 4, $\langle F^2 \rangle$,

$$\langle F^2 \rangle = \frac{g_s^2}{\pi^2} \mathcal{B}_{\mathcal{QCD}} = \frac{g_s^2}{\pi^2} \mathcal{B}. \tag{3.65}$$

Podemos então escolher um valor de \mathcal{B} , que já tenha sido usado com sucesso na literatura e estimar o nosso $\mathcal{B}_{\mathcal{QCD}}$ e a seguir estimar o valor de $\langle F^2 \rangle$. Lembramos que $\langle F^2 \rangle$ é bem conhecido no vácuo, mas pouco se sabe dele no QGP. Assim, para $\mathcal{B}_{\mathcal{QCD}} = \mathcal{B} = 82 MeV fm^{-3}$ e $g_{s(soft)} = 2.7$ (que corresponde a $\alpha_s = g_s^2/4\pi = 0.6$), encontramos:

$$\langle F^2 \rangle = 0.00046 \, GeV^4.$$
 (3.66)

Podemos estimar o valor do condensado de dimensão 2 através da hipótese de fatorização que implica na escolha $\mu_0^2 = g_s \phi_0^2$ [50, 51]. A partir disso e das equações (3.9), (3.64), (3.65), obtemos:

$$\langle g_s^2 A^2 \rangle = -\sqrt{\frac{(4)(34)\pi^2}{9}} \langle F^2 \rangle = -0.26 \, GeV^2,$$
 (3.67)

que se relaciona com (3.13) e nos dá $m_G = 290 \, MeV$. Esse valor é consistente com os encontrados em trabalhos recentes [61, 62, 63], onde m_G está dentro dos limites $200 < m_G < 600 MeV$. Os valores númericos de (3.49) e (3.59) requerem também os valores do acoplamento dos hard gluons e da massa dos quarks m. Escolhemos

 $m=20\,MeV$ e $\alpha_{h(hard)}=g_h/4\pi=0.01$, o que nos dá $g_h=0.35$. O momento de Fermi k_F se relaciona com a densidade bariônica ρ_B pela (3.50).

Nas figuras 3.2 – 3.6 a seguir serão usados os valores de (3.66) para $\langle F^2 \rangle$ e $\langle A^2 \rangle$ é escolhido com sendo -1.28 GeV^2 . Para os condensados $\langle A^2 \rangle$ não fizemos a hipótese da fatorização. Esses valores são apenas para exemplificar o comportamento da pressão e da densidade de energia como função da densidade bariônica. Como veremos no último capítulo desta dissertação, os condensados de dimensão 2 se relacionam com os condensados de dimensão 4 através da janela de estabilidade. Mostramos a densidade de energia, a pressão e a velocidade do som obtidas com (3.49), (3.59) e (3.60) divididos pelo valores correspondentes para o MIT: $\epsilon_0,\,p_0$ e c_0 . Concluímos que nossa equação de estado é mais dura do que aquela do MIT. Isso pode ser visto no gráfico da pressão como função da densidade de energia na fig. 3.5. Nas figuras 3.2, 3.3 e 3.4, para uma mesma variação de densidade bariônica temos mais energia, mais pressão e maior velocidade do som. Esses comportamentos podem ser atribuídos ao primeiro termo das equações (3.49) e (3.59), o qual corresponde aos hard gluons. No limite de altas densidades bariônicas, esse termo proporcional a ρ_B^2 torna-se dominante sobre os outros, de modo que $p \simeq \epsilon$ e, assim, $c_s \to 1$. Fisicamente, esse termo corresponde a correção perturbativa do modelo do MIT. A figura 3.5 mostra a equação de estado do QGP frio e a EoS do MIT. Nossa EoS é mais dura e isto se deve aos hard gluons.

Na figura 3.6, temos a densidade de energia e a pressão como função da densidade bariônica ρ_B . Tanto para a densidade de energia como para a pressão, as principais contribuições vêm dos hard gluons e dos quarks. Além disso, olhando para a pressão, percebemos uma contribuição repulsiva devido aos hard gluons e uma contribuição atrativa decorrente dos soft gluons.

Já os gráficos na figura 3.7 mostram os efeitos dos condensados de dimensão dois e quatro na equação de estado. Para um valor fixo de $\langle F^2 \rangle$, utilizamos três valores de $\langle A^2 \rangle = -1.0$, -1.28 e -2.56 GeV^4 , correspondendo às seguintes massas dinâmicas dos gluons $m_G = 530$, 600 e 840 MeV. Assim, o aumento da massa dinâmica dos gluons suaviza a equação de estado. Para estudar o efeito causado pelos condensados de dimensão $\langle F^2 \rangle$ na equação de estado fixamos $\langle A^2 \rangle$ e escolhemos os seguintes valores de $\langle F^2 \rangle$: 0.00023, 0.00046 e 0.00092 GeV^4 . Valores maiores de $\langle F^2 \rangle$ geram menos pressão para uma dada densidade de energia, ou seja, a EoS é suavizada pelos condensados $\langle F^2 \rangle$.

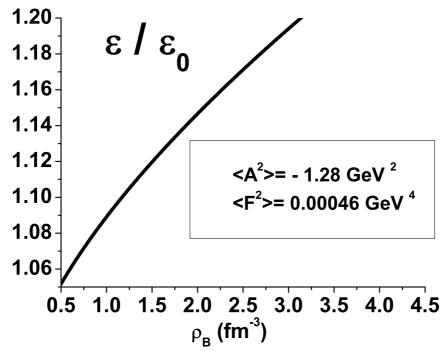


Figura 3.2: Densidade de energia em função da densidade bariônica dividida pelo valor correspondente do MIT: ε_0 .

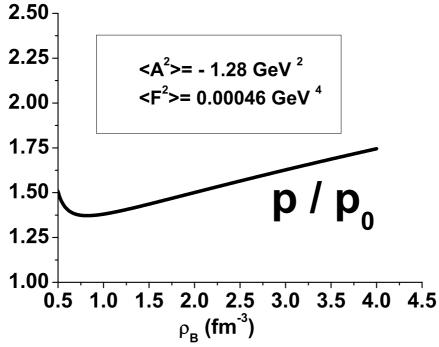


Figura 3.3: Pressão em função da densidade bariônica dividida pelo valor correspondente do MIT: p_0 .

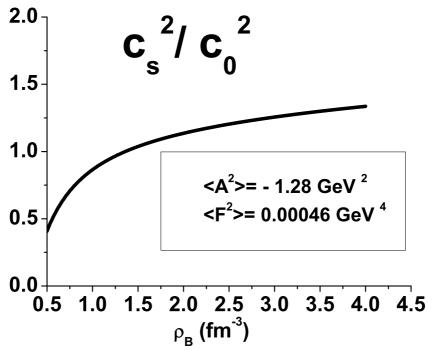


Figura 3.4: Velocidade do som em função da densidade bariônica dividida pelo valor correspondente do MIT: c_0 .

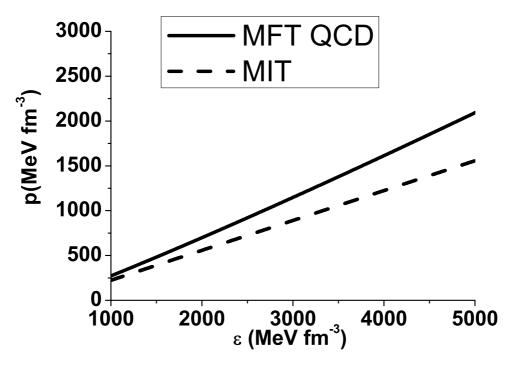


Figura 3.5: Pressão como função da densidade de energia.

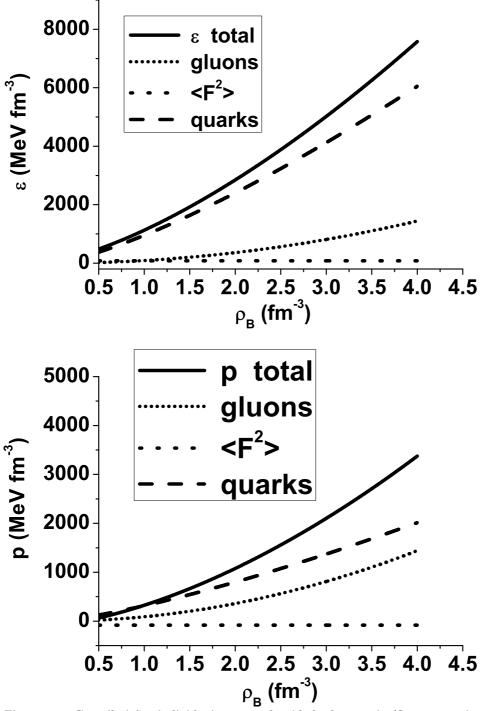


Figura 3.6: Contribuições individuais para a densidade de energia (figura superior) e pressão (figura inferior): hard gluons , quarks, soft gluons e soma dessas três componentes.

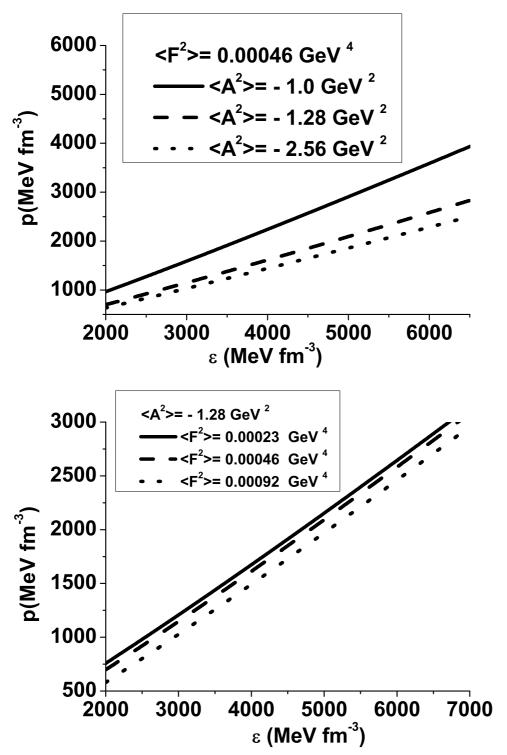


Figura 3.7: EoS para diferentes valores dos condensados de dimensão dois e quatro.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Estabilidade da Equação de Estado

Estamos interessados em estudar modelos estelares com matéria de quarks estável. Para isso, usamos a condição da estabilidade de uma dada EoS, segundo a qual a matéria de quarks é absolutamente estável se a energia por bárion, E_A , da fase desconfinada (em P=0 e T=0) for menor ou igual a massa do nêutron, 939 MeV. Desse modo, se essa condição for satisfeita, garantimos, pelo menos em pressão nula (e temperatura nula), que a matéria de quarks não hadroniza. Escrevemos a condição de estabilidade como:

$$E_A \equiv \frac{\varepsilon}{\rho_B} \bigg|_{p=0} \le m_n \tag{4.1}$$

A estabilidade da matéria de quarks de 3 sabores (u, d e s) foi primeiramente discutida por Witten [64]. Ele propôs que o estado fundamental da QCD pode ser a matéria de quarks em equilíbrio com respeito a interação fraca (o equilíbrio β) em pressão e temperatura nulas. Para cada modelo utilizado na descrição desse tipo de matéria só podemos escolher valores de parâmetros da equação de estado que satisfaçam a condição de estabilidade (4.1). Trabalhos nesse sentido podem ser encontrados em [65, 66].

