제 9 장 가설검정(모평균과 모비율)

담당교수 : 김 덕 기

toby123@cbnu.ac.kr

통계적 가설검정이란?

➢모수에 대한 가정을 가설이라하며, 가설의 진위 여부를 표본정보를 근거로 하여 판단하는 것을 통계적 가설검정이라 한다.

일반적인 가설검정의 절차

가설 설정(귀무가설 vs 대립가설)

유의수준 α 의 설정

검정통계량 선정

유의수준 α 에 대한 기각역 설정

검정통계량 또는 유의확률(p-value) 계산

의사결정

- 기각역을 이용하는 방법, 신뢰구간을 이용하는 방법
- 유의확률을 이용하는 방법

가설의 설정방법(귀무가설과 대립가설)

➢모수에 대한 가정을 가설이라하며, 가설의 진위 여부를 표본정보를 근거로 하여 판단하는 것을 통계적 가설검정이라 한다.

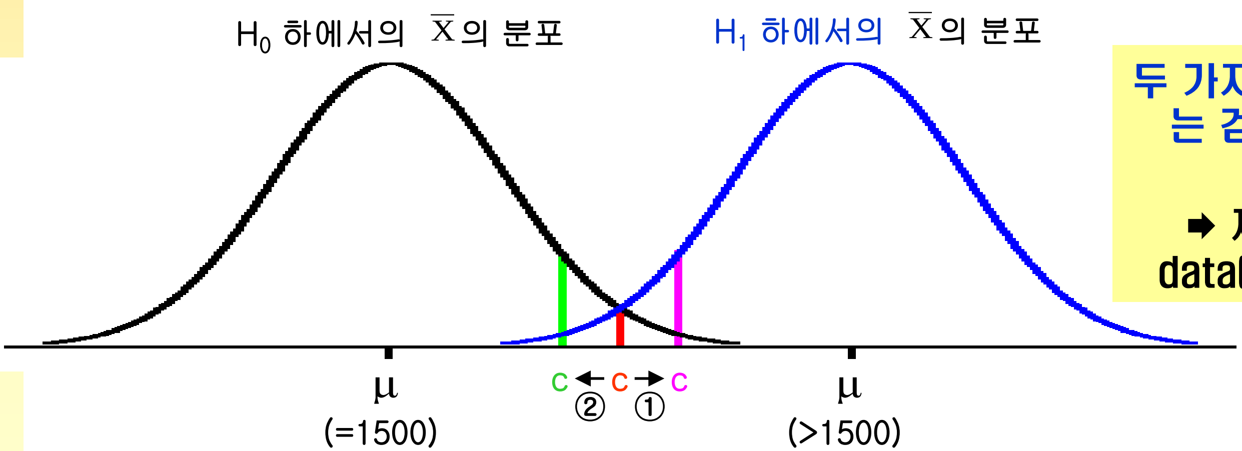
가설 (Hypothesis)	▪실증적인 증명 이전에 세워지는 잠정적인 진술. ▪가설은 논리적인 검정과정을 통해 기각 또는 수정될 수 있다.
귀무가설 (null hypothesis, H_0)	▪ 검정대상이 되는 가설 혹은 처음 세운 가설, 기존의 정보 및 주장.
대립가설 (alternative hypothesis, H_1)	▪ 귀무가설을 받아들일 수 없을 때 다른 결론을 내리기 위해 설정되는 가설. ▪ 새롭게 제기된 이론·학설·주장으로서 자료로부터의 강력한 증거에 의하여 입증하고자 하는 가설.

통계적 오류

➡ 검정결과에 따른 결정에 대해, 두 가지의 오류를 생각할 수 있음

검정결과 \ 실제현상	H_0 사실	H_1 사실
H_0 채택	옳은 결정	**제2종 오류**
H_0 기각	**제1종 오류**	옳은 결정

➔ 두 오류를 가능한 작게 해주는 것이 바람직한 검정법 ➔ 두 오류를 동시에 줄일 수 있는가 ?



두 가지 오류를 동시에 최소화하는 검정 법은 존재하지 않음

➡ 제1종 오류를 정해놓고 data(조사, 측정)에 의해 검정

가설검정의 기본원리1

➢ H-자동차 회사는 새로운 모델의 승용차의 리터당 평균주행거리가 16km라고 선전하고 있다. 소비자 단체에서는 리터당 평균주행거리가 16km에 미달할 것으로 예상하고 회사의 주장에 대한 가설검정을 실시하였다.

