

修 士 学 位 論 文

雷雲を想定した強制により生じる 巨大惑星表層流の数値計算

北海道大学 理学院 宇宙理学専攻
惑星宇宙グループ 地球流体力学研究室
学籍番号：15S2015

鈴木 綾馬

2021 年 1 月 29 日

北海道大学大学院理学院修士課程

要旨

ddd

目次

第1章	はじめに	1
1.1	巨大惑星表層流の特徴	1
1.2	先行研究	2
1.2.1	Showman et al. (2007)	3
1.2.2	Brueshaber et al. (2019)	4
1.3	研究目的	4
1.4	本論文の構成	5
第2章	モデルと手法	6
2.1	支配方程式系	6
2.2	実験手法・実験設定	7
第3章	実験結果	8
第4章	考察	9
第5章	結論	10
付録		11
A	: 1.5 層浅水方程式系の導出	11
B	: モデルで使⽤した方程式系	16
謝辞		20
参考文献		21

第1章 はじめに

1.1 巨大惑星表層流の特徴

巨大惑星^{*1}大気の大規模循環は 1970 年代に Pioneer, Voyager といった探査機によって、これらの惑星の高解像度画像が撮影されて以来、大きな謎となっている。巨大惑星表層の風速分布を図 1 に示す (Showman et al., 2009)。風速分布の大きな特徴として、巨大ガス惑星 (木星, 土星) では赤道域で幅の広い西風とバンド構造に対応した中緯度域の縞状構造, 一方, 巨大氷惑星では赤道域の幅の広い東風が見られ、縞状構造は見られないといった特徴がある。

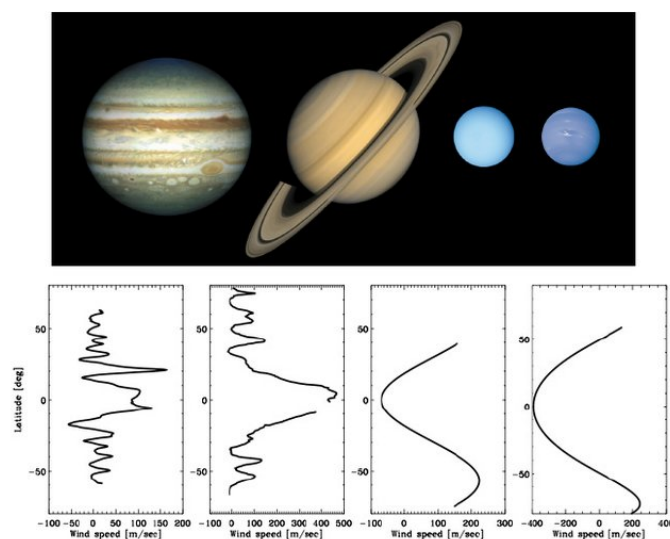


図 1: 上段: 木星, 土星, 天王星, 海王星の可視光領域画像. 下段: 縦軸が緯度, 横軸がクラウドトラッキングによって得られた東西平均した東西風速分布. 巨大ガス惑星 (木星, 土星) は赤道域で幅の広い西風と中緯度で東風/西風ジェットが交互に約 20 個の縞状構造を形成しているのに対し, 巨大氷惑星 (天王星, 海王星) は赤道域で幅の広い東風ジェットを含め 3 つのジェットを形成している (Showman et al., 2009).

^{*1}ここで、巨大惑星とは組成の主体が水素やヘリウムといったガスである巨大ガス惑星 (木星, 土星) とそれに比べ、水やメタンを多く含む巨大氷惑星 (天王星, 海王星) の総称として用いる。

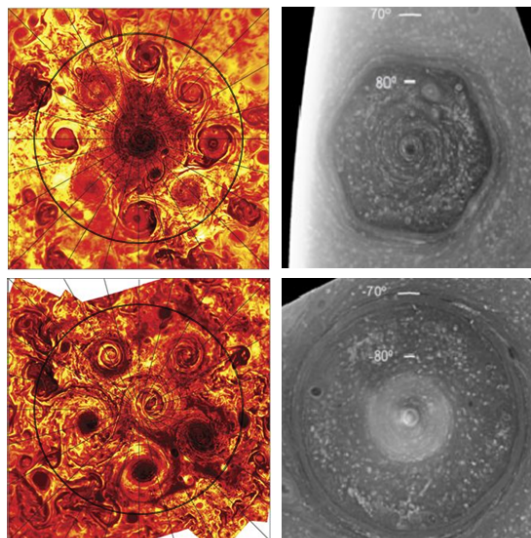


図 2: 左は Juno による木星観測 (波長: $5\mu\text{m}$). 黒の等緯度線は 80° (Adriani et al., 2018). 右は Cassini による土星観測 (波長: 750 nm) (Antuñano et al., 2015). 上は北極域, 下は南極域である.

