# Билет 21

# 1 Применение метода конформных отображений для решения краевых задач для уравнения Лапласа на плоскости.

## 1.1 Инвариантность свойства гармоничности при конформных отображениях

Для начала определимся с обозначениями. $z = x + iy$, $f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$. f - гармонична, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$. Также для f выполнено условие Коши-Римана (условие аналитической функции):
$\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = \dfrac{\partial \eta}{\partial y}$; $\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$; $\Delta\xi = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{-\partial \eta}{\partial x}) = 0$, следовательно: $\Delta\xi = \Delta\eta = 0$.

Пусть $u(x, y) = U(\xi, \eta)$, тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2 + \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$
$$\Delta u = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}((\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \xi}{\partial y})^2) + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta}(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}) + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}((\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \eta}{\partial y})^2) + (\frac{\partial U}{\partial \xi}\Delta\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta}\Delta\eta) = \Delta U |f'(z)|^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Свойство гармоничности сохраняется
Пояснение к последнему равенству:
Если преобразование было конформным, то выполнены условия Коши-Римана:
$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + (-\frac{\partial \eta}{\partial x})\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0; (\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \eta}{\partial y})^2 = (\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 = |f'(z)|^2; f'(z) = \frac{\partial \xi}{\partial x} + i\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

## 1.2 Решение краевых задач для уравнения Лапласа с помощью конформных отображений.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в T.,} \\ u(x, y)|_T = g(x, y) \end{cases}$$

$T \xrightarrow{\text{f(z)}} T_1; \xi = \varphi(x, y); r \to r_1; \eta = \psi(x, y); \Delta U = 0$ в $T_1; U(\xi, \eta)|_{r_1} = G(\xi, \eta)$
Конформные отображения обратимы $\Rightarrow x = \Phi(\xi, \eta)$ и $y = \Psi(\xi, \eta) \Rightarrow g(x, y) = g(\Phi(\xi, \eta), \Psi(\xi, \eta)) = G(\xi, \eta)$.
Таким образом задача Дирихле в области $T$ была сведена к задаче Дирихле в области $T_1$. Если $T_1$ проще, чем $T$, то мы значительно упростили задачу.

## 1.3 Построение функции Грина с помощью конформных отображений.

$\xi = f(z_0, z); z_0 \to 0; G(M_0, M) = -\dfrac{1}{2\pi}\ln|f(z_0, z)|; \xi = -\dfrac{1}{2\pi}\ln f(z_0, z); Re(-\dfrac{1}{2\pi}\ln(f(z_0, z))) = -\dfrac{1}{2\pi}\ln|f(z_0, z)|;$
$G(M_0, M) = -\dfrac{1}{2\pi}\ln|\dfrac{f(z_0, z) - f(z_0, z_0)}{z - z_0} * (z - z_0)| = -\dfrac{1}{2\pi}\ln|\dfrac{f(z_0, z) - f(z_0, z_0)}{z - z_0}| - \dfrac{1}{2\pi}\ln|(z - z_0)|$

$G(M_0, M)|_{M \in r} = 0 -$ Очевидно

# 2 Решение смешанной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности. Промежуточная асимптотика.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}(u\dfrac{\partial u}{\partial x}), 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$F(x) -$ функция Буссинеска; $u(x, t) = \dfrac{F(x)}{t + 1}$ - эта функция является решением исходной задачи

**Теорема:** Для любой функции $\varphi(x)$, решение $u(x, t) \sim \dfrac{F(x)}{t + t_0}, t \to \infty$, т. е. задача "забывает"детали начальных условий.