

인공지능 수학 HW#2

고려대학교 20241017 개근현

Problem 1.

함수 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 에 대하여

- $x \rightarrow 1$ 에서의 극한값을 구하시오.

$$f(x) = \frac{\cancel{x-1}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1 \quad (x \neq 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2.$$

- 함수가 $x=1$ 에서 연속인지 여부를 판단하고, 그 이유를 설명하시오.

연속이면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이어야 하는데 $f(1)$ 이 정의되지 않는다.

$$\therefore f(1) = \frac{(1^2-1)}{(1-1)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{정의되지 않음.}$$

\therefore 함수는 $x=1$ 에서 불연속이다.

Problem 2.

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 이 대하여 다음을 수행하시오.

- 구간 $[1, 3]$ 에서 평균 변화율을 구하시오.

$$* f(x) = (x-3)(x-1)$$

$$\text{평균변화율}_{[1,3]} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{0 - 0}{2} = 0$$

- 평균값 정리가 의해 존재하는 $C \in (1, 3)$ 의 값을 구하시오.

$$\hookrightarrow f'(C) = \text{평균변화율}_{[1,3]} = 0$$

$$f'(x) = 2x - 4 \quad f'(C) = 2C - 4 = 0 \quad \therefore C = 2.$$

- Rolle 정리 적용 여부 및 C 값을 구하시오.

\hookrightarrow f 는 $[1, 3]$ 에서 연속이고 $(1, 3)$ 에서 미분 가능. (\because 이차방정식 대입)

$$f(1) = f(3) = 0$$

$\hookrightarrow \therefore$ Rolle 정리가 적용 가능하여, $f'(C) = 2C - 4 \quad \therefore C = 2.$

Problem 3.

- 다음 행렬 A 와 벡터 \vec{x} 에 대해 선형변환 $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ 의 결과를 계산하시오.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Problem 4.

- 다음 벡터가 수직임을 때, 벡터 \vec{a} 를 벡터 \vec{b} 에 수직인 결과를 구하시오.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4 \\ \|\vec{b}\|^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{Proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

Problem 5.

- 다음 세 벡터가 수직임을 때, 이들이 선형 독립인지 종속인지 판단하고, 이유를 서술하시오.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

이 세 벡터로 A 행렬을 만든다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= (36 - 36) - 2(18 - 18) + 3(12 - 12) \end{aligned}$$

$$\therefore \det(A) = 0 \text{ 이므로}$$

세 벡터는 선형 종속이다.

$$\begin{aligned} &= 0 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$