Лемма. *Пусть KLN - правильный треугольник, M - любая точка плоскости. Тогда*

$$MN \leq MK + ML...,. \tag{2}$$

причем MN = MK + ML в том и только том случае, если M лежит на дуге описанной окружности, где $\angle KML = 120°$.

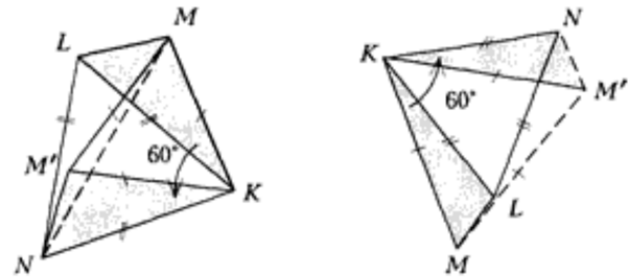

Рис. 1

Доказательство (рис.1). Повернём $\triangle KML$ вокруг точки K на $60°$ так, чтобы L совпала с N. Пусть при этом повороте точка M переходит в M'. Треугольник KMM' правильный, поэтому $MM' + M'N = MK + ML$. Точка M' лежит на отрезке MN в том и только том случае, если $\angle KM'N = \angle KML = 120°$ и M лежит вне $\triangle KNL$.
Замечание. Из решения ясно, что существует единственный "паук для которого достигается равенство: за H' и G' надо взять точки пересечения CF с описанными окружностями треугольников AEF и BCD.

Н.Васильев

М1530. *Пусть p - нечетное простое число. Найдите количество подмножеств A множества 1, 2, ..., 2p таких, что*
(i)A содержит ровно p элементов;
(ii)сумма всех элементов из A делится на p.
Запись $a = b$ всюду ниже означает, что разность a - b делится на p. Мы докажем, что ответ в задаче таков:

$$(C_{2p}^{p} - 2)/p + 2,$$

где $C_{2p}^{p} = (2p)!/(p!)^2$ - число всех подмножеств из p элементов множества из $2p$ элементов.
Приведём два разных доказательства.
Первое более элементарно.
Разобьем все p - элементарные подмножества A множества 1, 2, ..., p, $p+1$, ..., $2p$, отличные от «наименьшего» $B = 1$, 2, ..., p и «наибольшего» $= p+1$, ..., $2p$, на группы по p подмножеств в каждой, следующим образом. Ясно, что если $A \neq B$ и $A \neq C$, то $A \cap B$ и $A \cap C$ непусты. Два подмножества A и A' отнесем к одной группе, если $A \cap C = A' \cap CA' \cap B$ получается из $A \cap B$ «циклическим сдвигом» по модулю p, т.е. если существует m, $0 < m < p$, такое что $x \in A \cap B \Leftrightarrow y = x + m \in A' \cap B$. Ясно, что кроме A в ту же группу попадут еще $p-1$ подмножеств. Обозначим через $s(A)$ сумму элементов в A. Пусть $A \cap B$ состоит из q элементов; q одно и то же для всех A' из той же группы, что A, причем $s(A') - s(A) = mq$ не делится на p, если $A' \neq A$. Поэтому в каждой группе найдется ровно одно подмножество A, для которого $s(A) = 0$, Остается заметить, что $s(B) = s(C) = 0$ и что число групп равно $(C_{2p}^{p} - 2)/p)$.

Второе доказательство еще красивее, но требует знания комплексных чисел и нетривиальных теорем о многочленах.
Пусть λ - один из примитивных корней p-й степени из 1, например, $\lambda = \cos(2\pi/p) + i\sin(2\pi/p)$.
Найдем сумму

$$\sigma = \sum \lambda^{i_1 + \ldots + i_p} = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \lambda^j \tag{1}$$

по всем подмножествам $i_1, i_2, ..., i_p \subset 1,2,...,2p$; n_j во второй сумме - число подмножеств, для которых $i_i^j + i_2 + ... + i_p = j(mod p)$. Сумма σ - коэффицинт при z^p многочлена

$$\prod_{k=1}^{2p}(z - \lambda^k) = \left(\prod_{k=0}^{p-1}(z - \lambda^k)\right)^2 = (z^p - 1)^2 = z^{2p} - 2z + 1.$$