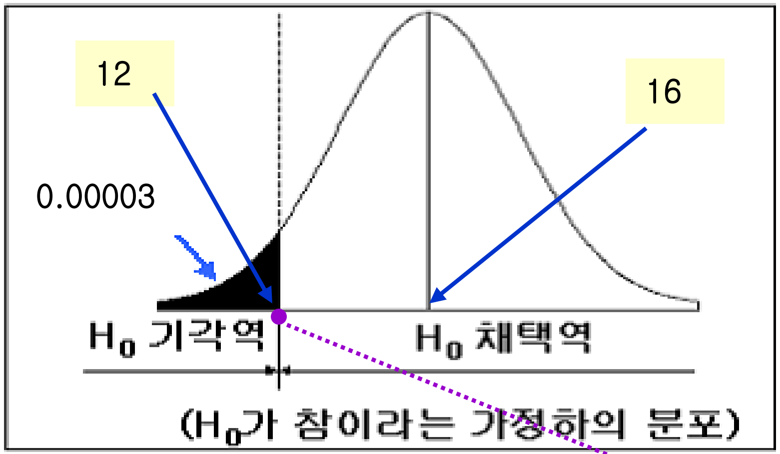
$H_0 : \mu = 16km$(회사주장) , $H_1 : \mu < 16km$(소비자단체주장)

이때 가설검정을 위해 승용차를 36대를 선택해서 리터당 평균주행거리($\bar{x}$)를 근거로 하여 귀무가설의 기각여부를 결정한다. 이때 평균주행거리($\bar{x}$)가 $16km$보다 훨씬 작다면 귀무가설보다 대립가설($\mu < 16km$)을 믿으려 할 것이며, 귀무가설이 사실이면, $\bar{x}$가 $16km$에 가까울 것이다.

임계치(critical value) : $16km$ 보다 얼마나 작아야 귀무가설을 기각할 수 있는가 ➔ 귀무가설의 기각여부를 결정하는 기준점. (기각치)

가설검정의 기본원리2

➢ 승용차의 주행거리에 대한 표준편차가 6km로 가정하면, 귀무가설이 사실이라는 전제 하에 평균주행거리가 12km이하일 확률은 ?



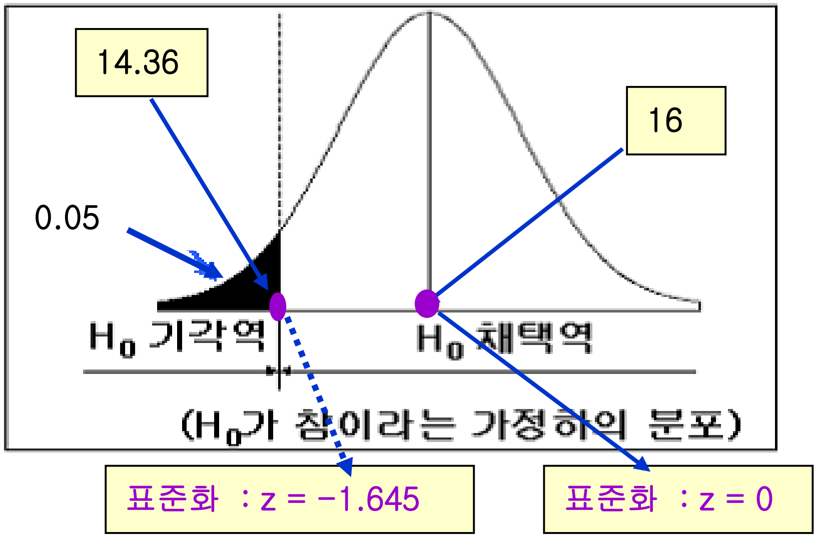
표본평균이 12km 이하일 확률

(중심극한정리) 정규근사 이용:

$$P(\bar{x} \leq 12) = P(Z \leq \frac{12-16}{6/\sqrt{36}}) = P(Z \leq -4) = 0.00003$$

유의수준: 발생가능성이 극히 희박한 확률수준으로 의사결정자가 결정(α 로 표시)

가설검정의 결정기준(Decision Rule)



$$= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu = 16\right) = 0.05 = \alpha$$

유의수준 α =0.05 기각역 : Z<= z_0.05= −1.645

$$\frac{C-16}{1} = -1.645\ ,\ C = 16 - 1.645 = 14.355$$

의사결정자가 유의수준 $\alpha = 0.05$로 정할 경우 $C \fallingdotseq 14.36\,km$가 되어 다음의 결정기준(decision rule)을 제시할 수 있다.

