# MATEMATICA GENERALE

# LEZIONE 15

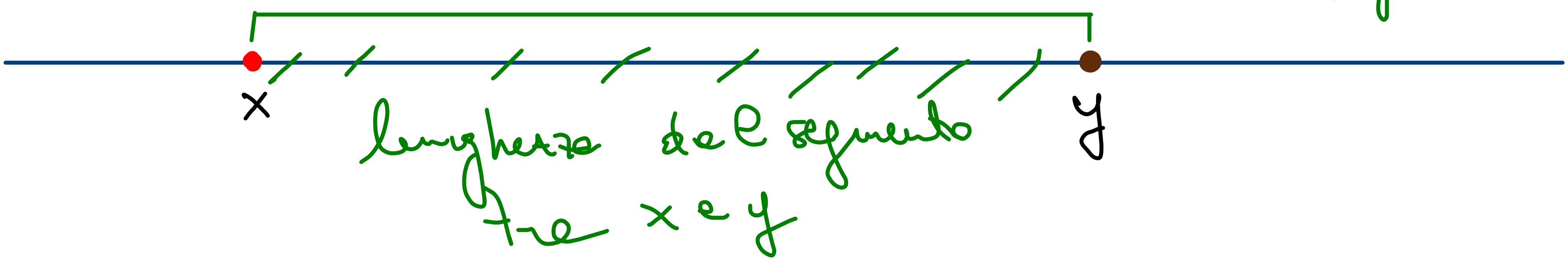
# DISTANZA

$x, y \in \mathbb{R}$

DISTANZA tra $x$ e $y$

$$\mathrm{dist}(x,y) := |x-y| = \mathrm{dist}(y,x)$$

$$= |y-x|$$



# INTORNI

$x_0 \in \mathbb{R}$ , $r > 0$

reale

INTORNO APERTO DI CENTRO $x_0$ E RAGGIO $r$ :  PALLA di centro $x_0$ e raggio $r$

$$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

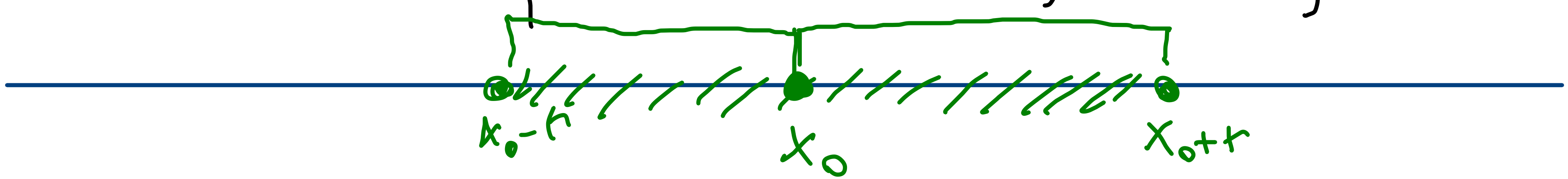
$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{dist}(x_0, x) < r\}$$

$$(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{dist}(x_0, x) < r\}$$

INTORNO CHIUSO DI CENTRO $x_0$ E RAGGIO $r$ :

$$\overline{B(x_0, r)} = [x_0 - r, x_0 + r]$$

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{dist}(x_0, x) \leq r\}$$



# INTORNI 2

Possiamo anche definire intorni per $\pm\infty$

**DEF** ① Un INTORNO APERTO di $+\infty$ è un intervallo (illimitato) della forma $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

①' Un INTORNO CHIUSO di $+\infty$ è un intervallo (illimitato) della forma $[a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

① Un INTORNO APERTO / CHIUSO di $-\infty$ è un intervallo (illimitato) della forma $(-\infty, b)$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, $b \in \mathbb{R}$

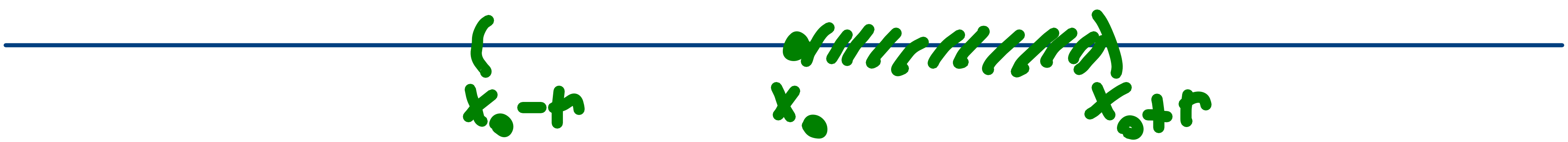
$(-\infty, b]$ $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

# INTORNI 3

$x_0 \in \mathbb{R}$ , $r > 0$

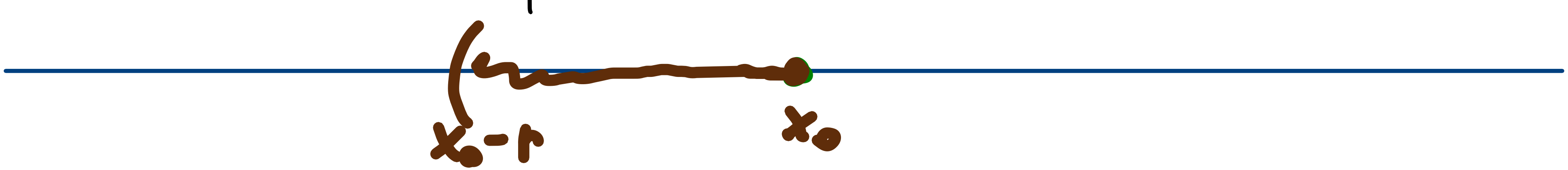
INTORNO DESTRO DI CENTRO $x_0$ E RAGGIO $r$ : $[x_0, x_0 + r)$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x_0 \le x < x_0 + r \}$$




INTORNO SINISTRO DI CENTRO $x_0$ E RAGGIO $r$ : $(x_0 - r, x_0]$

$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x \le x_0 \}$$



# RETTA ESTESA

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

NON TRATTEREMO $\pm\infty$ COME NUMERI

$\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ significa:
$$\begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell = +\infty \\ \ell = -\infty \end{cases}$$

# PUNTI DI ACCUMULAZIONE $\quad S \subseteq \mathbb{R}$

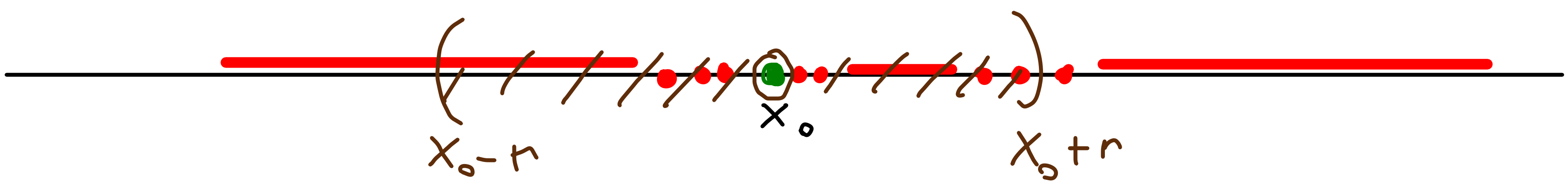
DEF Fissiamo $S \subseteq \mathbb{R}$.

