Билет 11.
Существование решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

1 Постановка задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{1}$$

Хотим доказать, что решение $u(x,t)$ существует и единственно.

2 Подготовка

Используем метод разделения переменных. $u(x,t) = X(x)T(t)$

Подставим это в задачу. Получим $T'X = a^2 X'' T$.
Домножим всё на $\frac{1}{a^2 XT}$.

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2, \quad \lambda = const > 0$$

В итоге получили такую систему:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + a^2 \lambda^2 T = 0 \end{cases}$$

Решения системы:

$$\begin{cases} X(x) = exp(i\lambda x) \\ T(t) = exp(-a^2 \lambda^2 t) \end{cases}$$

Итак, решение исходной системы: $u(x,t) = exp(i\lambda x - a^2\lambda^2 t)$ Пусть $A(\lambda)$ - некоторая функция. Тогда $u_\lambda = A(\lambda)u(x,t)$ - тоже решение системы(функция по сути константа).

Определим решение таким образом:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) exp(i\lambda x - a^2\lambda^2 t) d\lambda$$

Сделаем так, что она удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \tag{2}$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s} \varphi(s) ds \quad //\text{Коэффициенты ряда Фурье} \tag{3}$$

Подставим найденные коэффициенты A в решение:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s} \varphi(s) ds \right] exp(i\lambda x - a^2\lambda^2 t) d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} exp(i\lambda(x-s) - a^2\lambda^2 t) d\lambda \right] ds$$

Внутренний интеграл вполне можно посчитать. В результате получится:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}) \varphi(s) ds$$

Более короткая запись:

$$G(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} exp(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}) \tag{4}$$

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,s,t) \varphi(s) ds \tag{5}$$

3 Теорема

Теорема. *Пусть $\varphi(x)$ - начальное условие, такое что оно непрерывно по x и ограничено. Тогда (5) непрерывно по x,t и удовлетворяет уравнению теплопроводности при $x \in \Re, t > 0$. К тому же, $\lim\limits_{t->0+} u(x,t) = \varphi(x)$*

Доказательство. **1.** Для начала докажем, что u(x,t) непрерывна. Для этого достаточно доказать, что u(x,t) непрерывна в прямоугольнике $= \{(x,t) : -L < x < L, t_0 < t < t\}$ где все эти пределы - const > 0.
Все функции в интеграле из u (а это G и φ) непрерывны в П. Тогда если интеграл сходится равномерно, то и u тоже.

2. Сделаем такую замену: $\frac{x-s}{2a\sqrt{t}} = \psi$. Тогда $s = x + \psi 2a\sqrt{t}$, $ds = 2a\sqrt{t}d\psi$. Интеграл перепишем таким образом:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\psi^2} \phi(x + 2a\psi\sqrt{t}) d\psi$$

Если в этой формуле положить $t = 0$, то получится начальное условие (тут интеграл Пуассона). ϕ ограничена, => интеграл сходится равномерно. Доказан пункт про начальные условия.

3. Теперь докажем возможность дифференцирования под знаком интеграла.

$$\frac{du}{dt}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial t}(x,s,t)\phi(s)ds = [\text{делаем тут замену}\psi] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-\frac{1}{2t} + \frac{\psi^2}{t}) e^{-\psi^2} \phi(x + 2a\psi\sqrt{t}) d\psi$$

Подынтегральная функция ограничена => интеграл сходится равномерно => работает дифференцируемость по t. Точно также можно проверить и для x. □

4 Второй вопрос

Постановка внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве
Пусть Ω - некоторая открытая область в E^3, огранченная поверхностью Σ. Задача:

$$\Delta u = 0 \quad \text{и u непрерывна вне области}$$
$$u(M) = \mu(M), \quad \mu \in \Sigma$$
$$u(M) \rightrightarrows 0 \; M \to \infty$$