

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

**Отчёт**  
**По лабораторной работе №6**  
**«Работа с системой компьютерной вёрстки T<sub>E</sub>X»**  
по дисциплине «Информатика»

Вариант 73

Выполнил: Решетов С.П.,  
группа Р3106  
Преподаватель: Белозубов А.В.

г. Санкт-Петербург

~ 2022 ~

**Лемма.** Пусть  $KLN$  - правильный треугольник,  $M$  - любая точка плоскости. Тогда

$$MN \leq MK + ML, \dots, \quad (2)$$

причем  $MN = MK + ML$  в том и только том случае, если  $M$  лежит на дуге описанной окружности, где  $\angle KML = 120^\circ$ .

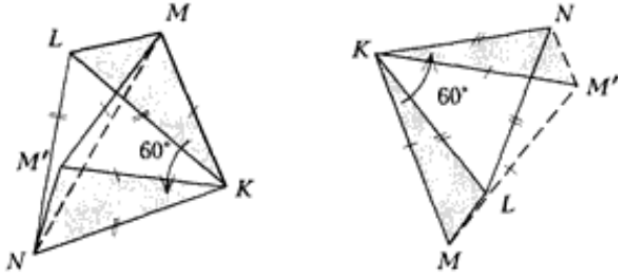


Рис. 1

Доказательство (рис.1). Повернём  $\triangle KML$  вокруг точки  $K$  на  $60^\circ$  так, чтобы  $L$  совпала с  $N$ . Пусть при этом повороте точка  $M$  переходит в  $M'$ . Треугольник  $KMM'$  правильный, поэтому  $MM' + M'N = MK + ML$ . Точка  $M'$  лежит на отрезке  $MN$  в том и только том случае, если  $\angle KM'N = \angle KML = 120^\circ$  и  $M$  лежит вне  $\triangle KNL$ .

**Замечание.** Из решения ясно, что существует единственный "паук для которого достигается равенство: за  $H'$  и  $G'$  надо взять точки пересечения  $CF$  с описанными окружностями треугольников  $AEF$  и  $BCD$ .

Н.Васильев

**M1530.** Пусть  $p$  - нечетное простое число. Найдите количество подмножеств  $A$  множества  $1, 2, \dots, 2p$  таких, что

(i)  $A$  содержит ровно  $p$  элементов;

(ii) сумма всех элементов из  $A$  делится на  $p$ .

Запись  $a = b$  всюду ниже означает, что разность  $a - b$  делится на  $p$ . Мы докажем, что ответ в задаче таков:

$$(C_{2p}^p - 2)/p + 2,$$

где  $C_{2p}^p = (2p)!/(p!)^2$  - число всех подмножеств из  $p$  элементов множества из  $2p$  элементов.

Приведём два разных доказательства.

Первое более элементарно.

Разобьём все  $p$  - элементарные подмножества  $A$  множества  $1, 2, \dots, p, p+1, \dots, 2p$ , отличные от «наименьшего»  $B = 1, 2, \dots, p$  и «наибольшего»  $= p+1, \dots, 2p$ , на группы по  $p$  подмножеств в каждой, следующим образом. Ясно, что если  $A \neq B$  и  $A \neq C$ , то  $A \cap B$  и  $A \cap C$  непусты. Два подмножества  $A$  и  $A'$  отнесем к одной группе, если  $A \cap C = A' \cap C \cap B$  получается из  $A \cap B$  «циклическим сдвигом» по модулю  $p$ , т.е. если существует  $m$ ,  $0 < m < p$ , такое что  $x \in A \cap B \Leftrightarrow y = x + m \in A' \cap B$ . Ясно, что кроме  $A$  в ту же группу попадут еще  $p-1$  подмножеств. Обозначим через  $s(A)$  сумму элементов в  $A$ . Пусть  $A \cap B$  состоит из  $q$  элементов;  $q$  одно и то же для всех  $A'$  из той же группы, что  $A$ , причем  $s(A') - s(A) = mq$  не делится на  $p$ , если  $A' \neq A$ . Поэтому в каждой группе найдется ровно одно подмножество  $A$ , для которого  $s(A) = 0$ . Остается заметить, что  $s(B) = s(C) = 0$  и что число групп равно  $(C_{2p}^p - 2)/p$ .