① $x_0 \in \mathbb{R}$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per $S$

se per ogni intorno di $x_0$, $(x_0 - r, x_0 + r)$ $[r > 0]$

esiste (almeno) un punto $\bar{s} \in S$, $\bar{s} \neq x_0$ t.c. $\bar{s} \in (x_0 - r, x_0 + r)$

Fisso $r > 0$

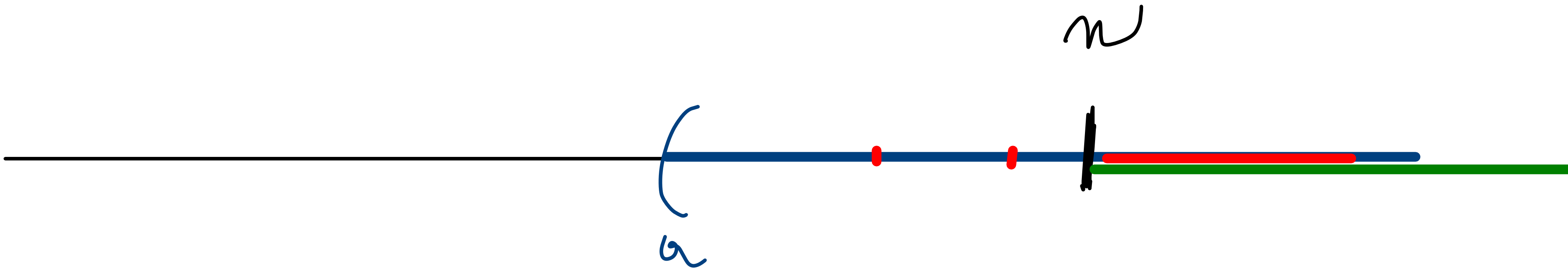


# PUNTI DI ACCUMULAZIONE $\quad S \subseteq \mathbb{R}$

**DEF** Fissiamo $S \subseteq \mathbb{R}$.

① $+\infty$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per $S$ se per ogni intorno di $+\infty$, $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$ esiste un punto $\underline{\underline{\bar{s} \in S}}$ t.c. $\bar{s} \in (a, +\infty)$

② $-\infty$ è un PUNTO DI ACCUMULAZIONE per $S$ se per ogni intorno di $-\infty$, $(-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}$ esiste un punto $\bar{s} \in S$ t.c. $\bar{s} \in (-\infty, b)$





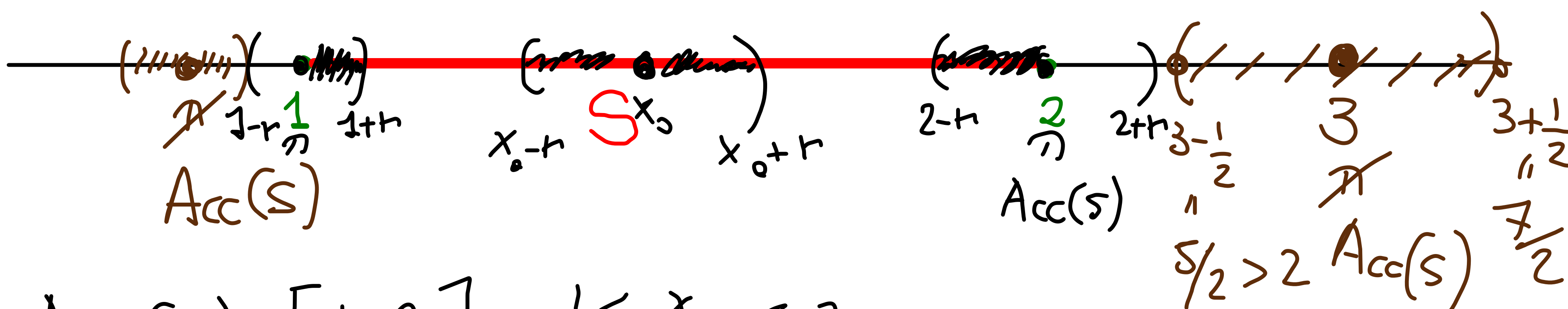
**Se $+\infty$ o $-\infty$ infiniti** sono pti di ACCUMUL.

per $S \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow S$ non è limitato

Sia $S \subseteq \mathbb{R}$.

**NOTAZIONE:** $\operatorname{Acc}(S) = \{ x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \text{ è un punto di accumulazione di } S \}$

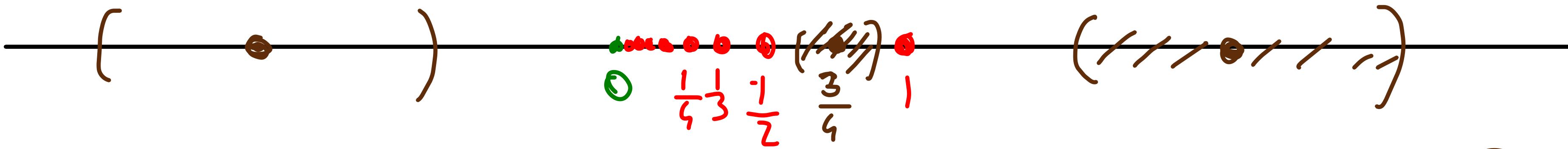
<u>ESEMPI</u> $S = (1, 2)$




$\operatorname{Acc}(S) = [1, 2]$ $\qquad 1 < x_0 < 2$, $x_0 \in \operatorname{Acc}(S)$

$\operatorname{Acc}((a, b)) = [a, b]$

$$S = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$




$$Acc(S) = 0 \qquad\qquad r = \frac{1}{8} \qquad\qquad \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}, \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) = \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

$\mathbb{R} \setminus (S \cup \{0\})$ non sono pti di Acc.

$$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1} < x_0 - r < x < x + r < \frac{1}{n}$$

# OSSERVAZIONI :

① non tutti i punti di $S$ sono necessariamente di accumulazione per $S$.

$$S = (1,2) \cup \{4\} \cup [5,+\infty) \qquad Acc(S) = [1,2] \cup [5,+\infty) \cup \{+\infty\}$$

② ci potrebbero essere punti di accumulazione di $S$ che non appartengono ad $S$.

$$S = (a,b) \qquad Acc(S) = [a,b]$$

Data una funzione $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ , $S \subseteq \mathbb{R}$

allora possiamo cercare di definire il limite di $f$

per tutti i punti che appartengono a $Acc(S)$.

