Билет 5

1. Метод разделения переменных для уравнения колебаний струны в одномерном случае

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & t > 0; \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \qquad (*)$$

► **1.** Найдем решения уравнения колебаний (частные) вида $X(x)T(t)$. Подставляем в уравнение:
$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \mid : a^2 T(t)X(x)$

(2) $\frac{T''(t)}{T(t)a^2} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ (для нек. константы λ)

Разрешаем отнсительно $X(x)$: $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

2. Дописываем к этому уравнению кравевые условия из (*): $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$

Это задача Штурма-Лиувилля. Ее спектр: $\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2,\ X_k(x) = sin(\frac{\pi k x}{l}),\ k = 1, 2, 3, ...$

3. Разрешаем пропорцию (2) отн-но $T(t)$ и подставляем $\lambda = \lambda_k$: $T_k''(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) = 0$.

Общее решение этого уравнения: $T_k(t) = A_k cos(a\frac{\pi k t}{l}) + B_k sin(a\frac{\pi k t}{l})$

4. Принцип суперпозиции: общее решение ур-я колеб. представляется в виде ∞ лин. комб. его элементарных решений: $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} [A_k cos(a\frac{\pi k t}{l}) + B_k sin(a\frac{\pi k t}{l})] sin(\frac{\pi k x}{l})$

A_k, B_k - ? Найдем их из нач. условий. Разложим ф-ии $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье на $[0,l]$ по системе функций $\{sin(\frac{\pi k x}{l})\}_{k=1}^{\infty}$:

$\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k sin(\frac{\pi k x}{l})$, где $\varphi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x) sin(\frac{\pi k x}{l}) dx$ $\psi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k sin(\frac{\pi k x}{l})$, где $\psi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x) sin(\frac{\pi k x}{l}) dx$

Начальные условия:

$u(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k sin(\frac{\pi k x}{l}) = \varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k sin(\frac{\pi k x}{l}) \Rightarrow A_k = \varphi_k, \forall k$

$u_t(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\pi k a}{l} sin(\frac{\pi k x}{l}) = \psi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi_k sin(\frac{\pi k x}{l}) \Rightarrow B_k = \frac{l}{\pi k a}\psi_k, \forall k$

Тем самым, след. функциональный ряд является "формальным" решением задачи (*), являющийся суммой стоячих волн: $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} [\varphi_k cos(a\frac{\pi k t}{l}) + \frac{l}{\pi k a}\psi_k sin(a\frac{\pi k t}{l})] sin(\frac{\pi k x}{l})$ ◄

Рассмотрим также: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & t > 0; \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases} \qquad (**)$

► Будем искать решение в виде: $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) sin(\frac{\pi n x}{l}) \qquad (1)$. Чтобы найти $T_n(t)$, подставим предполагаемый вид решения (1) в первое уравнение системы (**), разложив $f(x,t)$ в ряд Фурье по синусам:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n''(t) sin(\frac{\pi n x}{l}) = -a^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)(\frac{\pi n}{l})^2 sin(\frac{\pi n x}{l}) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin(\frac{\pi n x}{l})$, где $f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t) sin(\frac{\pi n \xi}{l}) d\xi$

Отсюда и из начальных условий системы (**) при каждом $n = 1, 2, 3, ...$ получаем для нахождения $T_n(t)$ задачу Коши: $\begin{cases} T_n''(t) + a^2(\frac{\pi n}{l})^2 T_n(t) = f_n(t), & t \geq 0 \\ T(0) = 0,\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$ ◄

Замечание: [Все аналогично для граничных условий 2-рода и смешанных условий]

Решение $u(x,t)$ задачи: $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & t > 0; \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t), & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$

можно найти, разбив ее на рассмотренные выше задачи: $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$,

где $u_1(x,t)$ без $f(x,t)$ с нулевыми граничными условиями, а $u_2(x,t)$ с $f(x,t)$ и нулевыми граничными и начальными условиями.

Замечание: [в первом случае колебания называются свободными, во втором вынужденными]

2. Формула для логарифмического потенциала двойного слоя

$w(M) = \int\limits_S \frac{cos\varphi(P,M)}{r_{PM}} \nu(P) dS_P;$

$\varphi(P,M)$ - угол между нормалью в точке и P и вектором $\overrightarrow{PM}$

$\nu(P)$ - плотность в точке P

r_{PM} - расстояние между точками P и M