

12. 오토마타

충북대학교

이재성



학습내용

- 유한 오토마타 정의
- 결정적 유한 오토마타(DFA)
- 비결정적 유한 오토마타(NFA)

- 정규표현을 FA로 변환하는 방법
- FA를 정규문법으로 변환하는 방법



인식기(Recognizer)

■ 인식기

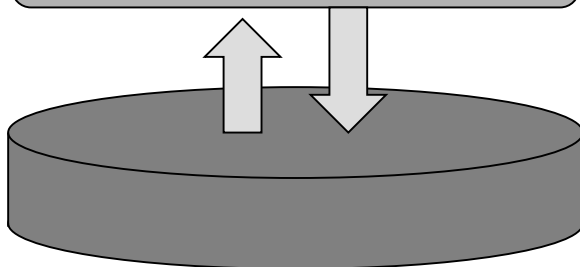
- 입력으로 스트링을 받아 스트링이 그 언어의 문장이면 “yes”, 아니면 “no”를 출력하는 프로그램

입력

$a_0a_1a_2\cdots a_ia_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n$

입력 헤드

Finite State Control



보조기억장치

•종류

- 튜링 머신
- A에 선형 종속
- 푸쉬다운 오토마타
- 유한 오토마타



유한 오토마타 (Finite Automata)

■ 정의 : FA(Finite Automata)

알파벳 Σ 에 대한 유한 오토마타 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

여기서, Q : 상태(state)들의 유한 집합;

Σ : 입력 알파벳의 유한 집합;

δ : 사상 함수;

$q_0 \in Q$: 시작 상태

$F \subseteq Q$: 종결 상태의 집합

사상함수 $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

i.e. $\delta(q, a) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

$$G = (V_N, V_T, P, S)$$

$$re = \emptyset, \epsilon, a, +, \cdot, *$$

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$



결정적 유한 오토마타 (DFA)

■ 결정적

- $\delta(q,a)$ 가 **한 상태**만을 갖는 경우
- $\delta(q,a) = \{p\}$ 대신에 " $\delta(q,a) = p$ " 로 표기
- $\delta(q,a)$ 가 항상 한 개의 다음 상태를 가질 때, **M이 완전히 명시**

■ δ 함수의 확장

- $Q \times \Sigma \Rightarrow Q \times \Sigma^*$
- $\delta(q, \varepsilon) = q$
 $\delta(q, ax) = \delta(\delta(q,a), x)$, 여기서 $x \in \Sigma^*$ 이고 $a \in \Sigma$.

■ 한 문장 x 의 인식

- 만약 $\delta(q_0, x) = p$ 인 경우, p 가 종결 상태에 속할 때($p \in F$).
- M에 의해 인식된 언어
 - $L(M) = \{ x \mid \delta(q_0, x) \in F \}$



DFA 예

$Q \quad \Sigma \quad \delta \quad q_0 \quad F$

ex) $M = (\{p, q, r\}, \{0, 1\}, \delta, p, \{r\})$

$\delta : \delta(p, 0) = q \quad \delta(p, 1) = p$

$\delta(q, 0) = r \quad \delta(q, 1) = p$

$\delta(r, 0) = r \quad \delta(r, 1) = r$

$\delta(\delta(p, 1), 001)$

– $1001 \in L(M) ?$

$\delta(p, 1001) = \delta(p, 001) = \delta(q, 01) = \delta(r, 1) = r \in F.$

$\therefore 1001 \in L(M).$

이 머신이 정의한 언어에 속한다.

– $1010 \in L(M) ?$

$\delta(p, 1010) = \delta(p, 010) = \delta(q, 10) = \delta(p, 0) = q \notin F.$

$\therefore 1010 \notin L(M).$

- 전이테이블: δ 를 matrix 형태로 표시. ex)

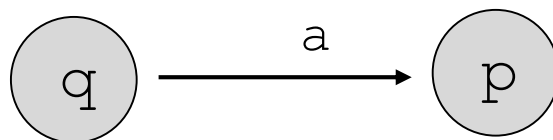
δ	Input symbols	
	0	1
p	q	p
q	r	p
r	r	r



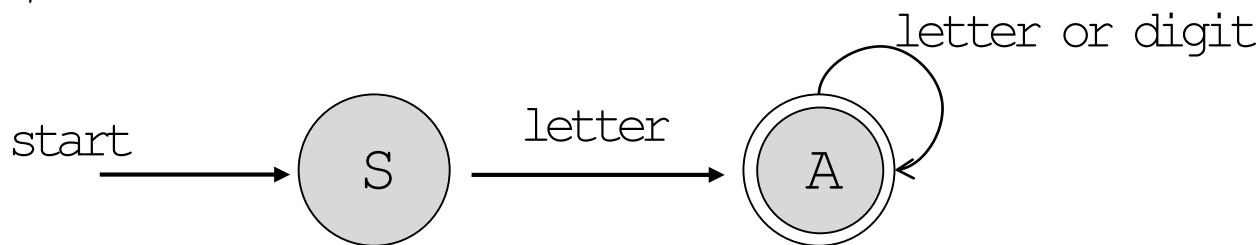
상태 전이도

■ 정의

- 노드: 유한 오토마타의 각 상태를 표시(p, q)
- 전이 상태: 상태 q 에서 상태 p 로 가는 변화를 타나냄
- 레이블: 전이때의 입력 문자 (a)
- $\delta(q, a) = p$



- 종결 상태는 이중 원, 시작 상태는 **start** 지시선으로 표시
인식기 예:





DFA 알고리즘

Algorithm : $w \in L(M)$ 결정.

assume $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$;

begin

currentstate := q_0 ; (* start state *)

get(nextsymbol);

while not eof do

begin currentstate := $\delta(\text{currentstate}, \text{nextsymbol})$;
get(nextsymbol)

end;

if currentstate in F then write('Valid String')

else write('Invalid String');

end.