Se $x_0 \in Acc(S)$, studiare l'esistenza di $\lim_{x \to x_0} f(x)$

vuol dire cercare di capire come si comporta la

funzione $f(x)$ quando ci restringiamo a guardarla

su intorni sempre più piccoli di $x_0$.

# LIMITE: DEFINIZIONE

$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad [D \subseteq E(f)]$

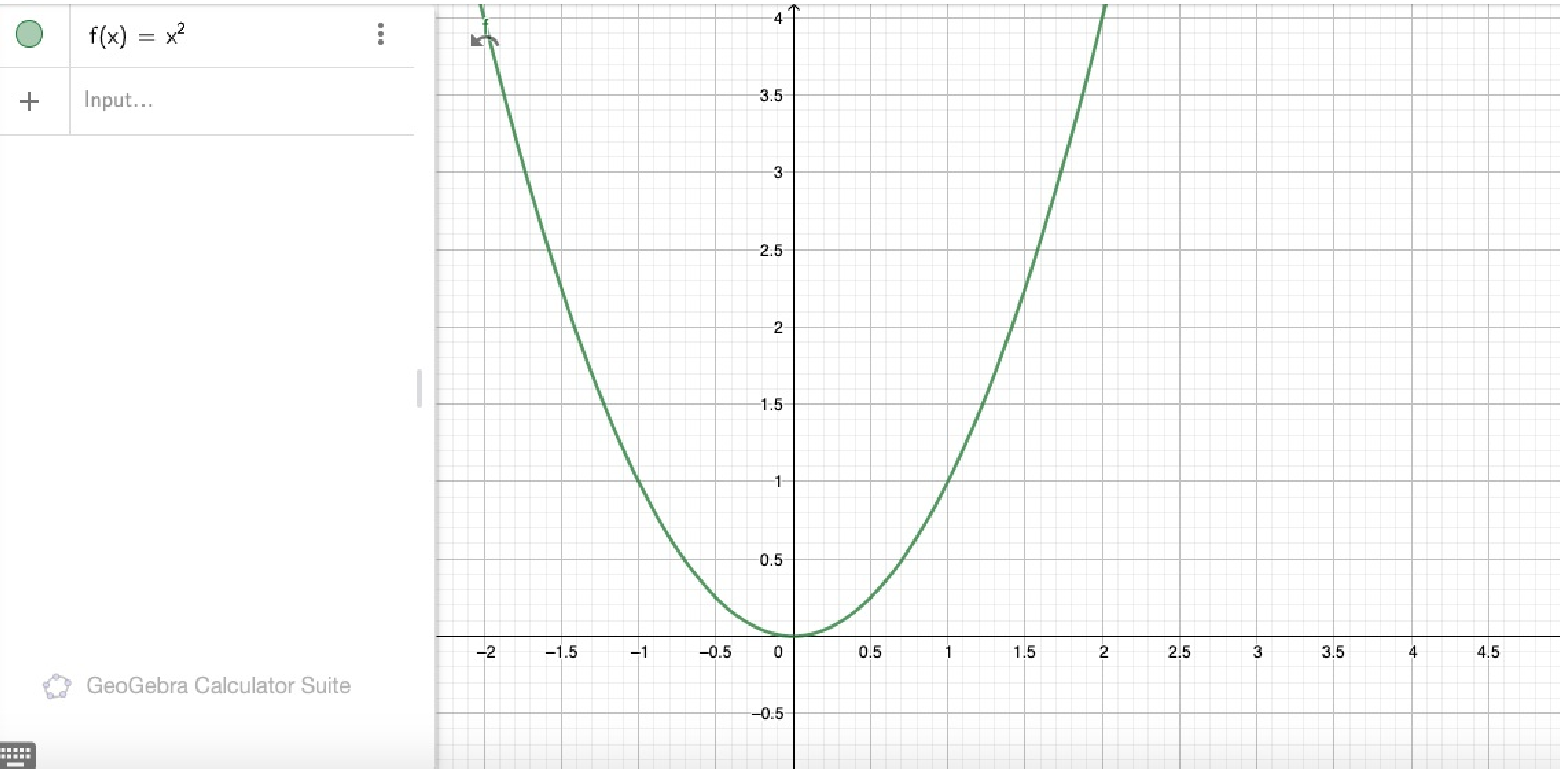
Sia $x_0 \in Acc(f)$

① Il limite di $f$ per $x$ tendente a $x_0$ in $D$

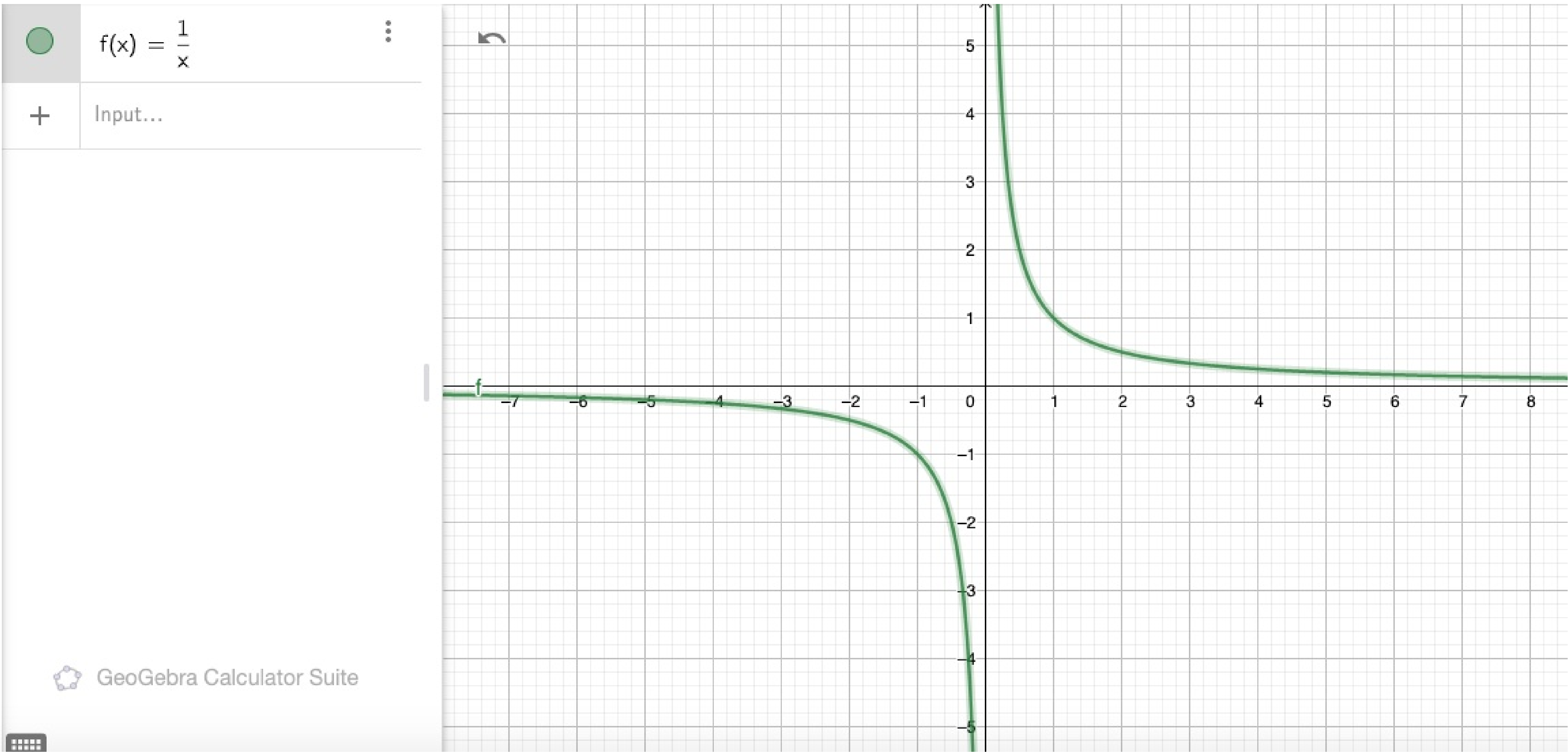
esiste e vale $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, se per ogni intorno $\mathcal{U}(\ell)$

