

연결 리스트 (Linked Lists)

소프트웨어학부
이 의 종



단순 연결 리스트

(Singly Linked Lists and Chains)

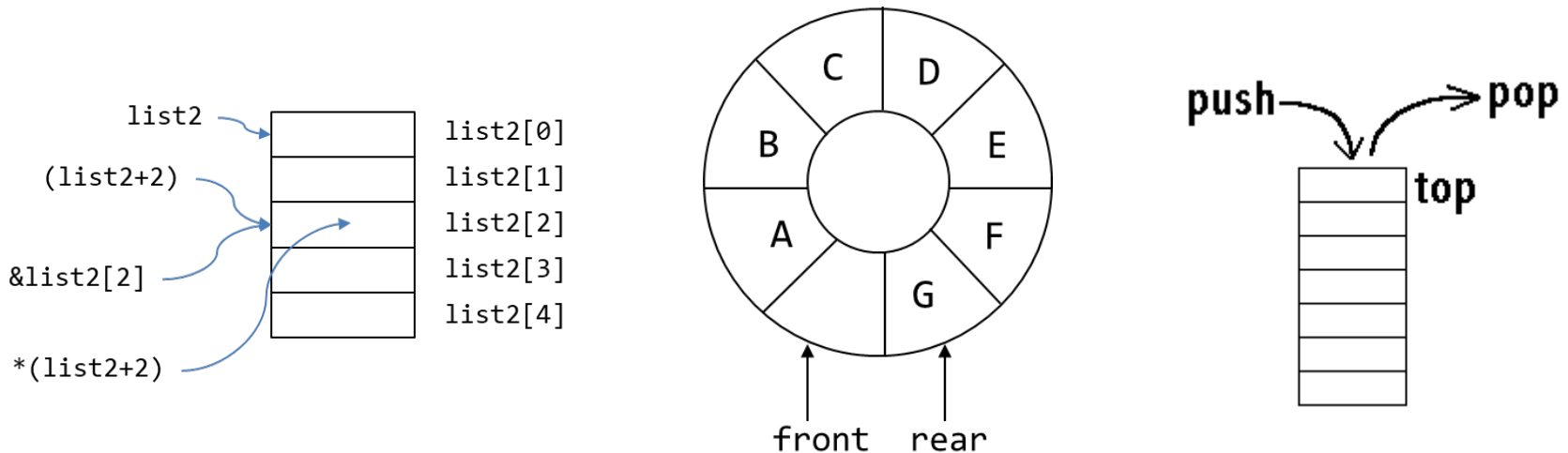
In computer science, a linked list is a linear collection of data elements, [whose order is not given by their physical placement in memory](#). Instead, each element points to the next. It is a data structure consisting of a collection of nodes which together represent a sequence.



단순(단일) 연결리스트(Singly Linked Lists and Chains)

• 순차리스트의 특성

- 데이터 객체의 연속된 원소들이 일정한 거리만큼 떨어져 저장
- **(배열)** $a_{i,j} \rightarrow L_{ij}$ 에 저장된다면, $a_{i,j+1} \rightarrow L_{ij}+1$ 에 저장
- **(큐)** 큐의 i 번째 요소가 L_i 에 위치해있다면 $i+1 \rightarrow (L_i+1)\%n$
- **(스택)** 제일위의 원소가 L_T 의 위치에 있다면, 바로 아래 원소 $\rightarrow L_T - 1$

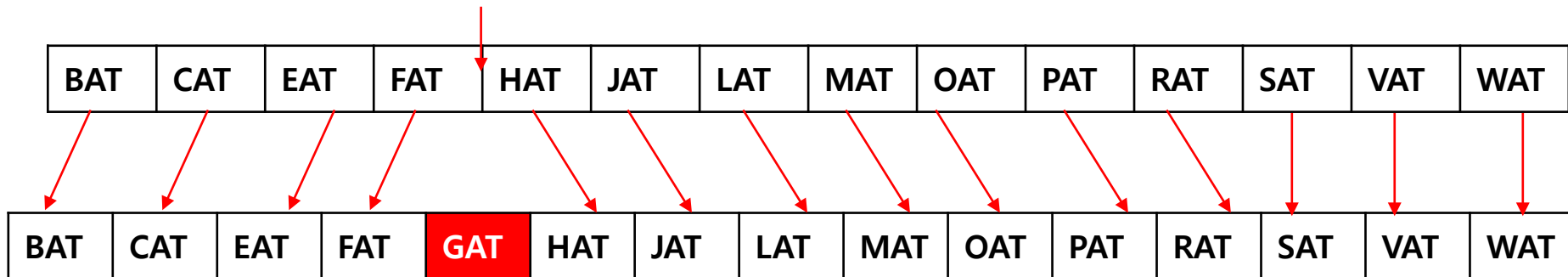


단순(단일) 연결리스트(Singly Linked Lists and Chains)

- Example: AT로 끝나는 3문자 영어 단어 리스트

BAT	CAT	EAT	FAT	HAT	JAT	LAT	MAT	OAT	PAT	RAT	SAT	VAT	WAT
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

GAT (삽입)



새로운 배열을 할당, 복사

GAT 삽입 →

임의의 원소에 대한 삽입(insertion)과 삭제(deletion)에 많은 비용 초래

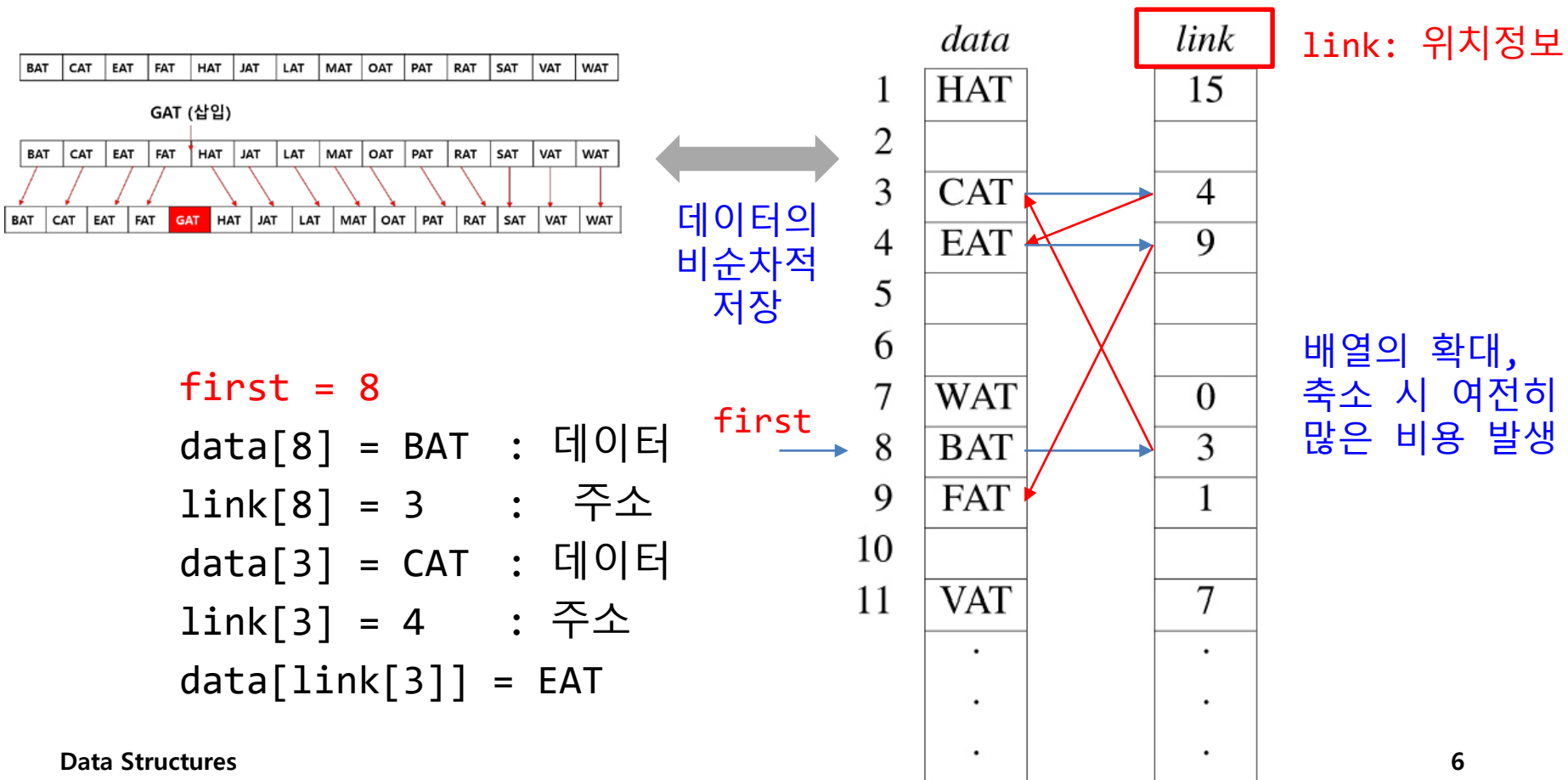
단순(단일) 연결리스트(Singly Linked Lists and Chains)

- 연결된(linked) 표현
 - 순차 표현에서 제기된 데이터 이동 문제점을 해결
 - 각 원소들이 메모리 내의 어떤 곳이나 위치 가능
 - 원소에 정확한 순서로 접근하기 위한 정보가 부가적으로 필요
 - 원소의 주소정보
 - **노드(node)**
 - 데이터 필드
 - 하나 이상의 링크(link) 또는 포인터(pointer): 다음 원소를 가리킴

단순(단일) 연결리스트(Singly Linked Lists and Chains)

- 노드(node)

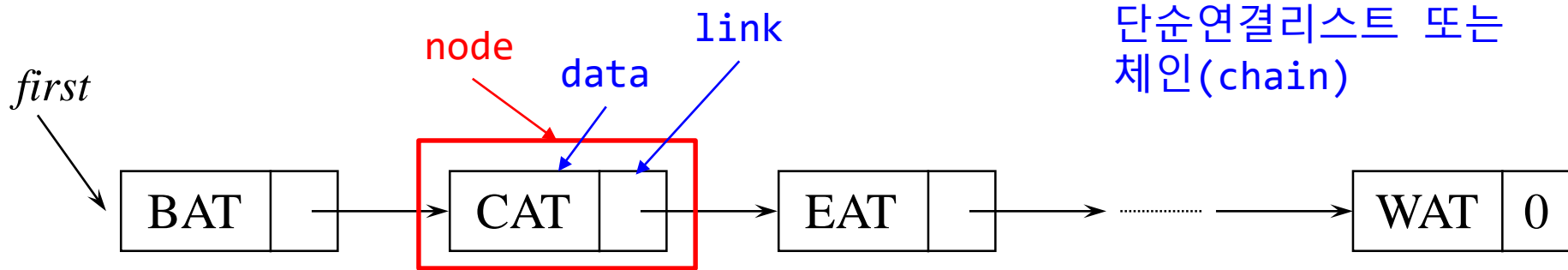
- 데이터 필드
- 하나 이상의 링크(link) 또는 포인터(pointer): 다음 원소를 가리킴



단순(단일) 연결리스트(Singly Linked Lists and Chains)

- 연결리스트의 일반적인 방법

- 노드들을 순차적으로 표시하고 링크를 화살표로 표현
- 화살표로 다음 노드를 직관적으로 가리킴

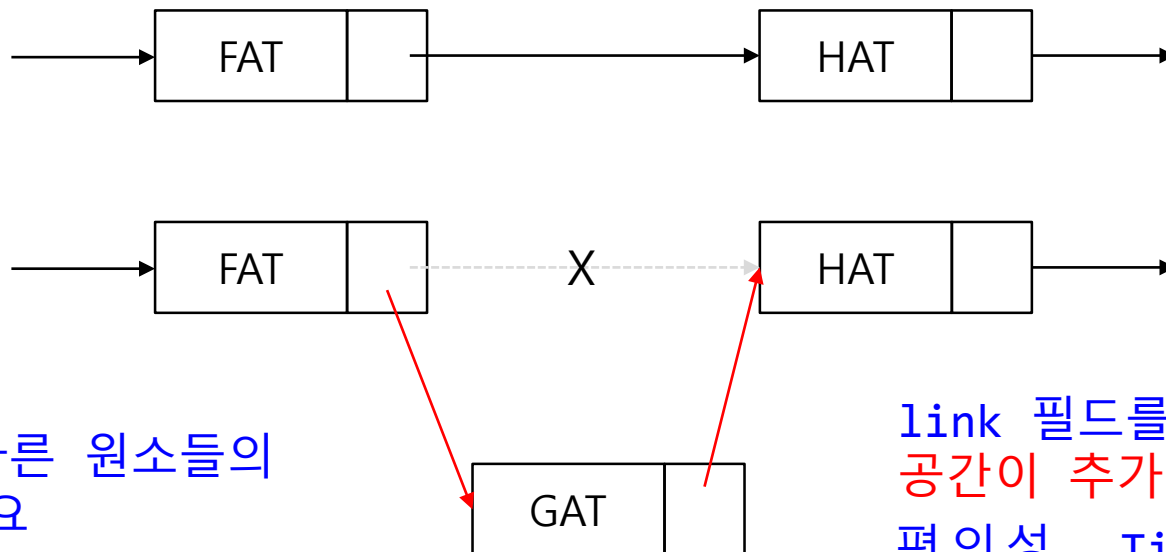


- Note

- 노드들은 실제로 순차적 위치에 존재하지 않는다 (memory 상에서).
- 노드들의 위치(주소)는 실행 시마다 바뀔 수 있다.
- link가 0인지(NULL)인지 검사하는 것 외에는 특정 주소 값을 찾지 않는다.

단순(단일) 연결리스트(Singly Linked Lists and Chains)

- **노드(node) 삽입: GAT원소를 FAT와 HAT 사이에 삽입**
 - 현재 사용하고 있지 않은 노드 하나(a)를 가져온다 (malloc())
 - 노드 a의 data 필드에 'GAT'를 설정한다.
 - a의 link 필드에 FAT 다음 노드, 즉 HAT를 저장하고 있는 노드를 가리키도록 한다.
 - FAT를 포함하고 있는 노드의 link 필드가 a를 가리키도록 한다.