예:

$(p, 001) \rightarrow (q, 01) \rightarrow (r, 1) \rightarrow (r, \$)$

δ	Input symbols	
	0	1
p	q	p
q	r	p
r	r	r



DFA의 상태수 최소화

■ 정의

$w \in \Sigma^*$ 에 대해 q_1 에서 w 를 다 본 상태가 q_3 , q_2 에서 w 를 다 본 상태가 q_4 일 때,

q_3, q_4 중 하나만 종결 상태일 때, q_1 과 q_2 는 구별된다고 말함.

■ 동치 관계 구성

1. 전체 상태를 종결 상태와 미종결 상태로 구분
2. 같은 입력에 대해 서로 다른 동치류로 가면, 다른 분할을 하여 새로운 동치류를 만든다.
3. 위의 1, 2 단계를 분할이 더 발생하지 않을 때까지 반복



■ DFA에서 상태수를 줄이는 방법

<step 1> 모든 도달 불가능한 상태는 삭제

<step 2> 동치 관계를 만듦

<step 3> fa $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ 를 만듦

- (a) Q' : 동치류의 집합
p상태가 포함된 $[p]$ (집합) 형태의 동치류
- (b) $q_0' = [q_0]$.
- (c) $\delta(p, a) = q$ 이면 $\delta'([p], a) = [q]$
- (d) $F' = \{[q] \mid q \in F\}$.



상태수 최소화 예(1)

(필)

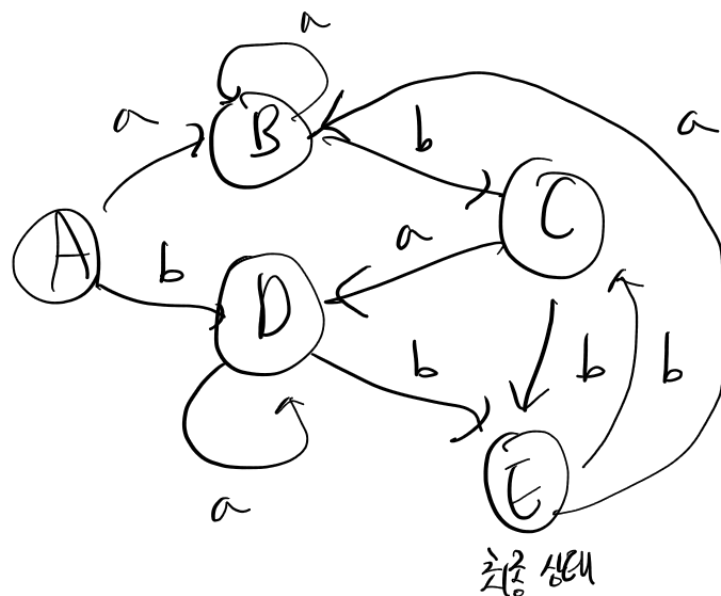
ex) 유한 오토마톤 $M = (\{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \delta, A, \{C, E\})$ 에 의해 상세화된 언어를 위해 최소 상태 유한 오토마톤을 찾는다.

- δ 가 주어졌을 때

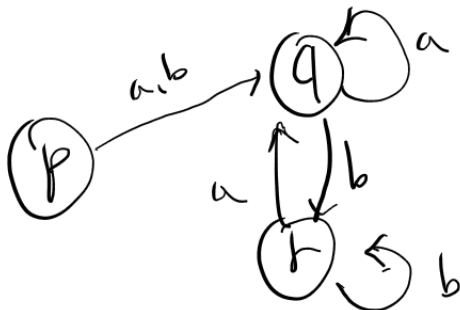
비중결 $NF = \{A, B, D\}$

결결 $F = \{C, E\}$

δ	a	b
A	B	D
B	B	C
C	D	E
D	D	E
E	B	C



□ \equiv : $NF = \{A, B, D\}, F = \{C, E\}$



node r = 최종 상태.



상태수 최소화 예(2)

ex) 유한 오토마톤 $M = (\{A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \delta, A, \{C, E\})$ 에 의해 상세화된 언어를 위해 최소 상태 유한 오토마톤을 찾는다.

- $\delta(A, a) = B(NF), \delta(A, b) = D(NF)$ 다른
그룹
- $\delta(B, a) = B(NF), \delta(B, b) = C(F)$ 같은
그룹
- $\delta(D, a) = D(NF), \delta(D, b) = E(F)$ 같은
그룹

δ	a	b
A	B	D
B	B	C
C	D	E
D	D	E
E	B	C

- $\delta(C, a) = D(NF), \delta(C, b) = E(F)$
- $\delta(E, a) = B(NF), \delta(E, b) = C(F)$

비종결 $NF = \{A, B, D\}$
종결 $F = \{C, E\}$

□ $\equiv : \{A\}, \{B, D\}, \{C, E\}$

$NF \rightarrow NF$ $NF \rightarrow F$ $F \rightarrow F$

$B \rightarrow B(2), D(3)$
 $D \rightarrow D(2), C(3)$

δ'	a	b
$[A]=p$	q	q
$[B, D]=q$	q	r
$[C, E]=r$	q	r

☆ 레보기

12. 오토마타

같은 그룹이 더이상 나눌 수 없음.



비결정적 유한 오토마타 (NFA)

■ 비결정적

- 상태 q 에서 입력 심벌 a 에 대해 갈 수 있는 상태가 여러 개
- $\delta(q,a) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

■ 예

여러개 = 비결정적

- $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_f\})$
 - if $\delta(q,a) = \Phi$, then $\delta(q,a)$ is undefined.