di $\ell$, esiste un intorno $\mathcal{U}(x_0)$ di $x_0$ t.c.

$$\forall \underset{x \neq x_0}{x} \in D \cap \mathcal{U}(x_0), \; f(x) \in \mathcal{U}(\ell)$$



f(x) = x2
Input…
GeoGebra Calculator Suite
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5



$f(x) = \frac{1}{x}$
Input...
GeoGebra Calculator Suite
f

Proviamo a riscrivere la definizione di limite sostituendo "intorni" con gli intervalli corrispondenti.

# LIMITE: DEFINIZIONE

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad [D \subseteq E(f)]$

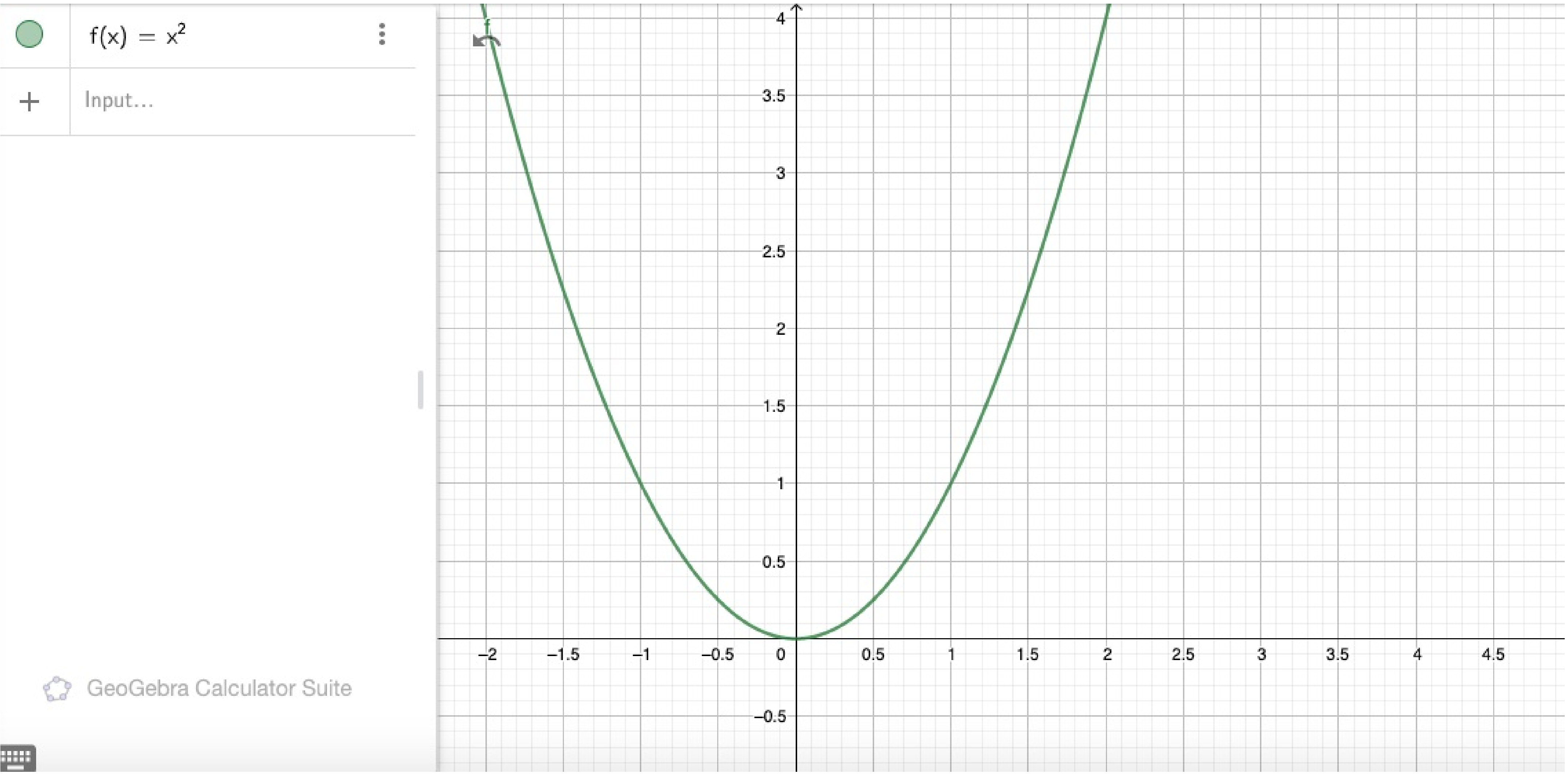
Sia $x_0 \in Acc(f)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

