1 Уравнение Кортевега-де Фриза. Решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде солитона.

$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ (коэф-ы могут быть любыми, 6 для удобства)

Коэф-ы можно поменять при помощи замены $t' = kt$, $x' = px$, $u' = lu$

Ищем решение в виде: $u(x,t) = f(x-ct)$ (т.е. в виде волны)

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}(-c)$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}$; $x = c - t = \xi$; $f(\xi), f'(\xi) \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$

$-cf_\xi + 6ff_\xi + f_{\xi\xi\xi} = 0$; $f_{\xi\xi\xi} \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$

$\frac{\partial}{\partial \xi}(-cf + 3f^2 + f_{\xi\xi}) = 0 \Rightarrow -cf + 3f^2 + f_{\xi\xi} = \frac{A}{2}$, где $A = const$

$f_{\xi\xi} \to \frac{A}{2}$, при $\xi \to \pm\infty$, умножаем на f_ξ

$-cff_\xi + 3f^2 f_\xi + f_{\xi\xi} f_\xi = \frac{A}{2} f_\xi$;

$\frac{\partial}{\partial \xi}(-\frac{c}{2}f^2 + f^3 + \frac{1}{2}f_\xi^2) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{A}{2}f)$; проинтегрируем:

$-\frac{c}{2}f^2 + f^3 + \frac{1}{2}f_\xi^2 = \frac{A}{2} + B$, отсюда получаем, что при $\xi \to \pm\infty$ $B = 0$

$\frac{A}{2} = -\frac{c}{2}f + f^2 + \frac{1}{2}\frac{f_\xi^2}{f}$

$\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \frac{f_\xi^2}{f} = 2 \lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \frac{f_\xi f_{\xi\xi}}{f_\xi} = 2 \lim\limits_{\xi \to \pm\infty} f_{\xi\xi} = 2\frac{A}{2} = A$

Без потери общности считаем $A = 0, B = 0$. Тогда получаем:

$\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 = cf^2 - 2f^3$, $\frac{\partial f}{\partial \xi} = \pm\sqrt{cf^2 - 2f^3}$

$\frac{\partial f}{f\sqrt{c-2f}} = \pm \mathrm{d}\xi \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{c-2f}} = \pm(\xi - x_0)$

$\int \frac{\mathrm{d}f}{1-\frac{2}{c}f} = \pm\sqrt{c}(\xi - x_0)$; Сделаем замену $\frac{2}{c}f = \frac{1}{\cosh^2\alpha}$:

$1 - \frac{2}{c}f = 1 - \frac{1}{\cosh^2\alpha} = \frac{\cosh^2\alpha - 1}{\cosh^2\alpha} = \frac{\sinh^2\alpha}{\cosh^2\alpha} = \tanh^2\alpha$

$\mathrm{d}f = \frac{c}{2}2\frac{-2\cosh\alpha\sinh\alpha}{\cosh^4\alpha}\mathrm{d}\alpha = -c\tanh\alpha\frac{1}{\cosh^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$

$I = \int \frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{1-\frac{2}{c}f}} \Rightarrow I = \int \frac{-c\tanh\alpha\frac{1}{\cosh^2\alpha}\mathrm{d}\alpha}{\frac{c}{2}\frac{1}{\cosh^2\alpha}\tanh\alpha} = -2\int \mathrm{d}\alpha = -2\alpha$

Таким образом получаем, что $-2\alpha = \pm\sqrt{c}(\xi - x_0)$

$\alpha = \mp\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0) \Rightarrow \cosh\alpha = \cos\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0)$

Итого, получаем решение в виде солитона: $u(x,t) = f(x-ct) = \frac{c}{2}\frac{1}{\cosh^2(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct-x_0))}$

2 Принцип максимума для уравнения теплопроводности

Если $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $0 < t \le T$ и $u(x,t) \in C([0,l]\times[0,T])$, то $\max u(x,t)$ в $[0,l]\times[0,T]$ достигается на границе, то есть или в начальный момент ($t = 0$), или в точках границы ($x = 0$ или $x = l$).