MATEMATICA GENERALE

LEZIONE 12

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE $A_{n \times n}$

- Il determinante è indipendente dal modo in cui lo calcoliamo (per righe, per colonne, indipendente dalla riga/colonna scelta)

- Se A è triangolare $\Longrightarrow \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

- Se A contiene 1 riga/1 colonna di 0
  $\Longrightarrow \det(A) = 0$

- Se A contiene 2 righe/2 colonne che sono proporzionali $\Longrightarrow \det(A) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

DETERMINANTE ED OPERAZIONI DI RIDUZIONE

3 tipi di operazione che utilizzeremo:

- R_{ij} : scambio della riga i-esima di M con la riga j-esima di M
- $\alpha \cdot R_i$: moltiplica la riga i-esima di M per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$
- $R_i + \alpha \cdot R_j$: sommo alla riga i-esima di M α volte la riga j-esima di M

SCOPO : capire la relazione tra il $\det(M)$ e il $\det(M')$

ridotte e scalini a partire da M

DETERMINANTE ED OPERAZIONI DI RIDUZIONE

3 tipi di operazione che utilizzeremo:

- R_{ij} : scambio della riga i-esima di M con la riga j-esima di M ⇝ il det è moltiplicato per (-1)
- $\alpha \cdot R_i$: moltiplica la riga i-esima di M per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ ⇝ il det è moltiplicato per α
- $R_i + \alpha \cdot R_j$: somma alla riga i-esima di M α volte la riga j-esima di M ⇝ il det non cambia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + \frac{3}{2} R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{32}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - \frac{5}{2} R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

TEOREMA DI BINET

A, B matrici $n \times n$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

TEOREMA DI BINET

A, B matrici $n \times n$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Facile conseguenza:

Se A è invertibile, cioè, se $\exists\, A^{-1}$ t.c

$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n = A^{-1} \cdot A$, allora

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$$

TEOREMA DI BINET

A, B matrici $n \times n$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ

A matrice $n \times n$

A è invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

$\exists A^{-1}$

TEOREMA DI BINET

A, B matrici $n \times n$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

TEOREMA DI INVERTIBILITÀ

A matrice $n \times n$

A è invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

$\exists A^{-1}$

COROLLARIO A, B $n \times n$ invertibili $\Longrightarrow$ $A \cdot B$ e $B \cdot A$ sono invertibili

Come calcoliamo A^{-1}?

Chiamiamo $B = A^{-1}$. Dobbiamo dare una formula per le entrate b_{ij} di B. [B è quadrata $n \times n$!]

Come calcoliamo A^{-1} ?

Chiamiamo $B = A^{-1}$. Dobbiamo dare una formula per le entrate b_{ij} di B. [B è quadrata $n \times n$!]

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(A_{ji})$$

Come calcoliamo A^{-1}?

Chiamiamo $B = A^{-1}$. Dobbiamo dare una formula per le entrate b_{ij} di B. [B è quadrata $n \times n$!]

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(A_{ji})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} =$$

Come calcoliamo A^{-1}?

Chiamiamo $B = A^{-1}$. Dobbiamo dare una formula per le entrate b_{ij} di B. [B è quadrata $n \times n$!]

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(A_{ji})$$

matrice ottenuta da A cancellando la j-esima riga ed i-esima colonna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A) =$$

Come calcoliamo A^{-1}?

Chiamiamo $B = A^{-1}$. Dobbiamo dare una formula per le entrate b_{ij} di B. [B è quadrata $n \times n$!]

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(A_{ji})$$

matrice ottenuta da A cancellando la j-esima riga ed i-esima colonna

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -4 + (+1) = -3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = B = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

SISTEMI LINEARI

EQUAZIONE LINEARE: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b$

SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARI o SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Lo possiamo anche riscrivere come

$$\begin{cases} \underline{a}_1 \cdot \underline{x} = b_1 \\ \underline{a}_2 \cdot \underline{x} = b_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_m \cdot \underline{x} = b_m \end{cases}$$

dove

OPPURE come

$$A\,\underline{x} = \underline{b}$$

dove

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m
\end{cases}
$$

Lo possiamo anche riscrivere come

$$
\begin{cases}
\underline{a}_1 \cdot \underline{x} = b_1 \\
\underline{a}_2 \cdot \underline{x} = b_2 \\
\vdots \\
\underline{a}_m \cdot \underline{x} = b_m
\end{cases}
$$

dove $\underline{a}_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$

$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

OPPURE come

$$A\,\underline{x} = \underline{b}$$

dove $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$

$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONI DI SISTEMI LINEARI

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite.