一方, 極域の観測では低中緯度ではあまり見られない空間スケールの大きい低気圧性渦 (自転と同じ向きに回転する渦) が存在し, そのレジームが巨大惑星ごとに異なることが近年の Juno, Cassini といった探査機の観測によって明らかになった. 図 2 に木星と土星の極域観測を示した. 木星では複数の低気圧性渦が極付近にある低気圧性渦を取り囲んでいるという特徴がある. 北極域では極から約 0.5° 離れた位置に低気圧性渦があり, その渦の周りを 8 つの低気圧性渦が囲んでいる. それぞれの渦の半径は約 $2000 - 2300\text{ km}$ (緯度幅で $\sim 2^\circ$) である. 南極域では極から約 $1 \sim 2^\circ$ 離れた位置に低気圧性渦があり, その渦の周りを 5 つの低気圧性渦が囲んでいる. それぞれの渦の半径は北極域のものより大きく, 約 $2800 - 3500\text{ km}$ (緯度幅で $\sim 3^\circ$) である (Adriani et al., 2018).

複数の低気圧性渦が存在する木星に対し, 土星では半径約 2000 km (緯度幅で $\sim 2^\circ$) の単一の低気圧性渦が各極域を支配している. 天王星, 海王星も Voyager 2 号と地上観測から土星の低気圧性渦よりもサイズの大きい, 単一の低気圧性渦 (緯度幅で $\sim 10^\circ$) が存在することが示唆されている.

1.2 先行研究

巨大惑星の内部構造の観測が難しいこともあり, 大気循環の力学的描像と理解は数値計算を行い, 1.1 節で述べた表層流の特徴の再現を通して, 理解を試みてきた. しかし, 巨大惑星の内部構造は内部熱源があることなど, 地球型惑星の内部構造と大きく異なっており, 地球大気とのアナロジーで表層流を理解することは難

しい。特に、数値計算を行う際に問題になるのは観測される表層の大気運動の深さである。これについては大きく分けて、2つの説が考えられている。1つは惑星内部の対流層と観測可能な雲が存在する大気上層部の大気の運動が直接つながっているとする「深いモデル」である。このモデルにおいては比較的、赤道域で強い西風ジェットは形成されるものの、中高緯度域の縞状構造が発達しないという問題点がある (Christensen, 2002)。もう1つは、惑星深部の対流と大気上層部の対流は独立しており、深部からの強制はあるものの深部の対流とは別のメカニズムで構造が形作られているという「浅いモデル」である。このモデルでは比較的、中高緯度の縞状構造が形成されるが、赤道での西風ジェットが形成しないという問題点がある (Scott and Polvani, 2007)。現在のところ決定的な議論は出来ていない。

1.2.1 Showman et al. (2007)

これまでの「浅いモデル」の研究では初期に小スケールの乱流を与え、時間発展をみる自由減衰乱流実験 (Yoden and Yamada, 1993) や小規模な渦度強制を加える実験 (Scott and Polvani, 2007) などが行われてきた。しかし、このような全球的かつ連続的な強制が巨大惑星に働いているとは考えにくい。擾乱を引き起こす現象として木星、土星で観測されている雷雲 (Gierasch et al. (2000), Porco (2005)) が考えられている。Showman (2007) はこの雷雲を想定した局所的かつ離散的な強制を与え、球面浅水実験を行った。彼らは緯度 $0 - 70^\circ$ 、経度 $0 - 120^\circ$ の範囲の領域を計算した。その結果、中緯度の変形半径が小さい場合 (< 2000 km) には図 3 のように赤道域で幅の広い東風ジェットが形成し、中緯度では渦が支配的になることがわかった。中緯度の変形半径が大きい場合 (> 4000 km) には、弱い渦は伴うものの、ジェットが支配的になることがわかった。雷雲の強さ、ニュートン冷却の緩和時間などのパラメータを変更した実験を行ったが、どのケースも赤道域では東風ジェットになり、木星、土星で見られるような赤道加速は見られなかった。

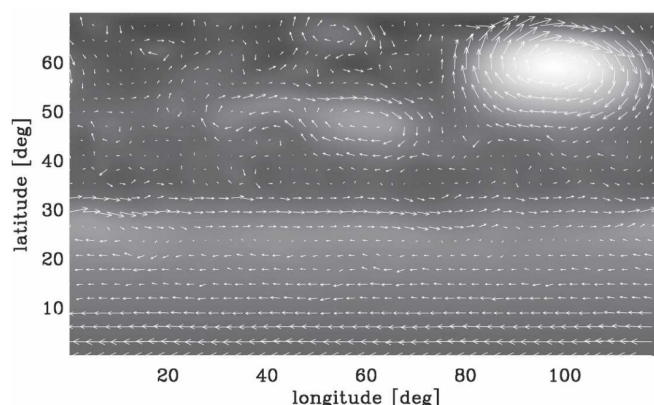


図 3: Showman (2007) のジオポテンシャルと速度ベクトルの計算結果 (4190 地球日, 中緯度の変形半径: $L_d \sim 1200$ km)。