삽입 시 다른 원소들의
이동 불필요

link 필드를 위한 저장
공간이 추가로 사용
편의성, Time Complexity
관점에서 감수할 만 함

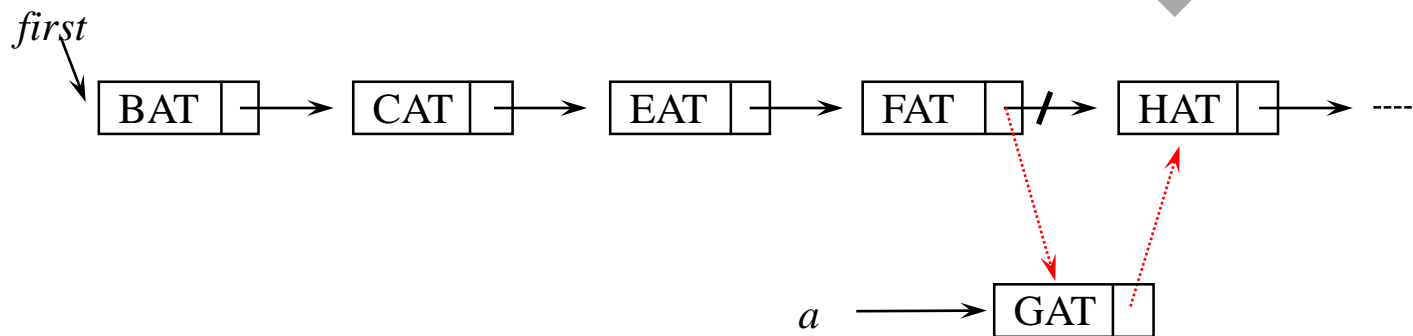
단순(단일) 연결리스트(Singly Linked Lists and Chains)

	data	link
1	HAT	15
2		
3	CAT	4
4	EAT	9
5	GAT	1
6		
7	WAT	0
8	BAT	3
9	FAT	5
10		
11	VAT	7

← (a) Data[5]에 GAT 삽입

link 수정

(b) 리스트에 노드 GAT 삽입

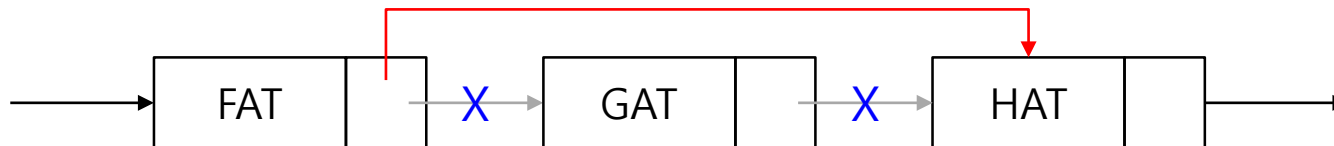


단순(단일) 연결리스트(Singly Linked Lists and Chains)

- 노드(node) 삭제: GAT원소를 삭제
 - GAT 바로 앞에 있는 원소 FAT 찾기
 - FAT의 link를 HAT의 위치로 설정



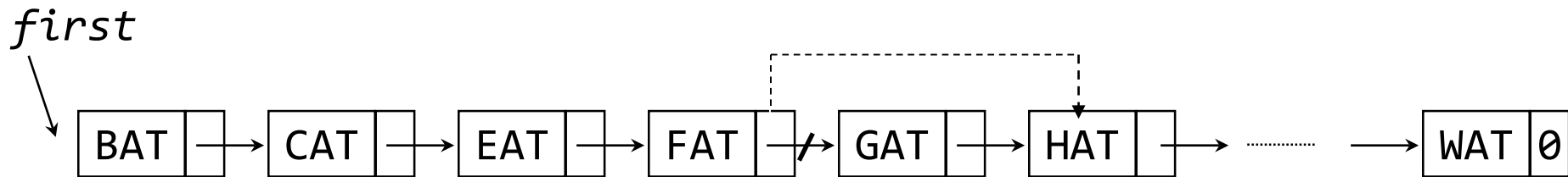
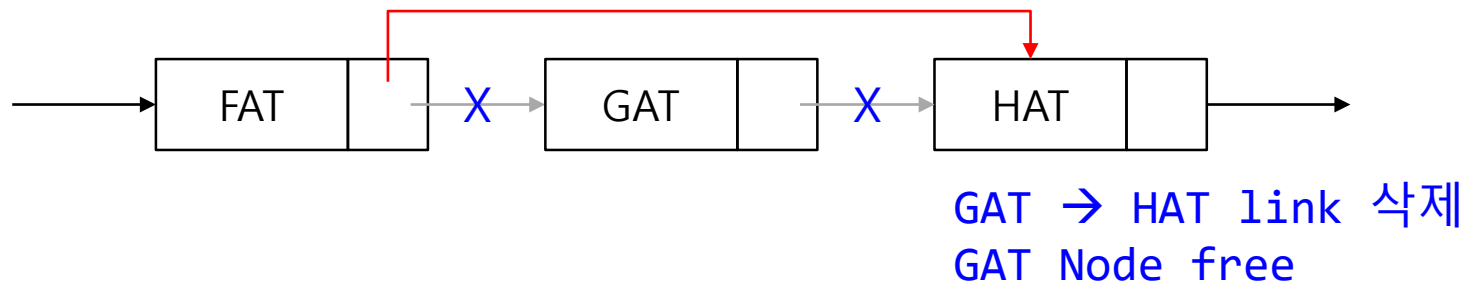
FAT → HAT 접근방법 X
GAT → HAT link 복사



GAT → HAT link 삭제
GAT Node free

단순(단일) 연결리스트(Singly Linked Lists and Chains)

- 노드(node) 삭제: GAT원소를 삭제



리스트에서 GAT 삭제

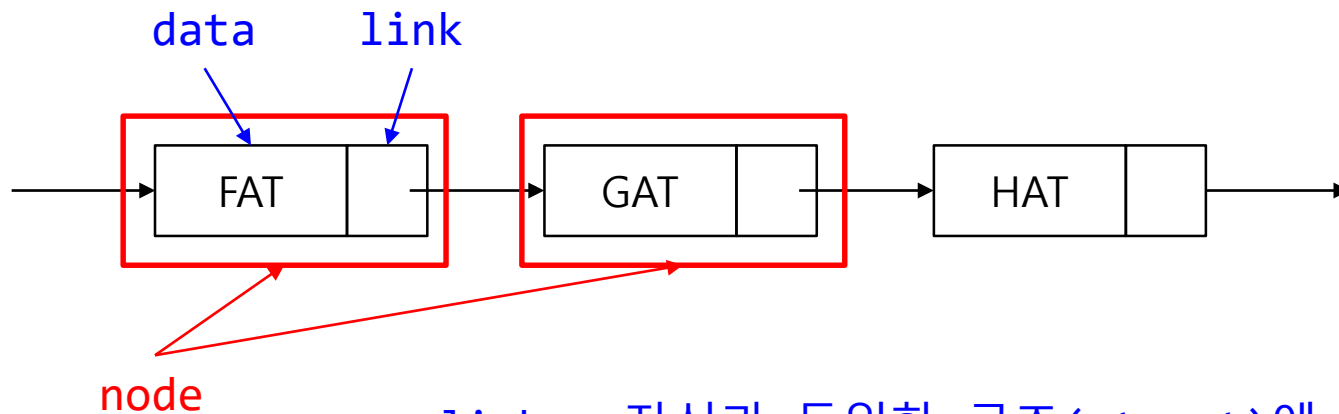
GAT으로 접근할 수 만 있다면, GAT → HAT link를 통해 HAT 이후의 데이터를 접근할 수 있다 (security hole)

C에서의 체인 표현

(Representing Chains in C)

C에서 체인표현(Representing Chains in C)

- Linked List 구현을 위해 필요한 사항
 - 노드 구조 (struct)
 - 자기와 동일한 타입에 대한 링크 (self-referential structure)
 - 노드 생성시 메모리할당 (malloc())
 - 더 이상 필요하지 않은 노드의 메모리 해제 (free())



link : 자신과 동일한 구조(struct)에 대한 포인터

C에서 체인표현(Representing Chains in C)

- [예제 4.1] c에서의 노드 정의: 리스트를 위한 노드 구조

```
typedef struct listNode *listPointer;  
typedef struct listNode {  
    char data[4];  
    listPointer link;  
};
```

존재하지 않은 타입에
대한 포인터 생성가능

그렇지 않으면 모순

>_ struct_test.c

- 새로운 공백 리스트 생성

– listPointer first = NULL;

← first는 리스트의 시작 주소를 포함

- 공백 리스트인지 검사하는 매크로 IS_EMPTY

– #define IS_EMPTY(first) (!(first))

>_ struct_test.c

- 새로운 노드를 생성하기 위한 매크로 MALLOC

– MALLOC(first, sizeof(*first)); malloc(sizeof(*first))
macalloc(sizeof(struct listNode))

C에서 체인표현(Representing Chains in C)

- 노드의 필드값 정의: -> 연산자 사용

- bat이란 단어를 리스트에 넣을 때

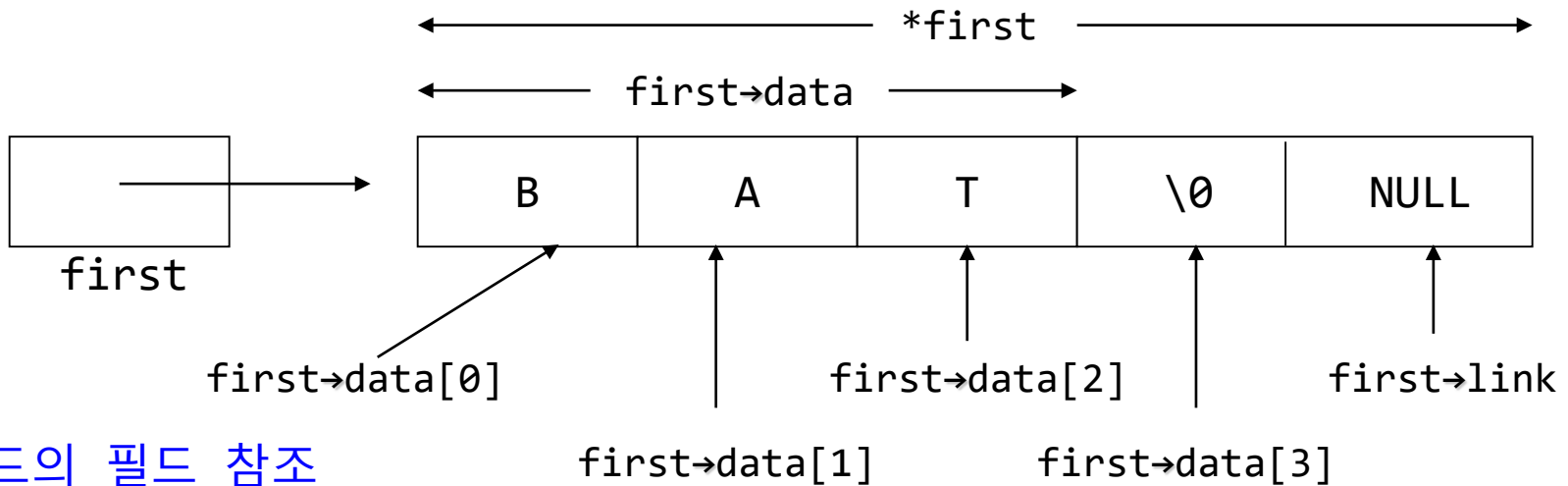
- strcpy(first->data, "bat"); first->link = NULL;

*(first).data

*(first).link

```
typedef struct listNode *listPointer;  
typedef struct listNode {  
    char data[4];  
    listPointer link;  
};
```

```
listPointer first = NULL;  
MALLOC(first, sizeof(*first));
```



C에서 체인표현(Representing Chains in C)

- [예제 4.2] 2-노드 연결 리스트

```
typedef struct listNode *listPointer
typedef struct listNode {
    int data;
    listPointer link;
};
```

정수들의 연결 리스트
생성을 위한 구조체

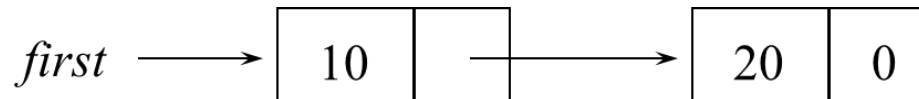
- 두 개의 노드를 가진 연결 리스트를 생성

```
listPointer create2()
{ /* 두 개의 노드를 가진 연결 리스트의 생성 */
    listPointer first, second;
    MALLOC(first, sizeof(*first));
    MALLOC(second, sizeof(*second));
    second->link = NULL;
    second->data = 20;
    first->data = 10;
    first->link = second;
    return first;
}
```

노드 생성

data에 값 저장

노드 연결



C에서 체인표현(Representing Chains in C)

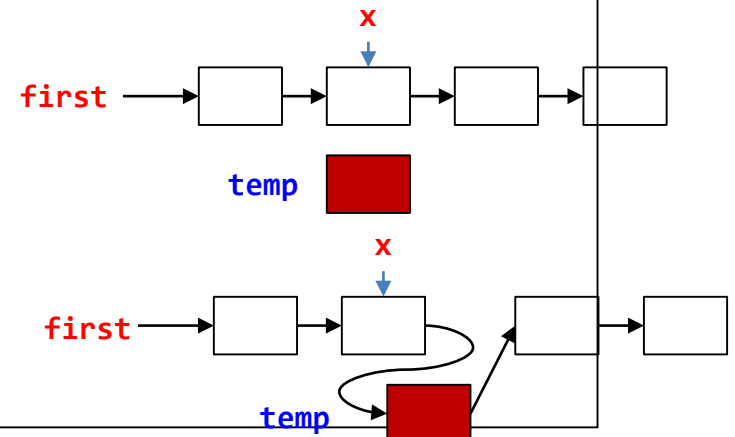
- [예제 4.3] 리스트 삽입

- 임의의 노드 뒤에 데이터 필드 값이 50인 노드를 삽입

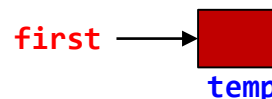
```
void insert(listPointer *first, listPointer x)
{ /* data=50인 새로운 노드를 리스트 first의 node 뒤에 삽입 */
```

```
    listPointer temp;
    MALLOC(temp, sizeof(*temp));
    temp->data = 50;
    if(*first) {
        temp->link = x->link;
        x->link = temp;
    }
    else {
        temp->link = NULL;
        *first = temp;
    }
}
```

first != NULL → 리스트 존재



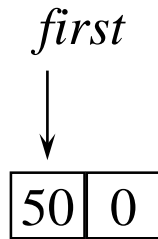
first → null



C에서 체인표현(Representing Chains in C)