Второе доказательство еще красивее, но требует знания комплексных чисел и нетривиальных теорем о многочленах.

Пусть  $\lambda$  - один из примитивных корней  $p$ -й степени из 1, например,  $\lambda = \cos(2\pi/p) + i \sin(2\pi/p)$ .

Найдем сумму

$$\sigma = \sum \lambda^{i_1 + \dots + i_p} = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \lambda^j \quad (1)$$

по всем подмножествам  $i_1, i_2, \dots, i_p \subset 1, 2, \dots, 2p$ ;  $n_j$  во второй сумме - число подмножеств, для которых  $i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_p^2 = j \pmod{p}$ . Сумма  $\sigma$  - коэффициент при  $z^p$  многочлена

$$\prod_{k=1}^{2p} (z - \lambda^k) = \left( \prod_{k=0}^{p-1} (z - \lambda^k) \right)^2 = (z^p - 1)^2 = z^{2p} - 2z + 1.$$

поэтому  $\sigma = 2$ . Но когда из (1) следует, что  $\sigma$  - корень многочлена степени  $p$

$$(n_0 - 2) + n_1 z + \dots + n_{p-1} z^{p-1} = 0,$$

тогда как (поскольку  $p$  простое) единственные многочлены с рациональными коэффициентами степени меньше  $p$ , имеющие корнем  $\lambda$ , это -

$$1 + z + \dots + z^{p-1} = 0 \quad (2)$$

и получающиеся из него умножением на число<sup>1</sup>. Поэтому

$$n_0 - 2 = n_1 = n_2 = \dots = n_{p-1}.$$

Но  $n_0 + n_1 + \dots + n_{p-1} = C_{2p}^p$ . Отсюда получаем

$$n_0 = p^f - 1(C_{2p}^p - 2) + 2.$$

М.Кучма, Э.Лю

**Ф1538.** Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Его ускорение линейно падает с высотой от начального значения  $a_0$  до нуля на высоте  $H$ . Какую скорость приобретет шар, достигнув высоты  $H$ ? Какая скорость будет у шара на половине этой высоты? За какое время шар поднимется на высоту  $H$ ? Проще всего найти скорость из энергетических соображений - через работу полной силы, действующей на шар, а силу определить через ускорение шара:

$$F_{cp} H = m \frac{a_0}{2} H = \frac{mv^2}{2}, v = \sqrt{a_0 H}.$$

Аналогично находим и скорость на половине высоты - можно взять «среднее» значение силы или подсчитать работу по площади трапеции:

$$v_1 = \sqrt{0.75 a_0 H}.$$

Время подъема можно найти из аналогии с гармоническими колебаниями. Посмотрим на «обратное» движение шара с некоторой начальной скоростью из верхней

<sup>1</sup>См. «Алгебру» Ван-дер-Вардена или другой учебник, где рассматривается «многочлены деления круга»

бы тележка и груз могли ехать вместе, без проскальзывания? Каким будут ускорения тел, если тянуть за нить с силой  $F = 20H$ ?

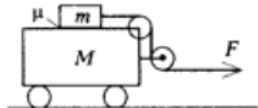


Рис. 2

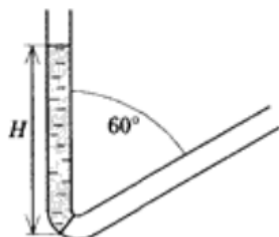


Рис. 3

Ф1555. Тонкая стеклянная трубка, изогнутая в виде буквы V с углом  $\alpha = 60^\circ$  (рис. 3), закреплена неподвижно. Одно колено трубки отделено от другого закрытым краном. В вертикальное колено наливают воду до высоты  $H$ , затем кран открывают, и вода начинает перетекать в другое колено трубки. Считая, что вода не перемешивается и выделения тепла не происходит, найдите период происходящего в системе процесса.