δ	0	1
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\{q_f\}$	ϕ
q_3	ϕ	$\{q_f\}$
q_4	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$



■ **정의** : $\delta(q_0, x)$ 의 상태 p 중 F 의 상태를 포함하는 경우, 문장 x 는 M 에 의해 **인식된다**.

ex) **1011** $\in L(M)$?

$$\begin{aligned}\delta(\{q_0\}, 1011) &= \delta(\{q_1, q_3\}, 011) = \delta(\{q_1, q_2\}, 11) \\ &= \delta(\{q_1, q_3\}, 1) = \{q_1, q_3, q_f\}\end{aligned}$$

$$\therefore 1011 \in L(M) \quad (\because \{q_1, q_3, q_f\} \cap \{q_f\} \neq \Phi)$$

ex) **0100** $\in L(M)$?

δ	0	1
q_0	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\{q_f\}$	ϕ
q_3	ϕ	$\{q_f\}$
q_4	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$



정규표현의 NFA로의 변환

■ 구성요소 분해

- 정규표현을 구성요소 부분식으로 분리한 후 다시 규칙에 따라 조합

- ϵ

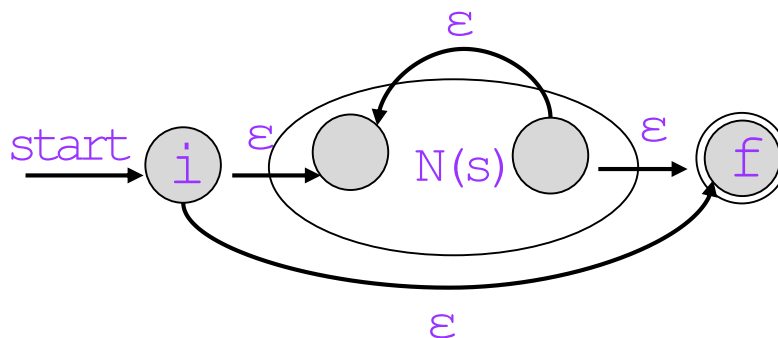
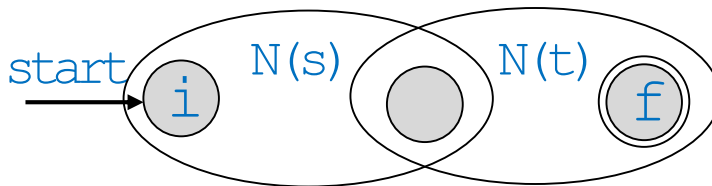
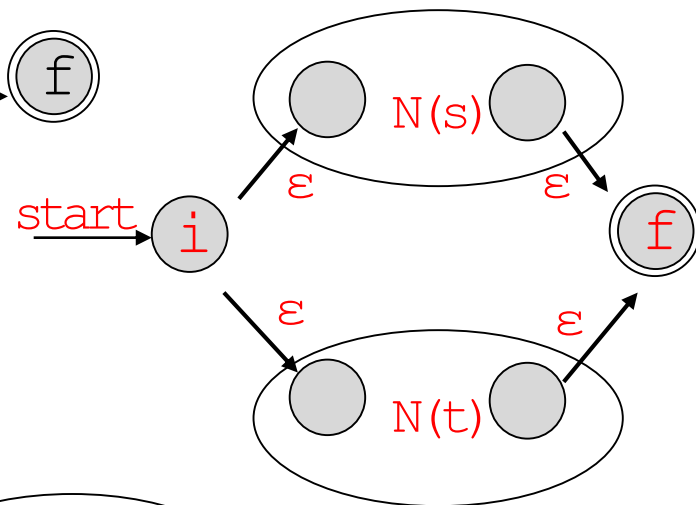
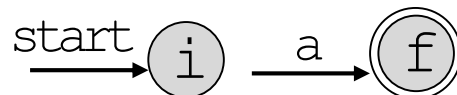
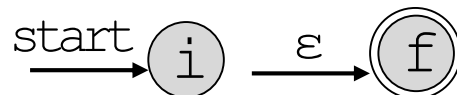
- a

- $s \mid t \Rightarrow N(s \mid t)$

- $st \Rightarrow N(st)$

- $s^* \Rightarrow N(s^*)$

- $(s) \Rightarrow N(s)$



iteration



배경지식 원 노트



정규표현의 NFA로의 변환 예(1)

■ 정규표현 $r=(a|b)^*abb$ 의 변환순서

1. $r1=a$

2. $r2=b$

3. $r3= r1 | r2$

4. $r4= (r3)$

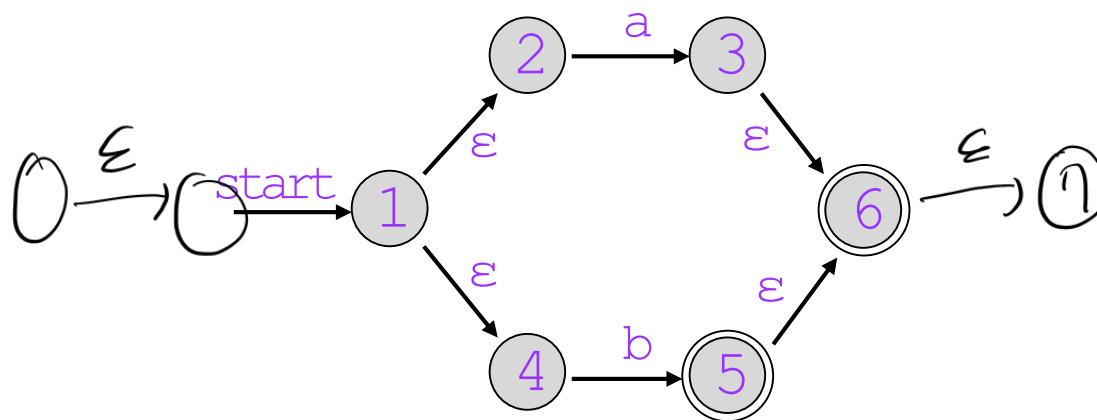
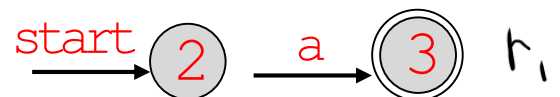
5. $r5= (r3)^*$