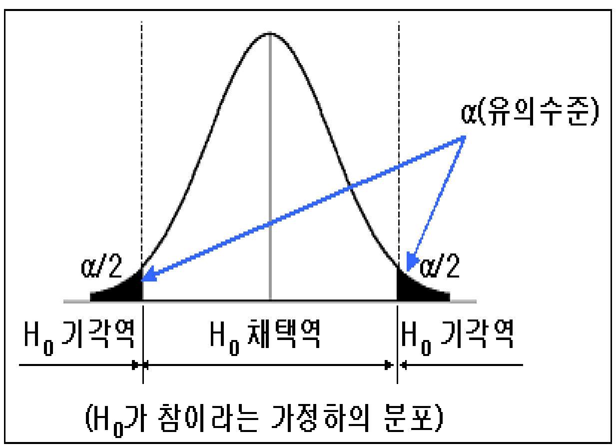
① $\overline{x} \geqq 14.36\,km\,(Z \geqq -1.645)$이면 H_0를 채택한다.

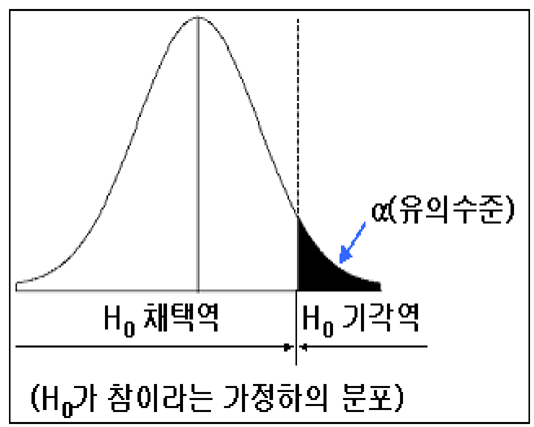
② $\overline{x} < 14.36\,km\,(Z < -1.645)$이면 H_0을 기각한다.

단일모평균에 대한 가설검정요약

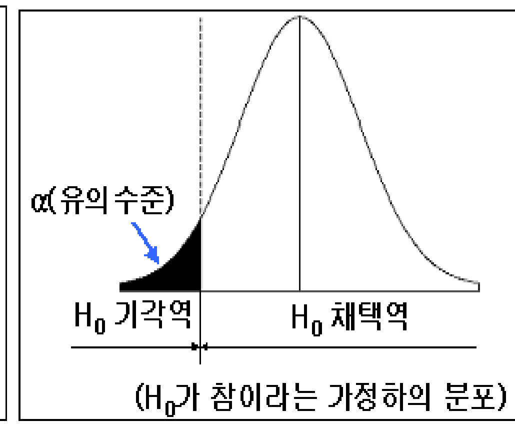
- **단일 모평균에 대한 가설검정**

	귀무가설	대립가설		(H_0하에서의) 검정통계량	유의수준 α에 대한 기각역
(a)	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_1: \mu > \mu_0$ 우측검정	단측검정	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$Z \geq z_\alpha$ 또는 $T \geq t_{(n-1,\, \alpha)}$
(b)		$H_1: \mu < \mu_0$ 좌측검정	단측검정	또는	$Z \leq -z_\alpha$ 또는 $T \leq -t_{(n-1,\, \alpha)}$
(c)		$H_1: \mu \neq \mu_0$	양측검정	$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}$ 또는 $\lvert T \rvert \geq t_{(n-1,\, \alpha/2)}$





[우측검정시의 기각역과 채택역]



[좌측검정시의 기각역과 채택역]

유의확률(P)-유의수준(alpha)

유의확률 (p−value)

- 검정통계량의 관측값에 대하여 귀무가설 H_0를 기각할 수 있는 최소의 유의수준

$$H_0 : \mu = 1500(\text{전구수명시간}) , \quad H_1 : \mu > 1500$$

$$p-\text{value} = P(\overline{X} \ge \bar{x} \mid H_0 \text{ is true}) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, H_0 \text{ is true}\right)$$

유의수준=0.01

검정결과?

if $\bar{x} = 1550$, $p-\text{value} = P(Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{1550-1500}{180/\sqrt{36}} = 1.667) = 0.0475$

if $\bar{x} = 1590$, $p-\text{value} = P(Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{1590-1500}{180/\sqrt{36}} = 3) = 0.0013$