No nosso caso, estamos tratando a matéria de quarks u, d e s com mesma massa e, portanto, cada férmion contribui igualmente para a densidade de matéria e, desse

modo, os quarks leves não são convertidos em quarks estranhos via processos fracos. Além disso, a neutralidade da carga é naturalmente satisfeita.

Relacionando as equações da densidade de energia e pressão dadas em (3.49) e (3.59), temos:

$$\varepsilon = p + 2\mathcal{B}_{QCD} + 3\frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ k^2 \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} + \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ k^2 \left\{ \frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right\}$$
(4.2)

As integrais fermiônicas na expressão acima são uma função da densidade bariônica ρ_B , uma vez que o momento de Fermi k_F está relacionado com ρ_B pela equação (3.50). Da condição de estabilidade (4.1), fixamos a energia por partícula E_A em alguns valores permitidos E_A : 939, 909, 879 e 849 MeV. Estes valores foram utilizados no lado esquerdo da equação (4.2) e obtivemos uma série de equações que podem ser colocadas na forma $\rho_B = \rho_B(B_{QCD})$. Estas equações estão representadas na figura 4.1. Esta figura mostra a densidade bariônica (em P = 0) em função da constante de sacola. As densidades máximas encontradas são de $\rho_B = 0.40, 0.36, 0.33$ e 0.30 fm^{-3} , para $B_{QCD} = 93.7, 82.3, 72.0, 62.5 <math>MeV/fm^3$, respectivamente. Como podemos ver, há uma relação direta entre B_{QCD} e ρ_B , isto é, para uma dada constante de sacola, sabemos qual é a densidade bariônica no ponto de pressão nula, que, por sua vez, define a superfície da estrela.

Assim, quanto maior a constante de sacola, maior a densidade bariônica na superfície da estrela. A densidade na superfície dessas estrelas de quarks atinge valores maiores do que a densidade nuclear ($\rho_0 \sim 0.17 fm^{-3}$), mostrando que suas superfícies são muito rígidas.

Agora, na equação da pressão dada por:

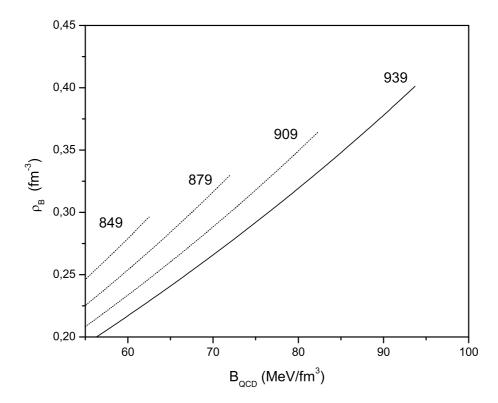


Figura 4.1: Densidade bariônica na superfície da estrela em função da constante de sacola. Cada curva representa diferentes valores da energia por partícula: 939, 909, 879 e 849 MeV, respectivamente.

$$p = \left(\frac{27g_h^2}{16m_G^2}\right)\rho_B^2 - \mathcal{B}_{QCD}$$

$$+ \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \left\{ \frac{k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2}}{4} - \frac{3m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2}}{8} + \frac{3m^4}{8} ln \left[k_F + \sqrt{k_F^2 + m^2} \right] - \frac{3m^4}{16} ln(m^2) \right\}$$

$$(4.3)$$

onde $B_{QCD} = b\phi_0^4$, usamos a condição de estabilidade (4.1) (que é calculada em P = 0) e numericamente encontramos uma relação entre a razão $\xi \equiv g_h/m_G$ e a constante de sacola da QCD, B_{QCD} , como pode ser visto na figura 4.2. Nesta figura, o contorno foi calculado para uma energia por bárion igual a massa do nêutron, $E_A = 939~MeV$. Assim, ela também representa um limite superior, de modo que a matéria de quarks u, d, s é absolutamente estável para valores de ξ e a B_{QCD} que estão dentro da região delimitada pela curva (área hachurada), que é conhecida como janela de estabilidade. Desse modo, conseguimos um valor máximo da constante de sacola para que a matéria de quarks seja estável, $B_{QCD} = 93.7~MeV/fm^3$, obtido quando a curva encontra a abscissa nessa mesma figura. Portanto, a estabilidade da matéria de quarks é satisfeita para valores de $B_{QCD} \le 93.7~MeV/fm^3$.

A figura 4.3, mostra a influência da energia por bárion E_A nos contornos ξ versus B_{QCD} . Para valores menores que a massa do nêutron, $E_A = 909~MeV$, 879 MeV e 849 MeV, as curvas se aproximam da origem e obtemos valores máximos para a constante de sacola de $B_{QCD} = 82.3,72.0$ e 62.5 MeV/fm^3 , respectivamente. Essa mesma figura contém o contorno para $E_A = 969~MeV$, que não satisfaz, consequentemente, a condição de estabilidade em (4.1). O valor da constante de sacola encontrado é de $B_{QCD} = 106.5~MeV/fm^3$. A linha vertical na figura 4.3 em $B_{QCD} = 58~MeV/fm^3$ representa o limite inferior da constante de sacola, uma vez que para constantes de sacola menores, a energia por bárion da matéria de quarks de 2 sabores (u, d) ficaria abaixo da energia por bárion do 56 Fe [67]. Assim, o 56 Fe seria composto de quarks u e d e não de nucleons, que não é compatível com o que é observado.

A estabilidade da EoS foi obitida em P=0. Entretanto, devemos garantir que a matéria de quarks seja também estável em regiões de pressão finita, ou seja, no

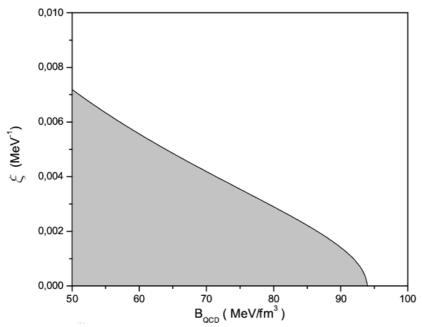


Figura 4.2: Valores de ξ em função constante de sacola da QCD.

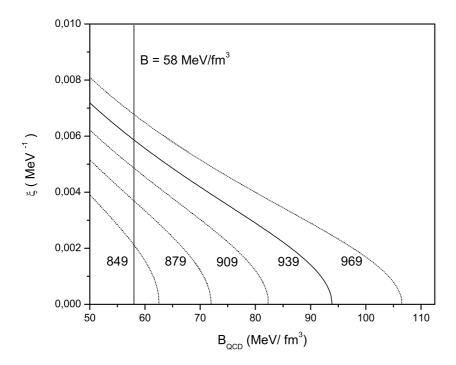


Figura 4.3: Valores de ξ em função constante de sacola da QCD para diferentes valores da energia por partícula: 969, 939, 909, 879 e 849 MeV, respectivamente.

interior da estrela. Para isso, mostramos na figura 4.4 a densidade de energia por bárion em função da pressão para a EoS da QCD e para duas EoS hadrônicas. Uma das EoS hadrônicas é derivada do modelo de Skyrme e descreve a matéria composta por nêutrons, prótons, elétrons e muons [68]. A outra, descreve a matéria composta por nêutrons livres em temperatura nula.

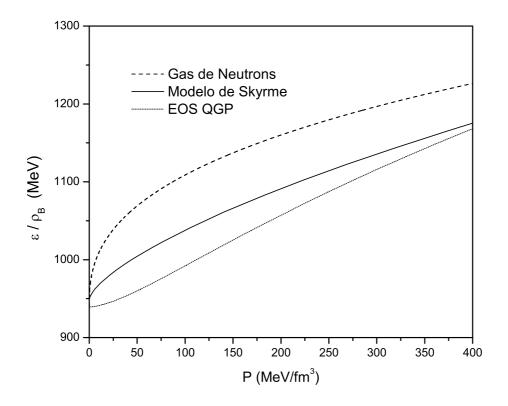


Figura 4.4: Energia por partícula em função da pressão obtida com duas equações de estado hadrônicas e com a EoS da QCD.

Desta figura vemos que a energia por bárion para a EoS do QGP está sempre abaixo da energia por bárion da matéria hadrônica, o que nos garante um sistema composto apenas de matéria de quarks. Isso significa que a matéria de quarks descrita pela nossa equação de estado é absolutamente estável da superfície até o centro da estrela, isto é, não decai em hadrons, mesmo em pressões mais altas. Assim, com a janela de estabilidade, determinamos os paramêtros da EoS para os quais a matéria de quarks é absolutamente estável em toda a estrela. Desta figura, temos a impressão de que a curvas se encontrarão em pontos de pressão mais alta, à direita na escala. Nestes

pontos a estabilidade absoluta não seria satisfeita. Contudo, como será mostrado, tais valores de pressão nunca ocorrem no interior das estrelas estudadas aqui.

A figura 4.5 mostra a EoS da QCD calculada para os valores $B_{QCD} = 90 \, MeV/fm^3$, que, a partir do gráfico 4.2, corresponde a uma valor da razão de $\xi = 0.00137 MeV^{-1}$. Essa mesma figura contém o limite imposto pela causalidade. Esse é um limite superior universal e todas as EoS devem estar abaixo desse limite. Ao resolver modelos estelares, usaremos parâmetros da equação de estado que estão dentro da janela de estabilidade mencionada acima. Também consideraremos o efeito da constante de sacola da QCD na relação massa – raio dessas estrelas.

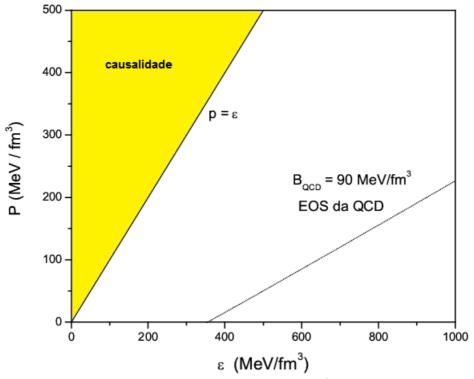


Figura 4.5: Equação de estado para a matéria de quarks estável. É mostrado também o limite imposto pela causalidade, de modo que EoSs são proibidas na região hachurada.

4.2 Relação Massa – Raio

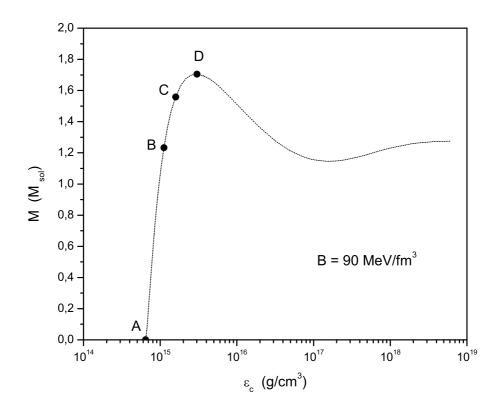
Neste trabalho, estamos interessados nas propriedades estáticas globais de estrelas compactas, como sua massa e raio. Isso se torna possível a partir da EoS obtida no capítulo anterior (eqs. 3.49 e 3.59) e da equação de Tolman – Oppenheimer – Volkoff

(eqs. 2.46 e 2.47), que formam um sistema de equações diferenciais acopladas em p(r) e M(r), que são integradas numericamente, usando o método de Runge Kutta de quarta ordem. Para isso, supondo a densidade de energia central $\varepsilon(r=0) = \varepsilon_c$ e, então, integramos de r=0 até r=R. Na superfície, a pressão deve ser nula: p(r=R)=0. Isso nos dá o raio R da estrela. Com R, determinamos a sua massa gravitacional M. O programa foi feito no Mathematica.