6. $r6=a$

7. $r7=r5 r6$

8. :

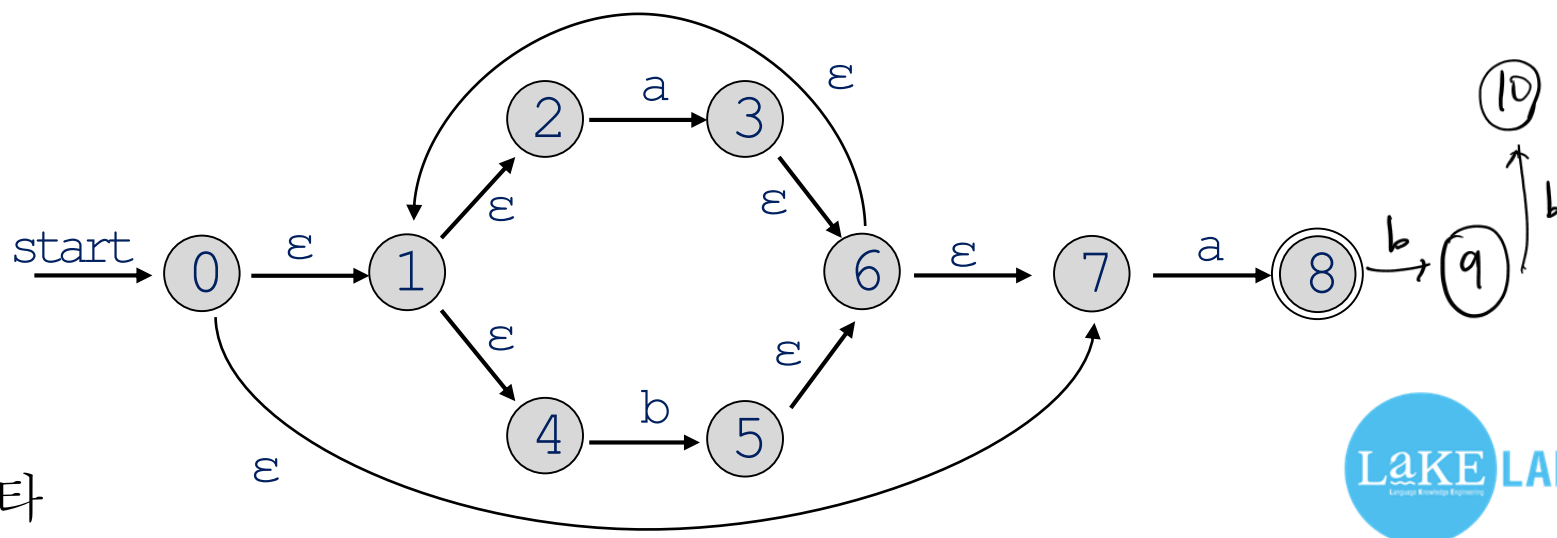
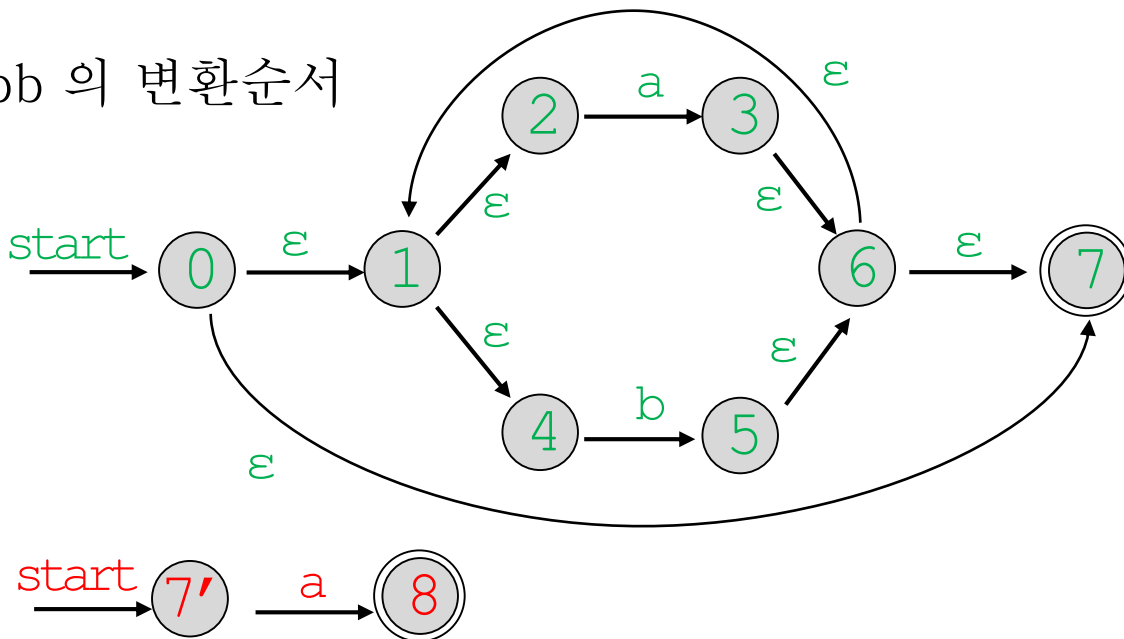
↙ 0번 이상 반복



