Билет 11

1. Существование решения задачи Коши для уравнения теплопроводности

Постановка задачи $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$ (1)

Хотим доказать, что решение $u(x,t)$ существует и единственно.

Подготовка Используем метод разделения переменных. $u(x,t) = X(x)T(t)$
Подставим это в задачу. Получим $T'X = a^2X''T \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T} = -\lambda^2, \quad \lambda = const > 0$

В итоге получили такую систему: $\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ T' + a^2\lambda^2 T = 0 \end{cases}$

Решения системы: $\begin{cases} X(x) = exp(i\lambda x) \\ T(t) = exp(-a^2\lambda^2 t) \end{cases}$

Итак, решение исходной системы: $u(x,t) = exp(i\lambda x - a^2\lambda^2 t)$. Пусть $A(\lambda)$ - некоторая функция. Тогда $u_\lambda = A(\lambda)u(x,t)$ - тоже решение системы(функция по сути константа).

Определим решение таким образом: $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) exp(i\lambda x - a^2\lambda^2 t) d\lambda$

Сделаем так, что она удовлетворяет начальному условию $u(x,0) = \phi(x)$: $\phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$,

где $A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s}\phi(s)ds$ //Коэффициенты ряда Фурье

Подставим найденные коэффициенты A в решение:

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda s}\phi(s)ds \right] exp(i\lambda x - a^2\lambda^2 t) d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(s) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} exp(i\lambda(x-s) - a^2\lambda^2 t) d\lambda \right] ds$$

Внутренний интеграл можно посчитать. В результате получится: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{(x-s)^2}{4a^2t})\phi(s)ds$

Более короткая запись: $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,s,t)\phi(s)ds$, где $G(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} exp(-\frac{(x-s)^2}{4a^2t})$,

Теорема. *Пусть $\phi(x)$ - начальное условие, такое что оно непрерывно по x и ограничено : $|\phi(x)| < M$. Тогда u(x,t) (опред-я формулой через G) непрерывна имеет непр-е частные произв-е u_{xx}, u_t и удовлетворяет уравнению теплопроводности при $x \in \Re, t > 0$. К тому же, $\lim\limits_{t->0+} u(x,t) = \phi(x)$*

Доказательство. **1.** Для начала докажем, что u(x,t) непрерывна. Для этого достаточно доказать, что u(x,t) непрерывна в прямоугольнике $= \{(x,t) : -L < x < L, t_0 < t < T\}$ где все эти пределы - const > 0.
Все функции в интеграле из u (а это G и ϕ) непрерывны в П. Тогда если интеграл сходится равномерно, то и u тоже. Для этого построим фун-цию F(s). Оцениваем показатель exp при разных s: (след-е нер-ва и усл-я лучше записывать друг по другом)
$\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t} \leqslant 0, |s| < 2L\}, \{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t} \leqslant -\frac{(L-s)^2}{4a^2T}, s \geqslant 2L\}, \{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t} \leqslant -\frac{(L+s)^2}{4a^2T}, s \leqslant -2L\}$, также оценим 1ый сомножитель в интеграле : $\{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}\}$
Получаем что $|G(x,s,t)| \leqslant F(s)$ где F(s) = либо $\{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}, |s| \leqslant 2L\}$ либо $\{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} exp(-\frac{(L-s)^2}{4a^2T} + \frac{L^2}{4a^2T}), s \geqslant 2L\}$ либо $\{\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} exp(-\frac{(L+s)^2}{4a^2T} + \frac{L^2}{4a^2T}), s \leqslant -2L\}$
$\frac{L^2}{4a^2T}$ это было добавлено в показатель exp лишь для непр-сти F(s) Получаем инт-л $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)ds$ сходящийся; $|G(x,s,t)| < F(s)$; по условию $\phi(x) < M$,значит справ-во: $|G(x,s,t)\phi(x)| < |G(x,s,t)||\phi(x)| < MF(s)$, а инт-л от $MF(s)$ сх-ся.Следовательно по признаку Вейерштрасса мы получаем равномерную сходимость исходного интеграла и непрерывность функции u(x, t) в прям-ке.

2. Док-м непрерывность в прям-ке u_{xx} , u_t
$|G_{xx}(x,s,t)| = |\frac{(x-s)^2}{4a^4t^2}G(x,s,t) - \frac{1}{2a^2t}G(x,s,t)| \leqslant F(s)\{\frac{1}{2a^2t_0} + \frac{L^2+2LS+S^2}{4a^4t_0^2}\} = F_1(s)$
$F_1(s)$ интегрируема, а значит можем предст-ть $u_{xx}(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(x,s,t)\phi(x)ds \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_{xx}(x,s,t)||\phi(x)|ds \leqslant$
$\leqslant M \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(s)ds < \infty$ т.е $\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)$ равномерно сх-ся в прям-ке $\Rightarrow u_{xx}(x,t)$ непр-на в прям-ке.
Аналогично док-ся $u_t(x,t)$

3. Теперь докажем $\lim_{t\to 0+} u(x,t) = \phi(x)$. Замена $\frac{s-x}{2a\sqrt{t}} = p$. Тогда $s = x + 2a\sqrt{t}p$, $ds = 2a\sqrt{t}dp$

$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-p^2)\phi(2pa\sqrt{t}+x)dp \to$ при $(t \to 0+)$ к интегралу $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-p^2)\phi(x) = \phi(x)$

$\square$

2. Постановка внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве Пусть Ω - некоторая открытая область в E^3, огранченная поверхностью Σ. Задача:

$$\Delta u = 0 (\text{т.е гарм-я}) \quad \text{и u непрерывна вне области}$$
$$u(M) = \mu(M), \quad M \in \Sigma$$
$$u(M) \rightrightarrows 0 \ M \to \infty$$