1.2.2 Brueshaber et al. (2019)

Brueshaber et al. (2019) は Showman (2007) の雷雲を想定した強制浅水実験を極域 (約 $\sim 60^\circ$ の等緯度線より高緯度) で計算し、極渦とそのレジームに注目した。その結果、図 4 に示すように Burger 数: $Bu = (L_d/a)^2$ と呼ばれる変形半径: L_d と惑星半径: a で書かれる無次元量の値によって、極渦のレジームが変化することがわかった。Burger 数の値が $Bu \leq 2.40 \times 10^{-4}$ の場合、木星で観測されるような極のまわりを囲むような配置は見られないが、複数の小さな低気圧性渦が形成する。この特徴からこのレジームを木星的と分類した。Burger 数の値が $4.00 \times 10^{-4} \leq Bu \leq 8.16 \times 10^{-4}$ の場合、高気圧性渦と低気圧性渦が混在するレジームがあらわれる。Burger 数が木星的レジームと土星的レジームの間にあるためこのレジームを遷移状態と分類した。Burger 数の値が $8.16 \times 10^{-4} \leq Bu \leq 2.50 \times 10^{-3}$ の場合、土星で観測されるような極を中心とした単一の低気圧性渦が形成する。この特徴からこのレジームを土星的と分類した。Burger 数の値が $Bu \geq 4.44 \times 10^{-3}$ の場合、土星的レジームよりも強力な極を中心とした単一の低気圧性渦が形成する。この特徴からこのレジームを氷巨大惑星的と分類した。

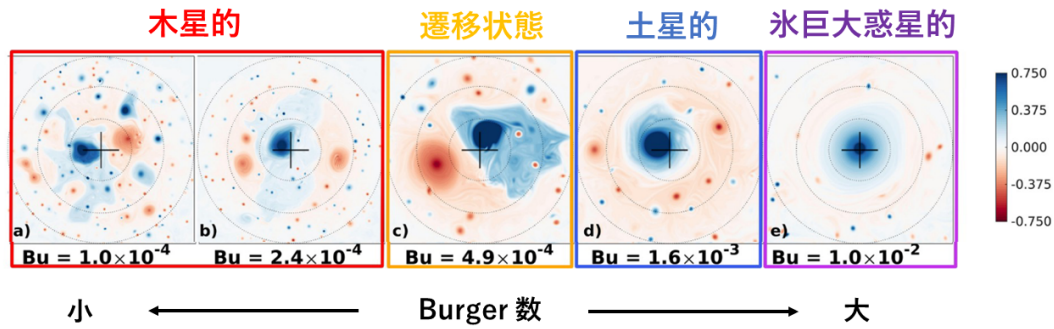


図 4: Brueshaber et al. (2019) の無次元ポテンシャル渦度: Q_e^* の計算結果 (20000 地球日). Burger 数の値に応じて巨大惑星で観測されるような極渦のレジームが変化する. $Q_e^* = 0$ は静止流体 (相対渦度や流体層の厚さの水平平均からの変化はない), $Q_e^* > 0$ は低気圧性渦, $Q_e^* < 0$ は高気圧性渦を表す.

1.3 研究目的

木星, 土星で観測される雷雲を想定した強制を与えた浅水数値実験を Showman (2007) は低緯度から中緯度の領域を計算し, 赤道域のジェットと縞状構造に着目した. 一方, Brueshaber et al. (2019) は極域の領域で計算を行い, 極渦のレジームに着目した. どちらの先行研究も領域計算であり, このような領域の制限は流れ場全体の構造に影響を与える可能性がある. 例えば, Heimpel and Aurnou (2007) は薄い球殻領域内の深部対流運動を全球の $1/8$ の領域で解き, 縞状構造と赤道加速が共存する状態を数値的に再現した. しかし, この計算を全球で計算した Takehiro

et al. (2015) では時間積分を進めると縞状構造が消滅するという結果がある．そのため本論文では，雷雲を想定した強制浅水実験を全球で行い，低緯度から中緯度の主に東西ジェットの構造を Showman (2007) の計算と比較，極域の主に渦の構造を Brueshaber et al. (2019) と比較する．そして，雷雲を想定した強制により，1.1 節で述べた巨大惑星の表層流の特徴が雷雲による強制により，形成されるのかを調べるのが本研究の目的である．

1.4 本論文の構成

本論文の構成を簡単に述べる．2 章では用いた 1.5 層浅水方程式系と数値実験の手法および設定について述べる．3 章では Burger 数，ニュートン冷却の緩和時間，低気圧性渦/高気圧性渦の割合，解像度，それぞれの値を変化させたときの実験結果を示す．4 章では東西ジェットと極渦のレジームに注目し考察を行う．5 章で本論文の結論を述べる．

