

Лемма. Пусть KLN - правильный треугольник, M - любая точка плоскости. Тогда

$$MN \leq MK + ML, \dots, \quad (2)$$

причем $MN = MK + ML$ в том и только том случае, если M лежит на дуге описанной окружности, где $\angle KML = 120^\circ$.

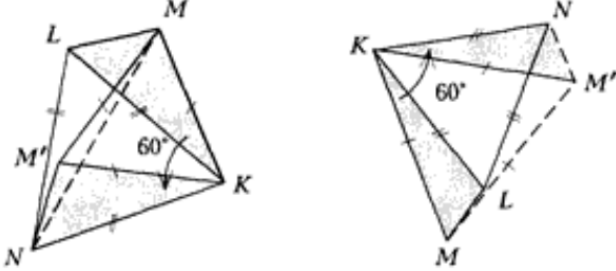


Рис. 1

Доказательство (рис.1). Повернём $\triangle KML$ вокруг точки K на 60° так, чтобы L совпала с N . Пусть при этом повороте точка M переходит в M' . Треугольник KMM' правильный, поэтому $MM' + M'N = MK + ML$. Точка M' лежит на отрезке MN в том и только том случае, если $\angle KM'N = \angle KML = 120^\circ$ и M лежит вне $\triangle KNL$.

Замечание. Из решения ясно, что существует единственный "паук" для которого достигается равенство: за H' и G' надо взять точки пересечения CF с описанными окружностями треугольников AEF и BCD .

Н.Васильев

M1530. Пусть p - нечетное простое число. Найдите количество подмножеств A множества $1, 2, \dots, 2p$ таких, что

(i) A содержит ровно p элементов;

(ii) сумма всех элементов из A делится на p .

Запись $a = b$ всюду ниже означает, что разность $a - b$ делится на p . Мы докажем, что ответ в задаче таков:

$$(C_{2p}^p - 2)/p + 2,$$

где $C_{2p}^p = (2p)!/(p!)^2$ - число всех подмножеств из p элементов множества из $2p$ элементов.

Приведём два разных доказательства.

Первое более элементарно.

Разобьём все p - элементарные подмножества A множества $1, 2, \dots, p, p+1, \dots, 2p$, отличные от «наименьшего» $B = 1, 2, \dots, p$ и «наибольшего» $= p+1, \dots, 2p$, на группы по p подмножеств в каждой, следующим образом. Ясно, что если $A \neq B$ и $A \neq C$, то $A \cap B$ и $A \cap C$ непусты. Два подмножества A и A' отнесем к одной группе, если $A \cap C = A' \cap C \cap B$ получается из $A \cap B$ «циклическим сдвигом» по модулю p , т.е. если существует m , $0 < m < p$, такое что $x \in A \cap B \Leftrightarrow y = x + m \in A' \cap B$. Ясно, что кроме A в ту же группу попадут еще $p-1$ подмножеств. Обозначим через $s(A)$ сумму элементов в A . Пусть $A \cap B$ состоит из q элементов; q одно и то же для всех A' из той же группы, что A , причем $s(A') - s(A) = mq$ не делится на p , если $A' \neq A$. Поэтому в каждой группе найдется ровно одно подмножество A , для которого $s(A) = 0$. Остается заметить, что $s(B) = s(C) = 0$ и что число групп равно $(C_{2p}^p - 2)/p$.

Второе доказательство еще красивее, но требует знания комплексных чисел и нетривиальных теорем о многочленах.

Пусть λ - один из примитивных корней p -й степени из 1, например, $\lambda = \cos(2\pi/p) + i \sin(2\pi/p)$.

Найдем сумму

$$\sigma = \sum \lambda^{i_1 + \dots + i_p} = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \lambda^j \quad (1)$$

по всем подмножествам $i_1, i_2, \dots, i_p \subset 1, 2, \dots, 2p$; n_j во второй сумме - число подмножеств, для которых $i_1^j + i_2^j + \dots + i_p^j = j \pmod{p}$. Сумма σ - коэффициент при z^p многочлена

$$\prod_{k=1}^{2p} (z - \lambda^k) = \left(\prod_{k=0}^{p-1} (z - \lambda^k) \right)^2 = (z^p - 1)^2 = z^{2p} - 2z + 1.$$