A massa máxima pode ser vista em diagramas M como função de ε_c . A estabilidade desses objetos safistaz a condição $\partial M/\partial \varepsilon_c > 0$. Os gráficos na figura 4.6 foram obtidos para $B_{QCD} = 90~MeV/fm^3$. Encontramos uma estrela de quarks com massa máxima de $M=1.70\,M_\odot$ (ponto D), cuja densidade central é $\varepsilon_c=3.03\times 10^{15}g/cm^3$. A partir do primeiro gráfico na fig. 4.6 vemos que com o aumento da densidade central, e portanto da pressão, a estrela pode suportar mais massa, justificando o comportamento do gráfico do ponto A até o ponto D, onde está localizada a massa máxima. Assim, dizemos que regiões à esquerda do ponto máximo são estáveis, enquanto que à direita são instáveis. Entretanto, existem regiões no lado direito que satisfazem a condição de estabilidade $\partial M/\partial \varepsilon_c > 0$, contudo, a estabilidade radial é válida apenas para o modo fundamental de oscilação, ou seja, para o primeiro pico. Já o segundo gráfico da fig. 4.6, mostra a relação entre o raio R e a densidade central dessa mesma estrela. O raio encontrado foi de $R=8.97~{\rm km}$.

Os pontos A, B, C e D, na figura 4.6, estão em ordem crescente de densidade de energia central. A partir disso, nessa mesma figura, o gráfico de R versus ε_c mostra que a estrela é comprimida (diminui de raio) entre o ponto C e D, embora a massa cresça nesse intervalo. Esse comportamente é oposto ao que acontece entre os pontos A - B e B - C, onde o aumento da massa (e da densidade central) é acompanhado pelo aumento do raio da estrela. Assim sendo, podemos dizer que a matéria de quarks é compressível em altas densidades de matéria. Nesse caso, isso acontece para valores acima de $1.6 \times 10^{15} g/cm^3$ ($\sim 8\rho_0$) - ponto C. A tabela 4.1 resume os valores da densidade central, massa e raio das estrelas localizadas pelos pontos A, B, C e D.

Na figura 4.7, mostramos o diagrama massa – raio com os mesmo pontos A, B, C e D. Esse diagrama é parametrizado pela densidade de energia central ε_c , isto é, cada ponto do gráfico é identificado com uma massa, um raio e uma densidade de energia central. Temos, então, uma família de estrelas, estáveis até o ponto de massa



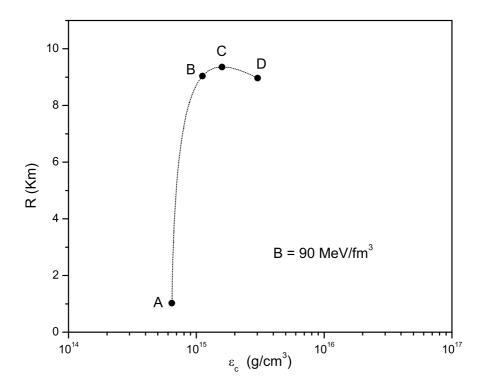


Figura 4.6: Acima: massa da estrela em função de sua densidade central. Há uma família de estrelas estáveis até o primeiro máximo. Abaixo: raio da estrela em função da densidade central. O ponto D representa o raio da estrela cuja massa máxima é encontrada no primeiro pico na figura acima.

Tabela 4.1: Densidade central, massa e raio para as estrelas de quarks nos pontos A, B, C e D. O valor
da constante de sacola utilizada foi de $90 MeV/fm^3$

Pontos	$\varepsilon_{\rm c} (10^{15} g/cm^3)$	$M (M_{sol})$	R(Km)
A	0.64	0.0015	1.03
В	1.12	1.23	9.04
С	1.60	1.56	9.36
D	3.02	1.70	8.97

máxima, localizado no topo da curva. Estrelas depois deste ponto colapsam e se tornam buracos negros. No nosso caso, foi obtida uma estrela com 1.70 massa solares e raio de aproximadamente $9\ km$.

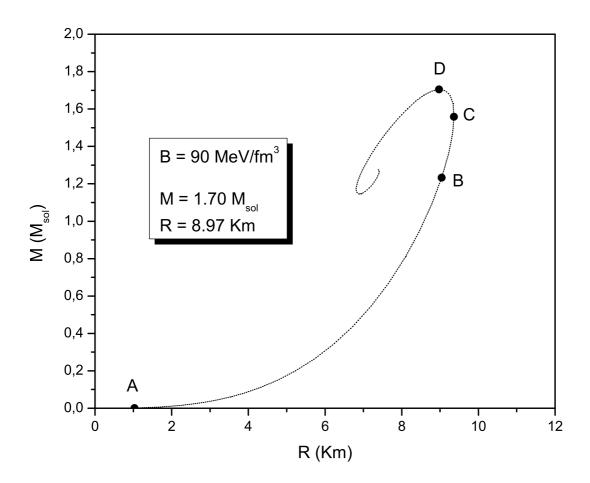


Figura 4.7: Diagrama massa – raio.

Para investigar o efeito dos condensados de gluons de dimensão 4, que estão dire-

tamente relacionados com a constante de sacola da QCD, mostramos, na figura 4.8, curvas para diferentes valores de B_{QCD} . A partir da figura 4.2, fixamos o valor da razão em $\xi=0.00137$, que é exatamente o valor da razão para $B_{QCD}=90~MeV/fm^3$. Assim, garantimos que as constantes de sacola $B_{QCD}=60,70,80,90~MeV/fm^3$ estejam dentro da janela de estabilidade. Como mostra a figura 4.8, o aumento da constante de sacola nos dá uma estrela com massa e raio menores. Esse efeito é esperado, pois, quando observamos a equação da pressão (3.59), vemos que $\langle F^2 \rangle$ suaviza a EoS.

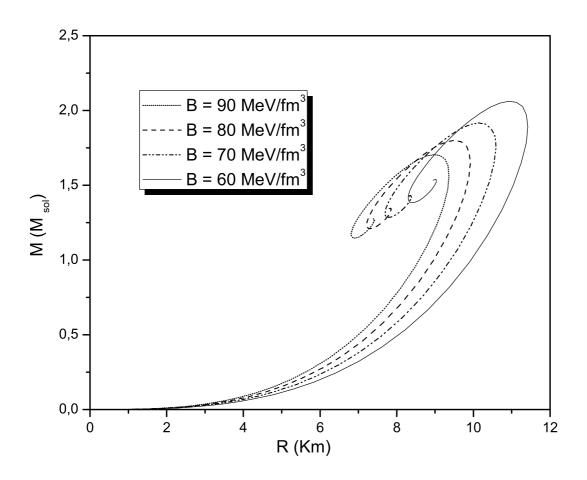


Figura 4.8: Diagrama massa – raio para diferentes valores da constante de sacola: 60, 70, 80, 90 MeV/fm^3 .

A tabela 4.2 resume os valores da massa máxima e raio para esses modelos estelares.

$B_{QCD}(MeV/fm^3)$	$M(M_{sol})$	R(Km)	$\varepsilon_c(10^{15}g/cm^3)$	$p_c(10^{14}g/cm^3)$	$p_c(MeV/fm^3)$
60	2.06	10.96	1.98	5.61	315.2
70	1.92	10.11	2.43	7.01	393.6
80	1.80	9.40	2.96	8.76	492.3
90	1.70	8.97	3.02	8.71	489.4

Tabela 4.2: Massa máxima, raio, densidade e pressão centrais para estrelas de quarks.

Da tabela 4.2, pode ser visto que para $B_{QCD}=60MeV/fm^3$, a massa máxima de $2.06M_{\odot}$ está distribuída num raio de R = 10.96 km . A densidade no centro da estrela encontra um valor de $1.98\times 10^{15} g/cm^3$ ($\sim 10\rho_0$). Aqui, notamos que nossos resultados estão muito próximos do dado observacional do pulsar J1614 – 2230 [14]. Nessa referência, a massa encontrada do pulsar é $(1.97\pm0.04)~M_{\odot}$ e seu raio está entre 11 e 15 km. Como indicado nesse trabalho, esse resultado elimina quase todas as possibilidades de EOSs com híperons e condensados de bósons, pois eles suavizam demais a equação de estado. Por outro lado, a matéria de quarks pode suportar uma massa dessa magnitude apenas se os quarks interagem fortemente. Trabalhos nessa direção podem ser encontrados em [8, 15, 16]. O diagrama massa – raio para essa estrela pode ser visto na figura 4.8. Na tabela 4.2, vemos que a pressão central vale $315.2~MeV/fm^3$ e, portanto, garante a estabilidade da matéria de quarks no interior da estrela, como mostra a figura 4.4.

A influência da constante de acoplamento dos hard gluons na relação massa – raio pode ser vista na figura fig. 4.9. Esta figura foi obtida para valores de ξ que estão dentro da janela de estabilidade na figura 4.3. Para uma constante de sacola fixa de $B_{QCD} = 60 \, MeV/fm^3$ utilizamos os seguintes valores de ξ : 0.00137, 0.0020 e 0.0040.

A taleba 4.3 mostra os valores do massa e raio para diferente constantes de acoplamento $\alpha_h = \frac{g_h^2}{4\pi}$. Estes resultados foram obtidos com a massa dinâmica do gluon fixa em 300 MeV. Constatamos que quanto maior a constante de acoplamento, temos

Tabela 4.3: Massa máxima e raio para diferentes constantes de acoplamento.

$B_{QCD}(MeV/fm^3)$	$M(M_{sol})$	R(Km)	α_h
60	2.06	10.96	0.013
60	2.17	11.15	0.029
60	2.62	12.37	0.115

estrelas com massa e raio maiores. A partir da equação da pressão (3.59), vimos que

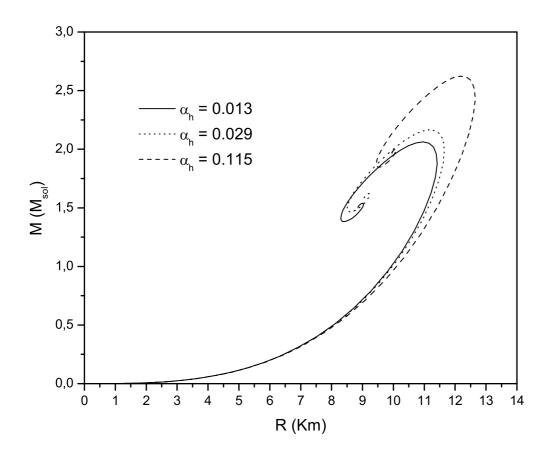


Figura 4.9: Diagrama massa – raio para diferentes valores do acoplamento dos hard gluons.

os hard gluons endurecem a equação de estado e, assim, a estrela pode suportar mais massa, justificando o comportamento do diagrama massa – raio na fig. 4.9.

A influência da massa dinâmica dos gluons na relação massa – raio pode ser vista na figura fig. 4.10. Esta figura foi obtida para valores de ξ que estão dentro da janela de estabilidade na figura 4.3. Para ver o efeito de m_G na estrutura dessas estrelas, escolhemos valores de $\xi_0 = 0.00137$ e também $\xi_0/2$, $2\xi_0$. A constante de sacola foi fixada em $B_{QCD} = 60~MeV/fm^3$ e o acoplamento fixo $\alpha_h = 0.013$.