- [예제 4.3] 리스트 삽입
 - 임의의 노드 뒤에 데이터 필드 값이 50인 노드를 삽입

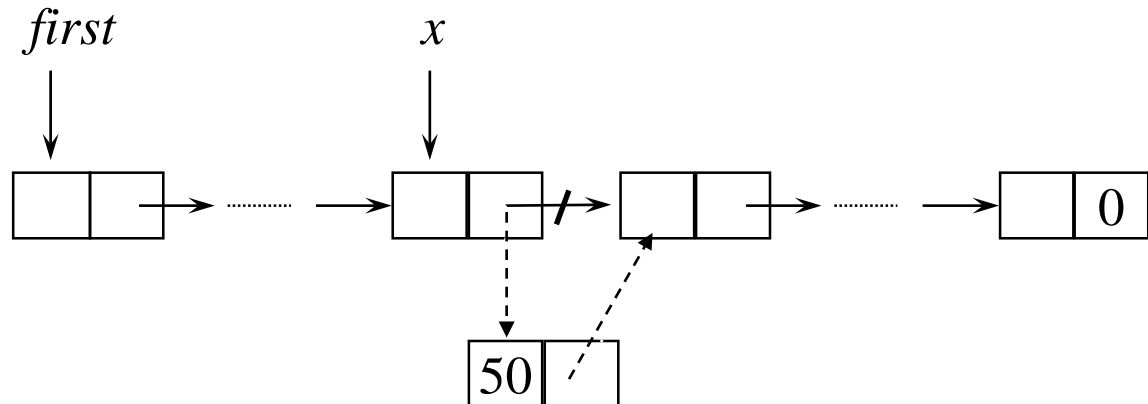
공백 리스트인 경우



`*first == NULL`인 경우

(a)

공백 리스트가 아닌 경우



(b)

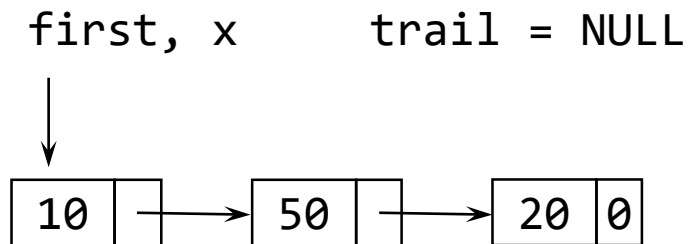
C에서 체인표현(Representing Chains in C)

- [예제 4.4] 리스트 삭제

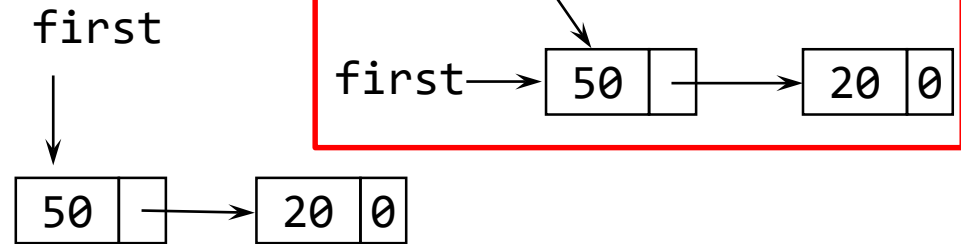
- 노드의 위치에 따라 삭제하는 방법이 다름
- `first` : 리스트의 시작을 가리키는 포인터
- `x` : 삭제하고자 하는 노드를 가리키는 포인터
- `trail` : 삭제할 노드의 선행 노드를 가리키는 포인터

삭제하고자 하는 노드가 첫 번째 인 경우

`delete(&first, NULL, first);` 전과 후의 리스트



(a) 삭제 전



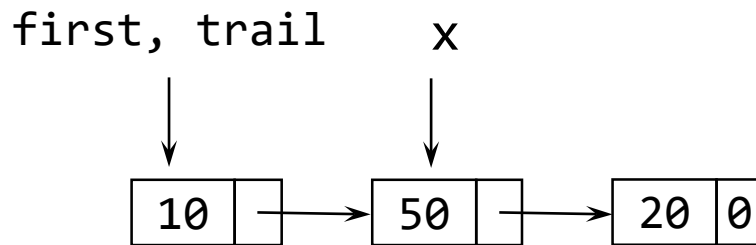
(b) 삭제 후

C에서 체인표현(Representing Chains in C)

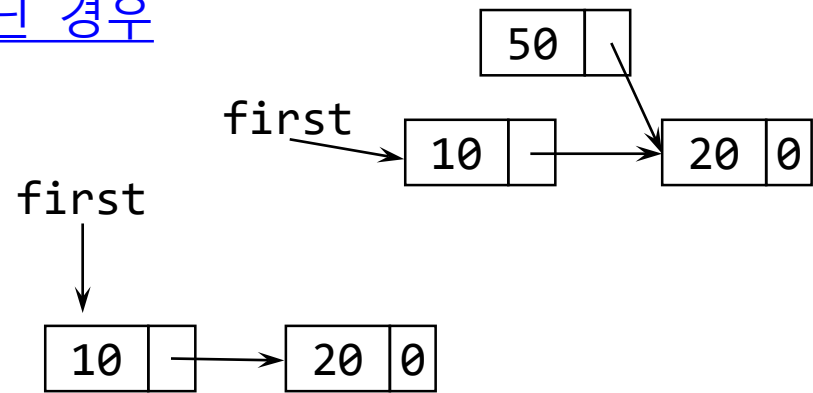
- [예제 4.4] 리스트 삭제

- first : 리스트의 시작을 가리키는 포인터
- x : 삭제하고자 하는 노드를 가리키는 포인터
- trail : 삭제할 노드의 선행 노드를 가리키는 포인터

삭제하고자 하는 노드가 첫 번째가 아닌 경우



(a) 삭제 전



(b) 삭제 후

`trail->link = x->link;`

`delete(&first, trail, x)` 함수 호출 전과 후

C에서 체인표현(Representing Chains in C)

- [예제 4.4] 리스트 삭제

first@delete

 multiple_pointer.c

```
void delete(listPointer *first, listPointer trail, listPointer x)
{ /* 리스트로부터 노드를 삭제, trail은 삭제될 x의 선행 노드이며
   first는 리스트의 시작 */
  if (trail)
    trail->link = x->link;
  else
    *first = (*first)->link;
  free(x);
}
```

← 첫 번째 노드가 아닐 경우
delete(&first, trail, x);

← 첫 번째 노드 삭제
delete(&first, NULL, first);

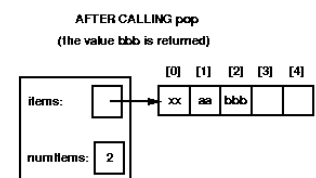
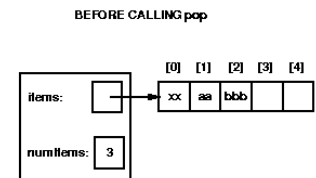
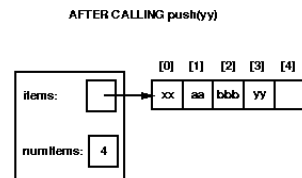
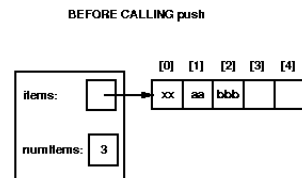
- [예제 4.5] 리스트의 출력

first@printList

```
void printList(listPointer first)
{
  printf("The list contains: ");
  for (; first; first = first->link)
    printf("%4d", first->data);
  printf("\n");
}
```

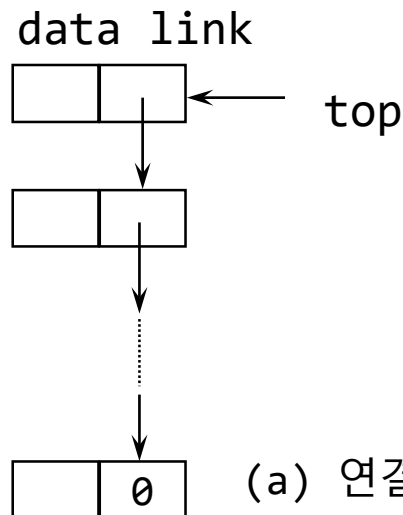
연결 스택과 큐

(Linked Stacks and Queues)

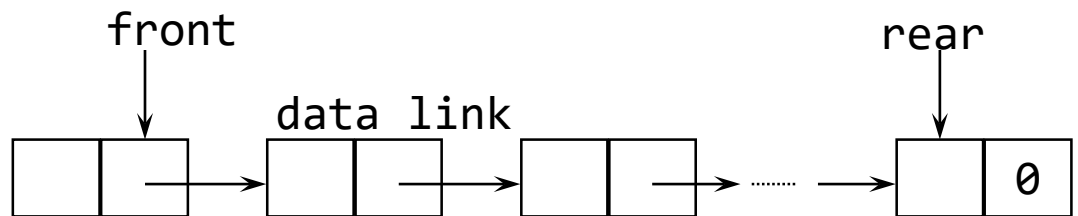


연결 스택과 큐(Linked Stacks and Queues)

- 여러 개의 스택이나 큐가 동시에 있을 때
 - 다중 스택과 큐를 순차적으로 표현할 때, 많은 오버헤드 발생
- 연결 스택과 큐
 - 링크의 화살표 방향 : 노드의 삽입과 삭제가 편리하게 만들어 줌
 - (연결 스택) 톱에서 노드 삽입/삭제 용이
 - (연결 큐) 뒤에선 노드를 쉽게 삽입 / 앞에선 노드를 쉽게 삭제



(a) 연결 스택



(b) 연결 큐

연결 스택과 큐(Linked Stacks and Queues)

- 연결 스택(Linked Stacks)

- $n \leq \text{MAX_STACKS}$ 개의 스택을 동시에 나타내려면

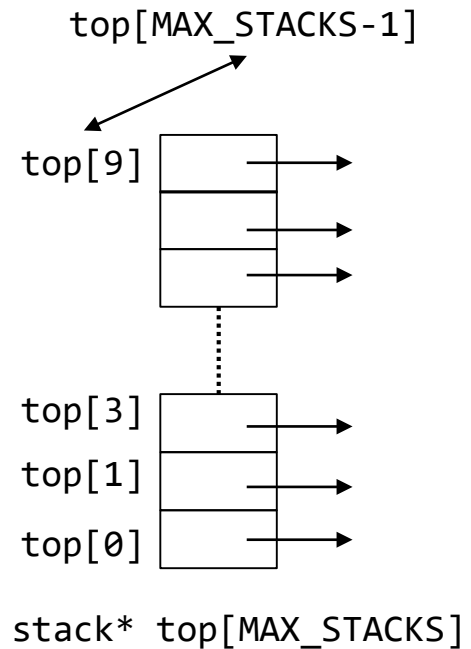
```
#define MAX_STACKS 10 /* 스택의 최대 수 */
typedef struct {
    int key;
    /* 기타 필드 */
} element;

typedef struct stack *stackPointer;

typedef struct stack {
    element data;
    stackPointer link;
};

stackPointer top[MAX_STACKS];
```

선언과 접근에 대한 구별

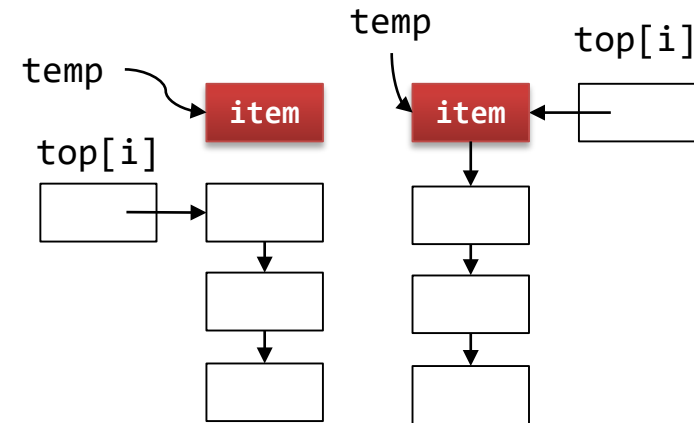


- 스택의 초기 조건: $\text{top}[i] = \text{NULL}, 0 \leq i < \text{MAX_STACKS}$
- 경계 조건: $\text{top}[i] = \text{NULL}$, i 번째 스택이 공백이면 (그 역도 성립)
 $\text{top}[i] = \text{NULL} \leftrightarrow i$ 번째 스택이 공백

연결 스택과 큐(Linked Stacks and Queues)

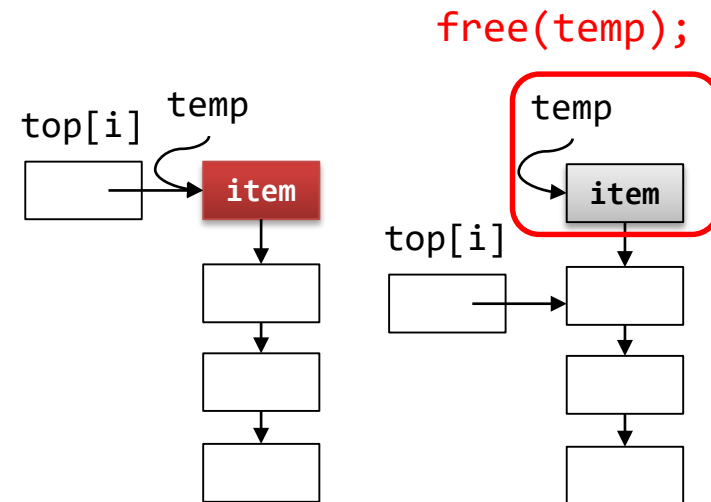
• 연결 스택에 삽입

```
void push(int i, element item)
{ /* i번째 스택에 원소를 삽입 */
    stackPointer temp;
    MALLOC(temp, sizeof(*temp));
    temp->data = item;
    temp->link = top[i];
    top[i] = temp;
}
```



• 연결 스택에서 삭제

```
element pop(int i)
{ /* i번째 스택으로부터 톱 원소를 삭제 */
    stackPointer temp = top[i];
    element item;
    if(!temp)
        return stackEmpty();
    item = temp->data;
    top[i] = temp->link;
    free(temp);
    return item;
}
```



연결 스택과 큐(Linked Stacks and Queues)

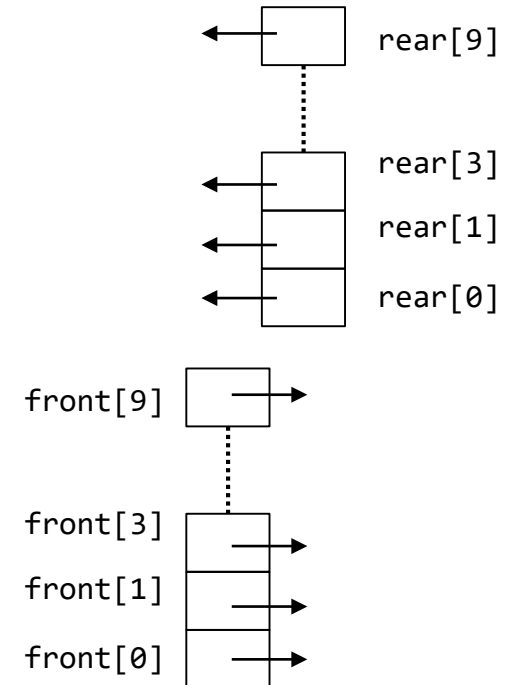
- 연결 큐

- $n \leq \text{MAX_QUEUE}$ 개의 큐를 동시에 나타내려면

```
#define MAX_QUEUE 10    /* 큐의 최대 수 */
typedef struct queue *queuePointer;

typedef struct queue {
    element data;
    queuePointer link;
};

queuePointer front[MAX_QUEUE];
queuePointer rear[MAX_QUEUE];
```