第2章 モデルと手法

ここでは本研究で用いるモデルと実験手法・実験設定について述べる．

2.1 支配方程式系

本研究では球面上の1.5層浅水方程式系を用いる．これは [Showman \(2007\)](#), [Brueshaber et al. \(2019\)](#) で用いられた系と同じである．このモデルにおいて上層と下層はそれぞれの層で密度一定であり，上層は活動的な層，下層は無限に深く静止したそうであると仮定する．上層に対する運動量方程式と質量保存の式は

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + g'\nabla h + f\mathbf{k} \times \mathbf{u} = -D\mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial g'h}{\partial t} + \nabla \cdot (g'h\mathbf{u}) = \Sigma S_{storm} + S_{rad} - D_h \quad (2)$$

である^{*2}．ここで， D は計算が発散しないための数値粘性項^{*3}， h は上層の厚さ， g' は低減重力加速度， S_{storm} は雷雲を想定した質量強制項， S_{rad} は放射緩和項である．それぞれの強制項は

$$S_{storm} = s \cdot \exp \left[-\frac{R^2}{R_{storm}^2} - \frac{(t - t_0)^2}{\tau_{storm}^2} \right], \quad (3)$$

$$S_{rad} = -\frac{\langle g'h \rangle - g'h_{eq}}{\tau_{mass}} - \frac{g'h - \langle g'h \rangle}{\tau_{APE}} \quad (4)$$

である．ここで， s は質量強制の最大値，またその正負の割合を α とする． $\alpha = 1.0$ のとき，正の質量強制のみが与えられる（つまり，高気圧性渦が質量強制を与えた場所で発生する）． R は質量強制の中心位置からの距離， R_{storm} は質量強制の半径， t は質量強制が局所的に与えられてからの時間， t_0 は質量強制がピークを迎える時間， τ_{storm} は質量強制の特徴的な時間スケール， $\langle \rangle$ はその瞬間の水平平均， h_{eq} は平衡状態での厚さ， τ_{mass} はエネルギーに影響を与えず， $\langle h \rangle$ を h_{eq} に向かって平衡化するときの時間スケール， τ_{APE} は質量に影響を与えず， h を $\langle h \rangle$ に向かって平衡化するときの時間スケールである．図 5 に質量強制のスナップショットを示す．質量強制は $R > 2.2R_{storm}, t > 2.2\tau_{storm}$ で 0 とする．質量強制が与えられてから，

^{*2}導出は付録 A を参照．

^{*3}詳細は付録 B を参照．

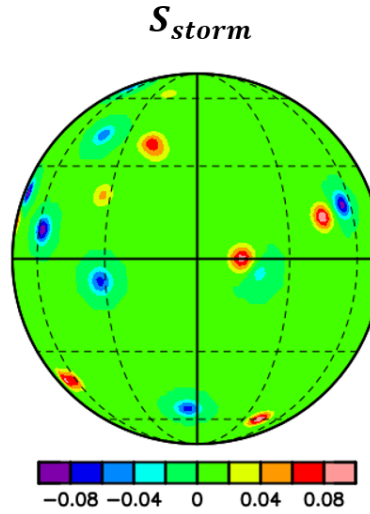


図 5: 質量強制: S_{storm} のスナップショット ($s_{max} = 0.1, \alpha = 0.5$ の場合). ある時刻と位置に雷雲を想定した質量強制を式 (3) で与える. 質量強制は $R > 2.2R_{storm}, t > 2.2\tau_{storm}$ で 0 とする. 質量強制が与えられてから, $2.2\tau_{storm}$ 後に消滅. そこから $\tau_{interval}$ 後に違う位置に質量強制が与えられる.

$2.2\tau_{storm}$ が経過し, 消滅後, そこから $\tau_{interval}$ 後に違う位置に質量強制が与えられる.

式 (4) の放射緩和項の右辺第 1 項は時間スケール τ_{mass} で $\langle h \rangle$ を平衡厚さ h_{eq} に向かって, 緩和する. 右辺第 2 項は時間スケール τ_{APE} で局所的な流体層の厚さの変化を $\langle h \rangle$ に向かって, 緩和する. これら 2 つの項により, 統計的定常状態を実現する. [Brueshaber et al. \(2019\)](#) ではこれらの強制項に加え, 加えた質量強制を層から差し引く質量調整項を加えていたが, ここでは [Showman \(2007\)](#) にならい, 加えない.

2.2 実験手法・実験設定

球面上の支配方程式系 1, 2 を解く. その際, 運動量方程式はベクトル量である速度成分のままだと球面座標系では格子点が集中する極点付近で, 計算が難しい. そのため, 数値計算の都合上, 式 (1) を変形し渦度と発散に関する式を用いる^{*4}.

^{*4}付録 B を参照.

第3章 実験結果

ddd

第4章 考察

ddd

第5章 結論

sss
def

付録

A : 1.5 層浅水方程式系の導出

ここでは, Vallis (2017) 3.2 節 有効重力の方程式系を参考に, 1.5 層浅水モデルの方程式を導出する.

