

# 1 Билет 16.

## Первая и вторая формулы Грина

### 1.1 Формула Остроградского

Пусть поверхность  $\Sigma$  состоит из конечного числа замкнутых кусков, имеющих в каждой точке касательную, причем любые прямые, параллельные осям координат, пересекают поверхность либо в конечном числе точек, либо по конечному числу отрезков.

Тогда в области  $\Omega$  для функции  $\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ , где P, Q, R - непрерывно дифференцируемые в  $\bar{\Omega}$ , верна формула Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} d\tau$$
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

### 1.2 Первая формула Грина

Пусть  $u, v$  - скалярные функции,  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1 \bar{\Omega}$   
 $A = u * \operatorname{grad}(v)$ . Применим формулу Остроградского:

$$\iint_{\Sigma} (u * \operatorname{grad}(v), \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(u * \vec{\operatorname{grad}}(v)) d\tau$$

Распишем левую и правую части

#### 1. Правая часть

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \operatorname{grad}(v)) &= \operatorname{div}\left(u \frac{\partial v}{\partial x}, u \frac{\partial v}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \\ &= \frac{\partial(u \frac{\partial v}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(u \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(u \frac{\partial v}{\partial z})}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \\ &= (\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) + u \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \\ &= (\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) + u \Delta v \end{aligned} \quad (1)$$

#### 2. Левая часть

$$(\operatorname{grad}(v), \vec{n}) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot n_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot n_2 + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot n_3 = \frac{\partial v}{\partial n} \quad (2)$$

Итак, первая формула Грина:

$$\iiint_{\Omega} ((\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) + u \Delta v) d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

### 1.3 Вторая формула Грина

Поменяем местами  $u$  и  $v$  и вычтем из исходной формулы Грина. Получим:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} ((\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) - (\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) + u \Delta v - v \Delta u) d\tau &= \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \\ \iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau &= \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \end{aligned}$$

## 2    Формула Д'аламбера

Задача Коши для уравнения колебаний на прямой:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathfrak{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Формула Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$