- 큐의 초기 조건: $\text{front}[i] = \text{NULL}, 0 \leq i < \text{MAX_QUEUES}$
- 경계조건: $\text{front}[i] = \text{NULL}$, i 번째 큐가 공백이면 (그 역도 성립)

연결 스택과 큐(Linked Stacks and Queues)

• 연결 큐 뒤에 삽입

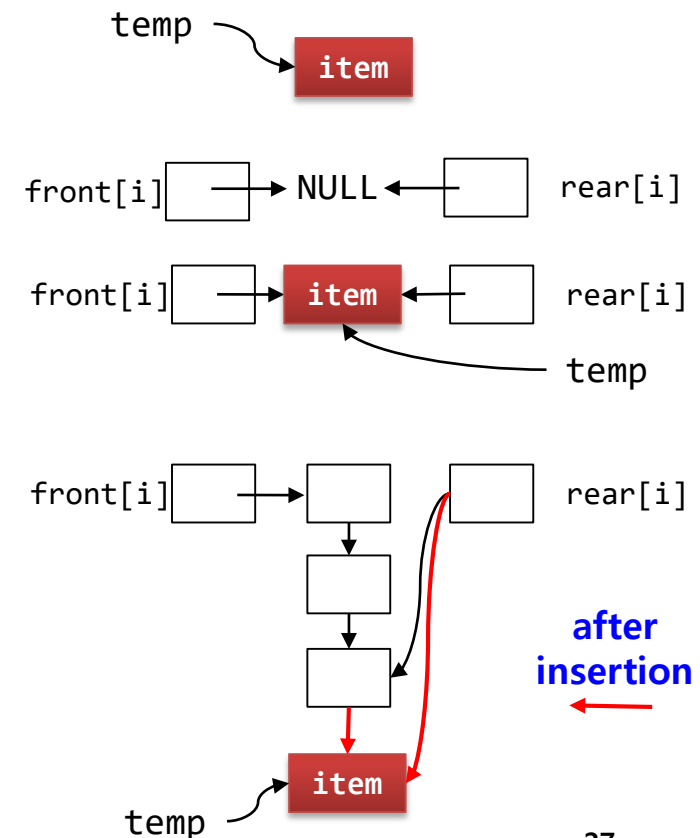
- 큐가 공백인지 조사해야 함
- 공백이면, front를 새로운 노드를 가리키도록 변경시킴
- 그렇지 않으면, rear의 링크 필드를 새로운 노드를 가리키도록

```
void addq(i, item)
{
    /* 큐 i의 뒤에 원소를 삽입 */
    queuePointer temp;
    MALLOC(temp, sizeof(*temp));
    temp->data = item;
    temp->link = NULL;

    if(front[i])
        rear[i]->link = temp;
    else
        front[i] = temp;
    rear[i] = temp;
}
```

empty queue →

stack full 검사하는 로직 없음
→ malloc() 활용



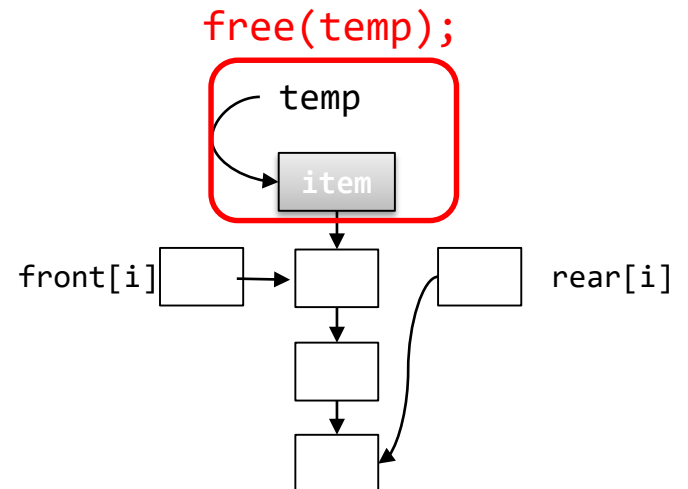
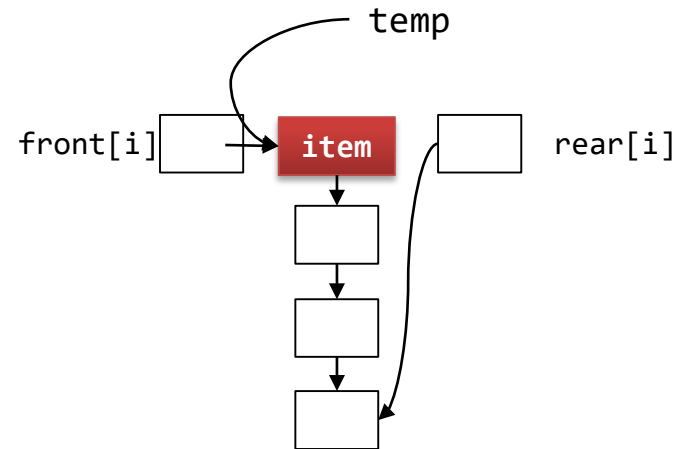
연결 스택과 큐(Linked Stacks and Queues)

- 연결 큐의 앞으로부터 삭제
 - 리스트의 현재 시작 노드를 삭제

```
element deleteq(int i)
{ /* 큐 i로부터 원소를 삭제 */
    queuePointer temp = front[i];
    element item;

    if(!temp)
        return queueEmpty();
    item = temp->data;
    front[i] = temp->link;

    free(temp);
    return item;
}
```



연결 스택과 큐(Linked Stacks and Queues)

- n-스택, m-큐를 연결리스트로 구현 → 구현의 단순함, Time Complexity의 감소
 - 추가공간을 만들기 위해 스택이나 큐를 이동시킬 필요가 없다.
- 가용메모리가 남아있을 때까지 크기를 증대시킬 수 있다 (malloc())
- 링크에 대한 오버헤드가 발생하지만...장점이 많다.
 - 간단한 방법으로 리스트를 표현할 수 있는 능력
 - 연결된 표현을 처리하기 위한 감소된 연산 시간

다항식

(Polynomials)

In mathematics, a polynomial is an expression consisting of variables (also called indeterminates) and coefficients, that involves only the operations of addition, subtraction, multiplication, and non-negative integer exponents of variables.

Polynomials

$$2x^2 + 6x - 9$$

$$-x^3 + 9$$

$$4x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 12x + 24$$

Not Polynomials

$$10x^{-1} + 6x^2$$

$$\sqrt{x} - 2$$

$$\frac{3}{x} + 5$$

다항식의 표현(Polynomial Representation)

Page 70. 배열을 이용한
다항식표현과 비교

- 다항식의 표현

$$A(x) = a_{m-1}x^{e_{m-1}} + \dots + a_0x^{e_0}$$

a_i : 0이 아닌 계수
 e_i : 음수가 아닌 정수 지수
 $e_{m-1} > e_{m-2} > \dots > e_1 > e_0 \geq 0$

- 리스트를 사용해서 다항식을 표현

- 노드(node): 계수, 지수, 다음 항을 가리키는 포인터 등 3개의 필드
- 계수가 정수라고 가정

```
typedef struct polyNode *polyPointer;  
typedef struct polyNode {  
    int coef;  
    int expon;  
    polyPointer link;  
};  
polyPointer a,b;
```



polyNode

다항식의 표현(Polynomial Representation)

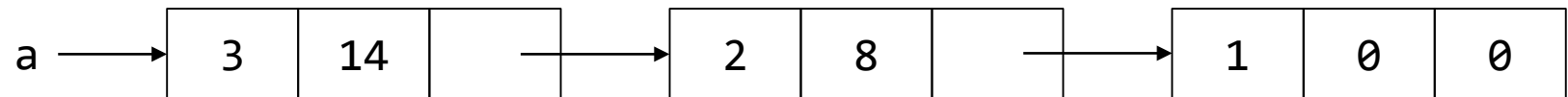
- Example:

- $a = 3x^{14} + 2x^8 + 1$

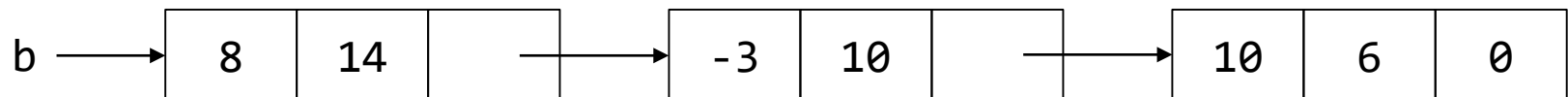
- $b = 8x^{14} - 3x^{10} + 10x^6$

coef	expon	link
------	-------	------

polyNode



$$3x^{14} + 2x^8 + 1$$



$$8x^{14} + 3x^{10} + 10x^6$$

다항식의 덧셈(Adding Polynomials)

Page 74. 배열을 이용한
다항식 덧셈과 비교

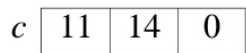
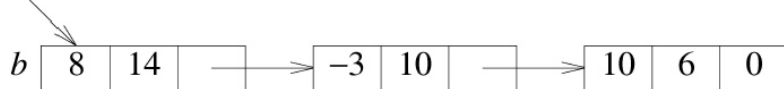
- 포인터 a와 b가 가리키는 노드에서 시작되는 항들을 비교
- $(a \rightarrow \text{expon} = b \rightarrow \text{expon})$
 - 만일 두 항의 지수가 같으면 계수를 더함
 - 결과 다항식에 새로운 항을 만듦
 - 포인터 a, b를 다음 노드로 이동
- $(a \rightarrow \text{expon} < b \rightarrow \text{expon})$
 - b의 항과 같은 항을 만들어 결과 다항식 d에 첨가
 - 포인터 b를 다음 노드로 이동
- $(a \rightarrow \text{expon} > b \rightarrow \text{expon})$
 - a의 항과 같은 항을 만들어 결과 다항식 d에 첨가
 - 포인터 a를 다음 노드로 이동

다항식의 덧셈(Adding Polynomials)

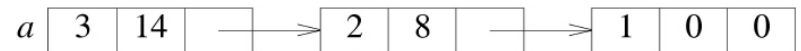
$$c = a + b$$



bi *ai*

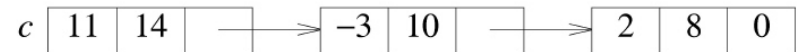
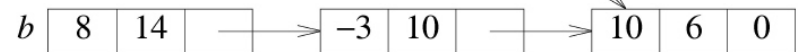


(i) $a \rightarrow \text{expon} == b \rightarrow \text{expon}$

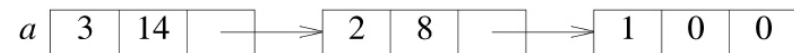


ai

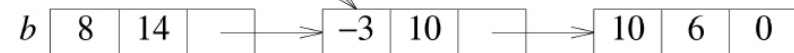
bi



(iii) $a \rightarrow \text{expon} > b \rightarrow \text{expon}$



bi *ai*



(ii) $a \rightarrow \text{expon} < b \rightarrow \text{expon}$

다항식의 덧셈(Adding Polynomials)

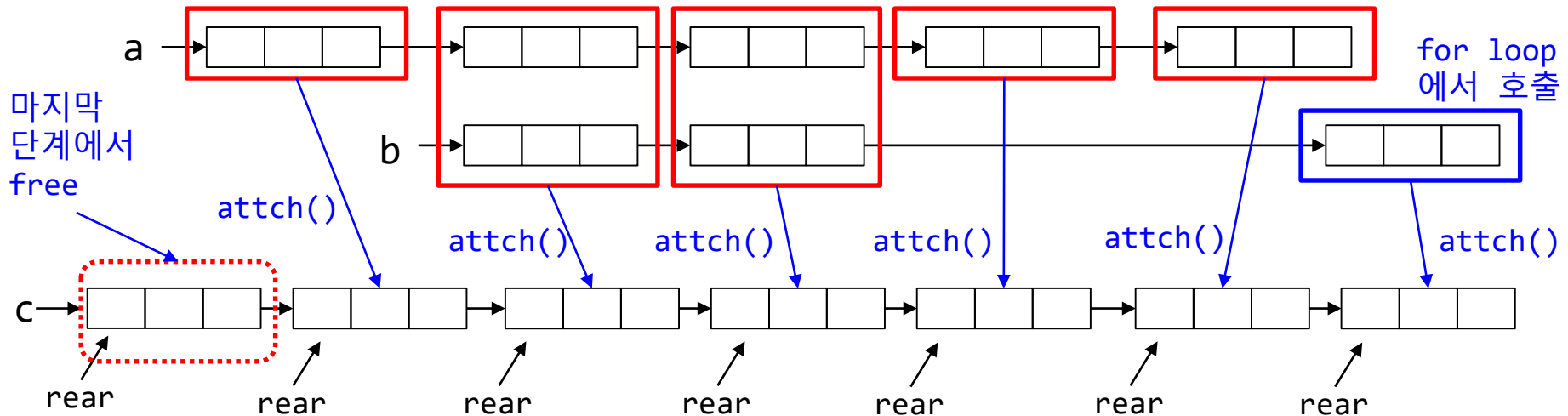
```
polyPointer padd(polyPointer a, polyPointer b) /* a와 b가 합산된 다항식을 반환 */
{
    polyPointer c, rear, temp;
    int sum;
    MALLOC(rear, sizeof(*rear)); ← node를 연결하기위한 임시 node 생성
    c = rear;
    while(a && b)
        switch(COMPARE(a->expon, b->expon)) {
            case -1: /* a->expon < b->expon */
                attach(b->coef, b->expon, &rear);
                b = b->link;
                break;
            case 0 : /* a->expon = b->expon */
                sum = a->coef + b->coef;
                if(sum) attach(sum, a->expon, &rear);
                a = a->link; b = b->link; break;
            case 1: /* a->expon > b->expon */
                attach(a->coef, a->expon, &rear);
                a = a->link;
        }
    /* 리스트 a와 리스트 b의 나머지를 복사 */
    for(; a; a=a->link) attach(a->coef, a->expon, &rear);
    for(; b; b=b->link) attach(b->coef, b->expon, &rear);
    rear->link = NULL;
    /* 필요 없는 초기 노드를 삭제 */
    temp = c; c = c->link; free(temp); ← node를 연결하기위한 임시 node 제거
    return c;
}
```

for loop 전에 if a == NULL or b == NULL
검사 하지 않음 (code simplicity)

다항식의 덧셈(Adding Polynomials)

```
void attach(float coefficient, int exponent, polyPointer *ptr)
{ /* coef=coefficient 이고 expon=exponent인 새로운 노드를 생성하고,
   그것을 ptr에 의해 참조되는 노드에 첨가한다. ptr을 갱신하여
   이 새로운 노드를 참조하도록 한다. */

    polyPointer temp;
    MALLOC(temp, sizeof(*temp));
    temp->coef = coefficient;
    temp->expon = exponent;
    (*ptr)->link = temp;
    *ptr = temp;
}
```