의사결정 : 유의확률을 이용하는 방법

- if 유의확률(p−value) < 유의수준(α), 유의수준 α 에서 H_0를 기각
- if not, 유의수준 α 에서 H_0를 채택

유의확률-(P-value)

결정규칙

- P값 계산방법

$$\text{검정통계량: } Z_C = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

만일 $H_1: \mu \neq \mu_0$이면 $p\text{값} = 2P(Z > |Z_C|)$

$H_1: \mu < \mu_0$이면 $p\text{값} = P(Z < Z_C)$

$H_1: \mu > \mu_0$이면 $p\text{값} = P(Z > Z_C)$

P-value < alpha =1%, 5%, 10% then H_0 기각

평균검정 : 표본의 크기가 큰 경우

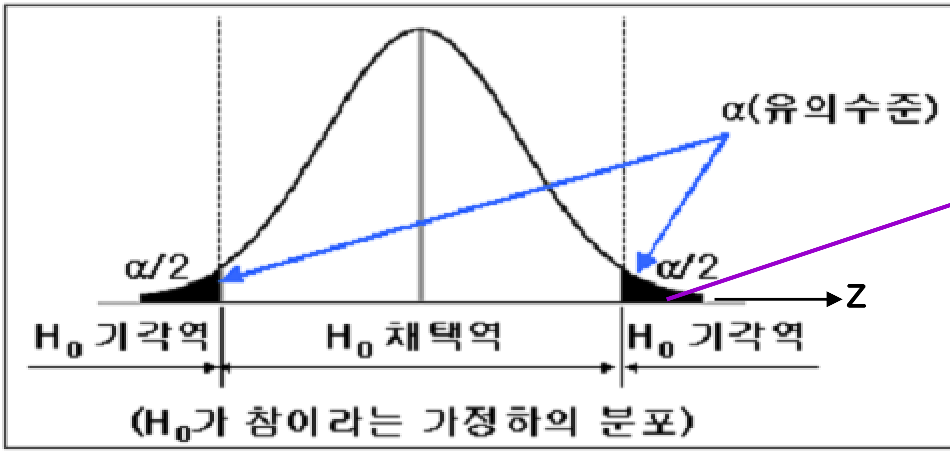
모집단의 분산을 알고 있는 경우 : (양쪽검정)

[예 1]동물용 사료 제조회사에서는 한 봉지의 무게가 50파운드인 사료를 생산하고 있다. 품질관리부서에서 사료 한 봉지의 평균무게가 50파운드인지를 검사하려 한다. n=75, 표본평균=50.11, 모표준편차=0.84일 때 유의수준 0.05에서 검정하라.

• **단일 모평균에 대한 가설검정**

	귀무가설	대립가설		(H_0하에서의) 검정통계량	유의수준 α에 대한 기각역
(a)	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$ 우측검정	단측검정	$\boxed{Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}}$	$Z \geq z_\alpha$ 또는 $T \geq t_{(n-1,\, \alpha)}$
(b)		$H_1 : \mu < \mu_0$ 좌측검정	단측검정	또는	$Z \leq -z_\alpha$ 또는 $T \leq -t_{(n-1,\, \alpha)}$
(c)		$H_1 : \mu \neq \mu_0$	양측검정	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\boxed{\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}}$ 또는 $\lvert T \rvert \geq t_{(n-1,\, \alpha/2)}$

(...계속)



$$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96\ ,\ -z_{0.025} = -1.96$$

CI : $\boxed{\bar{X} \pm \boxed{z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$ ∈ H_0

P-value=P(Z>=1.13)*2

① 가설설정 : $H_0 : \mu = 50\ ,\ H_A : \mu \neq 50$

② 유의수준 : $\alpha = 0.05$

③ 검정통계량 : $\sigma^2 (Known)$, 표본이 크므로 검정통계량(Z-통계량)

④ 유의수준 α의 기각역(임계치) : $|Z| > z_{\alpha/2}$ (양측검정)

$|Z| > z_{\alpha/2}\ ,\ Z > 1.96 \text{ or } Z < -1.96$

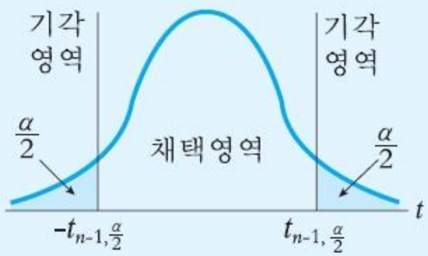
⑤ 검정통계량 : $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{50.11 - 50}{0.84 / \sqrt{75}} = 1.13 < z_{\alpha/2} = 1.96$