정규표현의 NFA로의 변환 예(2)

■ 정규표현 $r=(a|b)^*abb$ 의 변환순서

1. $r1 = a$
2. $r2 = b$
3. $r3 = r1 | r2$
4. $r4 = (r3)$
5. $r5 = (r3)^*$
6. $r6 = a$
7. $r7 = r5 r6$
8. :





NFA를 DFA로 전환

■ 필요성

- NFA에서 ϵ 전이에 대해 컴퓨터 처리가 어려움

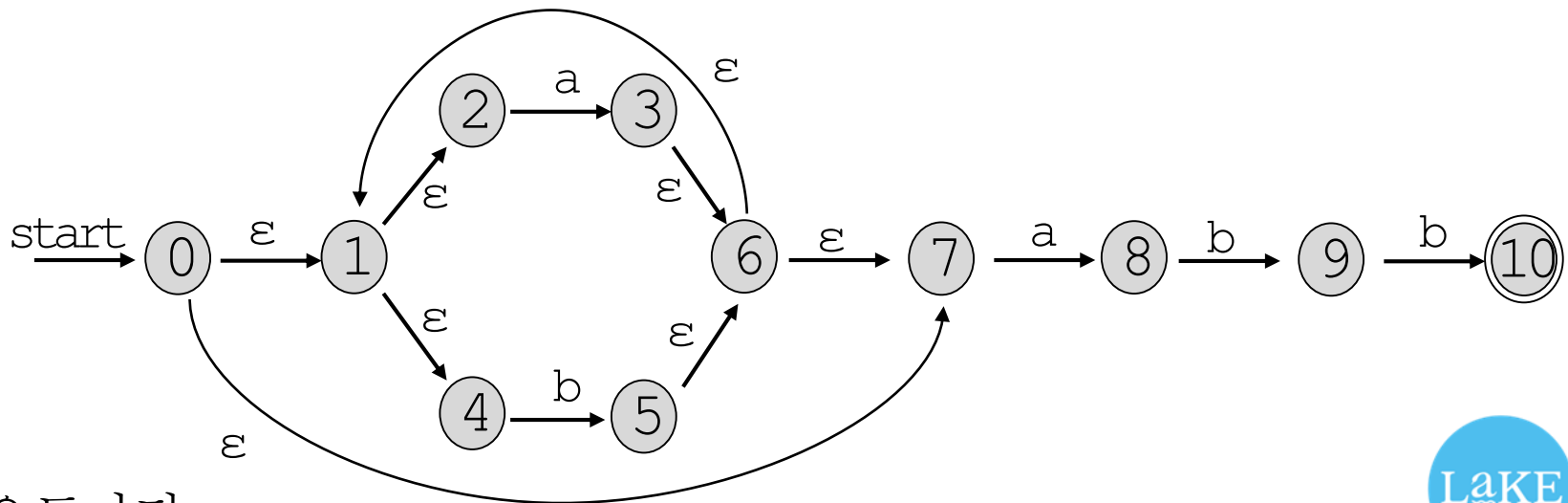
■ 부분집합 구성 알고리즘 용어

- ϵ -closure(s):
 - NFA상태 s에서 ϵ 전이만으로 도달 가능한 상태집합
- ϵ -closure(T):
 - T에 포함된 어떤 상태 s에서 ϵ 전이만으로 도달가능한 상태 집합
- move(T,a):
 - T에 포함되는 어떤 상태s에서 입력기호 a에 의해 전이되는 상태집합
- Dtran:
 - D에 대한 전이 테이블
- Dstates:
 - D의 상태들의 집합

ϵ -closure 및 move 예

- ϵ -closure(0) = {0, 1, 2, 4, 7}
- ϵ -closure({3, 8}) = {1, 2, 3, 4, 6, 7} \cup {8} = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}
- move(1, a) = {3} *ε는 다 가보고 a 판단.*
- move({3, 8}, b) = {5} \cup {9} = {5, 9}

ε는 그냥 가세요





부분집합 구성 알고리즘 예(1)

■ 시작상태 ϵ -closure(0) $A = \{0, 1, 2, 4, 7\}$

- 입력 알파벳 $\{a, b\}$

Dstate= {A}

■ ϵ -closure(move(A, a)) = ϵ -closure(move($\{0, 1, 2, 4, 7\}$, a))
= ϵ -closure($\{3, 8\}$) = $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\} \rightarrow B$

