Билет 1

1. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для функции двух переменных $u = u(x, y)$

$u = u(x, y)$, ур-е в частных производных $F(x, y, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$

Рассмотрим (линейное относительно старщих производных) ур-е: $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + \bar{F}(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ $a_{11} = a_{11}(x, y), a_{12} = a_{12}(x, y), a_{22} = a_{22}(x, y)$

Линейное ур-е: (1) $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0$. Если $f(x, y) = 0 \Rightarrow$ (1) - однородное ур-е

Ур-е колебаний: $u_{tt} = u_{xx}$; Ур-е теплопроводности: $u_t = u_{xx}$; Ур-е Лапласа: $\Delta u = div(gradu) = 0$;

Замена: $\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$; $u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$

$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$; $u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$

$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$

Подставим в (1): $u_{\xi\xi}(a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2) + 2u_{\xi\eta}(a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y) + u_{\eta\eta}(a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2) + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u + f = 0 \Rightarrow \bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{b}_1u_\xi + \bar{b}_2u_\eta + \bar{c}u + f = 0$ (2)

Попробуем сдеать так, чтобы $\bar{a}_{11} = 0 \Rightarrow \bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$

Рассмотрим: $a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \Rightarrow a_{11}(\frac{z_x}{z_y})^2 + 2a_{12}(\frac{z_x}{z_y}) + a_{22} = 0$

$\sqsupset z = \varphi(x, y), \varphi(x, y) = c \Rightarrow d\varphi = \varphi_xdx + \varphi_ydy = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$

$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0$ (3)

$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0$ (4)

Если $z = \varphi(x, y)$ - решение (3) $\Rightarrow \varphi(x, y) = c$ является интегралом (4)

Надо решить ур-е (4):

$a_{11}(\frac{dy}{dx})^2 - 2a_{12}(\frac{dy}{dx}) + a_{22} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{12}}}{a_{11}}$

1) $D > 0$ - ур-е гиперболического типа

2) $D = 0$ - ур-е параболического типа

3) $D < 0$ - ур-е эллиптического типа

$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$

1) $D > 0$ имеем 2 решения (3)

$z_1 = \varphi(x, y), z_2 = \psi(x, y)$

$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$

$\Rightarrow u_{\xi\eta} = \Phi(u, u_\xi, u_\eta, \xi, \eta)$ - 1-я каноническая форма

2-я каноническая форма:

$\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$

$\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}, \beta = \frac{\xi-\eta}{2}$

$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$

$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$

$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\Phi$

2) $D = 0 \Rightarrow \bar{a}_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$

$\xi = \varphi(x, y) \Rightarrow \bar{a}_{11} = 0$

$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y)$

т.к $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$

$a_{11}\xi_x^2 + 2\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y)^2 = 0$

$\Rightarrow$ берем $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ - что-то, а $\eta = \eta(x, y)$

$\bar{a}_{11} = 0, \bar{a}_{12} = 0 : u_{\eta\eta} = \Phi(u_\xi, u_\eta, u, \xi, \eta)$ - ур-ние параболического типа

3) $D < 0$

$\xi = \varphi(x, y)$ - интеграл (3), тогда $\eta = \varphi^*(x, y)$ - тоже интеграл

$\varphi = \alpha + i\beta, \psi = \alpha - i\beta \Rightarrow u_{\alpha\alpha} - i^2u_{\beta\beta} = \Phi \Leftrightarrow u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi$ - ур-е эллиптического типа

Итог: $u = u(x, y)$

$0 = a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u_x, u_y, u)$ св-ся к ур-ям одного из типов:

1) $u_{xy} = \Phi, u_{xx} - u_{yy} = \Phi$

2) $u_{xx} = \Phi(u_x, u_y, u, x, y)$

3) $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$

2. Принцип максимума для гармонических функций Рассмотрим область Ω, ограниченную поверхностью $S, \bar{\Omega} = \Omega \cup S$. Пусть $u(M)$ - гармоническая в Ω и непрерывна в $\bar{\Omega} \Rightarrow$ она достигает своего максимального и минимального значения на границе области $\bar{\Omega}$, т.е. $\max\limits_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = \max\limits_{M \in S} u(M)$; $\min\limits_{M \in \bar{\Omega}} u(M) = \min\limits_{M \in S} u(M)$