① Il limite di $f$ per $x$ tendente a $x_0$ in $D$

esiste e vale $\ell \in \mathbb{R}$, se $\forall \varepsilon > 0$,

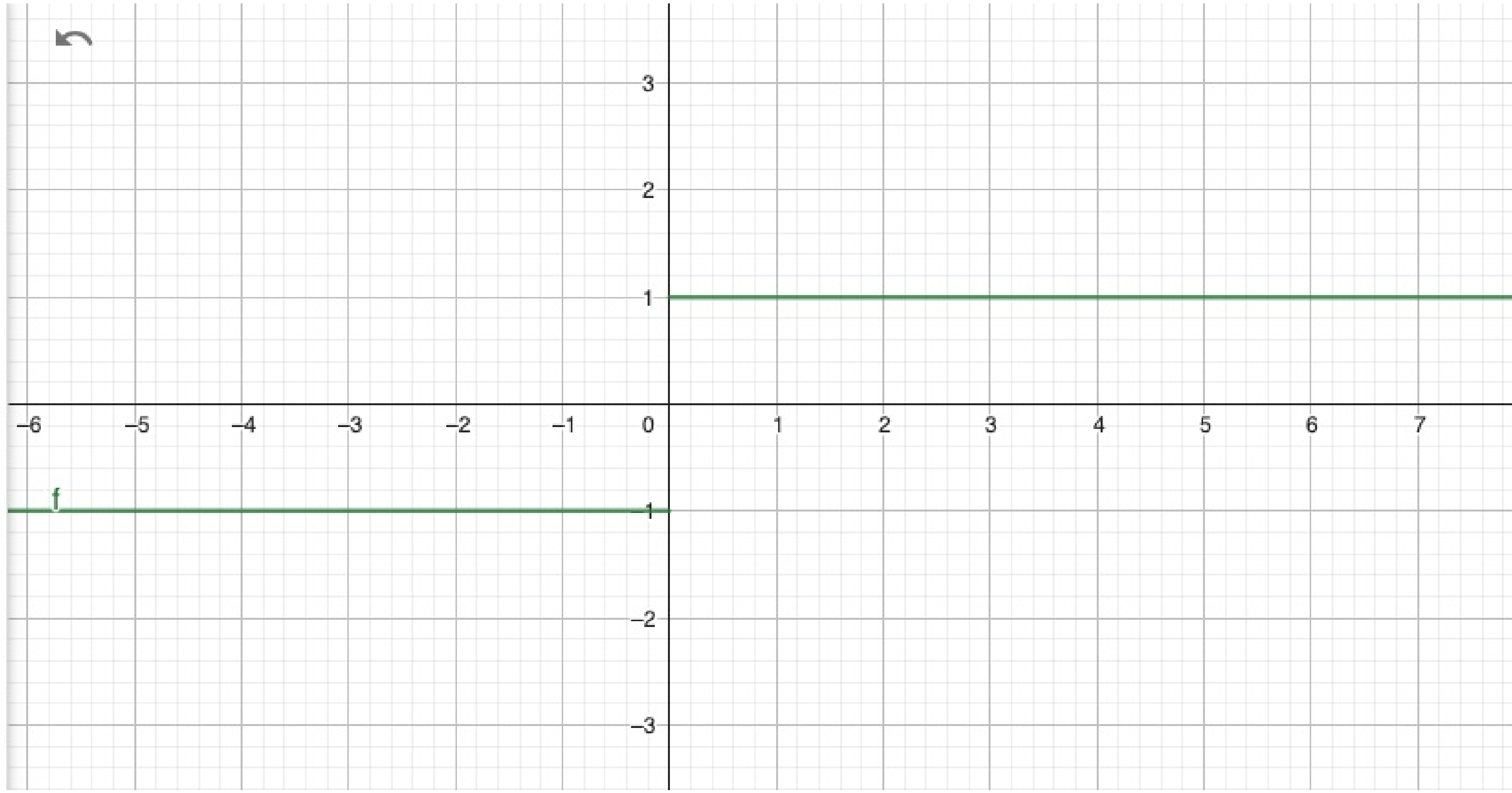
$\exists \delta > 0$ (che dipende dalla scelta di $\varepsilon$) t.c.

$$\forall \underset{x \neq x_0}{x \in D} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$


f(x) = x²
Input…
GeoGebra Calculator Suite
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

$f(x) = \frac{|x|}{x}$

\+ Input...



Proviamo a riscrivere la definizione di limite sostituendo "intorni" con gli intervalli corrispondenti.

# LIMITE : DEFINIZIONE

$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad [D \subseteq E(f)]$

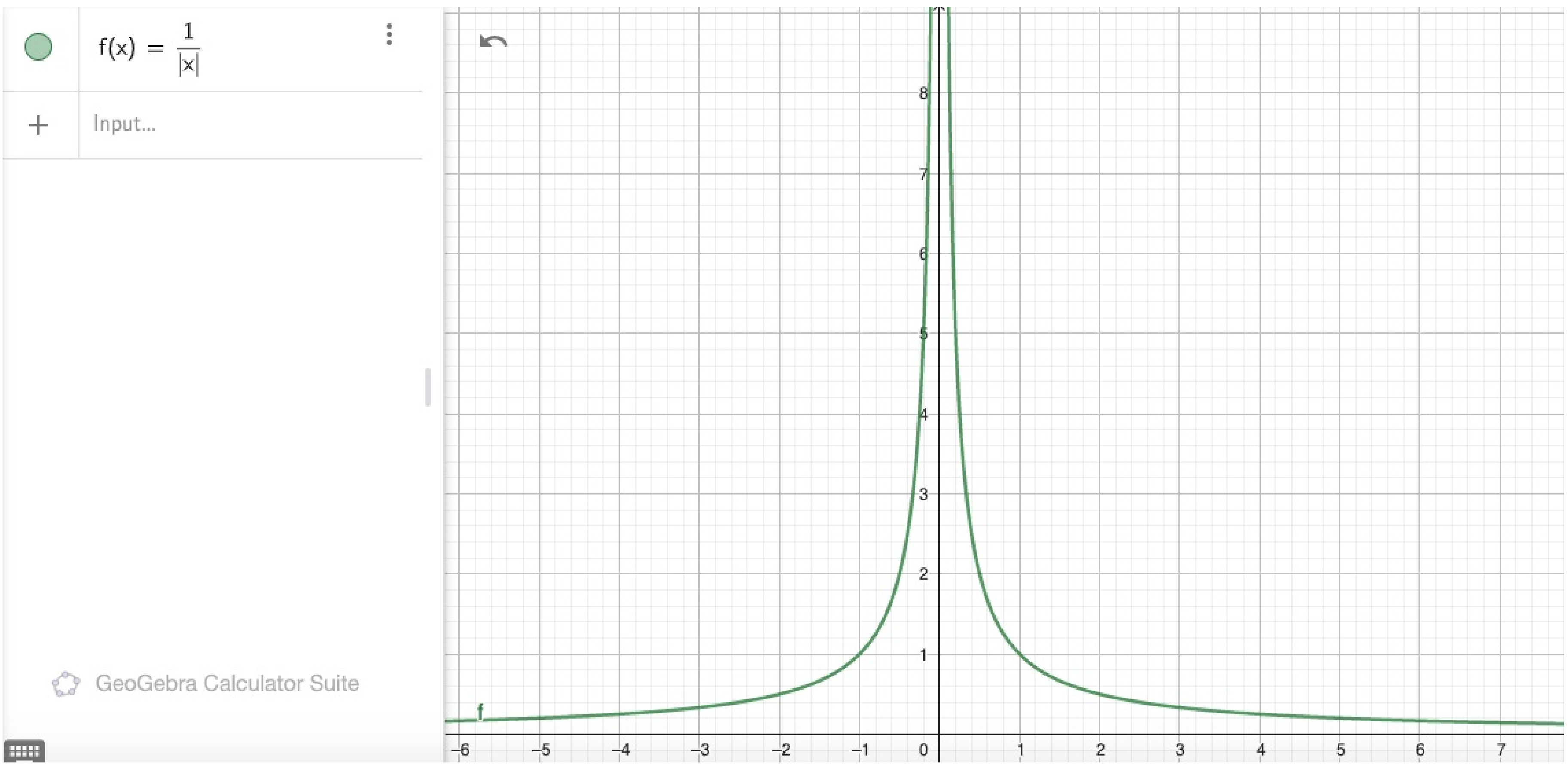
Sia $x_0 \in Acc(f)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