А. Черноуцан

Ф1556. В хорошо откачанный сосуд под поршень ввели некоторое количество воды и начали медленно уменьшать объем сосуда, поддерживая постоянную температуру. В таблице приведены давления для нескольких значений объема:

$V, \text{л}$	18	16	14	12	10
$p, \text{кПа}$	20	23	24	24	24

Какая температура поддерживалась в этом опыте? При каком значении объема давление внутри сосуда начнет резко возрастать?

М.Учителев

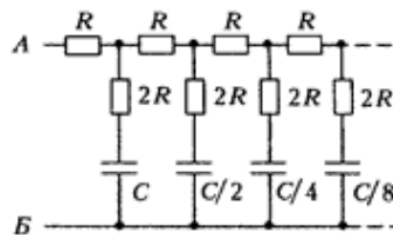


Рис. 4

времени? Какое количество теплоты выделится при этом в резисторе сопротивлением  $R$ , подключенном к точке A?

Д.Александров

Ф1560. На горизонтальной поверхности стола лежит длинный тонкий брусок прямоугольного сечения (рис.5). На один его конец у самого торца намотаны вплотную друг к другу  $N = 20$  витков очень тонкого провода. Магнитное поле с индукцией  $B = 0,5$  Тл направленно вверх, перпендикулярно поверхности стола. Какой величины ток нужно пропустить по проводу, чтобы брусок начал приподниматься? Плотность материала бруска  $\rho = 200 \text{ кг/м}^3$ , длина бруска  $L = 0,1$  м.

А. Черноуцан

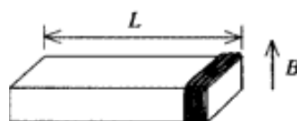


Рис. 5

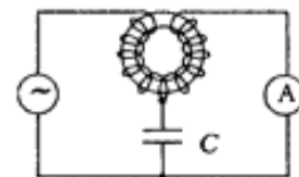
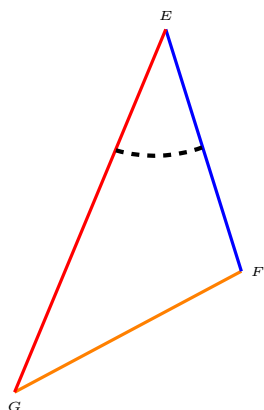
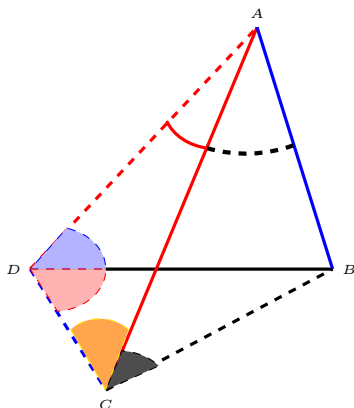





Рис. 6



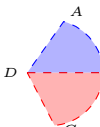

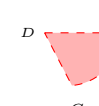
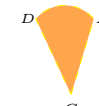
если у двух треугольников по две стороны соответственно равны друг другу ( $\overline{AB} = \overline{EF}$  и  $\overline{AD} = \overline{GE}$ ), и угол заключенный между

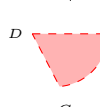

ними в одном  больше, чем в другом

, то сторона  $\overline{DB}$  противолежащая большему углу больше стороны, противолежащей меньшему  $\overline{FG}$ .

Сделаем   $\overline{CB} = \overline{GF}$  (пр. I.23),  
и  $\overline{CA} = \overline{GE}$  (пр. I.3),  
проведем  $\overline{CD}$  и  $\overline{BC}$ .

Поскольку  $\overline{CA} = \overline{AD}$  (акс. I, гип., постр.)

$\therefore$    $=$   (пр. I.5), но   $<$  ,

и  $\therefore$    $<$  ,

$\therefore \overline{DB} > \overline{BC}$  (пр. I.19)

но  $\overline{BC} = \overline{FG}$  (пр. I.4)

$\therefore \overline{DB} > \overline{FG}$

Ч. Т. Д.