Билет 20

1. Функция Грина для краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа в пространстве .

имеем задачу:

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in T \\ u(P) = g(P), P \in \Sigma \end{cases}$$

$T \in \mathbb{R}^3$ - область, ограниченная замкнутой поверхностью Σ; $u, v \in C^2(T) \cap C^1(\overline{T})$. Справедлива 3-я формула Грина:

$$4\pi u(M_0) = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PM_0}} - u \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right) d\delta - \iiint\limits_{T} \frac{\Delta u}{R_{PM_0}} d\tau$$

Пусть v гармонична в T ($\Delta v = 0$) и непрерывна с первыми производными в $\overline{T}$. Применим к u и v 2-ю формулу Грина:

$$0 = \iint\limits_{\Sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n_P} - u \frac{\partial v}{\partial n_P}\right) d\delta - \iiint\limits_{T} (v\Delta u - u\Delta v) d\tau = \iint\limits_{\Sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n_P} - u \frac{\partial v}{\partial n_P}\right) d\delta$$

(второй интеграл исчез, так как $\Delta u = \Delta v = 0$ в T). Складываем и получаем:

$$u(M_0) = \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial n_P} G - u \frac{\partial G}{\partial n_P}\right) d\delta$$

где $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M)$. Потребуем, чтобы выполнялось условие $G(P, M_0) = 0, P \in \Sigma$, тогда

$$u(M_0) = -\iint\limits_{\Sigma} u \frac{\partial G}{\partial n_P} d\delta$$

Определение: Функция $G(M, M_0)$ называется *функцией Грина* внутренней задачи Дирихле в $T \in \mathbb{R}^3$, если:
1) $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M)$, где $v(M)$ гармонична в T
2) $G(P, M_0) = 0, P \in \Sigma$
Если функция Грина $G(M, M_0)$ существует, то решение задачи находим в явном виде по формуле:

$$u(M_0) = -\iint\limits_{\Sigma} g(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} d\delta$$

Для построения функции Грина необходимо найти функцию $v(M)$, удовлетворяющую задаче:

$$\begin{cases} \Delta v(M) = 0, M \in T \\ v(P) = -\frac{1}{4\pi R_{PM_0}}, P \in \Sigma \end{cases}$$

Свойства функции Грина:
1) $G(M, M_0) \geq 0$, если $M, M_0 \in T$
Доказательство: ограничим точку M_0, в которой у $G(M, M_0)$ особенность, шаром K_ϵ достаточно малого радиуса ϵ (чтобы выполнялось $\frac{1}{4\pi R_{MM_0}} > v(M)$) тогда $G > 0$ в $K_\epsilon \cup \Sigma_\epsilon$ (Σ_ϵ - поверхность шара) и $\Delta G = 0$ в $T \backslash K_\epsilon$, тогда по принципу минимума $G \geq 0$ в $\Delta G = 0$ в $T \backslash K_\epsilon$, откуда в силу произвольности выбора ϵ следует утверждение. Следствие: $\frac{\partial G}{\partial n}|_{\Sigma} \leq 0$
2) Принцип взаимности: $G(M, M_0) = G(M_0, M)$
Короткого доказательства не нашёл

2. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности на неограниченной прямой.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

$f(x,t), \phi(x)$ - заданные непрерывные функции