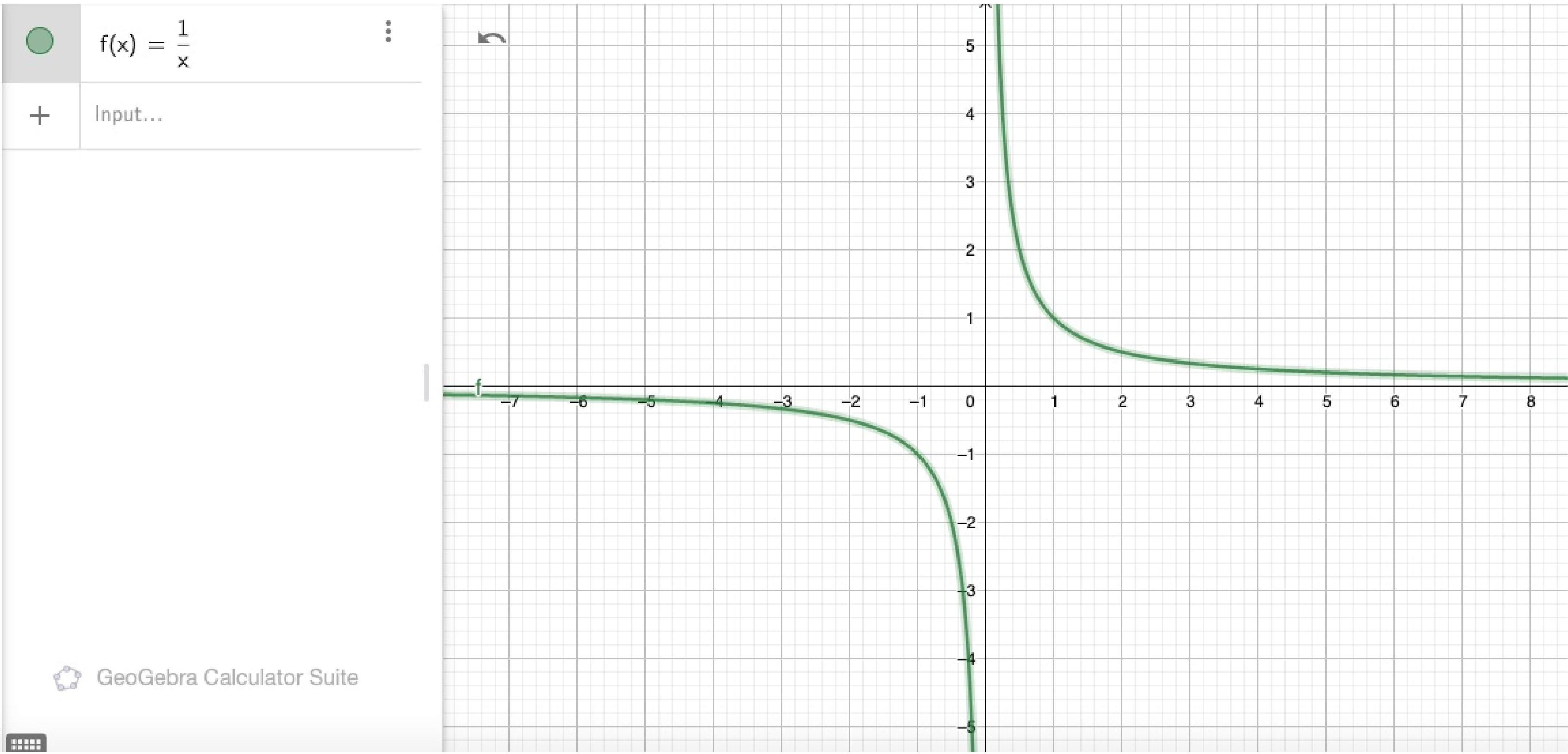
① Il limite di $f$ per $x$ tendente a $x_0$ in $D$

esiste e vale $+\infty$, se $\forall K > 0$,

$\exists \delta > 0$ (che dipende dalla scelta di $\varepsilon$) t.c.

$$\forall \underset{x \neq x_0}{x \in D} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \geq K$$


$f(x) = \frac{1}{|x|}$
Input...
GeoGebra Calculator Suite
f
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7



f(x) = 1/x
Input...
GeoGebra Calculator Suite
f
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5

Proviamo a riscrivere la definizione di limite sostituendo "intorni" con gli intervalli corrispondenti.

# LIMITE : DEFINIZIONE

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad [D \subseteq E(f)]$

Sia $x_0 \in Acc(f)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

① Il limite di $f$ per $x$ tendente a $x_0$ in $D$ esiste e vale $-\infty$, se $\forall K > 0$, $\exists\, \delta > 0$ (che dipende dalla scelta di $\varepsilon$) t.c.

$$\forall \underset{x \neq x_0}{x \in D} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \leq -K$$

# LIMITE: DEFINIZIONE

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $[D \subseteq E(f)]$

Sia $x_0 \in Acc(f)$, $x_0 = +\infty$

① Il limite di $f$ per $x$ tendente a $+\infty$ in $D$

esiste e vale $\ell \in \mathbb{R}$, se $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists K > 0$ (che dipende da $\varepsilon$) t.c.