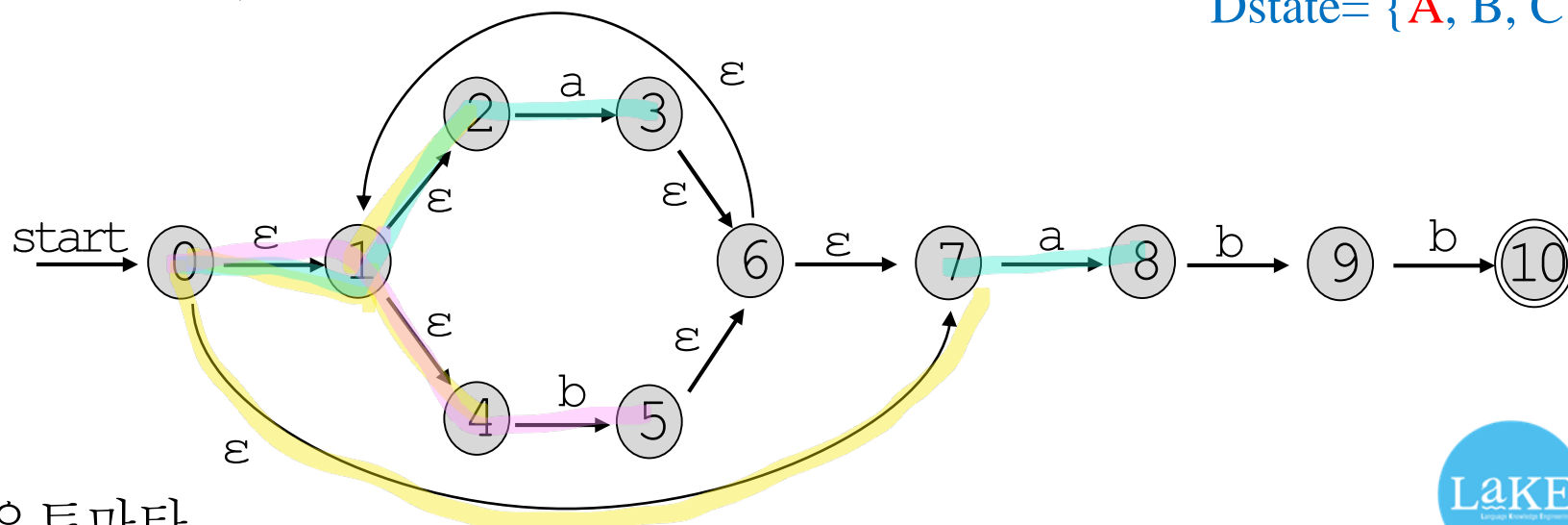
- Dtran[A, a] = B

Dstate= {A, B}

■ ϵ -closure(move(A, b)) = ϵ -closure(move($\{0, 1, 2, 4, 7\}$, b))
= ϵ -closure($\{5\}$) = $\{1, 2, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow C$

- Dtran[A, b] = C

Dstate= {A, B, C}





부분집합 구성 알고리즘 예(2) NFA \rightarrow DFA

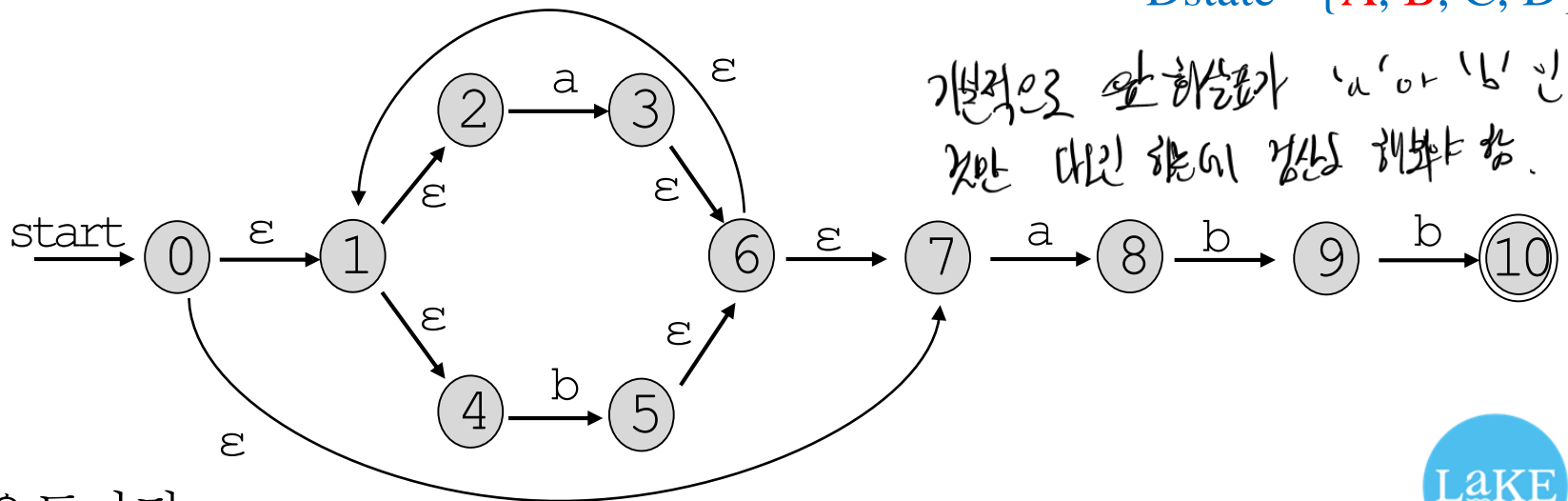
■ 현재: $A=\{0,1,2,4,7\}$, $B=\{1,2,3,4,6,7,8\}$, $C=\{1,2,4,5,6,7\}$

■ ϵ -closure(move(B, a)) = ϵ -closure(move($\{1,2,3,4,6,7,8\}, a$)) = ϵ -closure($\{3,8\}$) = $\{1,2,3,4,6,7,8\} \rightarrow B$

● $Dtran[B, a] = B$ *같은 하집합 a.* Dstate = {A, B, C}

■ ϵ -closure(move(B, b)) = ϵ -closure(move($\{1,2,3,4,6,7,8\}, b$)) = ϵ -closure($\{5,9\}$) = $\{1,2,4,5,6,7,9\} \rightarrow D$

● $Dtran[B, b] = D$ Dstate = {A, B, C, D}





부분집합 구성 알고리즘 예(3)