DEF • Una soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ è un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $A\underline{v} = \underline{b}$.

• Il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile se ammette almeno una soluzione. Altrimenti diremo che non è risolubile.

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$$

$A\underline{x} = \underline{b}$: Quante soluzioni può avere ?

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE UNICA : $\begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

$A\underline{x} = \underline{b}$: Quante soluzioni può avere?

TEOREMA

Dato $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare, allora una sola delle seguenti affermazioni è vera:

- $A\underline{x} = \underline{b}$ non ammette soluzioni
- $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette un'unica soluzione
- $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette infinite soluzioni.

$A\underline{x} = \underline{b}$: Quante soluzioni può avere?

TEOREMA Dato $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare, allora una sola delle seguenti affermazioni è vera:

- $A\underline{x} = \underline{b}$ non ammette soluzioni
- $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette un'unica soluzione
- $A\underline{x} = \underline{b}$ ammette infinite soluzioni.

COME CAPIRE SE $A\underline{x} = \underline{b}$ RISOLUBILE AMMETTE 1 o ∞ SOLUZIONI?

ESEMPIO

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

ELIMINAZIONE DI GAUSS

Consideriamo un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$

MATRICE COMPLETA:

$$\left(A \;\middle|\; \underline{b} \right)$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS:

Dato $A\underline{x} = \underline{b}$ e formata $(A|\underline{b})$, partiamo da $(A|\underline{b})$ ed andremo a trasformarla in una matrice a scalini $(A'|\underline{b}')$, usando le 3 operazioni elementari introdotte:

3 tipi di operazione che utilizzeremo:

- R_{ij} : scambio della riga i-esima di M con la riga j-esima di M
- $\alpha \cdot R_i$: moltiplica la riga i-esima di M per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$
- $R_i + \alpha \cdot R_j$: sommo alla riga i-esima di M α volte la riga j-esima di M

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS:

Dato $A\underline{x} = \underline{b}$ e formata $(A | \underline{b})$,

partiamo da $(A | \underline{b})$ ed andremo a trasformarla

in una matrice a scalini $(A' | \underline{b}')$,

usando le 3 operazioni elementari introdotte:

PERCHÈ?

- $A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\Longleftrightarrow$ $A'\underline{x} = \underline{b}'$ è risolubile
- Le soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$ (se esistono) sono le stesse di $A'\underline{x} = \underline{b}'$
- È più semplice calcolare soluzioni per $A'\underline{x} = \underline{b}'$

ESEMPI

ALTRI METODI DI RISOLUZIONE

TEOREMA Sia A una matrice quadrata $n \times n$.

Assumiamo che $\det(A) \neq 0$.

Allora $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $A\underline{x} = \underline{b}$ AMMETTE

UN' UNICA SOLUZIONE: $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$.

Come calcoliamo A^{-1}?

Chiamiamo $B = A^{-1}$. Dobbiamo dare una formula per le entrate b_{ij} di B. [B è quadrata $n \times n$!]

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(A_{ji})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$B = A^{-1} =$

RANGO

Data una matrice M $n \times m$ possiamo definire un altro invariante numerico di A, chiamato il RANGO di M, $rK(M)$

DEF IL RANGO di M é definito in 2 modi equivalenti :

- è il massimo $K \in \mathbb{N}$ t.c. M contiene una sottomatrice $K \times K$ A' con $\det(A') \neq 0$ e ogni sottomatrice quadrata di dimensione più grande di K ha $\det = 0$;
- il numero di scalini di una (ogni) riduzione a scalini M' di M.

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ DEL RANGO: A $m \times n$

- $0 \leq rk(A) \leq \min(m, n)$
- $rk(A) > 0 \iff A \neq \underline{0}$
- Se A è quadrata: $(m = n)$

$$rk\, A = n \iff \det(A) \neq 0$$

TEOREMA (ROUCHÉ - CAPELLI) Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare.

$A\underline{x} = \underline{b}$ è risolubile $\Longleftrightarrow$ $rk(A) = rk((A|\underline{b}))$