다항식의 덧셈(Adding Polynomials)

- padd 함수 분석: 세가지 비용요소
 - 계수 덧셈
 - 지수 비교
 - 결과값(c)을 위한 새로운 노드

$$A(x) = a_{m-1}x^{e_{m-1}} + \dots + a_0x^{e_0}$$

$$B(x) = b_{n-1}x^{f_{n-1}} + \dots + b_0x^{f_0}$$

$$\begin{aligned} a_i, b_i &\neq 0 \\ e_{m-1} &> \dots > e_0 \geq 0 \\ f_{n-1} &> \dots > f_0 \geq 0 \end{aligned}$$

계수 덧셈 $0 \leq \text{계수덧셈의 횟수} \leq \min\{m, n\}$ $\leftarrow O(\min(m, n))$

지수 비교 while loop에서 각각 지수를 한번씩만 비교
항의 총 수 = $m+n$ $\leftarrow O(m+n)$

$$e_{m-1} > f_{n-1} > e_{m-2} > f_{n-2} > \dots > e_1 > f_1 > e_0 > f_0$$

결과 노드 최대 항 수가 $m+n$ $\leftarrow O(m+n)$

padd의 Time Complexity = $O(m+n)$

다항식의 곱셈(Multiplying Polynomials)

$$e(x) = a(x) * b(x) + d(x)$$

programming

```
polyPointer a, b, d, e;
```

```
·
```

```
·
```

```
·
```

```
a = readPoly();
```

```
b = readPoly();
```

```
d = readPoly();
```

```
temp = pmult(a, b);
```

```
e = padd(temp, d);
```

```
printPoly(e)
```

$a(x)*b(x)$ 의 결과 값을 temp에 저장
하고, temp는 다시 $d(x)$ 와 연산.

temp를 사용하고 반환 →

메모리 가용도 높일 수 있음

다항식의 삭제(Erasing Polynomials)

- 함수 erase : temp에 있는 노드들을 하나씩 반환

```
void erase(polyPointer *ptr)
{ /* ptr에 의해 참조되는 다항식을 제거 */
    polyPointer temp;
    while(*ptr) {
        temp = *ptr;
        *ptr = (*ptr)->link;
        free(temp);
    }
}
```

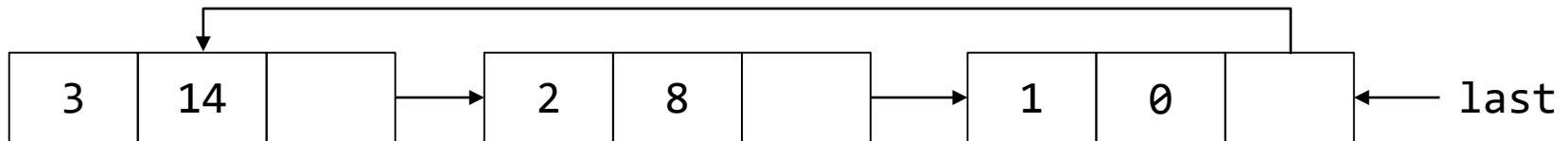
```
typedef struct polyNode *polyPointer;
typedef struct polyNode {
    int coef;
    int expon;
    polyPointer link;
};
polyPointer a,b;
```

다항식의 원형 리스트 표현

(Circular List Representation of Polynomials)

- 표현방법

- 마지막 노드가 리스트의 첫 번째 노드를 가리키도록 함
 - (cf) 체인(chain): 마지막 노드의 링크 필드 값이 NULL
- $3x^{14}+2x^8+1$ 의 원형 리스트 표현



- 가용공간 리스트

- 해제(free)된 노드를 체인 형태의 리스트로 유지
- 가용 공간 리스트(available space list) 혹은 avail 리스트
 - avail : 리스트에서 첫 번째 노드를 가리키는 포인터(초기값 NULL)
- 새로운 노드가 필요하면 이 리스트를 조사
- malloc, free 사용하는 대신 getNode, retNode 사용

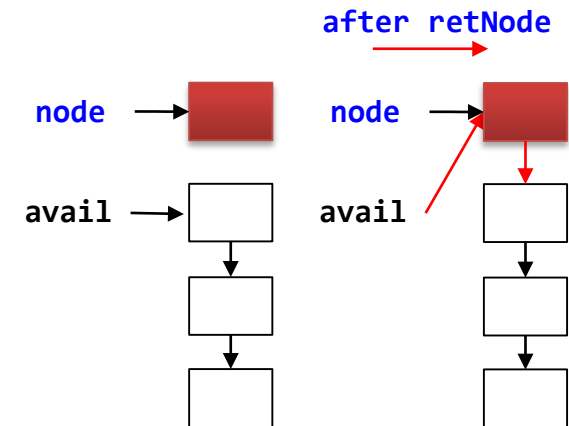
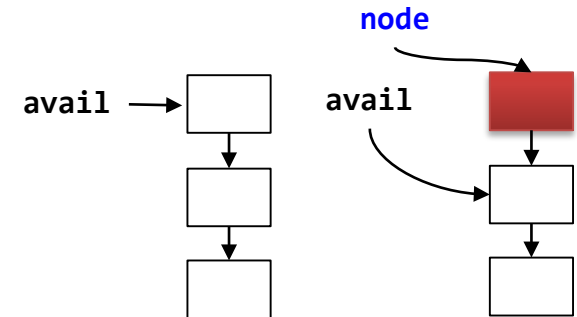
다항식의 원형 리스트 표현

(Circular List Representation of Polynomials)

- getNode, retNode

```
polyPointer getNode(void) /* 사용할 노드를 제공 */
{
    polyPointer node;
    if (avail) {
        node = avail;
        avail = avail->link;
    }
    else
        MALLOC(node, sizeof(*node));
    return node;
}
```

```
void retNode(polyPointer node)
{
    /* 가용 리스트에 노드를 반환 */
    node->link = avail;
    avail = node;
}
```



다항식의 원형 리스트 표현

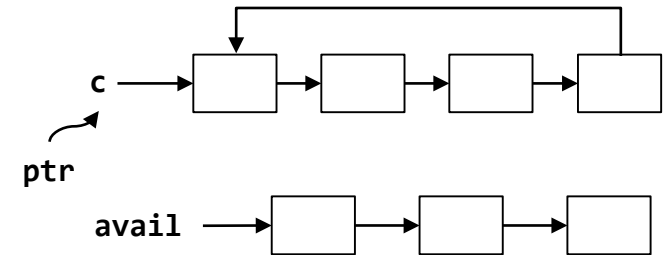
(Circular List Representation of Polynomials)

- cerase

원형리스트 전체를 avail로 리턴

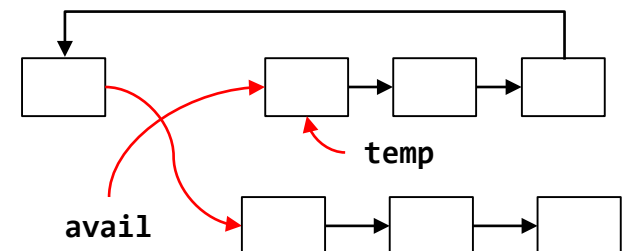
```
void cerase(polyPointer *ptr)
{
    /* ptr가 가리키는 원형 리스트를 제거 */
    polyPointer temp;
    if (*ptr) {
        temp = (*ptr)->link;
        (*ptr)->link = avail;
        avail = temp;
        *ptr = NULL;
    }
}
```

ptr이 가리키는 원형 리스트의 크기에
상관없이 $O(1)$ Time Complexity에 원형
리스트 제거 가능



c
ptr

*ptr=NULL
↔ c = NULL



다항식의 원형 리스트 표현

(Circular List Representation of Polynomials)

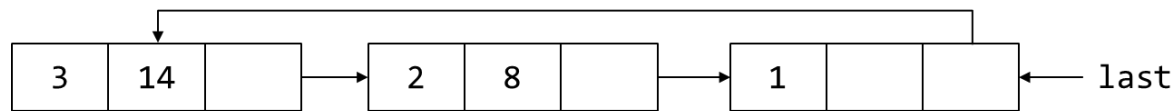
- 제로 다항식(zero polynomials)

- 기존 방식으로 “제로 다항식”에 별도케이스를 만들어 처리
 - 제로다항식인지 검사, 입력 삭제에 대해 제로다항식인지 검사 등

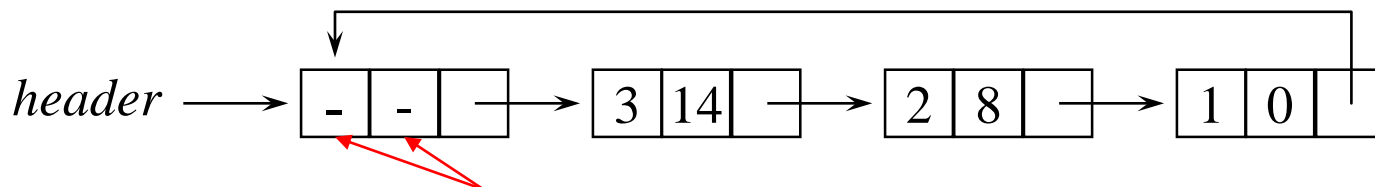
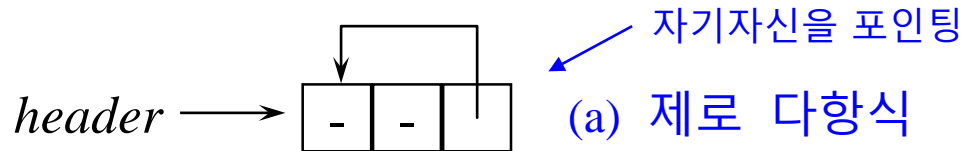
- 헤더 노드(header node) 사용하여 다항식 처리

- 제로 다항식에 대한 특별한 경우를 만들지 않기 위해 각 다항식은 헤더 노드를 갖도록 함

기존
다항식 표현



제로 다항식, 일반다항식
모두 header를 가짐



coef, expon
필드는 의미가 없다

(b) $3x^{14} + 2x^8 + 1$

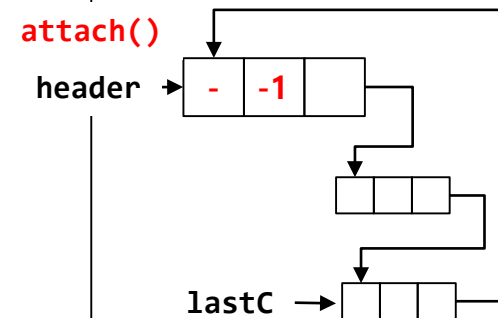
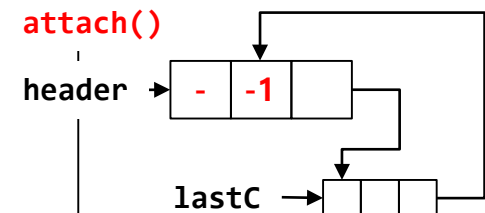
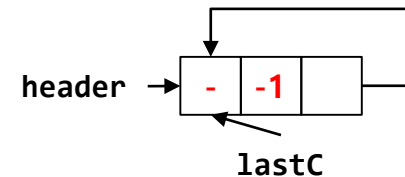
다항식(Polynomials)

cpadd (헤더를 가진 다항식의 덧셈)

```
polyPointer cpadd(polyPointer a, polyPointer b)
{
    polyPointer startA, c, lastC;
    int sum, done = FALSE;
    startA = a;
    a = a->link;    b = b->link;    c = getNode();
    c->expon = -1; lastC = c;
    do {
        switch(COMPARE(a->expon, b->expon)) {
            case -1: /* a->expon < b->expon */
                attach(b->coef, b->expon, &lastC);
                b = b->link; break;
            case 0: /* a->expon = b->expon */
                if(startA == a) done = TRUE;
                else {
                    sum = a->coef + b->coef;
                    if(sum) attach(sum, a->expon, &lastC);
                    a = a->link; b = b->link;
                }
                break;
            case 1: /* a->expon > b->expon */
                attach(a->coef, a->expon, &lastC);
                a = a->link;
        }
    } while(!done);
    lastC->link = c;
    return c;
}
```

/* 다항식 a와 b는 헤더 노드를 가진 단순 연결 원형 리스트이고, a와 b가 합산된 다항식을 반환한다. */

← header node 초기화



추가 리스트 연산

(Additional List Operations)

체인 연산(Operations for Chains)

가용 공간(available space) 리스트
탐색공간 (search space)

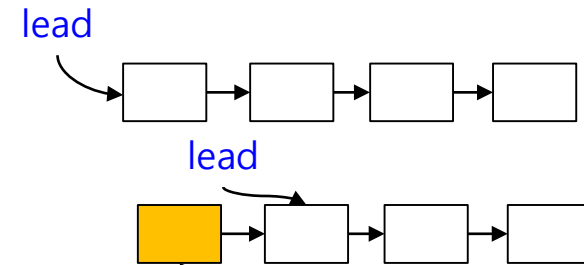
- 체인을 역순으로 만드는 (invert, reversing) 연산

```
typedef struct listNode *listPointer;  
typedef struct listNode {  
    char data;  
    listPointer link;  
};
```

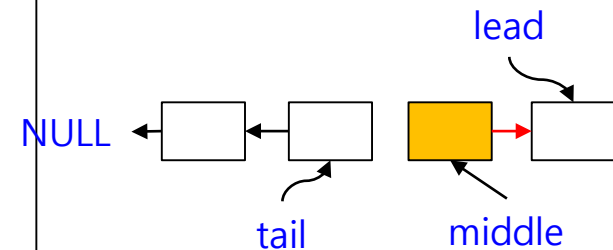
```
listPointer invert(listPointer lead)  
{ /* lead가 가리키고 있는 리스트를 역순으로 만든다. */  
    listPointer middle, trail;  
    middle = NULL;  
    while (lead) {  
        trail = middle;  
        middle = lead;  
        lead = lead->link;  
        middle->link = trail;  
    }  
    return middle;  
}
```