・ 1.5 層浅水モデルの概要

浅水系で最も単純な 1 層モデルは密度が変化しない一層の流体層を考えている. しかし, 現実の流体の密度は変化するはずである. 特に成層していれば, 鉛直方向に変化すると考えられる. 1.5 層モデルでは上層は活動的, 下層は無限に深く静止した密度の異なる 2 つの流体層を考え, 単純ではあるが鉛直方向の密度変化を考慮する. 海洋では下層はほとんど静止し, 運動のある上層は数 100 m の厚さであるため, このモデルが使われることがある. 図 A.1 に 1.5 層モデルの模式図を示す. ここで, η_0 は上層の高さ, η_1 は下層の高さ, h は上層の厚さ, 上層, 下層の密度はそれぞれ ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) である. 上端の境界条件は自由表面と剛体表面の 2 つの場合がある. Showman (2007), Brueshaber et al. (2019) では剛体表面近似を用いていると考えられる. 以下ではそれぞれの境界条件の場合で方程式系を導く.

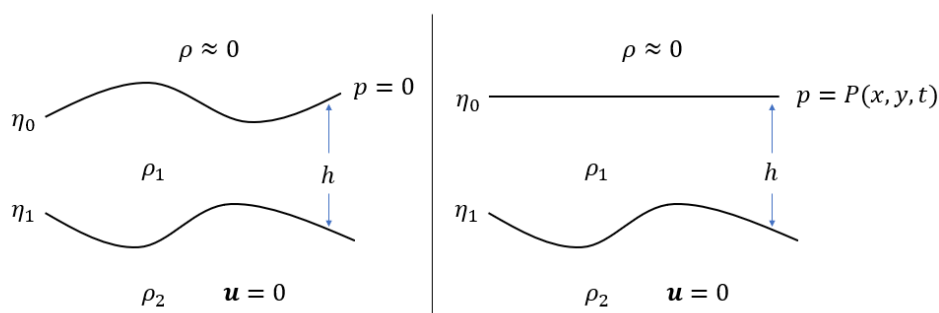


図 A.1: 1.5 層浅水方程式系の模式図 (Vallis (2017) の図 3.3 を改変). 左は自由表面近似, 右は剛体表面近似である. 上層の厚さ h は上層の高さ η_0 と下層の高さ η_1 を用いて, $h = \eta_0 - \eta_1$ で書かれる.

・自由表面近似

運動量方程式

まずは上層について考える．上層の静水圧の式は

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = -\rho_1 g. \quad (\text{A.1})$$

これを，上層の上端 η_0 からある深さ z まで積分すると

$$\int_0^{p_1} dp = -\rho_1 g \int_{\eta_0}^z dz. \quad (\text{A.2})$$

自由表面近似では上層の上端で $p(\eta_0) = 0$ なので，

$$p_1(x, y, z, t) = \rho_1 g(\eta_0 - z). \quad (\text{A.3})$$

式 (A.3) の水平勾配をとると，

$$\begin{aligned} \nabla_z p_1 &= \rho_1 g \nabla_z \eta_0, \\ \frac{1}{\rho_1} \nabla_z p_1 &= g \nabla_z \eta_0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ここで，

$$\nabla_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

次に下層について考える．下層の静水圧の式は

$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = -\rho_2 g. \quad (\text{A.5})$$

これを，下層の上端 η_1 からある深さ z まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{p_2} dp &= -\rho_2 g \int_{\eta_1}^z dz, \\ p_2 - p_1 &= \rho_2 g(\eta_1 - z). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

p_1 は式 (A.3) で $z = \eta_1$ とした値なので

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \rho_2 g(\eta_1 - z) \\ &= \rho_1 g(\eta_0 - \eta_1) + \rho_2 g(\eta_1 - z) \\ &= \rho_1 g(\eta_0 - \eta_1) + \rho_2 g(\eta_1 - z). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

式 (A.7) の水平勾配をとると,

$$\begin{aligned}\nabla_z p_2 &= \rho_1 g (\nabla_z \eta_0 - \nabla_z \eta_1) + \rho_2 g \nabla_z \eta_1 \\ &= \rho_1 g \nabla_z \eta_0 + \rho_1 g \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1} \nabla_z \eta_1 \\ &= \rho_1 g \nabla_z \eta_0 + \rho_1 g' \nabla_z \eta_1.\end{aligned}\tag{A.8}$$

ここで, g' は低減重力加速度 (reduced gravity)

$$g' = g \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}$$

である. 下層は運動がないので, 式 (A.8) の左辺の圧力勾配 $\nabla_z p_2$ は 0 になる. よって,

$$g \nabla_z \eta_0 = -g' \nabla_z \eta_1.\tag{A.9}$$

式 (A.4) より

$$\frac{1}{\rho_1} \nabla_z p_1 = -g' \nabla_z \eta_1.\tag{A.10}$$

上層の回転の効果を含む非粘性流体の運動量方程式は

$$\frac{D\mathbf{u}_1}{Dt} + \frac{1}{\rho_1} \nabla_z p_1 + f\mathbf{k} \times \mathbf{u}_1 = 0.\tag{A.11}$$

ここで, \mathbf{k} は z 方向の単位ベクトルである. 式 (A.11) に式 (A.10) を代入すると

$$\frac{D\mathbf{u}_1}{Dt} - g' \nabla_z \eta_1 + f\mathbf{k} \times \mathbf{u}_1 = 0\tag{A.12}$$

となる.

