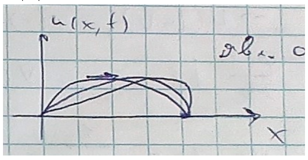
1 25 Билет

1.Уравнение Бюргерса. Преобразование Хопфа-Коула. Решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Уравнение Бюргерса. Описывает нелинейность и диффузию (вязкость).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Рассмотрим задачу $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ - описывает движение жидкости
$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ - несжимаемая жидкость; $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = 0$
Запишем уравнения характеристик:
$\frac{\partial t}{1} = \frac{\partial x}{u}$; $\partial x = u\,\partial t \Rightarrow x - ut = C$
$u(x,t) = f(x - ut)$
Проиллюстрируем $u(x,t) = f(x - at)$. Чем выше амплитуда, тем больше скорость распространения.
Здесь возникает явление опрокидывания.



$D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - учитывание вязкости.
Уравнение можно решить аналитически. Проведем **преобразование Хопфа-Коула**: $u = \psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$
Тогда: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right) = D\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$
Проинтегрируем по x: $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = D\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + C$
Пусть $C = 0$. Замена $\psi(x,t) = -2D\ln v$. Тогда $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2D\frac{v_t}{v}$; $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2D\frac{v_x}{v}$; $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2D\frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}$
Подставим: $-2D\frac{v_t}{v} + 2D^2\frac{v_x^2}{v^2} = -2D\frac{v_{xx}v - v_x^2}{v^2}$. Тогда $2D^2\frac{v_x^2}{v^2}$ сокращается.
$v_t = Dv_{xx}$ - получили линейное уравнение вместо нелинейного.

Теперь рассмотрим **задачу Коши** для этого уравнения.
$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; -\infty < x < +\infty; 0 < t; \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$
Замена $u = -2D(\ln v)_x$:
$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(x,0) = \Phi(x) \end{cases}$
При $t = 0$ получим $-2D(\ln v)_x = \varphi(x) \Leftrightarrow (\ln v)_x = -\frac{\varphi(x)}{2D}$ и $\ln v = \int\limits_0^x -\frac{\varphi(\xi)}{2D}\,d\xi$
$v(x,0) = \Phi(x) = exp(-\frac{1}{2D}\int\limits_0^x \varphi(\xi)\,d\xi)$
$v(x,t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{Dt}}\int\limits_0^t exp(-\frac{(x-\mu)^2}{4Dt})\,\Phi(\mu)\,d\mu$

2.Формула среднего значения для гармонической функции.

Гармоническая функция - функция, определенная в плоскости или в пространстве и имеющая непрерывные частные производные 2 порядка и удовлетворяющая уравнению Лапласа:
$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ или $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ для плоскости и пространства соответственно.
Или, что то же самое:
Функция u называется *гармонической* в области Ω, если $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u = 0$ в Ω.
Теорема о среднем значении
Для $u(M)$ гармоничной в области D функции для любой сферы V радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащей в области D, верно следующее:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2}\oint\limits_V u(M)\,dS$$