Data

trail을 middle쪽으로
middle을 lead쪽으로
lead를 다음링크로 이동



접근할 방법이 없음



Time Complexity = $O(\text{length})$
length = 리스트의 길이

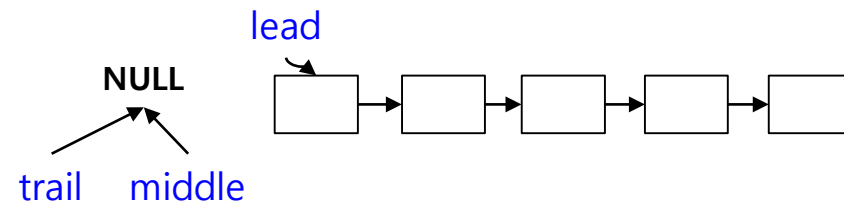
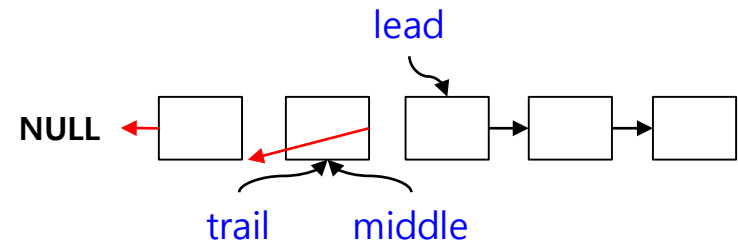
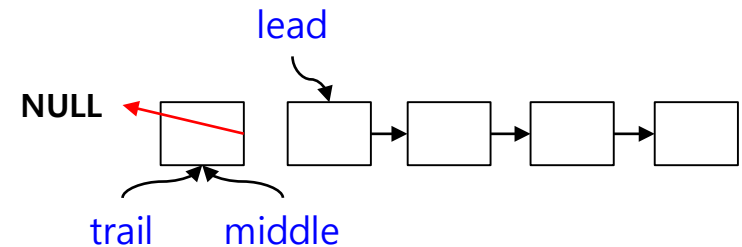
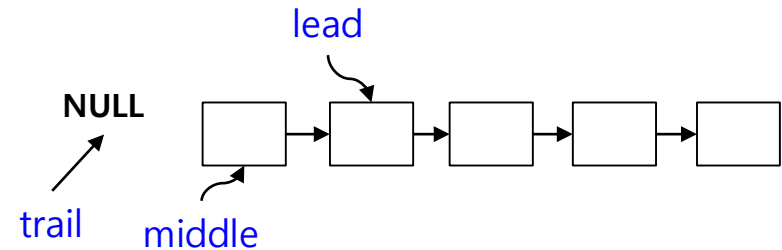
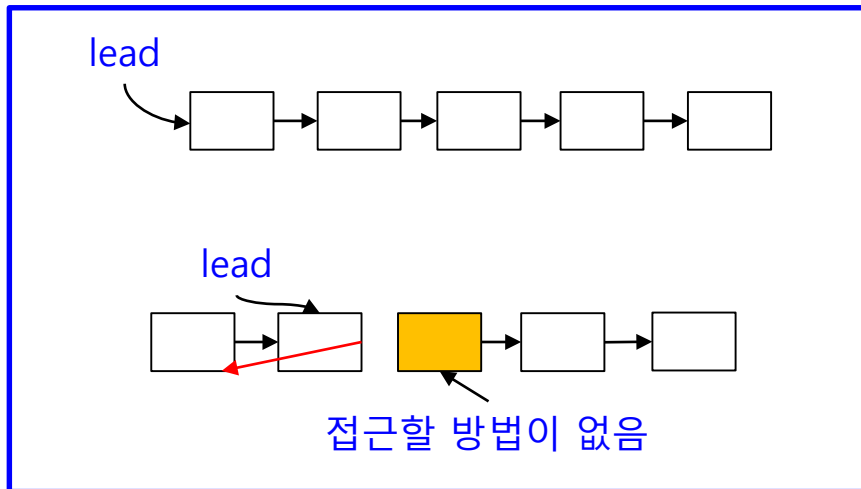
체인 연산(Operations for Chains)

```
while (lead) {  
    trail = middle;  
    middle = lead;  
    lead = lead->link;  
    middle->link = trail;  
}
```

3개의 포인터를 적절히 이용하여 제 자리(in place)에서 문제를 해결

trail middle lead

문제점



체인 연산(Operations for Chains)

- 두 개의 체인 ptr1과 ptr2를 연결(concatenation)하는 연산

```
listPointer concatenate(listPointer ptr1, listPointer ptr2)
{
    /* 리스트 ptr1 뒤에 리스트 ptr2가 연결된 새로운 리스트를 생성한다.
    ptr1이 가리키는 리스트는 영구히 바뀐다. */

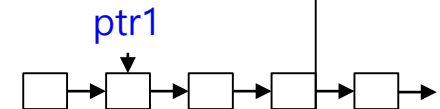
    listPointer temp;

    /* check for empty lists */
    if(!ptr1) return ptr2;
    if(!ptr2) return ptr1;

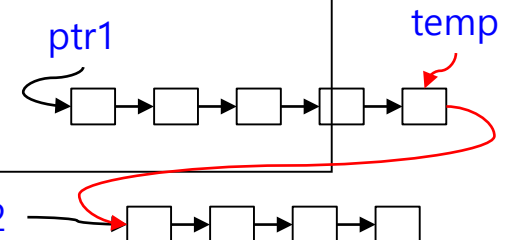
    /* neither list is empty, find end of first list */
    for(temp = ptr1; temp->link; temp = temp->link) ;

    /* link end of first to start of second */
    temp->link = ptr2;
}
```

← ptr1을 직접 핸들링하면 앞쪽으로 이동 불가



← 둘 중에 하나라도 NULL이면, 다른 리스트 리턴



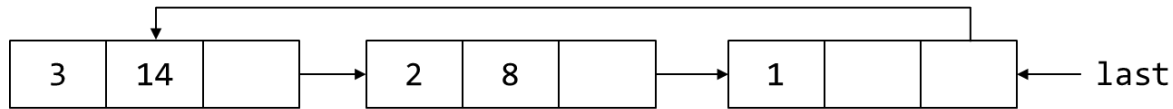
원형 연결 리스트 연산

(Operations for Circularly Linked Lists)

왜 last는 이중 포인터인가?
주의: last@insertFront

• 원형 연결 리스트에 삽입

- 리스트의 마지막 노드에 대한 포인터 last를 유지함으로써 앞이나 뒤 양쪽에 쉽게 원소를 삽입 가능

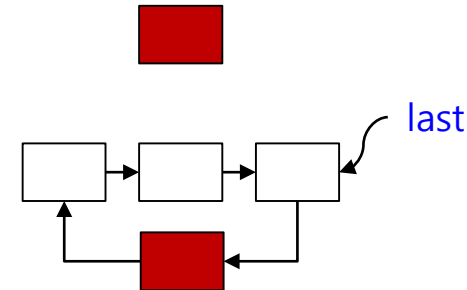
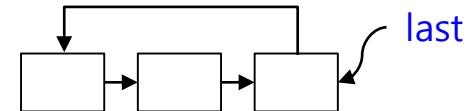
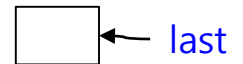


/* 리스트의 마지막 노드가 last인 원형 리스트의 앞에 노드 삽입 */

```
void insertFront(listPointer *last, listPointer node)
{
    if (IS_EMPTY(*first)) {
        /* 리스트가 공백일 경우, last이 새로운 항목을 가리킴 */
        *last = node;
        node->link = node;
    }
    else {
        /* 공백이 아니면, 리스트의 앞에 새로운 항목을 삽입 */
        node->link = (*last)->link;
        (*last)->link = node;
    }
}
```

첫 번째 노드를 가리키는 first 사용한다면 리스트 전체를 이동한 후 마지막 노드의 포인터 변경

공백이었을 때



가장 앞쪽에 삽입한 효과

원형 연결 리스트 연산

(Operations for Circularly Linked Lists)

왜 last는 싱글 포인터인가?
주의: last@length

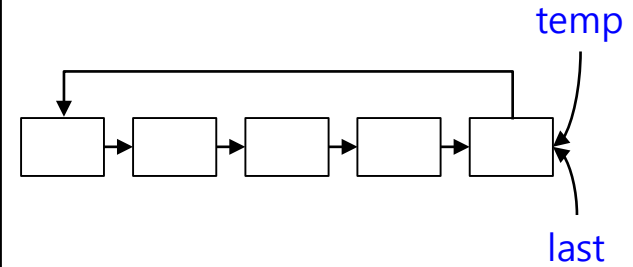
- 원형 연결 리스트의 길이 계산

```
int length(listPointer last)
{
    /* 원형 리스트 last의 길이를 계산한다. */
    listPointer temp;
    int count = 0;

    if (last) {
        temp = last;

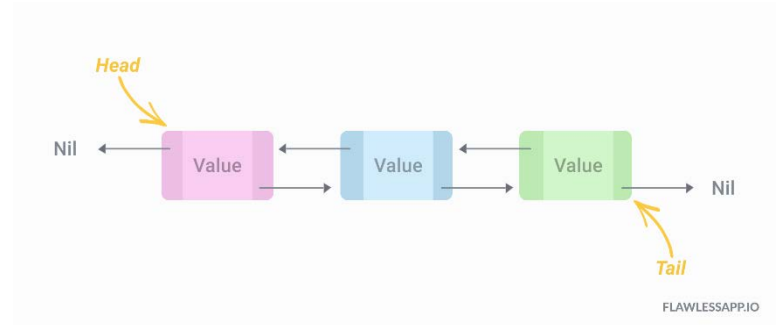
        do {
            count++;
            temp = temp->link;
        } while (temp != last);

        return count;
    }
}
```



이중 연결 리스트 (Doubly Linked List)

In computer science, a doubly linked list is a linked data structure that consists of a set of sequentially linked records called nodes. Each node contains three fields: two link fields (references to the previous and to the next node in the sequence of nodes) and one data field.

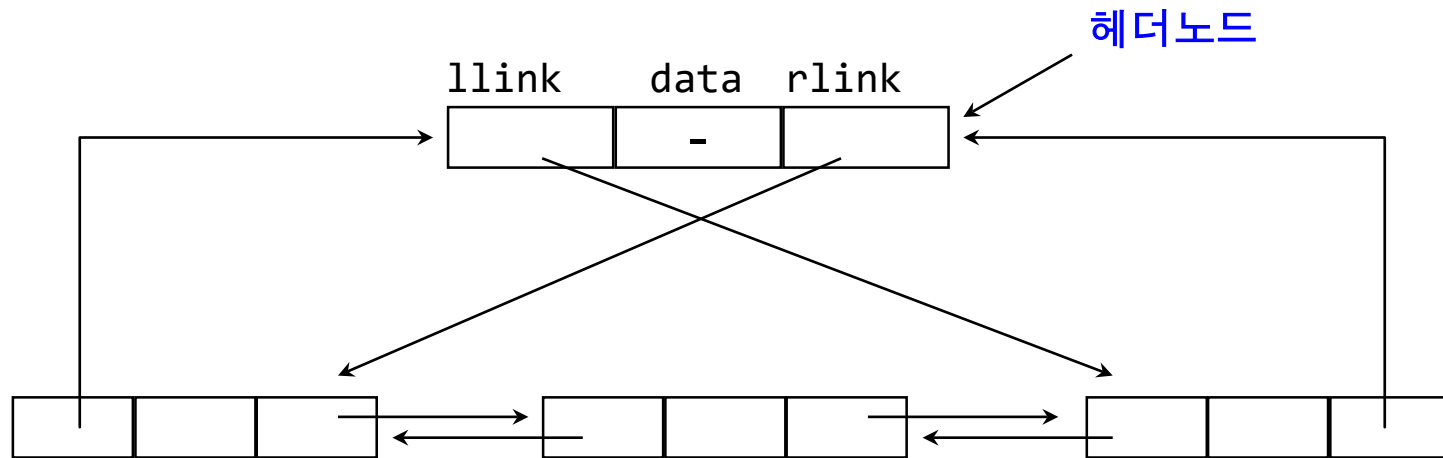


https://en.wikipedia.org/wiki/Doubly_linked_list

이중 연결리스트(Doubly Linked Lists)

- 이중 연결 리스트(doubly linked list)
 - 포인터를 양방향으로 이동해야 할 필요가 있을 때
 - 임의의 노드를 삭제해야 되는 문제에 적합
 - 각 노드는 전방과 후방을 가리키는 두 개의 링크를 가짐

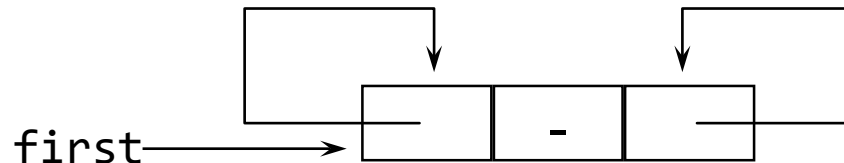
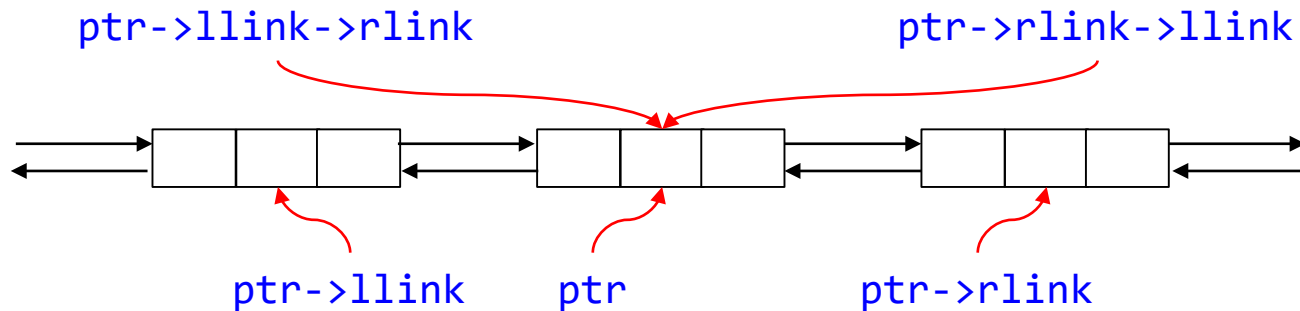
```
typedef struct node *nodePointer;  
typedef struct node {  
    nodePointer llink;  
    element data;  
    nodePointer rlink;  
}
```



헤더 노드가 있는 이중 연결 원형 리스트

이중 연결리스트(Doubly Linked Lists)

- 이중 연결 리스트에서 ptr이 임의의 노드를 가리키고 있다면
 - $\text{ptr} = \text{ptr} \rightarrow \text{llink} \rightarrow \text{rlink} = \text{ptr} \rightarrow \text{rlink} \rightarrow \text{llink}$ 성립
 - 전위 노드나 후위 노드로 쉽게 이동할 수 있음

