

## Report 4 – Reduction

소프트웨어학부 2021041017 김규현

Main Task: Prove that the k-SAT problem is polynomially reducible to the independent set problem.

Instance of (k-SAT) Problem(Ref: Lecture 12. 27P):

$$F = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$$

$$k = 3$$

(k-SAT)  $\leq_p$  (Independent set) ?

1. Design a polynomial-time reduction algorithm R.

-  $I_{k-SAT}(F, k) \rightarrow I_{Independent}(G, k)$

Sol)

Goal: 주어진 k-SAT 문제 인스턴스 ( $F, k$ )로부터 Independent Set 문제 인스턴스 ( $G, k'$ )를 다행시간 안에 구성한다. 여기서  $k = 3$ 이고,  $F$ 는 총 3개의 절( $m = 3$ )을 가진다.

Algorithm R( $F, k$ ):

1. 그래프  $G = (V, E)$ 를 빈 그래프로 시작한다.
2. 각 절(Clause)마다 리터럴(Literal) 3개를 정점 3개로 매핑한다.

- $C_1 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \rightarrow$  정점  $v_{11}, v_{12}, v_{13}$
- $C_2 = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \rightarrow$  정점  $v_{21}, v_{22}, v_{23}$
- $C_3 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \rightarrow$  정점  $v_{31}, v_{32}, v_{33}$
- 이렇게 총 9개 정점이 생성된다.

3. 각 절별로 해당하는 3개 정점 사이를 완전 연결(fully-connected: 그래프의 정점 집합 내의 모든 서로 두 정점 사이에 간선이 존재하는 상태)한다. 예를 들어,  $C_1$ 에 대응하는  $v_{11}, v_{12}, v_{13}$  사이 모두에 간선을 추가한다. 이로써 한 절에서 Independent Set에 포함될 수 있는 정점은 최대 하나이다.
4. 서로 다른 절 사이에서 모순되는 리터럴(ex:  $x_i, \neg x_i$ )에 대응하는 정점 쌍 사이에 간선을 추가한다. (ex:  $C_1$ 의  $\neg x_1$ 와  $C_2$ 의  $x_1$  등 → 해당 정점 쌍 사이에 간선 추가) 이를 통해 모순되는 리터럴들이 동시에 Independent Set에 들어갈 수 없게 만든다.
5. Independent Set 크기 목표  $k'$ 를 절의 개수  $m = 3$ 으로 설정한다. 각 절에서 하나의 정점을 선택하면 총 3개의 정점을 Independent Set으로 구성할 수 있어야 한다.

## 2. Design an efficient algorithm for independent set problem.

Sol)

백트래킹 기반 분기 한정(Branch-and-Bound) 알고리즘을 제시한다.

알고리즘 Independent Set(G, k):

### 1. 기저사례(Base Case):

- $k \leq 0$ : Independent Set 크기 요구를 충족하였으므로 True 반환.
- $V$ 가 비었고  $k > 0$ : 가능한 정점이 없으므로 False 반환.

### 2. 아직 고려하지 않은 정점 중 하나를 $v$ 로 선택한다.

### 3. 분기/Branch):

- $v$ 를 Independent Set에 포함하거나 포함하지 않는 두 가지 경우를 고려한다:

3.1. Case A:  $v$  포함  $\rightarrow v$ 와 인접한 정점을 제거 후 재귀 호출.

3.2. Case B:  $v$  미포함  $\rightarrow v$ 만 제거 후 재귀 호출.

### 4. 두 경우 모두 False이면 Independent Set을 찾을 수 없으므로 False 반환.

**3. Prove:  $G$  has an independent set of size  $k \Leftrightarrow F$  is satisfiable.**

Sol)

$$(F, k) \in k-SAT \Leftrightarrow (G, k') \in \text{Independent Set}.$$

1. ( $\Rightarrow$ ): 만약  $F$ 가 만족가능하다면, 각 절에서 참이 되는 리터럴을 하나씩 선택할 수 있다. 해당 리터럴에 대응하는 정점  $G$ 에서 Independent Set으로 선택한다. 절 내부는 완전 연결로 하나만 선택 가능, 모순 리터럴 간 간선으로 인해 리터럴 동시 선택 불가. 따라서 크기 3의 Independent Set이  $G$ 에 존재한다.
2. ( $\Leftarrow$ ): 만약  $G$ 의 크기 3의 Independent Set이 존재한다면, 이는 3개의 절 각각에서 하나의 정점을 선택한 것이다. 선택된 정점에 해당하는 리터럴을 참으로 설정하면 모든 절이 만족되고, 모순 리터럴을 동시에 Independent Set에 넣지 않았으므로 논리적 모순이 없다. 결과적으로  $F$ 는 만족 가능하다.
3. 결론적으로, K-SAT 문제는 다행 시간 내에 Independent Set 문제로 환원 가능하다.
4.  $\therefore (k-SAT) \leq_P (\text{Independent Set})$  는 참(true)이다.