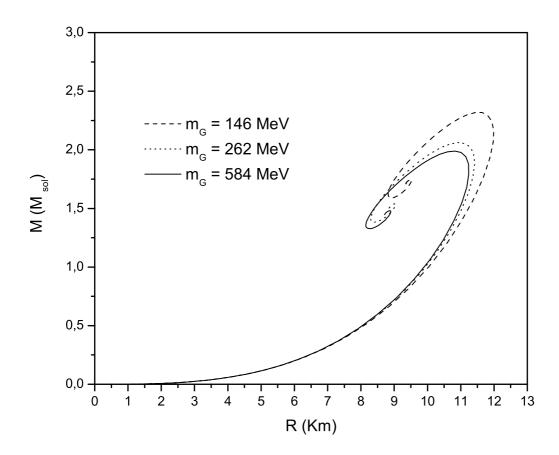


Figura 4.10: Diagrama massa – raio para diferentes valores da massa dinânima dos gluons.

A tabela 4.4 mostra os resultados obtidos na figura 4.10 e o conjunto de parâmetros utilizados. A partir da figura 4.10 e da tabela 4.4, podemos ver que quanto maior a massa dinâmica do gluons, menores são o raio e a massa da estrela. Fisicamente, esse efeito podia ser esperado, pois, como vimos no capítulo anterior, os condensados de dimensão 2 são diretamente proporcionais a m_G e suavizam a equação de estado,

como mostra o primeiro gráfico na figura 3.7 do capítulo anterior. Além disso, vimos também que a intensidade do campo dos hard gluons α_0^a é inversamente proporcional a massa dinâmica dos gluons, como mostra a equação (3.34). Desse modo, quanto maior a massa dinâmica dos gluons, menor é a contribuição dos hard gluons para a pressão e, assim, temos estrelas de massa e raio menores.

Tabela 4.4: Massa máxima e raio para diferentes valores da massa dinâmica dos gluons.

$B_{QCD}(MeV/fm^3)$	$M(M_{sol})$	R(Km)	$m_G(MeV)$
60	2.32	11.64	146
60	2.06	10.96	292
60	1.99	10.82	584

Nossos resultados foram obtidos sob a condição da estabilidade da matéria de quarks. Alguns desses resultados sugerem que possam existir estrelas de quarks com massas ainda maiores do que a do pulsar J1614-2230.

Capítulo 5

Conclusão

Como se sabe estrelas compactas oferecem uma oportunidade única de explorar a matéria em altas densidades. Embora haja esse interesse científico, as observações têm mostrado que a teoria para descrever esses objetos está longe de ser completa. Um exemplo disso, é o caso das estrelas de quarks, nas quais uma das grandes dificuldades é obtenção da equação de estado que descreva medidas de massa e raio desses objetos.

A nossa equação de estado foi obtida através de aproximações feitas na Lagrangiana da QCD. O campo dos gluons foi decomposto em componentes de altos e baixos momentos. Uma aproximação de campo médio foi feita para os gluons de altos momentos. Os campos dos gluons com componentes de baixos momentos foram substituídos pelos condensados de gluons de dimensão dois e quatro. Obtivemos, então, uma expressão analítica para a EoS, a partir da qual, pode - se observar que a componente dos gluons de altos momentos aumenta a densidade de energia e pressão, enquanto que a dos condensados suaviza a equação de estado.

O importante neste trabalho foi investigar como a equação de estado que descreve o plasma de quarks e gluons fortemente acoplado modifica a relação massa – raio de estrelas de quarks. Os parâmetros da equação de estado utilizados obedeceram o critério de estabilidade. Este critério garante que a matéria no interior da estrela é composta de quarks em vez de hadrons. Em outras palavras, concluímos que para obtermos estrelas com matéria de quarks estável, a massa dinâmica do gluon (condensados de dimensão 2) e o acoplamento dos gluons de altos momentos se relacionam

através da janela de estabilidade. Além disso, constatamos que quanto maior a constante de sacola da QCD (condensados de dimensão 4), obtemos estrelas de massa e raio menores.

Supondo que o pulsar recentemente medido J1614 - 2230 seja uma estrela de quarks, nossos resultados fornecem respaldo teórico a essa observação. Por conseguinte, nós concluímos, usando uma equação de estado dura, que matéria de quarks pode existir no interior de estrelas compactas.

Apêndice A

Constantes de Estrutura de SU(3)

Os geradores do grupo SU(3) são dados por:

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \qquad a = 1, 2, \dots, 8 \tag{1}$$

sendo" λ " as matrizes de Gell-Mann definidas por:

$$\lambda^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^{4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

$$\lambda^{7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Os comutadores das matrizes de Gell-Mann são definidos:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c \tag{3}$$

e f^{abc} sendo as constantes de estrutura anti-simétricas de SU(3), com os índices de cor a, b, c variando de 1 a 8. Além disso, f^{abc} tem a propriedade de anti-simetria:

$$f^{bac} = f^{acb} = -f^{abc} \tag{4}$$

e também:

$$f^{123} = 1$$

$$f^{458} = f^{678} = \sqrt{3}/2$$

$$f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = 1/2$$
(5)

As constantes de estrutura também apresentam outras relações no SU(N):

$$f^{abc}f^{abc} = N(N^2 - 1) \xrightarrow{(N=3)} f^{abc}f^{abc} = 24$$
 (6)

$$f^{acd}f^{bcd} = N\delta^{ab} \stackrel{(N=3)}{\longrightarrow} f^{acd}f^{bcd} = 3\delta^{ab}$$
 (7)

Apêndice B

Campo de Dirac

O campo ψ presente na equação de movimento (3.33) pode ser descrito por um spinor de Dirac $\mathcal{U}(\vec{k}, \lambda)$, sendo \vec{k} o momento do quark e λ seu spin e também por um vetor coluna de cor c que pode ter três valores [47]:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para vermelho, } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para azul, } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ para verde}$$
 (8)

Numa forma compacta escrevemos c com subscritos romanos c_i tais que i, j, k, \ldots variam de 1 a 3 e define assim a cor do quark. Nesse sentido, tratando o espectro de energia positiva o campo ψ dos quarks é escrito como:

$$\psi_j = c_j \psi = c_j \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\lambda} A_{\vec{k},\lambda} \ \mathcal{U}(\vec{k},\lambda) \ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE^+(\vec{k})t}$$
(9)

com o spinor satisfazendo a relação:

$$\mathcal{U}^{\dagger}(\vec{k}', \lambda')\mathcal{U}(\vec{k}, \lambda) = \delta_{\vec{k}'\vec{k}}\delta_{\lambda\lambda'} \tag{10}$$

e o operador $A_{\vec{k},\lambda}$:

$$\{A, A^{\dagger}\} = 1 \tag{11}$$

Afim de encontrar a E^+ multiplicamos (3.33) pela esquerda por $\bar{\psi}_i$:

$$\bar{\psi}_i \Big(i \delta_{ij} \gamma^\mu \partial_\mu + g_h \gamma^0 T^a_{ij} \alpha^a_0 - \delta_{ij} m \Big) \psi_j = 0$$
 (12)

que inserindo (9) e da relação $\gamma^0 \gamma^0 = I$ fica:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'} \left\{ A^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'} \ \mathcal{U}^{\dagger}(\vec{k}',\lambda') \ e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}+iE^{\dagger}(\vec{k}')t} \right\}
\times c^{\dagger}_{i} \left(i\delta_{ij}\partial_{0} + i\delta_{ij}\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + g_{h}T^{a}_{ij}\alpha^{a}_{0} - \delta_{ij}\gamma^{0}m \right)
\times c_{j} \left\{ A_{\vec{k},\lambda} \ \mathcal{U}(\vec{k},\lambda) \ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-iE^{\dagger}(\vec{k})t} \right\} = 0$$
(13)

o que nos leva a:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda, \vec{k}', \lambda'} \left\{ A^{\dagger}_{\vec{k}', \lambda'} \ \mathcal{U}^{\dagger}(\vec{k}', \lambda') \ e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x} + iE^{+}(\vec{k}')t} \right\} c_{i}^{\dagger} \left[i\delta_{ij}(-iE^{+}) + i\delta_{ij}\vec{\alpha} \cdot (i\vec{k}) \right]$$

$$+g_h T_{ij}^a \alpha_0^a - \delta_{ij} \gamma^0 m \bigg] c_j \bigg\{ A_{\vec{k},\lambda} \ \mathcal{U}(\vec{k},\lambda) \ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - iE^+(\vec{k}')t} \bigg\} = 0$$
 (14)

e, portanto, escrevemos como:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda, \vec{k}', \lambda'} \left\{ (c_i^{\dagger} \delta_{ij} c_j) E^+ - (c_i^{\dagger} \delta_{ij} c_j) \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \right\}$$

$$+g_{h}c_{i}^{\dagger}T_{ij}^{a}c_{j}\alpha_{0}^{a} - (c_{i}^{\dagger}\delta_{ij}c_{j})\gamma^{0}m\bigg\}(A^{\dagger'}\mathcal{U}^{\dagger'}A\mathcal{U})e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}+i[E^{+}(\vec{k}')-E^{+}(\vec{k})]t} = 0$$
 (15)

com a notação $A^{\dagger'}$ $\mathcal{U}^{\dagger'} \equiv A^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}$ $\mathcal{U}^{\dagger}(\vec{k}',\lambda')$. A partir da equação (10) a última expressão fica:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ (c_i^{\dagger} \delta_{ij} c_j) E^+ - (c_i^{\dagger} \delta_{ij} c_j) \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \right\}$$

$$+g_h c_i^{\dagger} T_{ij}^a c_j \alpha_0^a - (c_i^{\dagger} \delta_{ij} c_j) \gamma^0 m \bigg\} A_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} A_{\vec{k},\lambda} = 0$$
 (16)

Da equação (8) é fácil verificar que:

$$c_i^{\dagger} \delta_{ij} c_j = c_i^{\dagger} c_i = c_1^{\dagger} c_1 + c_2^{\dagger} c_2 + c_3^{\dagger} c_3 = 3$$
 (17)

Além disso a partir de (1), (2) e (8) temos:

$$c_i^{\dagger} T_{ij}^a c_j \alpha_0^a = \alpha_0^1 + \alpha_0^4 + \alpha_0^6 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}$$
 (18)

com \mathcal{A} o resultado da operação $c_i^{\dagger} T_{ij}^a c_j \alpha_0^a$ com a somatória nos índices i, j = 1, 2, 3 e $a = 1, \dots, 8$. Desse modo, inserimos as duas últimas equações (17) e (18) em (16) para conseguir:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ 3E^+ - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + g_h \mathcal{A} - 3\gamma^0 m \right\} A_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} A_{\vec{k},\lambda} = 0$$

ou ainda,

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ 3E^+ + g_h \mathcal{A} \right\} A_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} A_{\vec{k},\lambda} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ 3\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + 3\gamma^0 m \right\} A_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} A_{\vec{k},\lambda}$$

a partir da qual podemos escrever:

$$3E^{+} + g_h \mathcal{A} = 3(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \gamma^0 m) \tag{19}$$

Elevando ao quadrado a expressão acima, temos:

$$[3E^{+} + g_{h}\mathcal{A}]^{2} = 9[(\vec{\alpha} \cdot \vec{k})^{2} + (\gamma^{0}m)^{2} + \vec{\alpha} \cdot \vec{k}\gamma^{0}m + \gamma^{0}m\vec{\alpha} \cdot \vec{k}]$$
 (20)

