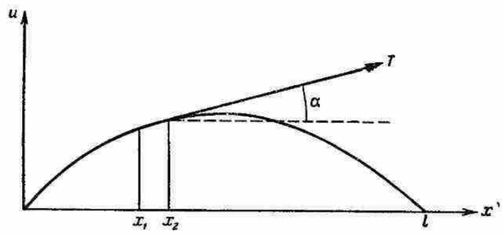
Билет 2. 1.Некоторые физические задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа.

Уравнение колебаний струны

- Струна - гибкая нерастяжимая нить, колеблется в одной плоскости; u(x,t) - отклонение струны в точке x в момент времени t. На струну действуют силы натяжения T (T = const, это можно доказать через 3-ий з.Ньютона, в лекциях не доказывалось) и возможно внешние силы f(x,t). $|u_x^2| << 1$ (т.к. рассматриваем малые колебания)



- Покажем, что длина дуги (x_1, x_2) равна $x_2 - x_1$ и найдем T_u. Это будет нужно для 2-ого з.Ньютона:

$$\int_{x1}^{x2} \frac{dx}{cos\alpha} = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1+tg^2\alpha}\, dx = \int_{x1}^{x2} \sqrt{1+u_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1 \tag{1}$$

$$T_u = Tsin\alpha \approx Ttg\alpha = Tu_x \tag{2}$$

- Запишем 2-ой з.Ньютона ($m\overline{a} = \overline{F}$) в проекции на Ou: $\rho dx * u_{tt} = Tu_x|_{x+dx} - Tu_x|_x + \tilde{f}dx$
В предположение что u_{xx} непрерывна на R, применим к $Tu_x|_{x+dx} - Tu_x|_x$ ф. Лагранжа конечных приращений. Получим $\rho dx * u_{tt} = \frac{\partial T u_x}{\partial x}|_{x+\xi dx} dx + \tilde{f}dx$, где $\xi \in (0,1)$. Поделим на dx и $dx \to 0$:

$$\rho u_{tt} = Tu_{xx} + \tilde{f} \tag{3}$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ a = \sqrt{\frac{T}{\rho}},\ f = \frac{\tilde{f}}{\rho} \tag{4}$$

Уравнение электромагнитного поля

- Запишем уравнения Максвелла, предполагая, что $\rho = 0$ (свободных зарядов нет):

$$divB = 0 \tag{5}$$

$$divE = 0 \tag{6}$$

$$rotB = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \tag{7}$$

$$rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{8}$$

- Рассмотрим rot(rot E) двумя способами: I - подставляем все, что можно подставить, II - используем, что rot(rot A) = grad div A - $\triangle A$, где $\triangle A$ - оператор Лапласа:

$$rot(rotE) \overset{(8)}{=} rot(-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(rotB) \overset{(7)}{=} -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{9}$$

$$rot(rotE) = graddivE - \triangle E \overset{(6)}{=} -\triangle E = \{\text{в одномерном случае}\} = -\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{10}$$

- В итоге:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 * \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \tag{11}$$

2.Первая и вторая формулы Грина

В области Ω, ограниченной $\partial\Omega$, заданы $u(M)$ и $v(M)$: $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ Первая формула Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} ((grad(u), grad(v)) + u\Delta v)dr = \iint\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

Вторая формула Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dr = \iint\limits_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})d\sigma$$