

Report 4 – Reduction

소프트웨어학부 2021041017 김규현

Main Task: Prove that the k-SAT problem is polynomially reducible to the independent set problem.

Instance of (k-SAT) Problem(Ref: Lecture 12. 27P):

$$F = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$$
$$k = 3$$

$(k\text{-SAT}) \leq_p (\text{Independent set})$?

1. Design a polynomial-time reduction algorithm R.

$$I_{k\text{-SAT}}(F, k) \rightarrow I_{\text{Independent}}(G, k)$$

Sol)

Goal: 주어진 k-SAT 문제 인스턴스 (F, k) 로부터 Independent Set 문제 인스턴스 (G, k') 를 다항시간 안에 구성한다. 여기서 $k = 3$ 이고, F 는 총 3개의 절($m = 3$)을 가진다.

Algorithm R(F, k):

1. 그래프 $G = (V, E)$ 를 빈 그래프로 시작한다.
2. 각 절(Clause)마다 리터럴(Literal) 3개를 정점 3개로 매핑한다.
 - $C_1 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \rightarrow$ 정점 v_{11}, v_{12}, v_{13}
 - $C_2 = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \rightarrow$ 정점 v_{21}, v_{22}, v_{23}
 - $C_3 = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \rightarrow$ 정점 v_{31}, v_{32}, v_{33}
 - 이렇게 총 9개 정점이 생성된다.

3. 각 절별로 해당하는 3개 정점 사이를 완전 연결(fully-connected: 그래프의 정점 집합 내의 모든 서로 두 정점 사이에 간선이 존재하는 상태)한다. 예를 들어, C_1 에 대응하는 v_{11} , v_{12} , v_{13} 사이 모두에 간선을 추가한다. 이로써 한 절에서 Independent Set에 포함될 수 있는 정점은 최대 하나이다.
4. 서로 다른 절 사이에서 모순되는 리터럴(ex: $x_i, \neg x_i$)에 대응하는 정점 쌍 간에 간선을 추가한다. (ex: C_1 의 $\neg x_1$ 와 C_2 의 x_1 등 \rightarrow 해당 정점 쌍 사이에 간선 추가) 이를 통해 모순되는 리터럴들이 동시에 Independent Set에 들어갈 수 없게 만든다.
5. Independent Set 크기 목표 k' 를 절의 개수 $m = 3$ 으로 설정한다. 각 절에서 하나의 정점을 선택하면 총 3개의 정점을 Independent Set으로 구성할 수 있어야 한다.

2. Design an efficient algorithm for independent set problem.

Sol)

백트래킹 기반 분기 한정(Branch-and-Bound) 알고리즘을 제시한다.

알고리즘 Independent Set(G, k):

1. 기저사례(Base Case):
 - $k \leq 0$: Independent Set 크기 요구를 충족하였으므로 True 반환.
 - V 가 비었고 $k > 0$: 가능한 정점이 없으므로 False 반환.
2. 아직 고려하지 않은 정점 중 하나를 v 로 선택한다.
3. 분기(Branch):
 - v 를 Independent Set에 포함하거나 포함하지 않는 두 가지 경우를 고려한다:
 - 3.1. Case A: v 포함 $\rightarrow v$ 와 인접한 정점을 제거 후 재귀 호출.
 - 3.2. Case B: v 미포함 $\rightarrow v$ 만 제거 후 재귀 호출.
4. 두 경우 모두 False이면 Independent Set을 찾을 수 없으므로 False 반환.

3. Prove: G has an independent set of size $k \leftrightarrow F$ is satisfiable.

Sol)

$$(F, k) \in k - SAT \Leftrightarrow (G, k') \in Independent Set.$$

1. (\Rightarrow): 만약 F 가 만족가능하다면, 각 절에서 참이 되는 리터럴을 하나씩 선택할 수 있다. 해당 리터럴에 대응하는 정점 G 에서 Independent Set으로 선택한다. 절 내부는 완전 연결로 하나만 선택 가능, 모순 리터럴 간 간선으로 인해 리터럴 동시 선택 불가. 따라서 크기 3의 Independent Set이 G 에 존재한다.
2. (\Leftarrow): 만약 G 의 크기 3의 Independent Set이 존재한다면, 이는 3개의 절 각각에서 하나의 정점을 선택한 것이다. 선택된 정점에 해당하는 리터럴을 참으로 설정하면 모든 절이 만족되고, 모순 리터럴을 동시에 Independent Set에 넣지 않았으므로 논리적 모순이 없다. 결과적으로 F 는 만족 가능하다.
3. 결론적으로, K -SAT 문제는 다항 시간 내에 Independent Set 문제로 환원 가능하다.
4. $\therefore (k - SAT) \leq_p (Independent Set)$ 는 참(true)이다.