поэтому $\sigma = 2$. Но когда из (1) следует, что σ - корень многочлена степени p

$$(n_0 - 2) + n_1 z + \dots + n_{p-1} z^{p-1} = 0,$$

тогда как (поскольку p простое) единственные многочлены с рациональными коэффициентами степени меньше p , имеющие корнем λ , это -

$$1 + z + \dots + z^{p-1} = 0 \quad (2)$$

и получающиеся из него умножением на число¹. Поэтому

$$n_0 - 2 = n_1 = n_2 = \dots = n_{p-1}.$$

Но $n_0 + n_1 + \dots + n_{p-1} = C_{2p}^p$. Отсюда получаем

$$n_0 = p^f - 1(C_{2p}^p - 2) + 2.$$

М.Кучма, Э.Лю

Ф1538. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Его ускорение линейно падает с высотой от начального значения a_0 до нуля на высоте H . Какую скорость приобретет шар, достигнув высоты H ? Какая скорость будет у шара на половине этой высоты? За какое время шар поднимется на высоту H ? Проще всего найти скорость из энергетических соображений - через работу полной силы, действующей на шар, а силу определить через ускорение шара:

$$F_{cp} H = m \frac{a_0}{2} H = \frac{mv^2}{2}, v = \sqrt{a_0 H}.$$

Аналогично находим и скорость на половине высоты - можно взять «среднее» значение силы или подсчитать работу по площади трапеции:

$$v_1 = \sqrt{0.75 a_0 H}.$$

Время подъема можно найти из аналогии с гармоническими колебаниями. Посмотрим на «обратное» движение шара с некоторой начальной скоростью из верхней

¹См. «Алгебру» Ван-дер-Вардена или другой учебник, где рассматривается «многочлены деления круга»

бы тележка и груз могли ехать вместе, без проскальзывания? Каким будут ускорения тел, если тянуть за нить с силой $F = 20H$?

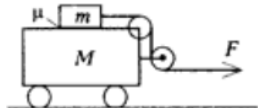


Рис. 2

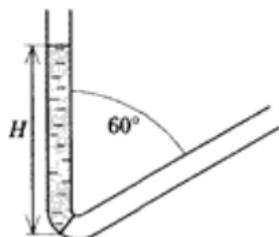


Рис. 3

Ф1555. Тонкая стеклянная трубка, изогнутая в виде буквы V с углом $\alpha = 60^\circ$ (рис. 3), закреплена неподвижно. Одно колено трубки отделено от другого закрытым краном. В вертикальное колено наливают воду до высоты H , затем кран открывают, и вода начинает перетекать в другое колено трубки. Считая, что вода не перемешивается и выделения тепла не происходит, найдите период происходящего в системе процесса.

А. Черноуцан

Ф1556. В хорошо откачанный сосуд под поршень ввели некоторое количество воды и начали медленно уменьшать объем сосуда, поддерживая постоянную температуру. В таблице приведены давления для нескольких значений объема:

$V, \text{л}$	18	16	14	12	10
$p, \text{кПа}$	20	23	24	24	24

Какая температура поддерживалась в этом опыте? При каком значении объема давление внутри сосуда начнет резко возрастать?

М. Учителев

small text

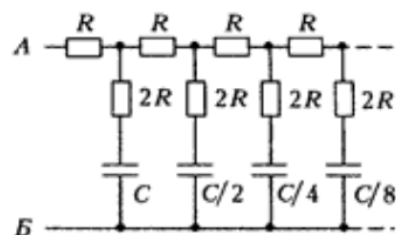


Рис. 4

времени? Какое количество теплоты выделится при этом в резисторе сопротивлением R , подключенном к точке A?

Д. Александров

Ф1560. На горизонтальной поверхности стола лежит длинный тонкий брусок прямоугольного сечения (рис. 5). На один его конец у самого торца намотаны вплотную друг к другу $N = 20$ витков очень тонкого провода. Магнитное поле с индукцией $B = 0,5 \text{ Тл}$ направлено вверх, перпендикулярно поверхности стола. Какой величины ток нужно пропустить по проводу, чтобы брусок начал приподниматься? Плотность материала бруска $\rho = 200 \text{ кг/м}^3$, длина бруска $L = 0,1 \text{ м}$.

А. Черноуцан

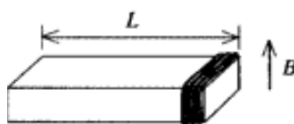


Рис. 5

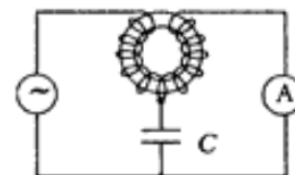


Рис. 6