Билет 16. Первая и вторая формулы Грина

1 Формула Остроградского

Пусть поверхность Σ состоит из конечного числа замкнутых кусков, имеющих в каждой точке касательную, причем любые прямые, параллельные прямые, параллельные осям координат, пересекают поверхность либо в конечном числе точек, либо по конечному числу отрезков.

Тогда в области Ω для функции $\vec{A}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$, где P,Q,R - непрерывно дифференцируемые в $\bar{\Omega}$, верна формула Остроградского-Гаусса:

$$\iint\limits_{\Sigma} (\vec{A},\vec{n})d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} div\vec{A}d\tau$$

$$div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

2 Первая формула Грина

Пусть u,v - скалярные функции, $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1\bar{\Omega}$
$A = u * grad(v)$. Применим формулу Остроградского:

$$\iint\limits_{\Sigma} (u * grad(v), \vec{n})d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} divu * gr\vec{a}d(v)d\tau$$

Распишем левую и правую части **1. Правая часть**

$$\begin{aligned} div(u\ grad(v)) = div(u\frac{\partial v}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y}, u\frac{\partial v}{\partial z}) = \\ \frac{\partial(u\frac{\partial v}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(u\frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} + \frac{\partial(u\frac{\partial v}{\partial z})}{\partial z} = \\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \\ (grad(u), grad(v)) + u \cdot (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) = \\ (grad(u), grad(v)) + u\Delta v \end{aligned} \tag{1}$$

2. Левая часть

$$(grad(v), \vec{n}) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot n1 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot n2 + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot n3 = \frac{\partial v}{\partial n} \tag{2}$$

Итак, первая формула Грина:

$$\iiint\limits_{\Omega} ((grad(u), grad(v)) + u\Delta v)dr = \iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$$

3 Вторая формула Грина

Поменяем местами u и v и вычтем из исходной формулы Грина. Получим:

$$\iiint\limits_{\Omega} ((grad(u), grad(v)) - (grad(u), grad(v)) + u\Delta v - v\Delta u)dr = \iint\limits_{\Sigma} u(\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})d\sigma$$

$$\iiint\limits_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)dr = \iint\limits_{\Sigma} u(\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})d\sigma$$

4 Формула Д'аламбера

Задача Коши для уравнения колебаний на прямой:

$$\begin{cases} u_t t = a^2 t_x x, \quad x \in \Re, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Формула Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$$