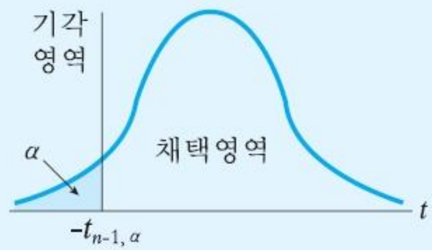
⑥ 귀무가설을 기각하지 못함. 즉, 사료 한 봉지의 평균무게가 50파운드가 아니라고 할만한 근거가 충분치 못하다.

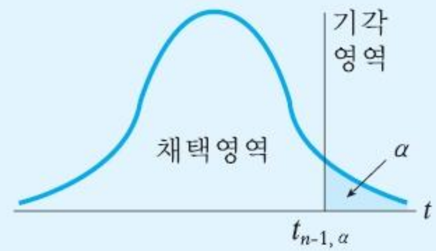
T-검정 : 소 표본 – 분산(unknown)

검정통계량 : $t_C = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$

<u>양측검정</u>	<u>좌측검정</u>	<u>우측검정</u>
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$







양측검정	좌측검정	우측검정
만일 $t_c < -t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ 또는 $t_c > t_{n-1,\alpha}$ 이면 H_0을 기각	만일 $t_c < -t_{n-1,\alpha}$ 이면 H_0을 기각	만일 $t_c > t_{n-1,\alpha}$ 이면 H_0을 기각

모든 경우에 p값$<\alpha$이면 H_0을 기각

평균검정 : 표본의 크기가 작고, 분산모름

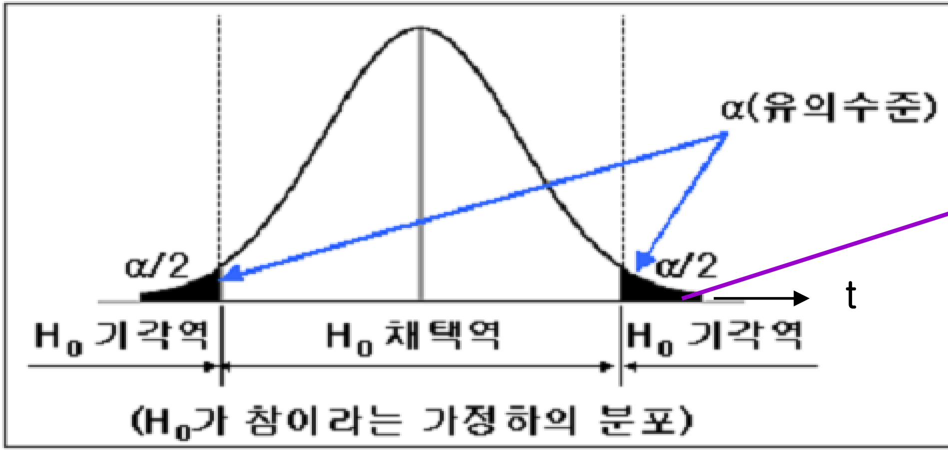
모집단의 분산을 모르는 경우 : (양쪽검정)

[예 2]길이가 30cm인 제도용 자를 16개 표본 추출하여 길이를 측정한 결과 평균이 30.1cm, 표준편차는 0.04cm 였다. 제도용 자의 평균길이가 30cm라 할 수 있는지를 1%의 유의수준으로 검정하라. (정규분포를 가정)

• 단일 모평균에 대한 가설검정

	귀무가설	대립가설		(H_0하에서의) 검정통계량	유의수준 α에 대한 기각역
(a)	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$ 우측검정	단측검정	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$Z \geq z_\alpha$ 또는 $T \geq t_{(n-1,\, \alpha)}$
(b)		$H_1 : \mu < \mu_0$ 좌측검정	단측검정	또는	$Z \leq -z_\alpha$ 또는 $T \leq -t_{(n-1,\, \alpha)}$
(c)		$H_1 : \mu \neq \mu_0$	양측검정	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}$ 또는 $\lvert T \rvert \geq t_{(n-1,\, \alpha/2)}$

(...계속)



