Билет 8.
Математическая постановка задач для уравнения теплопроводности.

1 Задача в общем виде

Решаем задачу на стержне, для начала конечном. (На отрезке [0,l])

Какие физические законы знаем?
Закон Фурье

Если распределение температоры неравномерно, то возникают потоки тепла из мест высокой в места низкой температуры.

$$Q = -k * \frac{u_2 - u_1}{l_2 - l_1} * S = -k * \frac{\partial u}{\partial x} S \tag{1}$$

$$dQ = -k * \frac{\partial u}{\partial x} S dt \tag{2}$$

$$Q = -S \int_{t1}^{t2} k \frac{\partial u}{\partial x} dt \tag{3}$$

Итак, уравнение теплопроводности:
Начальные условия: $u(x, 0) = \varphi(x)$
Граничные условия:
1. Условия 1 рода
$u(0, t) = \mu_1(t)$
$u(l, t) = \mu_2(t)$
2. Условие 2 рода (теплообмен)
$u_x(0, t) = \nu_1(t)$
$u_x(l, t) = \nu_2(t)$
Если $u_x(0, t) = 0$, то конец теплоизолирован
Почему? По закону Фурье: $\frac{du}{dx} = 0 => Q(x = 0) = 0$ => тепло не уходит и не приходит в этой точке.

2 Постановка конкретных задач

1. Задача с неоднородным условием

$u_t = a^2 u_{xx} + f$
$u(0, t) = \mu_1(t)$
$u(l, t) = \mu_2(t)$
$u(x, 0) = \varphi(x)$

2. Задача на бесконечной прямой ($-\infty < x < \infty$)

$u_t = a^2 u_{xx}$
$u(x, 0) = \varphi(x)$
$|u(x, t)|$ ограничен

3. Задача на полубесконечной прямой ($0 < x < \infty$)

$u_t = a^2 u_{xx}$
$u(x, 0) = \varphi(x)$
$|u(x, t)|$ ограничен

3 Третья формула Грина

Пусть Σ - область на плоскости, L - ее граница. Функции $P(x, y), Q(x, y)$ непрерывны в этой области вместе со своими частными производными. Тогда выполнена формула Грина:

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$