連続の式

連続の式は 1 層の浅水系と同様に考えることができ,

$$\frac{\partial g'h}{\partial t} + \nabla_z (g'h\mathbf{u}_1) = 0.\tag{A.13}$$

まとめると

自由表面近似

$$\cdot \text{運動量方程式} \quad \frac{D\mathbf{u}_1}{Dt} - g' \nabla_z \eta_1 + f\mathbf{k} \times \mathbf{u}_1 = 0\tag{A.11}$$

$$\cdot \text{連続の式} \quad \frac{\partial g'h}{\partial t} + \nabla_z (g'h\mathbf{u}_1) = 0.\tag{A.12}$$

・ 剛体表面近似

表面での運動が小さいならば、剛体表面を置いたという近似をしてもよいだろう。上端にふたをすることで、上端の上下運動は許されなくなる。その圧力の強制を $P(x, y, t)$ とする。また、上層の上端を基準面にとり、そこで $z = 0$ とする ($\eta_0 = 0$)。自由表面近似と同様に上層での静水圧の式を $z = 0$ からある深さ z まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_P^{p_1} dp &= -\rho_1 g \int_0^z dz, \\ p_1 - P &= -\rho_1 g z. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

式 (A.14) の水平勾配をとると、

$$\nabla_z p_1 = \nabla_z P. \quad (\text{A.15})$$

下層の静水圧の式を η_1 からある深さ z まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{p_2} dp &= -\rho_2 g \int_{\eta_1}^z dz, \\ p_2 - p_1 &= \rho_2 g (\eta_1 - z), \\ p_2 &= p_1 + \rho_2 g (\eta_1 - z). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

p_1 に式 (A.14) で $z = \eta_1$ にしたものを代入すれば

$$\begin{aligned} p_2 &= -\rho_1 g \eta_1 + \rho_2 g (\eta_1 - z) + P \\ &= \rho_1 g h - \rho_2 g (h - z) + P. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

水平勾配をとると

$$\begin{aligned} \nabla_z p_2 &= -g(\rho_2 - \rho_1) \nabla_z h + \nabla_z P, \\ &= -\rho_1 g' \nabla_z h + \nabla_z P. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

下層では運動がないので $\nabla_z p_2 = 0$ 。よって

$$\frac{1}{\rho_1} \nabla_z P = g' \nabla_z h. \quad (\text{A.19})$$

式 (A.15) より

$$\frac{1}{\rho_1} \nabla_z p_1 = g' \nabla_z h. \quad (\text{A.20})$$

式 (A.11) に式 (A.20) を代入すると

$$\frac{D\mathbf{u}_1}{Dt} + g' \nabla_z h + f \mathbf{k} \times \mathbf{u}_1 = 0 \quad (\text{A.21})$$

となる．まとめると

剛体表面近似

$$\cdot \text{運動量方程式} \quad \frac{D\mathbf{u}_1}{Dt} + g'\nabla_z h + f\mathbf{k} \times \mathbf{u}_1 = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\cdot \text{連続の式} \quad \frac{\partial g'h}{\partial t} + \nabla_z(g'h\mathbf{u}_1) = 0. \quad (\text{A.12})$$

剛体表面近似の方程式系は 1 層モデルの底面地形がない場合の方程式系の重力加速度： g が低減重力加速度： g' に置きかわるだけである．本研究はこの剛体表面近似を用いる．

B : モデルで使⽤した方程式系

ここでは実際にモデル内で計算した方程式系を示す.

・渦度・発散型の運動量方程式への変形

運動量方程式 (1) はオイラー形式で書くと

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + g' \nabla h + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} = -\mathbf{D}_u, \quad (\text{B.1})$$

ここで, 左辺第2項の移流項の部分を変形すると

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{u} \quad (\text{B.2})$$

となる. これを式 (B.1) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{u} + g' \nabla h + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} &= -\mathbf{D}_u, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + g' \nabla h \right) + (\zeta + f) \mathbf{k} \times \mathbf{u} &= -\mathbf{D}_u \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

となる. 式 (B.3) の回転と発散をとると, それぞれ

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\zeta + f) \mathbf{u} - D_\zeta, \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot \nabla \times (\zeta + f) \mathbf{u} - \nabla^2 \left(g' h + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) - D_D. \quad (\text{B.5})$$