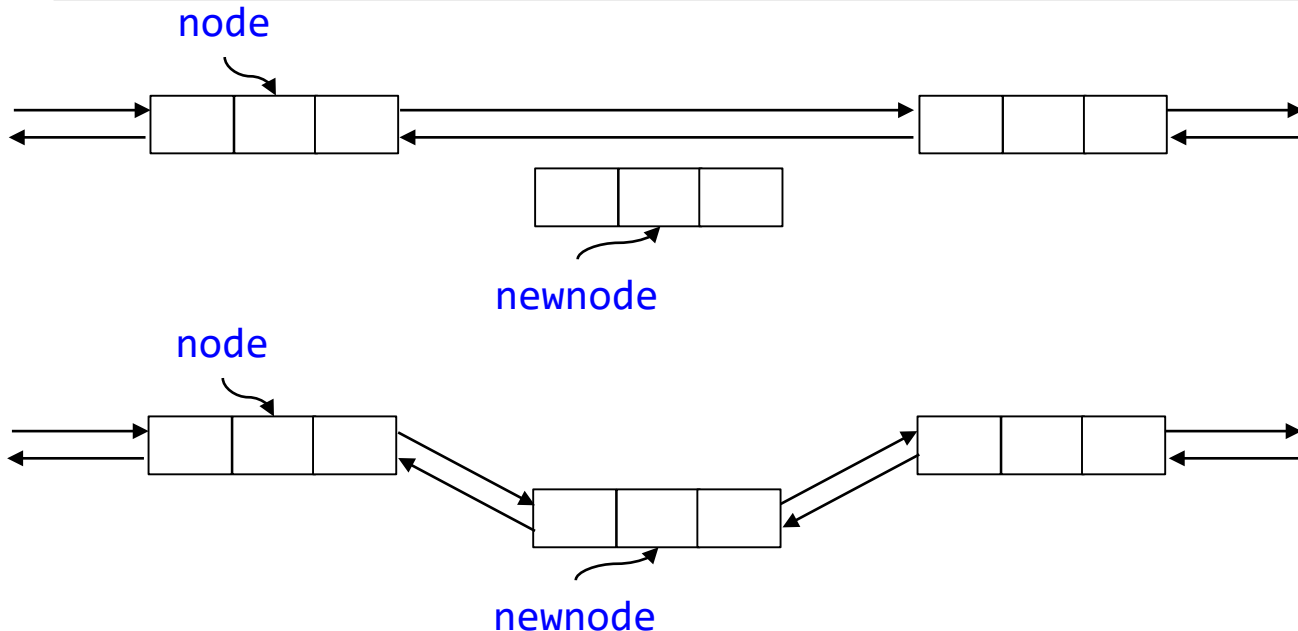


헤더 노드를 가진 공백 이중 연결 원형 리스트

이중 연결리스트(Doubly Linked Lists)

- 이중 연결 원형 리스트에 삽입

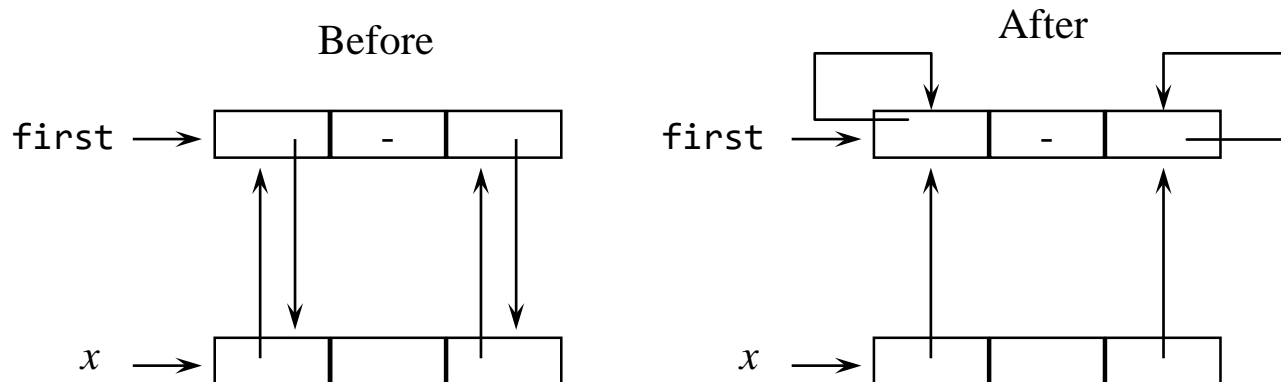
```
void dinsert(nodePointer node, nodePointer newnode)
{
    /* newnode를 node의 오른쪽에 삽입 */
    newnode->llink = node;
    newnode->rlink = node->rlink;
    node->rlink->llink = newnode;
    node->rlink = newnode;
}
```



이중 연결리스트(Doubly Linked Lists)

- 이중 연결 원형 리스트로부터 삭제

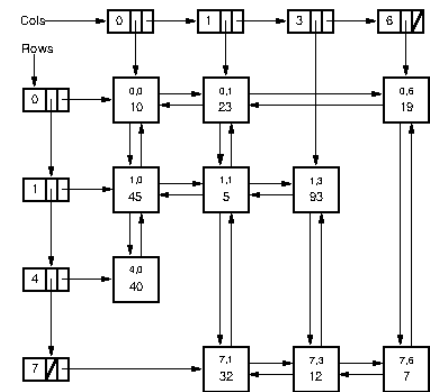
```
void ddelete(nodePointer node, nodePointer deleted)
{
    /* 이중 연결 리스트에서 삭제 */
    if (node == deleted)
        printf("Deletion of head node not permitted.\n");
    else {
        deleted->llink->rlink = deleted->rlink;
        deleted->rlink->llink = deleted->link;
        free(deleted);
    }
}
```



Additional Slides #1

희소행렬 (Sparse Matrices)

In numerical analysis and scientific computing, a sparse matrix or sparse array is a matrix in which most of the elements are zero. By contrast, if most of the elements are nonzero, then the matrix is considered dense.



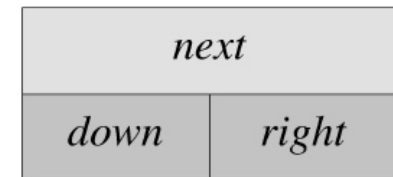
희소행렬 표현(Sparse Matrix Representation)

- 희소 행렬의 연결 리스트 표현

- 희소 행렬의 각 열과 행을 헤더 노드가 있는 원형 연결 리스트로 표현
- 각 노드에는 헤더노드와 엔트리 노드를 나타내기 위한 **tag** 필드가 있음

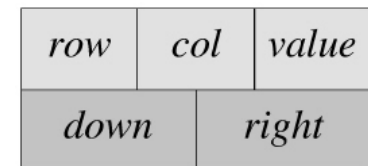
- 헤더 노드(header node)

- down : 열 리스트로 연결하는데 사용
- right : 행 리스트로 연결하는데 사용
- next : 헤드 노드들을 서로 연결하는데 사용
- 헤더 노드의 총 수 : $\max\{\text{행의 수}, \text{열의 수}\}$



- 엔트리 노드(entry node)

- tag필드 외에 5개의 필드(row, col, down, right, value)가 있음
- down: 같은 열에 있는 0이 아닌 다음 항 연결
- right : 같은 행에 있는 0이 아닌 다음 항 연결



$$a_{ij} \neq 0 \rightarrow \text{tag} = \text{entry}, \text{value} = a_{ij}, \text{row} = i, \text{col} = j$$

희소행렬 표현(Sparse Matrix Representation)

- 5*4 희소 행렬 a

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- 필요한 노드 수

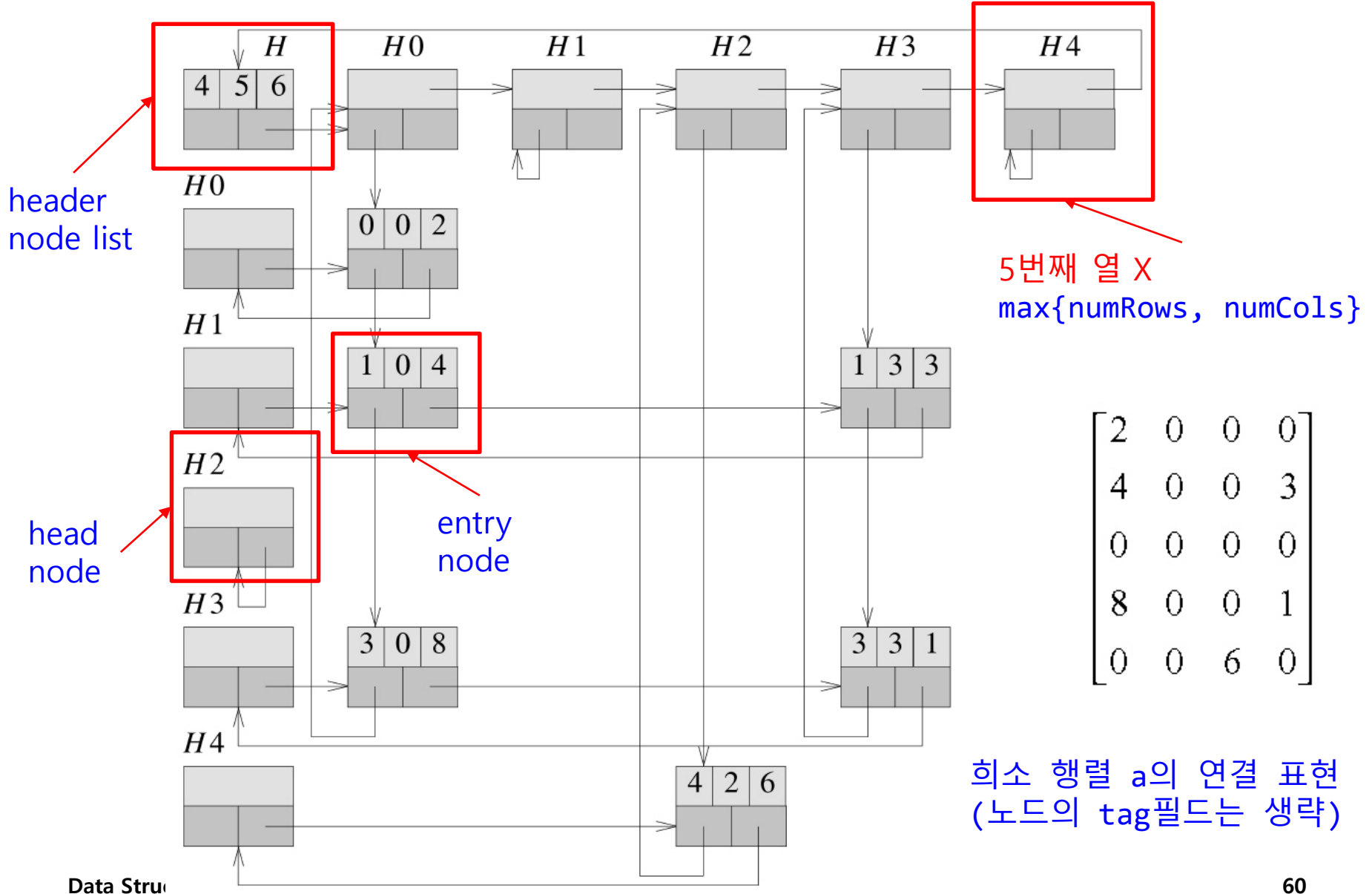
– numTerms개의 0이 아닌 항을 가진 numRows * numCols 희소 행렬
이라면 $\max\{\text{numRows}, \text{numCols}\} + \text{numTerms} + 1$ 개

header node

entry node

header node list

희소행렬 표현(Sparse Matrix Representation)



희소행렬 표현(Sparse Matrix Representation)

- 희소 행렬의 표현을 위한 자료 구조 정의

```
#define MAX_SIZE 50    /* 최대 행렬 크기 */
typedef enum {head,entry} tagfield;
typedef struct matrixNode *matrixPointer;
typedef struct entryNode {
    int row;
    int col;
    int value;
};
typedef struct matrixNode {
    matrixPointer down;
    matrixPointer right;
    tagfield tag;
    union {
        matrixPointer next;
        entryNode entry;
    } u;
};
matrixPointer hdnode[MAX_SIZE];
```

← head 인지 entry인지
나타내는 플래그(flag)

← 상이한 두 종류의 노드를
하나의 matrixNode로
관리하기 위해

희소행렬 입력(Sparse Matrix Input)

- 희소 행렬 입력 (1)

- 첫 번째 입력 라인

- 행의 수(numRows), 열의 수(numCols), 0이 아닌 항의 수(numTerms)

- 다음 numTerms개의 입력 라인

- row, col, value의 형태로 구성되었다고 가정
 - 행 우선으로, 행 내에서는 열 우선으로 정렬되어 있다고 가정

	[0]	[1]	[2]
[0]	5	4	6
[1]	0	0	2
[2]	1	0	4
[3]	1	3	3
[4]	3	0	8
[5]	3	3	1
[6]	4	2	6

희소 행렬의 입력 예

희소행렬 입력(Sparse Matrix Input)

- 입력을 위해 보조 배열 hdnode를 사용
 - 적어도 입력될 행렬의 가장 큰 차원의 크기라고 가정
 - 변수 hdnode[i]: 열 i와 행 i에 대한 헤더노드를 가리키는 포인터
 - 입력 행렬을 구성하는 동안 임의의 열을 효과적으로 접근할 수 있게 함

```
matrixPointer mread(void)
{ /* 행렬을 읽어 연결 표현으로 구성한다. 전역 보조 배열 hdnode가 사용된다. */
    int numRows, numCols, numTerms, numHeads, i;
    int row, col, value, currentRow;
    matrixPointer temp, last, node;

    printf("Enter the number of rows, columns, and number of nonzero terms: ");
    scanf("%d%d%d", &numRows, &numCols, &numTerms);
    numHeads = (numCols > numRows) ? numCols : numRows;           ← max{numRow, numCols}
    /* 헤더 노드 리스트에 대한 헤더 노드를 생성한다. */
    node = newNode(); node->tag = entry;                            ← header node list node
    node->u.entry.row = numRows;
    node->u.entry.col = numCols;
    if (!numHeads) node->right = node;
    else { /* 헤더 노드들을 초기화한다. */
        for (i = 0; i < numHeads; i++) {                          ← 0(max{numRow, numCols})
            temp = newNode();
            hdnode[i] = temp; hdnode[i]->tag = head;
            hdnode[i]->right = temp; hdnode[i]->u.next = temp;
        }
    }
}
```

```

currentRow = 0;
last = hdnode[0]; /* 현재 행의 마지막 노드 */
for (i = 0; i < numTerms; i++) {
    printf("Enter row, column and value: ");
    scanf("%d%d%d", &row,&col,&value);
    if (row > currentRow) { /* 현재 행을 종료함 */
        last->right = hdnode[currentRow];
        currentRow = row; last = hdnode[row];
    }
    temp = newNode();
    temp->tag = entry; temp->u.entry.row = row;
    temp->u.entry.col = col;
    temp->u.entry.value = value;
    last->right = temp; /* 행 리스트에 연결 */
    last = temp;
    /* 열 리스트에 연결 */
    hdnode[col]->u.next->down = temp;
    hdnode[col]->u.next = temp;
}
/* 마지막 행을 종료함 */
last->right = hdnode[currentRow];
/* 모든 열 리스트를 종료함 */
for (i = 0; i < numCols; i++)
    hdnode[i]->u.next->down = hdnode[i];
/* 모든 헤더 노드들을 연결함 */
for (i = 0; i < numHeads-1; i++)
    hdnode[i]->u.next = hdnode[i+1];
hdnode[numHeads-1]->u.next = node;
node->right = hdnode[0];
}
return node;
}

