Билет 24.

1 Сведение внутренней и внешней задач Дирихле для оп-ра Лапласа к интегральному уравнению

Рассмотрим двумерный случай.

Ищем функцию, гармоническую в области T с контуром C, и удовлетворяющую граничному условию $u|_c = f$

Будем искать решение внутренней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя. $W(M) = \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}}\,\upsilon(P)\,dS_P$

Где

φ - угол между отрезком MP и внутренней нормалью к контуру C в точке P

$\upsilon(P)$ - плотность момента линейного двойного слоя.

$W(M)$ гармонична внутри , т.е нам нужно лишь гарантировать выполнение граничного условия $u|_c = f$,то есть $W_B(P_o) = f(P_o)$

$W(M)$ разрывна на границе: $W_B(P_o) = W_C(P_o) + \pi\upsilon(P_o)$ где W_B, W_H, W_C это соответственно значение при приближении изнутри, снаружи, и непосредственно значение на контуре

Соотвтсвенно получаем интегральное уравнение для υ

$\pi\upsilon(P_o) + \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{R_{P_oP}}\,\upsilon(P)\,dS_P = f(P_o)$ Или, если перейти от точек P, P_o к параметрам дуг s, s_o:

$\pi\upsilon(s_o) + \int\limits_0^L K(s_o, s)\,\upsilon(s)\,dS = f(s_o)$

Где

L - длина контура

$K(s_o, s) = \frac{\cos\varphi}{R_{P_oP}}$ - ядро этого интегрального уравнения

Для внешней задачи, учитывая разрыв $W_H(P_o) = W_C(P_o) - \pi\upsilon(P_o)$ аналогично получим

$$-\pi\upsilon(s_o) + \int\limits_0^L K(s_o, s)\,\upsilon(s)\,dS = f(s_o)$$

2 Метод продолжения для задачи Коши для полуограниченной прямой в случае краевых условий второго рода

имеем задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) = \upsilon(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

ее можно разбить на две, одна с нулевым граничным условием и ненулевым начальным, другая наоборот. Нас интересует первая:

$$\begin{cases} u1_t = a^2 u1_{xx} \\ u1_x(0,t) = 0 \\ u1(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

четным образом продляем φ

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0, \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

после этого, по лемме, граничное условие будет нулевым, т.е получаем задачу на прямой, решение которой выглядит так:

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}}\, e^{\dfrac{-(x-\varepsilon)^2}{4a^2 t}}\, \psi(\varepsilon) d\varepsilon$$

учитывая значения $\psi(x)$, получим

$$u1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left(e^{\dfrac{-(x-\varepsilon)^2}{4a^2 t}} + e^{\dfrac{-(x+\varepsilon)^2}{4a^2 t}}\right) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon$$

по задаче $u2$ для второго рода ни в лекциях, ни в Тихонове-Самарском нет инфы