Билет 3

1 Математическая постановка задач для уравнения колебания струны

Имеем уравнение колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, если $f(x,t) = 0$, то колебания свободные, иначе вынужденные. Данное уравнение может иметь бесконечно много решений, но можно наложить различные формы дополнительных условий, чтобы получить необходимое нам решение.

Рассмотрим основные три типа граничных условий для **задачи о колебаниях струны на отрезке**

граничное условие 1-го рода: $u(0,t) = \mu(t)$ - задано правило движение конца струны, если $\mu(t) = 0$, то конец закреплен;

граничное условие 2-го рода: $u_x(0,t) = \nu(t)$ - задана сила, действующая на конец стержня, если силы не действуют, то $\nu(t) = 0$;

граничное условие 3-го рода: $u_x(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)]$ - имеет место при упругом закреплении;

Аналогично задаются условия и на другом конце $x = l$.

Помимо граничных условий определяют еще *начальные условия* - $u(x,0) = \phi(x)$ и $u_t(x,0) = \psi(x)$, т.к. процесс колебания зависит от начальной формы и распредлении скоростей.

Ex. постановка **первой краевой задачи**(первая, т.к. граничные условия первого рода):

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

Также может интересовать вариант, когда влияние границ еще не существенно, тогда можно рассмотреть **задачу с начальными условиями для неограниченной области**(эту задачу еще называют задачей Коши):

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, -\inf < x < \inf, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

Можно еще быть так, что нас итересует только влияние одной границы, тогда мы приходим к постановке **задачи на полуограниченно прямой**:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \le x < \inf, t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$

2 Необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа

Задача Неймана для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = F(x,y), \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(x,y)\in\partial D} = f(x,y), \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали.
Необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\iint\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \iint\limits_{\partial D} f(x,y) d\sigma = 0$$