поэтому $\sigma = 2$. Но когда из (1) следует, что σ - корень многочлена степени p

$$(n_0 - 2) + n_1 z + ... + n_{p-1} z^{p-1} = 0,$$

тогда как (поскольку p простое) единственные многочлены с рациональными коэффициентами степени меньше p, имеющие корнем λ, это -

$$1 + z + ... + z^{p-1} = 0 \tag{2}$$

и получающиеся из него умножением на число[1]. Поэтому

$$n_0 - 2 = n_1 = n_2 = ... = n_{p-1}.$$

Но $n_0 + n_1 + ... + n_{p-1} = C_{2p}^{p}$. Отсюда получаем

$$n_0 = p^f - 1(C_{2p}^{p} - 2) + 2.$$

М.Кучма, Э.Лю

Ф1538. *Воздушный шар начинает подниматься с поверхности Земли. Его ускорение линейно спадает с высотой от начального значения a_0 до нуля на высоте H. Какую скорость приобретет шар, достигнув высоты H? Какая скорость будет у шара на половине этой высоты? За какое время шар поднимется на высоту H?* Проще всего найти скорость из энергитических соображений - через работу полной силы, действующей на шар, а силу определить через ускорение шара:

$$F_{cp} H = m\frac{a_0}{2} H = \frac{mv^2}{2}, v = \sqrt{a_0 H}.$$

Аналогично находим и скорость на половние высоты - можно взять «среднее» значение силы или подсчитать работу по площади трапеции:

$$v_1 = \sqrt{0.75 a_0 H}.$$

Время подъема можно найти из аналогии с гармоническими колебаниями. Посмотрим на «обратное» движение шара с некоторой начальной скоростью из верхней

---

[1]См.«Алгебру» Ван-дер-Вардена или другой учебник, где рассматривается «многочлены деления круга»

бы тележка и груз могли ехать вместе, без проскальзывания? Каким будут ускорения тел, если тянуть за нить с силой $F = 20H$?

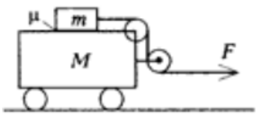

Рис. 2

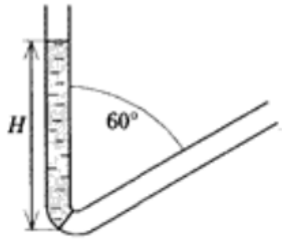

Рис. 3

Ф1555. Тонкая стеклянная трубка, изогнутая в виде буквы V с углом $a = 60°$ (рис. 3), закреплена неподнижно. Одно колено трубки отделено от другого закрытым краном. В вертикальное колено наливают воду до весоты , затем кран открывают, и вода начинает перетекать в другое колено трубки. Считая, что вода не перемешивается и выделения тепла не происходит, найдите пернод происходящего в системе процесса.

А. Черноуцан

Ф1556. В хорошо откачанный сосуд под поршень ввели некоторое колнчество воды н начали медленно уменьшать объем сосуда, поддерживая постоянную температуру. В таблице приведены давления для нескольких значений объема:

V,л	18	16	14	12	10
р,кПА	20	23	24	24	24

Какая температура поддерживалась в этом опыте? При каком значения объема давление внутри сосуда начнет резко возрастать?

М. Учителев

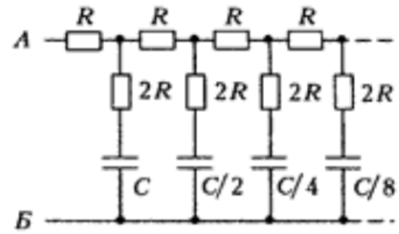

Рис. 4

времени? Какое количество теплоты выделится при этом в резисторе сопротивлением R, подключенном к точке A?

Д. Александров

Ф1560. На горизонтальной поверхности стола лежит длинный тонкий брусок прямоугольного сечения (рис.5). На один его конец у самого торца намотаны вплотную друг к другу $N = 20$ витков очень тонкого провода. Магнитное поле с индукцией $= 0{,}5$ Тл направленно вверх, перпендикулярно поверхности стола. Какой величины ток нужно пропустить по проводу, чтобы брусок начал приподниматься? Плотность материала бруска - $200/^3$, длина бруска $L = 0{,}1$ м.

А. Черноуцан

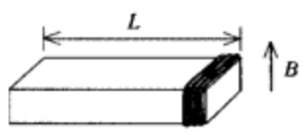

Рис. 5

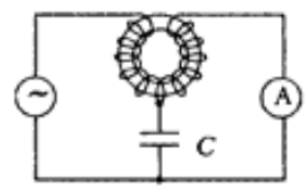

Рис. 6