$|t| > t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.005,15} = 2.947$

CI : $\overline{X} \pm t(n-1;\frac{\alpha}{2})\frac{S}{\sqrt{n}}$ ∈ H_0

P-value=P(t >=10)*2

① 가설설정 : $H_0 : \mu = 30$, $H_A : \mu \neq 30$

② 유의수준 : $\alpha = 0.01$

③ 검정통계량 : $\sigma^2\,(Unknown)$, 정규분포가정-> 검정통계량(t-통계량)

④ 유의수준 α의 기각역(임계치) : $t > t_{\alpha/2}$ or $t < -t_{\alpha/2}$ (양쪽검정)

⑤ 검정통계량 : $t = \dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{30.1-30}{0.04/\sqrt{16}} = 10 > t_{\alpha/2,n-1} = 2.947$

⑥ 귀무가설을 기각한다. 즉, 제도용 자의 평균길이가 30cm라 할 수 없다.

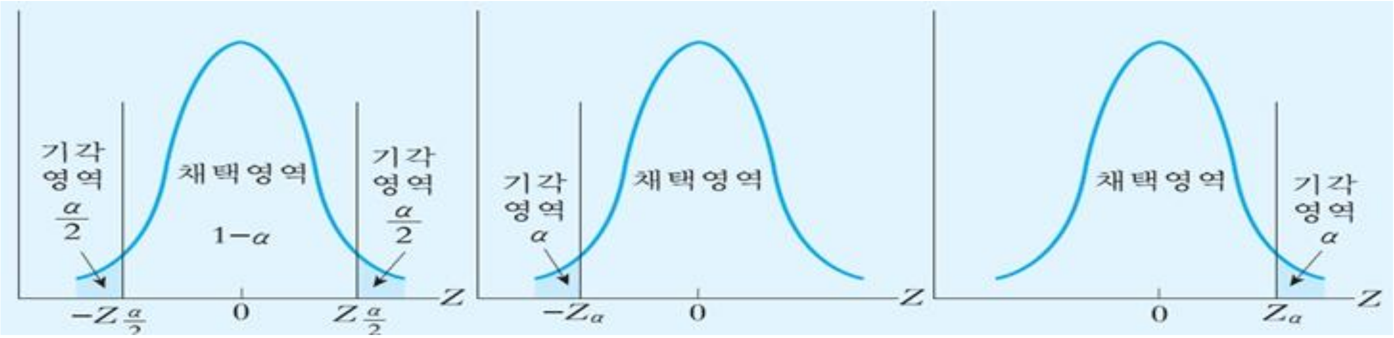
모집단 비율에 대한 가설검정

모 비율(P)의 점 추정 : 표본비율 $\hat{p} = \frac{X}{n}$ ➔ $\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$

n이 충분히 클 때 중심극한정리에 의해 정규근사를 이용.

검정통계량 : $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$

	귀무가설	대립가설	근사적으로 유의수준 α인 기각역
(a)	$H_0 : p = p_0$	$H_1 : p \neq p_0$	$\lvert Z \rvert \geq z_{\alpha/2}$
(b)	$H_0 : p \geq p_0$	$H_1 : p < p_0$	$Z \leq -z_\alpha$
(c)	$H_0 : p \leq p_0$	$H_1 : p > p_0$	$Z \geq z_\alpha$



비율에 대한 가설검정

[예제 3] 경제기획원에서 발간하는 "한국의 사회지표"에 의하면 1994년의 주택 보급률은 69.2%라고 한다. 1997년에 100가구를 대상으로 조사해 본 결과 주택보급률이 65%로 나타났다. 3년 전에 비해 주택보급률이 낮아졌다고 할 수 있는가를 유의수준 5%로 검정하시오.

P-value=P(Z <=-0.9097) : alpha

C.I 판정 : CI ∈ H_0

① $H_0 : p \geq 0.692$, $H_1 : p < 0.692$

② $\alpha = 0.05$

③ 검정통계량 : (n=100)이 충분히 크므로 정규근사 $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$

④ 임계값(기각역) : $z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$, $Z < -z_\alpha = -1.645$ 이면 H_0를 기각.

⑤ 표본비율 $\hat{p} = 0.65$, $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \dfrac{0.65 - 0.692}{\sqrt{0.692(1-0.692)/100}} = -0.9097$

$Z = -0.9097 > -1.645$ 이므로 귀무가설을 기각할 수 없다. 즉, 3년 전에 비해 주택보급률이 낮아졌다고 할 수 없다.