

Билет 16.

Первая и вторая формулы Грина

1 Формула Остроградского

Пусть поверхность Σ состоит из конечного числа замкнутых кусков, имеющих в каждой точке касательную, причем любые прямые, параллельные осям координат, пересекают поверхность либо в конечном числе точек, либо по конечному числу отрезков.

Тогда в области Ω для функции $\vec{A}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$, где P, Q, R - непрерывно дифференцируемые в $\bar{\Omega}$, верна формула Остроградского-Гаусса:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} d\tau$$
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

2 Первая формула Грина

Пусть u, v - скалярные функции, $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1 \bar{\Omega}$
 $A = u * \operatorname{grad}(v)$. Применим формулу Остроградского:

$$\iint_{\Sigma} (u * \operatorname{grad}(v), \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(u * \vec{\operatorname{grad}}(v)) d\tau$$

Распишем левую и правую части

1. Правая часть

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \operatorname{grad}(v)) &= \operatorname{div}\left(u \frac{\partial v}{\partial x}, u \frac{\partial v}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \\ &= \frac{\partial(u \frac{\partial v}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(u \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(u \frac{\partial v}{\partial z})}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \\ &= (\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) + u \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \\ &= (\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) + u \Delta v \end{aligned} \quad (1)$$

2. Левая часть

$$(\operatorname{grad}(v), \vec{n}) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot n_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot n_2 + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot n_3 = \frac{\partial v}{\partial n} \quad (2)$$

Итак, первая формула Грина:

$$\iiint_{\Omega} ((\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) + u \Delta v) d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

3 Вторая формула Грина

Поменяем местами u и v и вычтем из исходной формулы Грина. Получим:

$$\iiint_{\Omega} ((\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) - (\operatorname{grad}(u), \operatorname{grad}(v)) + u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

4 Формула Д'аламбера

Задача Коши для уравнения колебаний на прямой:

$$\begin{cases} u_t t = a^2 t_x x, & x \in \mathfrak{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

Формула Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$