A partir da álgebra das matrizes de Dirac $\{\gamma^0, \alpha^i\} = 0$ reescrevemos o termo $\vec{\alpha} \cdot \vec{k} \gamma^0 m + \gamma^0 m \vec{\alpha} \cdot \vec{k}$ em (20) como:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{k} \gamma^{0} m + \gamma^{0} m \vec{\alpha} \cdot \vec{k} = m(\alpha^{1} k^{1} \gamma^{0} + \alpha^{2} k^{2} \gamma^{0} + \alpha^{3} k^{3} \gamma^{0} + \gamma^{0} \alpha^{1} k^{1} + \gamma^{0} \alpha^{2} k^{2} + \gamma^{0} \alpha^{3} k^{3})$$

$$= m(k^{1} \alpha^{1} \gamma^{0} + k^{2} \alpha^{2} \gamma^{0} + k^{3} \alpha^{3} \gamma^{0} + \gamma^{0} \alpha^{1} k^{1} + \gamma^{0} \alpha^{2} k^{2} + \gamma^{0} \alpha^{3} k^{3})$$

$$= m(k^1\{\gamma^0,\alpha^1\} + k^2\{\gamma^0,\alpha^2\} + k^3\{\gamma^0,\alpha^3\}) = 0$$

mas também em (20) temos $(\vec{\alpha} \cdot \vec{k})^2 + (\gamma^0 m)^2 = \vec{k}^2 + m^2$ porque $(\alpha^i)^2 = \gamma^{0^2} = I$ o quê no dá:

$$[3E^{+} + g_{h}\mathcal{A}]^{2} = 9(\vec{k}^{2} + m^{2})$$

resultando em:

$$E^{+}(\vec{k}) = -\frac{g_h}{3}\mathcal{A} + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$
 (21)

Assim, quando usamos (21) em (19) temos a seguinte relação:

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \gamma^0 m) \longrightarrow \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$
 (22)

Outro termo de interesse é :

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\gamma^0 m)\psi\tag{23}$$

que fica a partir do uso da equação (9):

$$\begin{split} \psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\gamma^{0}m)\psi &= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\left\{A^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}\ \mathcal{U}^{\dagger}(\vec{k}',\lambda')\ e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}+iE^{+}(\vec{k}')t}\right\} \\ &\times c^{\dagger}_{i}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\gamma^{0}m)c_{j}\bigg\{A_{\vec{k},\lambda}\ \mathcal{U}(\vec{k},\lambda)\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-iE^{+}(\vec{k})t}\bigg\} \\ &= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\left\{A^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}\ \mathcal{U}^{\dagger}(\vec{k}',\lambda')\right\}c^{\dagger}_{i}\bigg[-i\delta_{ij}\vec{\alpha}\cdot(i\vec{k})+\delta_{ij}\gamma^{0}m\bigg]c_{j}\bigg\{A_{\vec{k},\lambda}\ \mathcal{U}(\vec{k},\lambda)\bigg\} \\ &\times e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}+i[E^{+}(\vec{k}')-E^{+}(\vec{k})]t} \\ &= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k},\lambda,\vec{k}',\lambda'}\bigg[(c^{\dagger}_{i}\delta_{ij}c_{j})\vec{\alpha}\cdot\vec{k}+(c^{\dagger}_{i}\delta_{ij}c_{j})\gamma^{0}m\bigg](A^{\dagger'}\ \mathcal{U}^{\dagger'}A\ \mathcal{U}) \\ &\times e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}+i[E^{+}(\vec{k}')-E^{+}(\vec{k})]t} \end{split}$$

mas usando as equações (10) e (17) ficamos com:

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\gamma^{0}m)\psi=\frac{3}{V}\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{\alpha}\cdot\vec{k}+\gamma^{0}m)(A^{\dagger}A)$$

Aplicando a última expressão num sistema composto por N quarks: $\langle N | \dots | N \rangle$ obtemos:

$$\langle N|\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\gamma^{0}m)\psi|N\rangle$$

$$=\langle N|\frac{3}{V}\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{\alpha}\cdot\vec{k}+\gamma^{0}m)A_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}A_{\vec{k},\lambda}|N\rangle = \frac{3}{V}\sum_{\vec{k},\lambda}(\vec{\alpha}\cdot\vec{k}+\gamma^{0}m)$$
(24)

uma vez que $\langle N|A_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}A_{\vec{k},\lambda}|N\rangle=1$. Finalmente a partir de (22) em (24) obtemos uma expressão para a relação dada em (23):

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\gamma^{0}m)\psi\longrightarrow\frac{3}{V}\sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\vec{k}^{2}+m^{2}}$$
(25)

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \longrightarrow \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int d^3k \tag{26}$$

onde γ_Q representa o fator estatístico para os quarks e inclui o fator do spin e o fator de cores. Para o nosso caso, como quarks são férmions e podem ter 3 sabores, temos $\gamma_Q=2\times 3=6$. Agora podemos usar a equação (26) em (25) para obter:

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\gamma^{0}m)\psi\longrightarrow 3\frac{\gamma_{Q}}{(2\pi)^{3}}\int d^{3}k\,\sqrt{\vec{k}^{2}+m^{2}}$$

$$=3\frac{\gamma_{Q}}{2\pi^{2}}\int_{0}^{k_{F}}dk\,k^{2}\sqrt{\vec{k}^{2}+m^{2}}$$
(27)

com k_F o momento de Fermi definido a partir da densidade de quark ρ :

$$\rho = \langle N | \psi_i^{\dagger} \psi_i | N \rangle = \frac{3}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} \langle N | N \rangle = \frac{3}{V} \sum_{\vec{k}, \lambda} = 3 \frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int d^3k = 3 \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ k^2$$

que nos fornece:

$$\rho = \frac{\gamma_Q}{2\pi^2} k_F^3 \tag{28}$$

Além dos resultados obtidos até agora, aproveitamos o fato de que o spinor de Dirac \mathcal{U} satisfaz a equação de Dirac (22) para conseguir a relação:

$$\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \gamma^0 m\right) \mathcal{U}(\vec{k}, \lambda) = \left(\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}\right) \mathcal{U}(\vec{k}, \lambda)$$
 (29)

e ainda,

$$\mathcal{U}^{\dagger}(\vec{k},\lambda)\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{k}+\gamma^{0}m\right) = \left(\sqrt{\vec{k}^{2}+m^{2}}\right)\mathcal{U}^{\dagger}(\vec{k},\lambda) \tag{30}$$

Multiplicamos a (29) por $\mathcal{U}^{\dagger}(\vec{k},\lambda)\gamma^{0}$ pela esquerda e (30) por $\gamma^{0}\mathcal{U}(\vec{k},\lambda)$ pela direita, e somamos esses dois resultados, para obter:

$$\mathcal{U}^{\dagger}\mathcal{U}m = \bar{\mathcal{U}}\mathcal{U}\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \tag{31}$$

com a notação $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{\dagger} \gamma_0$. Reescrevemos (31) para ser:

$$\bar{\mathcal{U}}\mathcal{U} = \frac{m}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \,\mathcal{U}^{\dagger}\mathcal{U} \tag{32}$$

A equação (16) nos dá:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ 3\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + 3\gamma^0 m \right\} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ 3E^+ + g_h \mathcal{A} \right\}$$

que quando multiplicada por ${\mathcal U}$ pela direita fica:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ 3\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + 3\gamma^0 m \right\} \mathcal{U} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ 3E^+ + g_h \mathcal{A} \right\} \mathcal{U}$$

e usando (21) ganha a forma:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \gamma^0 m \right\} \mathcal{U} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \right\} \mathcal{U}$$

ou ainda,

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k} \lambda} \left\{ \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \right\} \mathcal{U} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k} \lambda} \left\{ \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - \gamma^0 m \right\} \mathcal{U}$$
 (33)

A expressão acima quando multiplicada pela esquerda por \mathcal{U}^{\dagger} fica:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \mathcal{U}^{\dagger} \left\{ \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \right\} \mathcal{U} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \right\} \mathcal{U}^{\dagger} \mathcal{U} - \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} m \, \mathcal{U}^{\dagger} \gamma^0 \mathcal{U}$$

reescrita como:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \mathcal{U}^{\dagger} \left\{ \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \right\} \mathcal{U} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \right\} \mathcal{U}^{\dagger} \mathcal{U} - \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} m \bar{\mathcal{U}} \mathcal{U}$$

mas a partir de (32) resulta em:

$$\frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \mathcal{U}^{\dagger} \left\{ \vec{\alpha} \cdot \vec{k} \right\} \mathcal{U} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - \frac{m^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right\} \mathcal{U}^{\dagger} \mathcal{U}$$

$$= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\lambda} \left\{ \frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right\} \mathcal{U}^{\dagger} \mathcal{U} \tag{34}$$

Com resultado acima, a relação dos espinores de Dirac em (9) e as relações $\mathcal{U}^{\dagger}\mathcal{U} = 1$ (ver (10)), $\langle N|A_{\vec{k},\lambda}^{\dagger}A_{\vec{k},\lambda}|N\rangle = 1$ estamos aptos a calcular o termo:

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\psi = \psi^{\dagger}(\vec{\alpha}\cdot\vec{k})\psi \longrightarrow \langle N|\frac{3}{V}\sum_{\vec{k},\lambda} \left\{\frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}\right\} A_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} A_{\vec{k},\lambda} |N\rangle$$

$$= \frac{3}{V}\sum_{\vec{k},\lambda} \left\{\frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}}\right\}$$
(35)

Finalmente, a partir da equação (26) a última expressão é lida como:

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\psi \longrightarrow 3\frac{\gamma_Q}{(2\pi)^3} \int d^3k \left\{ \frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right\}$$
$$= 3\frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ k^2 \left\{ \frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right\}$$
(36)

Resumindo, a manipulação da equação de movimento dos quarks (3.33) nos devolveu duas expressões (27) e (36):

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\gamma^0 m)\psi\longrightarrow 3\frac{\gamma_Q}{2\pi^2}\int_0^{k_F}dk\;k^2\sqrt{\vec{k}^2+m^2}$$
 (37)

$$\psi^{\dagger}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\psi \longrightarrow 3\frac{\gamma_Q}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk \ k^2 \left\{ \frac{\vec{k}^2}{\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \right\}$$
(38)

que desempenham papel fundamental no cálculo da densidade de energia e pressão do QGP.

Apêndice C

Densidade de Lagrangiana com derivada superior nos campos e tensor energia – momento.