である^{*5}。球面座標系での物質微分，発散，勾配，回転は

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \vartheta} \frac{\partial\phi}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial\phi}{\partial \vartheta}, \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{a \cos \vartheta} \left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial (A_\vartheta \cos \vartheta)}{\partial \vartheta} \right], \quad (\text{B.7})$$

$$\nabla \phi = \frac{\mathbf{i}}{a \cos \vartheta} \frac{\partial\phi}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{j}}{a} \frac{\partial\phi}{\partial \vartheta}, \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \begin{vmatrix} \mathbf{i} r \cos \vartheta & \mathbf{j} r & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial r} \\ A_\lambda r \cos \vartheta & A_\vartheta r & A_r \end{vmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

これを用いて，式 (B.4), (B.5) を書き下せば

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)u] - \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [(\zeta + f)v \cos \vartheta] - D_\zeta, \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)v] - \frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} [(\zeta + f)u \cos \vartheta] \\ &\quad - \nabla^2 [g'h + E] - D_D. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

ここで， E は運動エネルギーで $E = (u^2 + v^2)/2$ 。 ∇^2 は

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2 \cos \vartheta^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right). \quad (\text{B.12})$$

^{*5}式 (B.5) の左辺第 3 項に回転演算子を作用させると

$$\begin{aligned} -\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times [(\zeta + f)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}] &= -\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \left[(\zeta + f) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right] \\ &= -\hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \left[(\zeta + f) \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= -\hat{\mathbf{k}} \cdot \left[(\zeta + f) \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial z} \\ -\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right] \\ &= -\nabla \cdot (\zeta + f)\mathbf{v}. \end{aligned}$$

また，発散演算子を作用させると

$$-\nabla \cdot [(\zeta + f)\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}] = \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times (\zeta + f)\mathbf{v}.$$

ここで，ベクトル公式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ を用いた。

・サイン緯度への変形

$U = u \cos \vartheta, V = v \cos \vartheta$ と $\mu = \sin \vartheta$ を用い, サイン緯度にかきかえると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)U] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} [(\zeta + f)V] - D_\zeta, \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)V] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} [(\zeta + f)U] \\ &\quad - \nabla^2 [g'h + E] - D_D, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g'h}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (g'hU) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (g'hV) \\ &\quad + \Sigma S_{storm} + S_{rad} - D_h. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

また, 上層の厚さ h を上層の厚さの平均場 h_{eq} とそこからのずれ h' を用いて,
 $h = h'(\lambda, \phi, t) + h_{eq}$ と書くと

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)U] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} [(\zeta + f)V] - D_\zeta, \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\zeta + f)V] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} [(\zeta + f)U] - \nabla^2 [g'h' + E] - D_D, \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g'h'}{\partial t} &= -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} (g'h'U) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} (g'h'V) - g'h_{eq}D + \Sigma S_{storm} + S_{rad} - D_h. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

ここで,

$$S_{storm} = s \cdot \exp \left[-\frac{R^2}{R_{storm}^2} - \frac{(t - t_0)}{\tau_{storm}^2} \right], \quad (\text{B.19})$$

$$S_{rad} = -\frac{\langle g'h' \rangle}{\tau_{mass}} - \frac{g'h' - \langle g'h' \rangle}{\tau_{APE}} \quad (\text{B.20})$$

である^{*6}.

^{*6} S_{rad} の変形は

$$\begin{aligned} S_{rad} &= -\frac{\langle g'h \rangle - g'h_{eq}}{\tau_{mass}} - \frac{g'h - \langle g'h \rangle}{\tau_{APE}} \\ &= -\frac{\langle g'(h' + h_{eq}) \rangle - g'h_{eq}}{\tau_{mass}} - \frac{g'(h' + h_{eq}) - \langle g'(h' + h_{eq}) \rangle}{\tau_{APE}} \\ &= -\frac{\langle g'h' \rangle + g'h_{eq} - g'h_{eq}}{\tau_{mass}} - \frac{g'h' + g'h_{eq} - \langle g'h' \rangle - g'h_{eq}}{\tau_{APE}} \\ &= -\frac{\langle g'h' \rangle}{\tau_{mass}} - \frac{g'h' - \langle g'h' \rangle}{\tau_{APE}}. \end{aligned}$$

・ 数値粘性項

式 (B.16), (B.17), (B.18) の数値粘性項 : D_ζ, D_D, D_h はそれぞれ

$$D_\zeta = K_m \left[(-1)^{N_m} \nabla^{2N_m} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{2N_m} \right] \zeta, \quad (\text{B.21})$$

$$D_D = K_m \left[(-1)^{N_m} \nabla^{2N_m} - \left(\frac{2}{a^2} \right)^{2N_m} \right] D, \quad (\text{B.22})$$

$$D_h = (-1)^{N_h} K_h \nabla^{2N_h} g h'. \quad (\text{B.23})$$

ここで, K_m は水平粘性係数, K_h は水平拡散係数, N_m は超粘性の次数 (水平ラプラシアン^oの階数), N_h は超拡散の次数 (水平ラプラシアン^oの階数) である.

