

Билет 8. Математическая постановка задач для уравнения теплопроводности.

1 Задача в общем виде

Решаем задачу на стержне, для начала конечном. (На отрезке $[0, l]$)

Какие физические законы знаем?

Закон Фурье

Если распределение температуры неравномерно, то возникают потоки тепла из мест высокой в места низкой температуры.

$$Q = -k * \frac{u_2 - u_1}{l_2 - l_1} * S = -k * \frac{\partial u}{\partial x} S \quad (1)$$

$$dQ = -k * \frac{\partial u}{\partial x} S dt \quad (2)$$

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} k \frac{\partial u}{\partial x} dt \quad (3)$$

Итак, уравнение теплопроводности:

Начальные условия: $u(x, 0) = \varphi(x)$

Граничные условия:

1. Условия 1 рода

$$u(0, t) = \mu_1(t)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t)$$

2. Условие 2 рода (теплообмен)

$$u_x(0, t) = \nu_1(t)$$

$$u_x(l, t) = \nu_2(t)$$

Если $u_x(0, t) = 0$, то конец теплоизолирован

Почему? По закону Фурье: $\frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow Q(x=0) = 0 \Rightarrow$ тепло не уходит и не приходит в этой точке.

2 Постановка конкретных задач

1. Задача с неоднородным условием

$$u_t = a^2 u_{xx} + f$$

$$u(0, t) = \mu_1(t)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

2. Задача на бесконечной прямой ($-\infty < x < \infty$)

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$|u(x, t)|$$

3. Задача на полубесконечной прямой ($0 < x < \infty$)

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$|u(x, t)|$$