Apresentamos nesse apêndice os detalhes dos estudos contidos em [57, 58] e já usados neste trabalho. Em particular vamos considerar uma lagrangeana \mathcal{L} com a dependência nos campos η_i e suas derivadas da seguinte forma: $\mathcal{L}(\eta_i, \partial_\mu \eta_i, \partial_\mu \partial_\nu \eta_i)$. Nesse caso, a ação da teoria é escrita como:

$$S = \int_{\Omega} d^4x \ \mathcal{L}(\eta_i, \partial_{\mu} \eta_i, \partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)$$
 (39)

Calculando a variação da ação δS podemos obter as equações de Euler-Lagrange para os campos η_i cujas variações são dadas por $\eta_i(x) \to \eta_i(x) + \delta \eta_i(x)$. Em (39) Ω uma região arbitrária do espaço-tempo com $\delta \eta_i(x)$ nulo em Γ , onde Γ o contorno de Ω . Buscando por um valor estacionário da ação:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \ \delta \mathcal{L}(\eta_i, \partial_{\mu} \eta_i, \partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i) = 0$$
 (40)

encontramos:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} \delta(\partial_{\mu} \eta_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} \delta(\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i) \right\} = 0$$

uma vez que $\delta(\partial_{\mu}\eta_{i}) = \partial_{\mu}(\delta\eta_{i})$ e também $\delta(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\eta_{i}) = \partial_{\mu}\partial_{\nu}(\delta\eta_{i})$, reescrevemos a última expressão como:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} \partial_{\mu} (\delta \eta_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} \partial_{\mu} \partial_{\nu} (\delta \eta_i) \right\} = 0$$

e usando a regra de derivada do produto:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} \delta \eta_i \right] - \left[\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} \right] \delta \eta_i \right.$$
$$\left. + \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \partial_{\nu} \eta_i)} \partial_{\nu} (\delta \eta_i) \right] - \left[\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \partial_{\nu} \eta_i)} \right] \partial_{\nu} (\delta \eta_i) \right\} = 0$$

ou melhor:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} \right] \delta \eta_i - \left[\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} \right] \partial_{\nu} (\delta \eta_i) \right.$$
$$\left. + \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} \delta \eta_i \right] + \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} \partial_{\nu} (\delta \eta_i) \right] \right\} = 0$$

A partir do Teorema de Gauss:

$$\int_{\Omega} d^4x \; \partial_{\mu} S^{\mu} = \int_{\Gamma} d\sigma_{\mu} S^{\mu}$$

nas duas últimas integrais de δS ficamos com:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} \right] \delta \eta_i - \left[\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} \right] \partial_{\nu} (\delta \eta_i) \right\}$$

$$+ \int_{\Gamma} d\sigma_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\eta_{i})} \delta\eta_{i} \right] + \int_{\Gamma} d\sigma_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\eta_{i})} \partial_{\nu} (\delta\eta_{i}) \right] = 0$$

e como $\delta \eta_i$ e suas derivadas se anulam em Γ , as duas últimas integrais da expressão anterior onde usamos são nulas, de tal forma que resta:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} \right] \delta \eta_i - \left[\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} \right] \partial_{\nu} (\delta \eta_i) \right\} = 0$$

Reescrevendo o último termo da expressão anterior com a regra da derivada do produto:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} \right] \delta \eta_i - \partial_{\nu} \left[\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} (\delta \eta_i) \right] + \left[\partial_{\nu} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} \right] \delta \eta_i \right\} = 0$$

Novamente agrupando os termos proporcionais a $\delta \eta_i$ e usando o Teorema de Gauss, obtemos:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} + \partial_{\nu} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} \right] \delta \eta_i$$
$$- \int_{\Gamma} d\sigma_{\nu} \left[\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} (\delta \eta_i) \right] = 0$$

Usando novamente o fato de que $\delta \eta_i$ se anula em Γ , aúltima integral se anula e assim:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4 x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_i)} + \partial_{\nu} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)} \right] \delta \eta_i = 0$$

de onde obtemos a equação de Euler-Lagrange para $\mathcal{L}(\eta_i, \partial_\mu \eta_i, \partial_\mu \partial_\nu \eta_i)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_i)} + \partial_\nu \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \eta_i)} = 0 \tag{41}$$

A variação da lagrangiana $\delta \mathcal{L}$ para $\mathcal{L}(\eta_i, \partial_{\mu} \eta_i, \partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_i)$ é dada por:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_i)} \delta(\partial_\mu \eta_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \eta_i)} \delta(\partial_\mu \partial_\nu \eta_i)$$

Usando o fato de que as variações das derivadas dos campos são as derivadas das variações dos campos, temos:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_i)} \partial_\mu (\delta \eta_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \eta_i)} \partial_\mu \partial_\nu (\delta \eta_i)$$

Reescrevemos $\partial \mathcal{L}/\partial \eta_i$ da expressão acima usando (41):

$$\delta \mathcal{L} = \left[\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_{i})} \right] \delta \eta_{i} - \left[\partial_{\nu} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \right] \delta \eta_{i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_{i})} \partial_{\mu} (\delta \eta_{i})$$
$$+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \partial_{\mu} \partial_{\nu} (\delta \eta_{i})$$

que agrupando o primeiro e o terceito termo nos dá:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_{i})} \delta \eta_{i} \right] - \left[\partial_{\nu} \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \right] \delta \eta_{i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \partial_{\mu} \partial_{\nu} (\delta \eta_{i})$$

Agora reescrevemos o segundo termo e obtemos:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_{i})} \delta \eta_{i} \right] - \partial_{\mu} \left[\partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \delta \eta_{i} \right] + \partial_{\nu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \right] \partial_{\mu} (\delta \eta_{i})$$
$$+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \partial_{\mu} \partial_{\nu} (\delta \eta_{i})$$

que agrupando termos fica na forma:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_{i})} \delta \eta_{i} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \delta \eta_{i} \right] + \partial_{\nu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \partial_{\mu} (\delta \eta_{i}) \right]$$

ou melhor, usando no útlimo termo $\partial_{\alpha}(\delta\eta_i) = \delta(\partial_{\alpha}\eta_i)$ e renomeando os índices μ e ν encontramos:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_{\mu} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_{i})} \delta \eta_{i} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \delta \eta_{i} \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \delta (\partial_{\nu} \eta_{i}) \right] \right\}$$
(42)

Usando agora as variações:

$$\delta \mathcal{L} = (\partial_{\alpha} \mathcal{L}) \, \delta x^{\alpha}$$

$$\delta \eta_{i} = (\partial_{\alpha} \eta_{i}) \, \delta x^{\alpha}$$

$$\delta (\partial_{\beta} \eta_{i}) = \partial_{\alpha} (\partial_{\beta} \eta_{i}) \, \delta x^{\alpha}$$

$$(43)$$

podemos reescrever (42) como:

$$(\partial_{\alpha} \mathcal{L}) \, \delta x^{\alpha} = \partial_{\mu} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_{i})} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \right] (\partial_{\alpha} \eta_{i}) \, \delta x^{\alpha} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \right] \partial_{\alpha} (\partial_{\nu} \eta_{i}) \, \delta x^{\alpha} \right\}$$

De forma mais compacta temos:

$$\partial_{\mu} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \eta_{i})} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \right] (\partial_{\alpha} \eta_{i}) + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \eta_{i})} \right] \partial_{\alpha} (\partial_{\nu} \eta_{i}) - g^{\mu}_{\alpha} \mathcal{L} \right\} \delta x^{\alpha} = 0 \quad (44)$$

Podemos identificar a expressão entre os colchetes acima como o tensor energiamomento:

$$T^{\mu}{}_{\alpha} \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\eta_{i})} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\eta_{i})} \right] (\partial_{\alpha}\eta_{i}) + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\eta_{i})} \right] \partial_{\alpha}(\partial_{\nu}\eta_{i}) - g^{\mu}{}_{\alpha}\mathcal{L}$$
(45)

Então podemos reescrever (44) com (45) na forma:

$$\partial_{\mu} T^{\mu}{}_{\alpha} \,\delta x^{\alpha} = 0 \tag{46}$$

que em sua forma mais conhecida:

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} \, g_{\nu\alpha} \, \delta x^{\alpha} = 0$$

dada por:

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \tag{47}$$

e sendo assim obtemos o tensor energia-momento para:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\eta_{i})}(\partial^{\nu}\eta_{i}) - g^{\mu\nu}\mathcal{L} - \left[\partial_{\beta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\partial_{\beta}\eta_{i})}\right](\partial^{\nu}\eta_{i}) + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\partial_{\beta}\eta_{i})}\right]\partial^{\nu}(\partial_{\beta}\eta_{i}) \quad (48)$$

Apêndice D

Dedução das equações de Tolman – Oppenheimer – Volkoff

Neste apêndice, derivaremos a equação de estrutura estelar conhecida como equação de Tolman – Oppenheimer – Volkoff (T.O.V). Esta equação foi proposta por Oppenheimer e Volkov [22], inspirados no trabalho feito por Toman [69]. Trata-se de uma equação de equilíbrio hidrostático entre a pressão exercida pela matéria, tratada como um fluido ideal, estático e isotrópico, e a atração a gravitacional. A T.O.V, junto com uma equação de estado pode ser usada para resolver modelos estelares. Nesse sentido, veremos como a física microscópica pode influenciar as propriedades macroscópicas desses objetos compactos, especialmente a relação massa – raio.

Relatividade Especial

A Teoria da Relatividade Especial proposta por Einstein estabelece que o espaço e o tempo não são absolutos. Além disso, considerando que as equações de Maxwell são invariantes por transformações de Lorentz, Einstein postulou que a velocidade da luz é constante para todos os referenciais inerciais e independente do movimento da fonte.

Transformação de Lorentz

As transformações de Lorentz relacionam as coordenadas de um referencial S', com coordenadas (x^0, x'^1, x'^2, x'^3) , que se move com velocidade constante \vec{v} em relação ao

um referencial fixo S de coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) , através da relação [70]:

$$x'^{1} = \gamma(x^{1} - vt)$$

$$x'^{2} = x^{2}$$

$$x'^{3} = x^{3}$$

$$t' = \gamma(t - vx^{1}/c^{2}),$$
(49)

com $x^0=t,\,x'^0=t',\,\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$ e S' se deslocando na direção $x'^1.$

De maneira compacta as transformações de Lorentz ganham a forma:

$$x^{\prime \mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu},\tag{50}$$

com $\Lambda^{\mu}_{\ \nu}$ a matriz transformação de Lorentz e μ e ν podendo assumir os valores 0, 1, 2, 3.

No contexto da Relatividade Restrita, a distância entre dois eventos é definida por:

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \tag{51}$$

sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico num espaço – tempo arbitrário. Se $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, com $\eta_{\mu\nu}$ sendo a métrica de Minkowski de assinatura diag(1, -1, -1, -1), dizemos que o espaçotempo é plano.

Relatividade Geral

O Símbolo de Cristoffel

A Teoria da Relatividade Geral descreve a gravitação como uma propriedade geométrica do espaço —tempo, relacionando a curvatura escalar com o fluxo de momento e energia através das equações de campo de Einstein. Dessa forma, corpos massivos, como estrelas, galáxias e planetas, curvam a geometria do espaço — tempo [70], e, com

o movimento dessas distribuições de massa (ou energia), o espaço—tempo está sempre mudando, o que nos impede de definir uma geometria prioritária.

Nesta seção vamos relacionar as coordenadas ξ^a de um referencial onde uma partícula cai livremente num campo gravitacional com as coordenadas x^μ de um referencial arbitrário. Tanto a quanto μ são índices de Lorentz e podem assumir os valores 0, 1, 2, 3.

No referencial da partícula, localmente inercial, a equação de movimento é dada por:

$$\frac{d^2\xi^a}{d\tau^2} = 0. (52)$$

com τ o tempo próprio da partícula como definido em (51). Admitindo a dependência $\xi^a = \xi^a(x^\mu)$, uma mudança infinitesimal na coordenada x^μ leva a uma mudança $d\xi^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\nu} dx^\nu$ na coordenada ξ^a . Desse modo, derivamos (52) em relação a τ para obter:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d^2 \xi^a}{d\tau^2} \right) = 0 \tag{53}$$

$$\left(\frac{\partial \xi^a}{\partial x^{\nu}}\right) \frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} + \left(\frac{\partial^2 \xi^a}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}\right) \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0.$$
(54)

Multiplicando (54) por $\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{a}}$ ficamos com expressão:

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0.$$
 (55)

Com $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ definido por:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{a}} \frac{\partial^{2} \xi^{a}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}},\tag{56}$$

que recebe o nome de símbolo de Christoffel. O termo que acompanha $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ em (55) representa o efeito gravitacional que desvia a trajetória da partícula de uma linha reta. A equação (55) é conhecida como geodésica e define o caminho feito pela partícula num referencial genérico. É importante notar que se $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0$, recuperamos um referencial localmente inercial com a equação de movimento da partícula similar a (52). Dessa maneira, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ é interpretada como a força que altera o estado de movimento da partícula. Veremos a seguir que $g_{\mu\nu}$ faz o papel do potencial gravitacional e $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ da

força gravitacional.