謝辞

ddd

参考文献

- A. Adriani, A. Mura, G. Orton, C. Hansen, F. Altieri, M. L. Moriconi, J. Rogers, G. Eichstädt, T. Momary, A. P. Ingersoll, G. Filacchione, G. Sindoni, F. Tabataba-Vakili, B. M. Dinelli, F. Fabiano, S. J. Bolton, J. E. P. Connerney, S. K. Atreya, J. I. Lunine, F. Tosi, A. Migliorini, D. Grassi, G. Piccioni, R. Noschese, A. Cicchetti, C. Plainaki, A. Olivieri, M. E. O'Neill, D. Turrini, S. Stefani, R. Sordini, and M. Amoroso.
Clusters of cyclones encircling jupiter's poles.
Nature, 555(7695):216–219, Mar. 2018.
doi: 10.1038/nature25491.
URL <https://doi.org/10.1038/nature25491>.
- A. Antuñano, T. del Río-Gaztelurrutia, A. Sánchez-Lavega, and R. Hueso.
Dynamics of saturn's polar regions.
Journal of Geophysical Research: Planets, 120(2):155–176, Feb. 2015.
doi: 10.1002/2014je004709.
URL <https://doi.org/10.1002/2014je004709>.
- S. R. Brueshaber, K. M. Sayanagi, and T. E. Dowling.
Dynamical regimes of giant planet polar vortices.
Icarus, 323:46–61, May 2019.
doi: 10.1016/j.icarus.2019.02.001.
URL <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2019.02.001>.
- U. R. Christensen.
Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells.
Journal of Fluid Mechanics, 470:115–133, Oct. 2002.
doi: 10.1017/s0022112002002008.
URL <https://doi.org/10.1017/s0022112002002008>.
- P. J. Gierasch, A. P. Ingersoll, D. Banfield, S. P. Ewald, P. Helfenstein, A. Simon-Miller, A. Vasavada, H. H. Breneman, D. A. Senske, and G. I. Team.
Observation of moist convection in jupiter's atmosphere.
Nature, 403(6770):628–630, Feb. 2000.
doi: 10.1038/35001017.

URL <https://doi.org/10.1038/35001017>.

M. Heimpel and J. Aurnou.

Turbulent convection in rapidly rotating spherical shells: A model for equatorial and high latitude jets on jupiter and saturn.

Icarus, 187(2):540–557, Apr. 2007.

doi: 10.1016/j.icarus.2006.10.023.

URL <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2006.10.023>.

C. C. Porco.

Cassini imaging science: Initial results on saturn’s atmosphere.

Science, 307(5713):1243–1247, Feb. 2005.

doi: 10.1126/science.1107691.

URL <https://doi.org/10.1126/science.1107691>.

R. K. Scott and L. M. Polvani.

Forced-dissipative shallow-water turbulence on the sphere and the atmospheric circulation of the giant planets.

Journal of the Atmospheric Sciences, 64(9):3158–3176, Sept. 2007.

doi: 10.1175/jas4003.1.

URL <https://doi.org/10.1175/jas4003.1>.

A. P. Showman.

Numerical simulations of forced shallow-water turbulence: Effects of moist convection on the large-scale circulation of jupiter and saturn.

Journal of the Atmospheric Sciences, 64(9):3132–3157, Sept. 2007.

doi: 10.1175/jas4007.1.

URL <https://doi.org/10.1175/jas4007.1>.

A. P. Showman, J. Y.-K. Cho, and K. Menou.

Atmospheric circulation of exoplanets, 2009.

S. Takehiro, M. Odaka, K. Ishioka, M. Ishiwatari, and Y.-Y. Hayashi.

Spmmodel: A series of hierarchical spectral models for geophysical fluid dynamics.

<http://www.nagare.or.jp/mm/2006/spmodel/>, 2006.

S. Takehiro, Y. SASAKI, K. Ishioka, M. Odaka, Y. O. Takahashi, K. Nakajima, M. Ishiwatari, Y.-Y. Hayashi, and S. D. Group.

Hierarchical spectral models for gfd (spmodel).

<http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>, 2013.

S. Takehiro, Y. Sasaki, and K. Ishioka.

Disappearance of surface banded structure produced by thermal convection in rapidly rotating thin spherical shells, November 2015.

URL <https://www.jamstec.go.jp/ceist/j/publication/annual/annual2014/pdf/2project/chapter1/125takehiro.pdf>.

G. K. Vallis.

Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics.

Cambridge University Press, 2017.

doi: 10.1017/9781107588417.

URL <https://doi.org/10.1017/9781107588417>.

S. Yoden and M. Yamada.

A numerical experiment on two-dimensional decaying turbulence on a rotating sphere.

Journal of the Atmospheric Sciences, 50(4):631–644, Feb. 1993.

doi: 10.1175/1520-0469(1993)050<0631:aneotd>2.0.co;2.

URL [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1993\)050<0631:aneotd>2.0.co;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1993)050<0631:aneotd>2.0.co;2).