```

← $O(\text{numTerms})$

Time Complexity

$O(\max\{\text{numRow}, \text{numCols}\}) + O(\text{numTerms})$
 $+ O(\text{numCols}) + O(\max\{\text{numRow}, \text{numCols}\})$
 $= O(\text{numRow} + \text{numCols} + \text{numTerms})$

2차원 배열

$O(\text{numRows} \times \text{numCols})$

순차적 방법

$O(\text{numTerms})$

← $O(\text{numCols})$

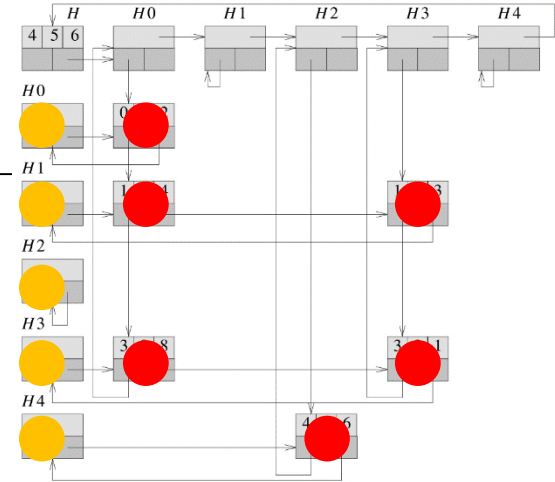
← $O(\max\{\text{numRow}, \text{numCols}\})$

희소행렬 출력(Sparse Matrix Output)

```
void mwrite(matrixPointer *node)
{ /* 행렬을 행 우선으로 출력한다. */
    int i;
    matrixPointer temp, head = node->right;

    /* 행렬의 차원 */
    printf("\n numRows = %d, numCols = %d \n",
           node->u.entry.row, node->u.entry.col);
    printf(" The matrix by row, column, and value: \n\n");

    for (i = 0; i < node->u.entry.row; i++) {
        /* 각 행에 있는 엔트리들을 출력 */
        for (temp = head->right; temp != head; temp = temp->right)
            printf("%5d%5d%5d \n", temp->u.entry.row,
                               temp->u.entry.col, temp->u.entry.value);
        head = head->u.next; /* 다음 행 */
    }
}
```

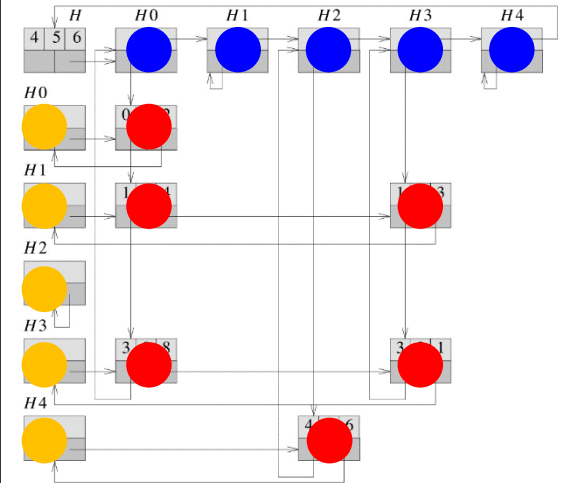


Time Complexity = $O(\text{numRows} + \text{numTerms})$

희소행렬 삭제(Erasing a Sparse Matrix)

- 함수 `free`를 사용하여 한번에 한 노드씩 반환

```
void merase(matrixPointer *node)
{
    /* 행렬을 삭제하고, 노드들을 히프로 반환한다. */
    matrixPointer x,y, head = (*node)->right;
    int i, numHeads;
    /* 엔트리 노드와 헤더 노드들을 행 우선으로 반환한다. */
    for (i = 0; i < (*node)->u.entry.row; i++) {
        y = head->right;
        while (y != head) {
            x = y; y = y->right; free(x);
        }
        x = head; head = head->u.next; free(x);
    }
    /* 나머지 헤더 노드들을 반환한다. */
    y = head;
    while (y != *node) {
        x = y; y = y->u.next; free(x);
    }
    free(*node); *node = NULL;
}
```



Time Complexity = $O(\text{numRows} + \text{numCols} + \text{numTerms})$

Additional Slides #2

동치부류(Equivalence Classes)

- 동치 관계(equivalence relation), \equiv 의 특성
 - 반사적(reflexive) : 어떤 다각형 x 에 대해서, $x \equiv x$ 가 성립
 - 대칭적(symmetric) : 어떤 두 다각형 x, y 에 대해서, $x \equiv y$ 이면 $y \equiv x$
 - 이행적(transitive): 어떤 세 다각형 x, y, z 에 대해서, $x \equiv y$ 이고 $y \equiv z$ 이면 $x \equiv z$
- 동치 관계(equivalence relation)의 정의
 - 집합 S 에 대하여 관계 \equiv 가 대칭적, 반사적, 이행적이면 관계 \equiv 를 집합 S 에 대해 동치 관계라 함. 그 역도 성립.
- 동치부류(equivalence class)
 - S 의 두 원소 x, y 에 대하여 $x \equiv y$ 이면 x, y 는 같은 동치부류 (역도 성립)
 - ex) $0 \equiv 4, 3 \equiv 1, 6 \equiv 10, 8 \equiv 9, 7 \equiv 4, 6 \equiv 8, 3 \equiv 5, 2 \equiv 11, 11 \equiv 0$
 $\rightarrow \{0, 2, 4, 7, 11\}; \{1, 3, 5\}; \{6, 8, 9, 10\}$

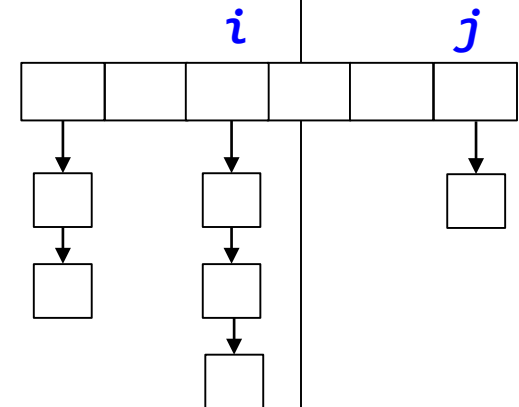
$0 \equiv 4, 3 \equiv 1, 6 \equiv 10, 8 \equiv 9, 7 \equiv 4, 6 \equiv 8, 3 \equiv 5, 2 \equiv 11, 11 \equiv 0$

동치부류(Equivalence Classes)

- 동치 결정 알고리즘

- 동치 쌍(equivalence pair) $\langle i, j \rangle$ 를 읽어 기억
- 0에서부터 시작해서 $\langle 0, j \rangle$ 형태의 모든 쌍을 찾는다. $\langle j, k \rangle$ 가 있으면 k 도 0과 같은 동치부류에 포함시킨다.
- 0이 포함된 동치 부류의 모든 객체를 찾아 표시하고 출력
- 남은 동치 부류에 대해서도 같은 방법으로 계속한다.

```
void equivalence()  
{  
    initialize;  
    while (there are more pairs) {  
        read the next pair  $\langle i, j \rangle$ ;  
        process this pair;  
    }  
    initialize the output;  
    do  
        output a new equivalence class;  
    while (not done);  
}
```



동치부류(Equivalence Classes)

- 배열을 사용 한 동치 알고리즘
 - m : 동치 쌍의 수, n : 객체 수
 - 쌍 $\langle i, j \rangle$ 를 나타내기 위해 배열 `pairs[i][j]` 사용 (`pairs[n][m]`)
 - 배열의 극히 일부 원소만 사용 : 기억 장소 낭비
 - 새로운 쌍 $\langle i, k \rangle$ 를 i 행에 넣기 위해 i 행 내의 빈 공간을 찾거나 추가 공간을 사용해야 하므로 많은 시간 소모

동치부류(Equivalence Classes)

- 연결 리스트를 사용한 동치 알고리즘

- seq[n] : n개의 리스트 헤더 노드 저장
 - i번째 행에 대한 임의 접근을 위해 필요
- out[n], 상수 TRUE, FALSE : 이미 출력된 객체 표시

```
void equivalence()
{
    initialize seq to NULL and out to TRUE;
    while (there are more pairs) {
        read the next pair <i,j>;
        put j on the seq[i] list;
        put i on the seq[j] list;
    }

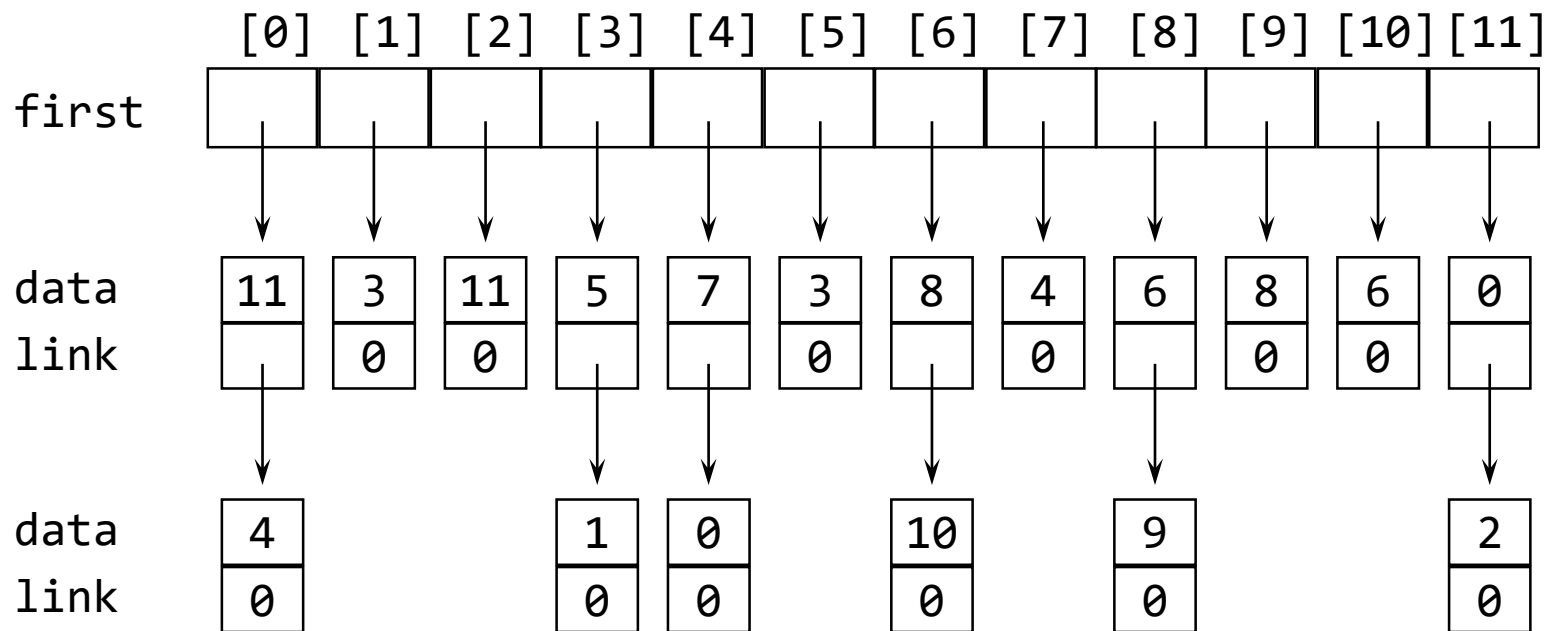
    for (i = 0; i < n; i++)
        if (out[i]) {
            out[i] = FALSE;
            output this equivalence class;
        }
}
```

← 객체가 출력되었는지에 대한 정보

동치부류(Equivalence Classes)

- 쌍들이 입력된 뒤의 리스트

- $0 \equiv 4$, $3 \equiv 1$, $6 \equiv 10$, $8 \equiv 9$, $7 \equiv 4$, $6 \equiv 8$, $3 \equiv 5$, $5 \equiv 11$, $11 \equiv 0$
- while 루프가 끝난 뒤의 리스트
- 관계 $i \equiv j$ 에 대해 두 개의 노드를 사용



동치부류(Equivalence Classes)

실습: Program 4.22

```
#include <stdio.h>
#include <alloc.h>
#define MAX_SIZE 24
#define IS_FULL(first) (!(first))
#define FALSE 0
#define TRUE 1

typedef struct node *nodePointer;
typedef struct node {
    int data;
    nodePointer link;
};

void main(void)
{
    short int out[MAX_SIZE];
    nodePointer seq[MAX_SIZE];
    nodePointer x,y,top;
    int i,j,n;

    printf("Enter the size (<= %d) ", MAX_SIZE);
    scanf("%d", &n);
    for (i = 0; i < n; i++) {
        /* seq와 out을 초기화 */
        out[i] = TRUE;  seq[i] = NULL;
    }
}
```

← Time Complexity = $O(n)$

```
/* 1 단계: 동치 쌍들을 입력 */
```

```
printf("Enter a pair of numbers (-1 -1 to quit): ");
```

```
scanf("%d%d", &i, &j);
```

← Time Complexity = $O(m+n)$

```
while (i >= 0) {
```

```
    MALLOC(x, sizeof(*x));
```

```
    x->data = j; x->link = seq[i]; seq[i] = x;
```

```
    MALLOC(x, sizeof(*x));
```

```
    x->data = i; x->link = seq[j]; seq[j] = x;
```

```
    printf("Enter a pair of numbers (-1 -1 to quit) : ");
```

```
    scanf("&d&d", &i, &j);
```

```
}
```

```
/* 2 단계: 동치 부류들을 출력 */
```

```
for (i = 0; i < n; i++)
```

← Time Complexity = $O(m+n)$

```
    if (out[i]) {
```

```
        printf("\nNew class: %5d", i);
```

```
        out[i] = FALSE;          /* 부류들을 FALSE로 함 */
```

```
        x = seq[i]; top = NULL; /* 스택을 초기화 */
```

```
        for (;;) {
```

```
            while (x) {          /* 리스트 처리 */
```

```
                j = x->data;
```

```
                if (out[j]) {
```

```
                    printf("%5d", j);    out[j] = FALSE;
```

```
                    y = x->link; x->link = top; top = x; x = y;
```

```
                }
```

```
            else x = x->link;
```

```
        }
```

```
        if (!top) break;
```

```
        x = seq[top->data]; top = top->link; /* 스택에서 제거 */
```

```
    }
```

```
}
```

```
}
```

시간 복잡도 : $O(m+n)$

공간 복잡도 : $O(m+n)$