De (51), para o referencial localmente inercial temos:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta}. \tag{57}$$

E para um referencial arbitrário, conseguimos:

$$d\tau'^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{58}$$

Pela regra da cadeia e usando (57) e (58), obtemos:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta},\tag{59}$$

relacionando o tensor métrico de Minkowski com o tensor métrico de um referencial qualquer.

Derivando (59) em relação a x^{λ} e usando a notação $g_{\mu\nu,\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}$, ficamos com:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}, \tag{60}$$

e usando (59), reescrevemos (60) como segue:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma}. \tag{61}$$

Somando $g_{\lambda\nu,\mu}$ e subtraindo $g_{\mu\lambda,\nu}$ em (61), como feito em [70], e usando que $g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}$ e $\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}=\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}$, temos:

$$g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\lambda,\nu} = 2g_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}.$$
 (62)

Multiplicando a última equação por $g^{\rho\nu}$, concluímos que:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right). \tag{63}$$

Equação de Einstein

A equação acima mostra os símbolos de Christoffel em termos do tensor métrico genérico e de suas derivadas. Este mesmo resultado pode ser obtido quando se assume que a derivada covariante do tensor métrico é nula. Com (63) e suas derivadas construímos o Tensor de Riemann [18, 70, 71]:

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\nu}, \tag{64}$$

com as seguintes propriedades:

I.
$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = -R^{\mu}_{\nu\sigma\rho}$$

II. $R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma} + R^{\alpha}_{\sigma\nu\rho} + R^{\alpha}_{\rho\sigma\nu} = 0$
III. $R^{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\alpha}R^{\alpha}_{\sigma\mu\nu}$
IV. $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$
V. $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}$. (65)

A partir do conjunto de equações acima construímos mais dois objetos. O tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\nu\rho},\tag{66}$$

e também a curvatura escalar:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{67}$$

Também desempenhará um papel importante nos cálculos a derivada covariante de um quadri - vetor A_{μ} , dada por:

$$A_{\mu;\nu} \equiv \frac{dA_{\mu}}{dx^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} A_{\lambda}. \tag{68}$$

A identidade de Bianchi [70]:

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\rho;\sigma} + R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu;\rho} + R^{\alpha}_{\mu\rho\sigma;\nu} = 0, \tag{69}$$

é multiplicada pelo tensor métrico $g^{\mu\nu}$ e escolhemos $\sigma=\alpha$ para obter:

$$g^{\mu\nu}R^{\alpha}_{\mu\nu\rho;\alpha} + g^{\mu\nu}R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu;\rho} + g^{\mu\nu}R^{\alpha}_{\mu\rho;\nu} = 0, \tag{70}$$

Com o uso da propriedade (III) de (65), conseguimos o resultado:

$$2R^{\alpha}_{\rho;\alpha} - R_{;\rho} = 0. \tag{71}$$

Multiplicando a última equação por $g^{\mu\rho}$, reescrevemos como:

$$2R^{\mu\nu}_{;\nu} - g^{\mu\nu}R_{;\nu} = 0, \tag{72}$$

ou seja,

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{:\nu} = 0.$$
(73)

Define-se então o tensor de Einstein:

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R, \tag{74}$$

safisfazendo a propriedade:

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0.$$
 (75)

Da equação acima, o tensor de Einstein pode satisfazer as condições:

$$G^{\mu\nu} = 0 \tag{76}$$

ou

$$G^{\mu\nu} = k T^{\mu\nu} \tag{77}$$

sendo k uma constante a ser determinada e $T^{\mu\nu}$ o tensor energia – momento. Este Ansatz é possível pois tanto o tensor energia-momento quanto o tensor métrico têm divergência nula. A equação (77) é chamada de Equação de Einstein.

Solução Esférica da Equação de Einstein

A equação de Einstein pode ser reescrita como:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}.$$
 (78)

Como estamos interessados em estrutura estelar, é conveniente resolver a equação de Einstein para uma métrica simetricamente esférica e estática. Para isto, usaremos a métrica de Schwarzschild [71], dada por:

$$d\tau^{2} = e^{2\nu(r)}dt^{2} - e^{2\lambda(r)}dr^{2} - r^{2}d\theta^{2} - r^{2}\sin^{2}(\theta) d\phi^{2}.$$
 (79)

que representa a distância entre dois eventos sobre uma superfície esférica no contexto da Relatividade Especial. Ainda da equação acima, $e^{2\nu(r)}$ e $e^{2\lambda(r)}$ são funções que dependem da coordenada radial e precisam ser determinadas. Comparando com (51), concluímos que:

$$g_{00} = e^{2\nu(r)} \tag{80}$$

$$g_{11} = -e^{2\lambda(r)} \tag{81}$$

$$g_{22} = -r^2 (82)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2(\theta), (83)$$

e também $g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=0$ quando $\mu\neq\nu$. Portanto, a matriz que representa o tensor métrico é simétrica e diagonal. Assim, ficamos com:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\nu(r)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -e^{2\lambda(r)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$
(84)

com a matriz inversa dada por:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2\nu(r)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -e^{-2\lambda(r)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$
(85)

o que torna clara a relação $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=I$.

O primeiro passo para resolver (78) é encontrar as componentes do tensor de Ricci, dado em (66). Com a ajuda das equações (32-35) e (63), obtemos os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{00}^{1} = \nu' e^{2(\nu - \lambda)} \qquad \Gamma_{10}^{0} = \nu'
\Gamma_{11}^{1} = \lambda' \qquad \Gamma_{22}^{1} = -r e^{-2\lambda}
\Gamma_{33}^{1} = -r \sin^{2} \theta e^{-2\lambda} \qquad \Gamma_{10}^{0} = \nu'
\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{13}^{3} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma_{23}^{3} = \cot \theta
\Gamma_{33}^{2} = -\sin \theta \cos \theta$$
(86)

e as componetes do tensor de Ricci:

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right)e^{2(\nu-\lambda)}$$
(87)

$$R_{11} = \nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \tag{88}$$

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1$$
(89)

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta. (90)$$

A curvatura escalar dada em (67) pode ser escrita na forma:

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$$
(91)

Portanto, usando os resultados obtidos para o tensor de Ricci e (85), conseguimos a curvatura escalar:

$$R = e^{-2\lambda} \left(-2\nu'' + 2\lambda'\nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4\lambda'}{r} - \frac{4\nu'}{r} \right) + \frac{2}{r^2}$$
 (92)

Então multiplicamos a equação de campo de Einstein por $g^{\alpha\nu}$ para obtermos:

$$G_{\mu}^{\ \alpha} = g^{\alpha\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\ \alpha} R. \tag{93}$$

que junto com (85) e (92), as equações (39 - 42) se tornam:

$$G_0^{\ 0} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-2\lambda} \right) \right] \tag{94}$$

$$G_1^{\ 1} = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \tag{95}$$

$$G_2^2 = e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda' \nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right)$$
 (96)

$$G_3^{\ 3} = G_2^{\ 2}. \tag{97}$$

Agora vamos considerar o segundo membro da equação de Einstein (78), isto é, o termo que contém informação sobre a energia e momento do sistema. Trataremos de estrelas compactas estáticas e vamos supor que o conteúdo de matéria e energia na estrela se comporte como um fluido perfeito, de modo que o sistema seja descrito por sua densidade de energia de repouso $\epsilon(r)$ e sua pressão isotrópica p(r). Por simplicidade, nos cálculos a seguir definimos $\epsilon \equiv \epsilon(r)$ e $p \equiv p(r)$. De acordo com [70, 71], o tensor energia-momento de um fluido perfeito é descrito como:

$$T^{\mu\nu} = (p+\epsilon)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu},\tag{98}$$

com u^{μ} a quadri-velocidade do fluido definida por:

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}.\tag{99}$$

No referencial do fluido, encontramos $\vec{u}=0$ e a componente temporal da velocidade vale:

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau}. (100)$$

Recorrendo a (51) e usando (100), obtemos:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} = e^{-\nu},\tag{101}$$

bem como

$$u_0 = e^{\nu}, \tag{102}$$

esses resultados serão úteis nos cálculos subsequentes. Motivados pela álgebra tensorial, onde objetos escalares são representados por tensores com um índice covariante e contravariante iguais, reescrevemos a eq.(98) para obter:

$$T_{\mu}^{\nu} = (\epsilon + p)u_{\mu}u^{\nu} - p\delta_{\mu}^{\nu}, \tag{103}$$

Vemos que a componente temporal se relaciona com a densidade de energia

$$T_0^0 = \epsilon, \tag{104}$$

e as componentes espaciais com a pressão do sistema

$$T_i^{\ i} = -\mathbf{p},\tag{105}$$

com i=1,2,3. Usamos a expressão (46) e a equação (104) na equação de Einstein (78):

$$G_0^0 = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-2\lambda} \right) \right] = k\epsilon,$$
 (106)

e tratando o termo entre colchetes como um função na variável r, integramos para obter:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{k}{r} \int_0^r \epsilon(r') r'^2 dr'.$$
 (107)

Por outro lado, a fração de massa da estrela contida numa espessura dr e que está a

uma distância r do seu centro é:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \epsilon(r')r'^2 dr', \qquad (108)$$

de maneira que a massa total da estrela vale $M \equiv M(R)$. Então, reescrevemos a equação (107) como:

$$e^{-2\lambda} = 1 + \frac{kM(r)}{4\pi r}. (109)$$

A constante k ainda precisa ser determinada. Afim de encontrá-la, aplicaremos a equação de Einstein fora da estrela, isto é, na região onde não há fluxo de matétria e nem de momento linear e, portanto, $T_{\mu\nu}=0$. Multiplicando (78) pelo tensor métrico $g^{\mu\nu}$ e usando,

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4, (110)$$

encontramos que a curvatura escalar é:

$$R = 0. (111)$$

Usando este resultado na equação (78), o tensor de Ricci ganha a forma:

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{112}$$

o que nos leva às relações:

$$R_{00} = 0, (113)$$

$$R_{ii} = 0. (114)$$

Substituímos os resultados já obtidos para R_{00} na equação (113) para obter a expressão:

$$\left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right)e^{-2\lambda} = 0.$$
 (115)

Agora o resultado obtido para R_{11} é usado na equação (114) com i=1,

$$\left(\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}\right)e^{-2\lambda} = 0, \tag{116}$$

permitindo somar as duas útimas equações para obter a seguinte relação entre as funções $\nu(r)$ e $\lambda(r)$:

$$\nu'(r) + \lambda'(r) = 0. \tag{117}$$

Para que a métrica de Minkowski seja recuperada em regiões distantes da estrela, os coeficientes $e^{2\nu(r)}$ e $e^{2\lambda(r)}$ da métrica em (79) devem tender a 1. Assim, temos $e^{2(\nu(r)+\lambda(r))}=1$, e nos leva a:

$$\nu(r) + \lambda(r) = 0. \tag{118}$$

Por simplicidade, adotaremos a notação $\nu \equiv \nu(r)$ e $\lambda \equiv \lambda(r)$. Com os valores de R_{22} e g_{22} , conseguimos através da componente do tensor de Ricci (114) para i=2 a relação:

$$(1 + 2r\nu')e^{\nu} = 1, (119)$$

reescrita para obter:

$$\frac{d}{dr}\left(re^{2\nu}\right) = 1,\tag{120}$$

que integrada membro a membro nos dá:

