Билет 4

1. Метод распространяющихся волн. Формула Д'Аламбера. Решается уравнение колебаний для неограниченной струны:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \;\; -\infty < x < +\infty,\; t > 0 \\ &u(x,0) = \phi(x), \\ &u_t(x,0) = \psi(x). \end{aligned}$$

Уравнение характеристик можно привести к виду $dx^2 - a^2\,dt^2 = (dx - a\,dt)(dx + a\,dt) = 0$

Следовательно, его интегралами будут $x + at = C_1,\; x - at = C_2$

Производя замену переменных $\xi = x + at,\; \eta = x - at$, преобразуем исходное уравнение к виду $u_{\xi\eta} = 0$

Теперь видно, что для любого решения $u(\xi,\eta)$ этого уравнения верно: $u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta)$

Проинтегрировав это равенство по η при фиксированном ξ, получим: $u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)\,d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$

Так как при подстановке $u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ при произвольных дважды дифференцируемых f_1 и f_2 в уравнение получим равенство, то таким образом представимы все решения.

В переменных x и y формула примет вид: $u(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at)$

Удовлетворим начальным условиям:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_1(x) + f_2(x) = \phi(x) \qquad (1) \\ u_t(x,0) &= af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \end{aligned}$$

Проинтегрировав второе равенство, получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha \;+ C \qquad (2)$$

Выразим f_1 и f_2 из (1) и (2):

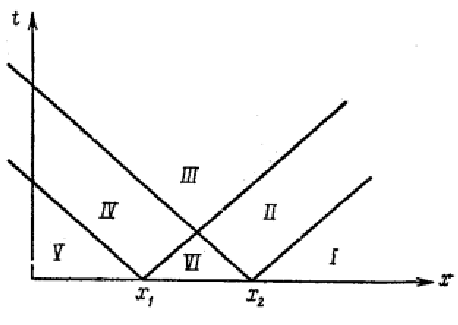
$$f_1(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha \;+ \frac{C}{2},\;\; f_2(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha \;- \frac{C}{2}$$

Подставим в выражение для $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha - \int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)\,d\alpha\right) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha$$

Получена **формула Д'Аламбера**.

Физический смысл формулы: профиль волны распространяется в пространстве (в нашем случае - по струне) со скоростью a.



Метод распространяющихся волн. Пусть начальные условия равны 0 вне отрезка $[x_1, x_2]$. Тогда, построив характеристики $x_{1,2} \pm at = 0$, получим разбиение координатной полуплоскости на шесть областей, в каждой из которых решение может быть вычислено по формулам:

$$\begin{aligned} \mathrm{I,V}:&\;\; u(x,t) = 0 \\ \mathrm{II}:&\;\; u(x,t) = \frac{\phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x_2} \psi(\alpha)\,d\alpha \\ \mathrm{III}:&\;\; u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1}^{x_2} \psi(\alpha)\,d\alpha \\ \mathrm{IV}:&\;\; u(x,t) = \frac{\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha \\ \mathrm{VI}:&\;\; \text{формула Д'Аламбера} \end{aligned}$$

2. Формула для потенциала двойного слоя в трехмерном случае. Пусть Σ – поверхность двойного слоя, n_P – нормаль к ней в точке P, $\nu(P)$ – поверхностная плотность, R_{MP} – расстояние между точками M и P. **Потенциал двойного слоя** в точке $M(x,y,z)$:

$$W(M) = -\iint\limits_{\Sigma} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\nu(P)d\sigma_P$$