■ 최종 구성된 부분집합

- $A=\{0,1,2,4,7\}$ $B=\{1,2,3,4,6,7,8\}$ $C=\{1,2,4,5,6,7\}$
- $D=\{1,2,4,5,6,7,9\}$ $E=\{1,2,4,5,6,7,10\}$

$$Dtran[A,a] = B$$

$$Dtran[A,b] = C$$

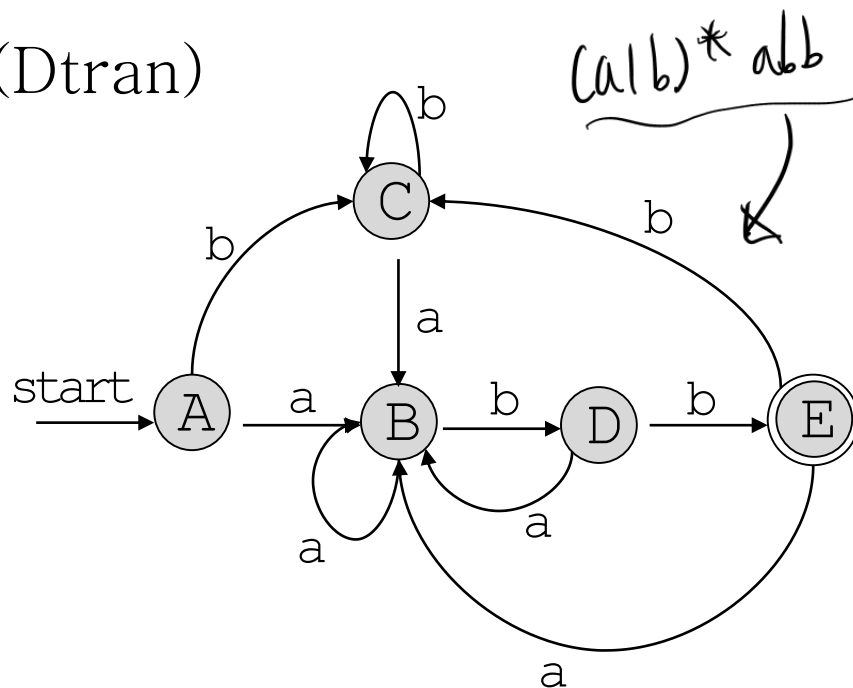
$$Dtran[B,a] = B$$

$$Dtran[B,b] = D$$

:

■ DFA를 위한 전이 테이블(Dtran)

상태	입력 기호	
	a	b
A	B	C
B	B	D
C	B	C
D	B	E
E	B	C





ϵ -closure의 계산

T안의 상태를 모두 스택에 푸시
 ϵ -closure(T)를 T로 초기 설정
while 스택이 비어있지 않음 **do**
 begin

 스택에서 t를 pop

for t에서 ϵ 레이블로 연결 가능한 상태 u **do**

if u가 ϵ -closure(T)안에 없음 **then do**

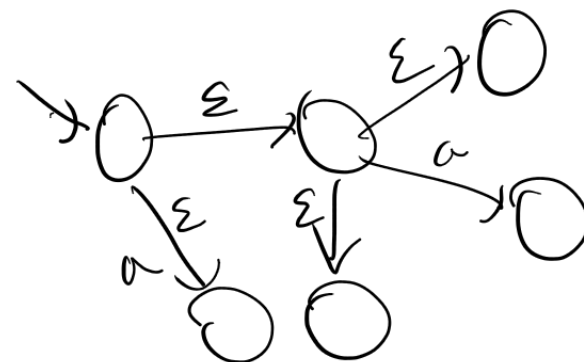
begin

 u를 ϵ -closure(T)에 추가

 u를 스택에 push

end

end





부분집합 구성 알고리즘

- 입력: NFA N
- 출력: 동일한 언어를 수용하는 하나의 DFA D

- 방법
 상태 ϵ -closure(s_0)만을 $Dstates$ 에 넣는다.
 while $Dstates$ 안에 마크가 안된 상태 T 가 있다 **do begin**
 mark T ;
 for 각 입력기호 a **do begin**
 $U := \epsilon$ -closure(move(T, a));
 if U 가 $Dstates$ 안에 없다 **then**
 U 를 마크하지 않고 $Dstates$ 에 추가
 $Dtran[T, a] := U$
 end
 end
 end