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2GM}{r},\tag{121}$$

uma vez escolhida a constante de integração para ser -2GM, sendo G a constante gravitacional e M a massa gravitacional da estrela. Nesse sentido, comparamos a equação acima com a Eq. (109), sabendo que $\lambda = -\nu$ e tendo $M \equiv M(r = R)$, para encontrar a constante k:

$$k = -8\pi G, (122)$$

que aparece na equação de Einstein (78). Dessa maneira, a partir dos resultados do tensor métrico, da curvatura escalar, do tensor energia-momento e da constante de $k = -8\pi G$, podemos reescrever as componentes do tensor de Einstein como:

$$G_0^{\ 0} = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi G \epsilon(r)$$
 (123)

$$G_1^{\ 1} = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G p(r)$$
 (124)

$$G_2^2 = e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda' \nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = 8\pi G p(r)$$
 (125)

$$G_3^{\ 3} = G_2^{\ 2} \tag{126}$$

Além disso, a métrica dada em (79) ganha a forma:

$$d\tau^{2} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^{2} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^{2} - r^{2}d\theta^{2} - r^{2}\sin^{2}(\theta)d\phi^{2}$$
 (127)

As equações (123-126) relacionam as funções $\nu(r)$, $\lambda(r)$ com a densidade de energia e a pressão do sistema e podemos manipular (123) para encontrar:

$$-2\lambda' r = \left(1 - 8\pi G r^2 \epsilon(r)\right) e^{2\lambda} - 1,\tag{128}$$

e de mandeira análoga, para a equação (124), obtemos:

$$2r\nu' = (1 + 8\pi r^2 Gp(r)) e^{2\lambda} - 1.$$
 (129)

Diferenciando a equação acima em relação a r, temos:

$$2r\nu' + 2r^{2}\nu'' = e^{2\lambda} \left[2r\lambda' \left(1 + 8\pi G r^{2} p(r) - \right) \right] + e^{2\lambda} \left[16\pi G r^{2} p(r) + 8\pi G r^{3} p'(r) \right].$$
(130)

Usando (128) e (129) na equação acima, ficamos com:

$$2r^{2}\nu'' = 1 + e^{2\lambda} \left(16\pi G r^{2} p(r) + 8\pi G r^{3} p'(r) \right) + e^{4\lambda} \left(-1 + 8\pi G r^{2} \epsilon(r) \right) \left(1 + 8\pi G r^{2} p(r) \right).$$
(131)

Tomamos o quadrado da equação (129) para conseguir:

$$2r^{2}\nu'^{2} = \frac{1}{2} + e^{4\lambda} \left[1 + 8\pi G r^{2} p(r) \right]^{2} +$$

$$-e^{2\lambda} \left[1 + 8\pi G r^{2} p(r) \right].$$
(132)

Agora utilizamos a equação (126) para encontrar:

$$2r^{2}\left(\nu'' + \nu'^{2} - \lambda'\nu'\right) + 2r\left(\nu' - \lambda'\right) = 16\pi G r^{2} e^{2\lambda} p(r). \tag{133}$$

Usando as equações (128), (129), (131) e (132) na equação (133), encontramos a equação de Tolman – Oppenheimer – Volkoff:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)} \right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{r} \right]^{-1} \tag{134}$$

com

$$dM(r) = 4\pi r^2 \epsilon(r) dr \tag{135}$$

Bibliografia

- [1] A. L.Shapiro, S. A. Teukolsky. *Black Hole, White Dwarfs and Neutron Star: The Physics of Compact Objects.* (New York, Wiley, 1983).
- [2] F. Weber, Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics, High Energy Physics, Cosmology and Gravitation Series (IOP Publishing, Bristol, Great Britain, 1999).
- [3] F. Weber, R. Negreiros, *QCD in neutron stars and strange stars*, arXviv: 1101.5606.
- [4] F. Weber, Prog. Part. Nucl. Phys. **54** (2005) 193.
- [5] Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott, and R. A. Collins. *Observation of a rapidly pulsating radio source*. Nature (London), 217, 709, (1968).
- [6] L. Xiaoyu, X. Renxin, Quark-cluster Stars: the structure, arXiv: 1201.3758.
- [7] F. Özel, Nature **441**, 1115 (2006).
- [8] H. Rodrigues, S.B. Duarte, J.C.T. Oliveira. Int. Jour. Mod. Phys. D 19, 1447 (2010).
- [9] D. Ivanenko e D.E. Kurdgelaidze: *Hypothesis concerning quark stars*. Astrophysics (Russ.) 1, No.4, (1965).
- [10] D. Ivanenko e D.E. Kurdgelaidze: Remarks on quark stars. Nuevo Cimento, vol.2, No.1, (1969).
- [11] N. Itoh, Prog. Theor. Phys. 44 291 (1970).

[12] M. Alford, D. Blaschke, A. Drago, T.Klahn, G. Pagliara, J. Schaffner-Bielich, Nature 445, E7 (2007).

- [13] H. Li, X. L. Luo, Y. Jiang, H. S. Zong, Phys. Rev. D83, 025012 (2011)
- [14] Demorest P.B., Pennucci T., Ransom S.M., Roberts M.S.E. e Hessels J.W.T., Nature 467, 1083, (2010).
- [15] S. Weissenborn, I. Sagert, G. Pagliara, M. Hempel, J. Schaffner Bielich, Astrophys. J. 740: L14, (2011).
- [16] J. M. Lattimer, M. Prakash 2010, arXiv: 1012.3208.
- [17] M. G. B. de Avellar, J. Horvath, L. Paulucci. Phys.Rev. D 84 (2011).
- [18] Norman K. Glendenning, Compact Stars, Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, 2000).
- [19] L. Landau. On the Theory of Stars. Phys. Z. Sowjetunion 1, 285 (1932).
- [20] Chadwick, James. On the possible existence of a neutron. Nature 129, 312 (1932).
- [21] Baade, Walter and Zwicky, Fritz. Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays. Phys. Rev. 46 (1): 76 (1934).
- [22] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, *On massive neutron cores.* Phys. Rev. **55**, 734 (1939).
- [23] C. E. Rhoades, R. Ruffini, Phys. Rev. Lett. **32**, 6 (1972)
- [24] Lattimer, J. M. e Prakash, M. Neutron Star Structure and the Equation of State. ApJ 550, 426 (2001).
- [25] Pandharipande, V. R., Smith, R. A., Nucl. Phys. A 237, 507 (1975).
- [26] Friedman, B., Pandharipande, V. R., Nucl. Phys. A, **361**, 502 (1975).
- [27] Muther, H., Prakash, M., Ainsworth, T. L., Phys. Lett.B199, 469 (1987).
- [28] Wiringa, R. B., Fiks, V., Fabrocine, A., Phys. Rev. C 38, 1010 (1988).

- [29] M. Prakash, T.L. Ainsworth, J.M. Lattimer, Phys. Rev. Lett. **61**: 22 (1988)
- [30] Glendenning, N. K., Moszkowski, S. A., Phys. Rev. Lett. **67**, 2414 (1991).
- [31] M. Prakash, J. R. Cooke, J. M. Lattimer, Phys. Rev.D 52, 661 (1995).
- [32] M. Prakash, J.R. Cooke, J.M. Lattimer., Phys. Rev.D 52, 661 (1995)
- [33] Engvik, L., Hjorth-Jensen, M., Osnes, E., Bao, G., Ostgaard, E., ApJ 469, 794 (1991).
- [34] Muller, H., Serot, B. D., Nucl. Phys. A 606, 508 (1996).
- [35] Akmal, A., Pandharipande, V.R., Phys. Rev. C 56, 61 (1997).
- [36] N. K. Glendenning, Schaffner-Bielich, J., Phys. Rev. C 60 (1999).
- [37] J. M.Lattimer, M. Prakash, astro-ph/0612440.
- [38] David H. Staelin, Edward C. Reifenstein. *Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula*. Science, **162**, 1481 (1968).
- [39] F. Pacini,. "Rotating Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants". Nature **219**, 5150 (1968).
- [40] Gold, T. "Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources". Nature **218**, 5143 (1968).
- [41] V. I. Kondratiev, M. A. McLaughlin, D. R. Lorimer, M. Burgay, A. Possenti, R. Turolla, S. B. Popov e S. Zane. The Astrophysical Journal, Volume 702, 692 (2009).
- [42] N. K. Glendenning, F. Weber, astro-ph/0010336v1.
- [43] N. K. Glendenning, F. Weber, Astrophys. J. **559**, L 119 (2001).
- [44] S. Chandrasekhar, Phys. Rev. Lett. 12, 114 (1964).
- [45] J. M. Bardeen, K. S. Thorne, and D. W. Meltzer, Astrophys. J. 145, 505 (1966).

- [46] D.A. Fogaça, F.S. Navarra, Phys. Lett. B **700**, 236 (2011).
- [47] D. Griffiths, "Introduction to Elementary Particles", John Wiley & Sons Inc. , 1987.
- [48] T. Muta, "Foundations of Quantum Chromodynamics", World Scientific Publishing Co., 1987.
- [49] W. Greiner, S. Schramm and E. Stein, "Quantum Chromodynamics", Springer, 1989.
- [50] L. S. Celenza and C. M. Shakin, Phys. Rev. D 34, 1591 (1986).
- [51] X. Li and C. M. Shakin, Phys. Rev. D 71, 074007 (2005).
- [52] D. E. Miller, Phys. Rep. **443**, 55 (2007).
- [53] B.D. Serot and J.D. Walecka, Advances in Nuclear Physics 16, 1 (1986).
- [54] J.D. Walecka, "Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics", Second Edition, Imperial College Press and World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.
- [55] H. Tezuka, "Mean Field Approximation to QCD", INS-Rep.-643 (1987).
- [56] I. Lovas, W. Greiner, P. Hraskó and E. Lovas, Phys. Lett. B **156**, 255 (1985).
- [57] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, "Lagrangian Procedures for Higher Order Field Equations", Revista Brasileira de Fsica, Vol.17, n1, 14 (1987).
- [58] N.D. Minh, "The principle of least action for fields containing higher order derivatives", arXiv:0807.4431 [hep-th].
- [59] K. Johnson, Acta Physica Polonica, **B6**, 6 (1975).
- [60] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn, V.F. Weisskopf, Phys. Rev. D9, 3471 (1974.)
- [61] A. A. Natale, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 199, 178 (2010).
- [62] A. C. Aguilar and A. A. Natale, JHEP **0408**, 057 (2004).

[63] D. Dudal, S. P. Sorella, N. Vandersickel and H. Verschelde, Phys. Rev. D 77, 071501 (2008); D. Dudal, J. A. Gracey, S. P. Sorella, N. Vandersickel and H. Verschelde, Phys. Rev. D 78, 065047 (2008).

- [64] E. Witten. Phys. Rev.D **30**, 272 (1984).
- [65] G. Lugones, J. Horvath. Phys. Rev. D 66: 074017 (2002).
- [66] S. Chakrabarty, Phys. Rev. D 43, 627 (1991).
- [67] E. Farhi, R.L. Jaffe. Phys. Rev. D 30, 2379 (1984).
- [68] F. Douchin e P. Haensel astro-ph/011109.
- [69] R.C.Tolman, Phys. Rev. **55**, 364 (1939).
- [70] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity (John Wiley and Sons, New York, 1972).
- [71] Ray D'inverno, Introducing Eisntein's Relativity, (Oxford University Press, 1992).