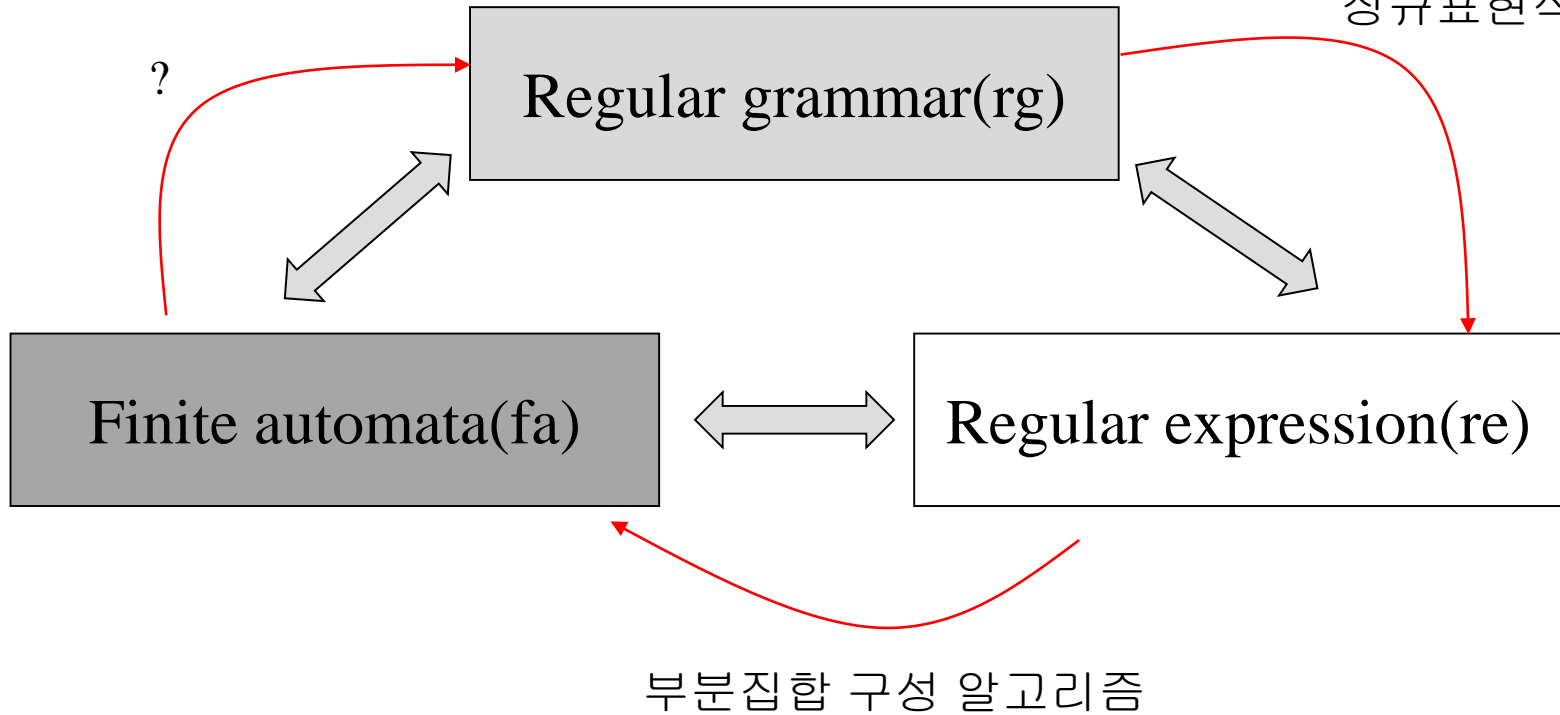
정규 언어의 변환 관계

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \alpha X \\ X &\rightarrow \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \alpha X \\ X &\rightarrow \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \alpha X + \beta \\ \hookrightarrow X &= \alpha^* \beta \end{aligned}$$

정규표현식





유한 오토마타와 정규 표현

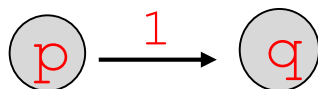
■ 2단계 접근

- 유한 오토마타에서 정규 문법 구하기
- 정규 문법에서 정규 표현 구하기 (정규 표현식 이용)

■ 유한 오토마타에서 정규 문법 만들기

- 오토마타의 상태에 입력 문자를 추가한 형태의 문법 기호로 표기

- $p \rightarrow 1q$



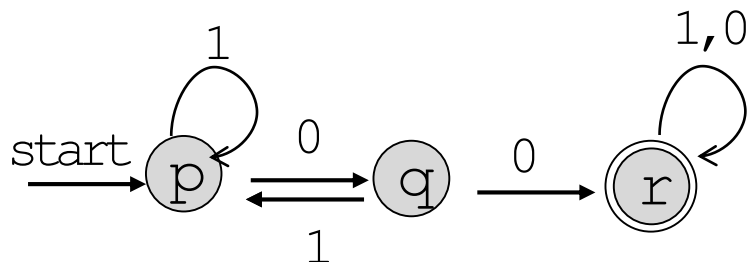
- $p \rightarrow \epsilon$





DFA에서 RG로 변환 예

■ DFA



■ 대응 정규 문법

- 모든 상태: $Q = \{p, q, r\}$
- 모든 입력 문자: $\Sigma = \{0, 1\}$
- 시작 기호: p

- $G = (V_N, V_T, P, S)$
- $V_N = \{p, q, r\}$, $V_T = \{0, 1\}$, $S = p$
- P : $p \rightarrow 0q$, $p \rightarrow 1p$
 $q \rightarrow 0r$, $q \rightarrow 1p$
 $r \rightarrow 0r$, $r \rightarrow 1r$, $r \rightarrow \epsilon$ ★ → 최종 상태



RG에서 RE로 변환 예



■ RG

- P: $p \rightarrow 0q, p \rightarrow 1p$
 $q \rightarrow 0r, q \rightarrow 1p$
 $r \rightarrow 0r, r \rightarrow 1r, r \rightarrow \varepsilon$
- $p = 0q + 1p$
- $q = 0r + 1p$
- $r = 0r + 1r + \varepsilon$

$$r = (0+1)r + \varepsilon \Rightarrow r = (0+1)^*$$

$$q = 0r + 1p = 0(0+1)^* + 1p$$

$$p = 0q + 1p = 0(0(0+1)^* + 1p) + 1p$$

$$= 00(0+1)^* + 01p + 1p$$

$$= (01+1)p + 00(0+1)^*$$

$$L(M) = (01+1)^*00(0+1)^*$$

$$r = (0+1)r + \varepsilon \Rightarrow r = (0+1)^*$$

$$q = 0r + 1p = 0(0+1)^* + 1p$$

$$p = 0q + 1p = 0(0(0+1)^* + 1p) + 1p$$

$$= 00(0+1)^* + 01p + 1p$$

$$= (01+1)p + 00(0+1)^*$$

$$L(M) = (01+1)^*00(0+1)^*$$

$$(\because X = \alpha X + \beta, \alpha = \alpha^* \beta)$$



참고 문헌

- [1] Alfred V. Aho, Ravi Sethi, Jeffrey D. Ullman, “Compilers – Principles, Techniques, and Tools,” Bell Telephone Laboratories, Incorporated, 1986.
- [2] 오세만, “컴파일러 입문”, 정익사, 2004.