$\forall x \in D \cap (K, +\infty) \Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

② Il limite di $f$ per $x$ tendente a $+\infty$ in $D$

esiste e vale $\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ se $\forall t > 0$

$\exists K > 0$ (che dipende da $\varepsilon$) t.c.

$\forall x \in D \cap (K, +\infty) \Rightarrow f(x) \in \begin{matrix} (t, +\infty) \\ (-\infty, -t) \end{matrix}$

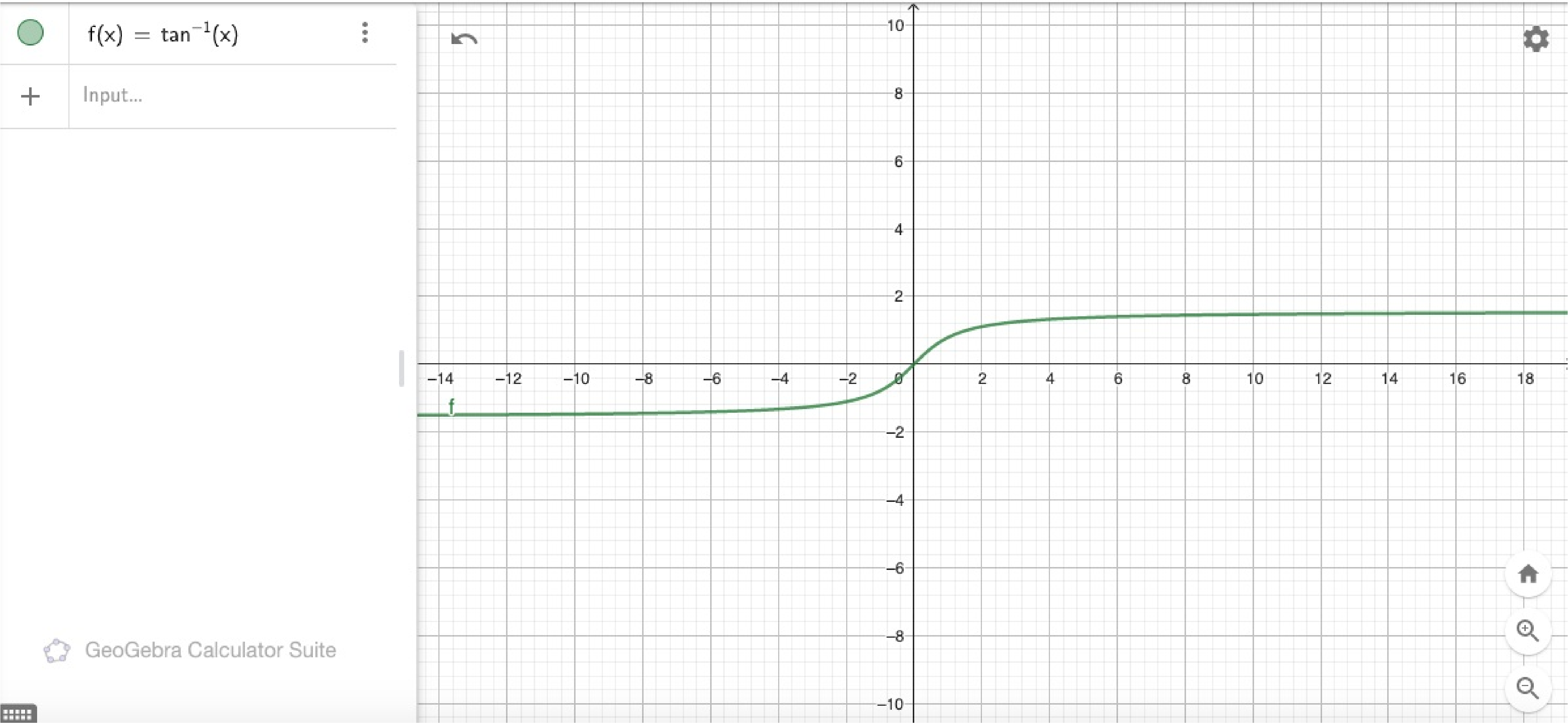
# LIMITE: DEFINIZIONE

$f: D \longrightarrow \mathbb{R} \quad [D \subseteq E(f)]$

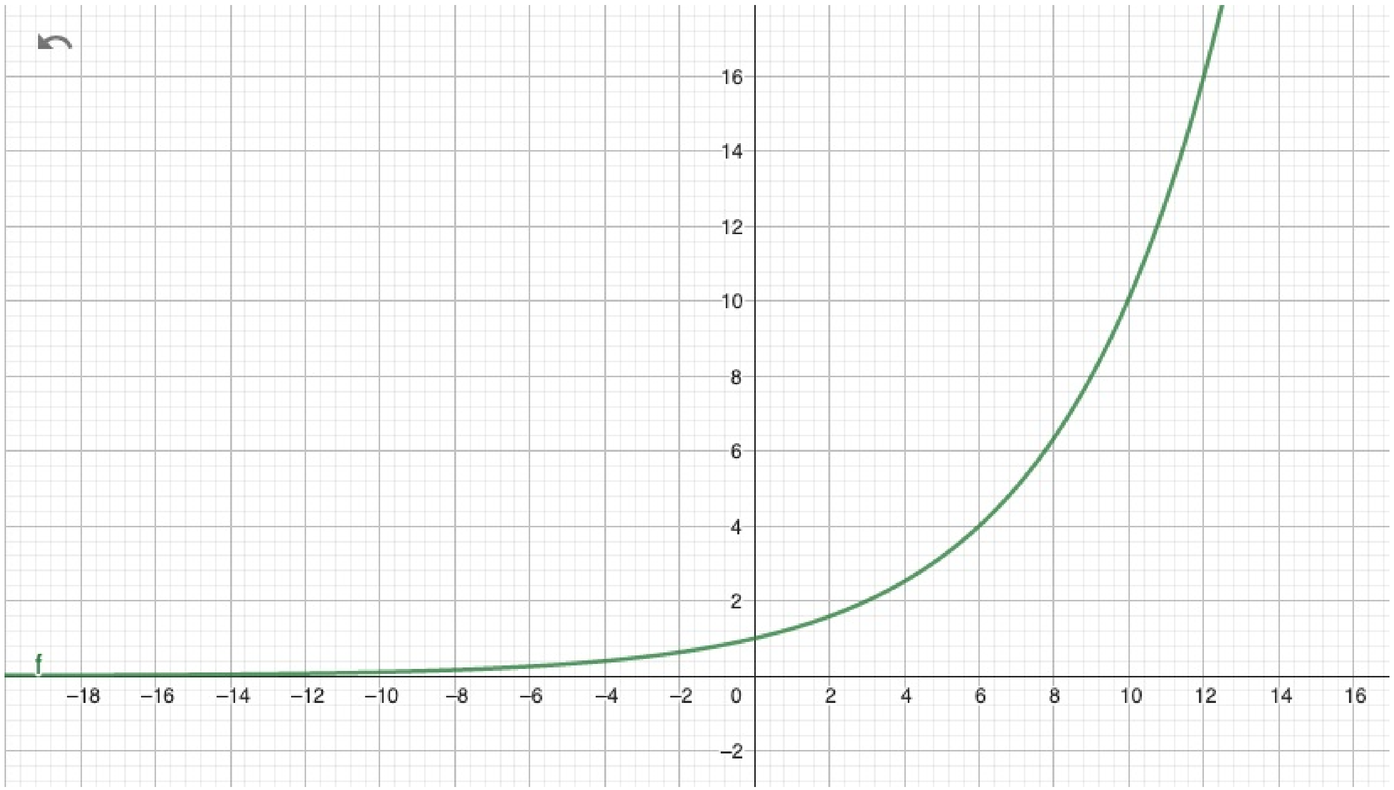
Sia $x_0 \in Acc(f)$

① Il limite di $f$ per $x$ tendente a $x_0$ in $D$ esiste e vale $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, se per ogni intorno $\mathcal{U}(\ell)$ di $\ell$, esiste un intorno $\mathcal{U}(x_0)$ di $x_0$ t.c.

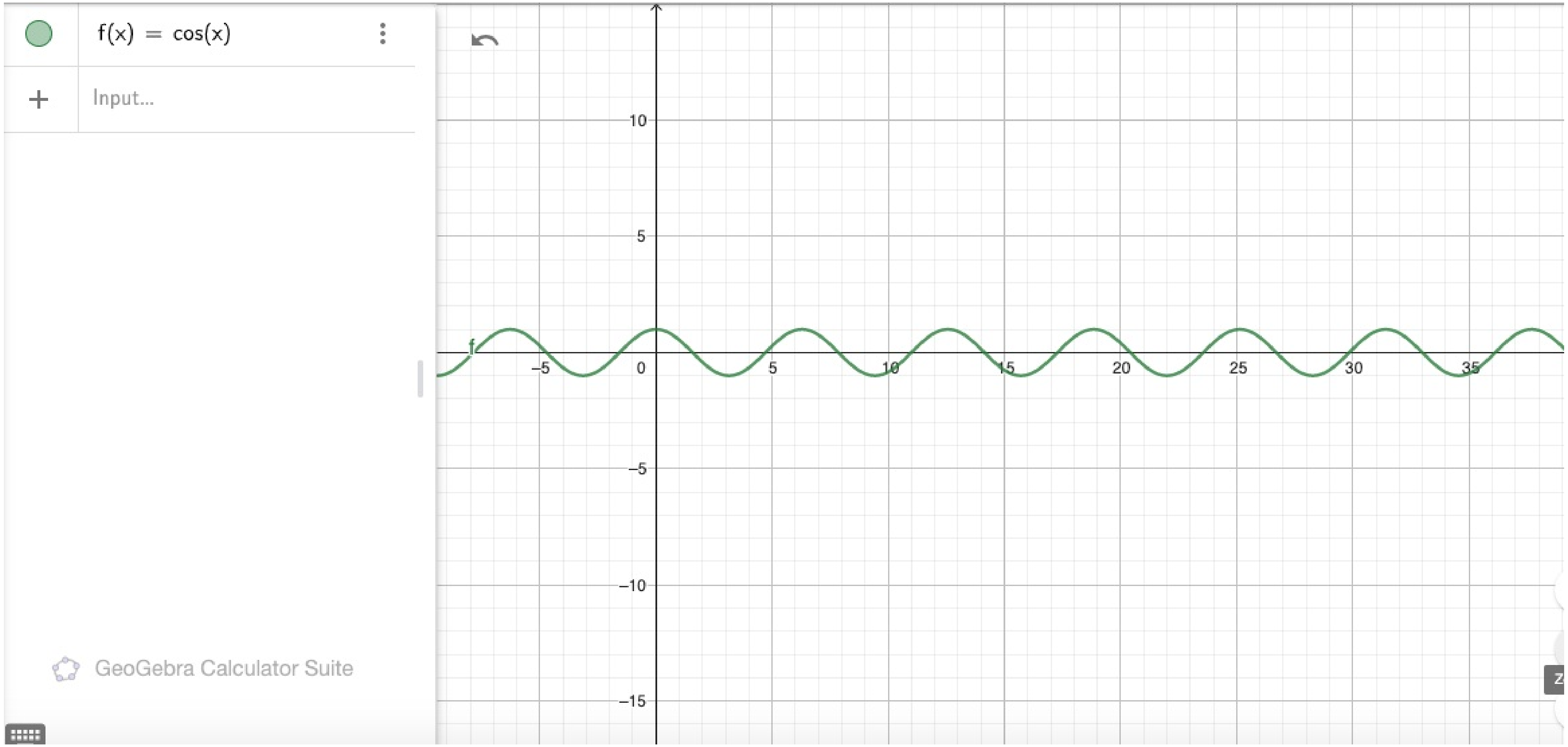
$$\forall x \in D \cap \mathcal{U}(x_0), \quad f(x) \in \mathcal{U}(\ell)$$



f(x) = tan⁻¹(x)
Input...
GeoGebra Calculator Suite
f
10
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−10
−14
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18



16
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−18
−16
−14
−12
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14
16
f


f(x) = cos(x)
Input...
GeoGebra Calculator Suite
10
5
–5
–10
–15
f
–5
0
5
10
15
20
25
30
35

# LIMITE: DEFINIZIONE

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad [D \subseteq E(f)]$

Sia $x_0 \in Acc(f)$, $x_0 = -\infty$

① Il limite di $f$ per $x$ tendente a $-\infty$ in $D$

esiste e vale $\ell \in \mathbb{R}$, se $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists K > 0$ (che dipende da $\varepsilon$) t.c.

$$\forall x \in D \cap (K, +\infty) \Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

② Il limite di $f$ per $x$ tendente a $-\infty$ in $D$

esiste e vale $\genfrac{}{}{0pt}{}{+\infty}{-\infty}$ se $\forall t > 0$

$\exists K > 0$ (che dipende da $\varepsilon$) t.c.

$$\forall x \in D \cap (K, +\infty) \Rightarrow f(x) \in \genfrac{}{}{0pt}{}{(t, +\infty)}{(-\infty, -t)}$$

# LIMITI DX e SX

# PROPRIETÀ FONDAMENTALE DEI LIMITI DX e SX

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e

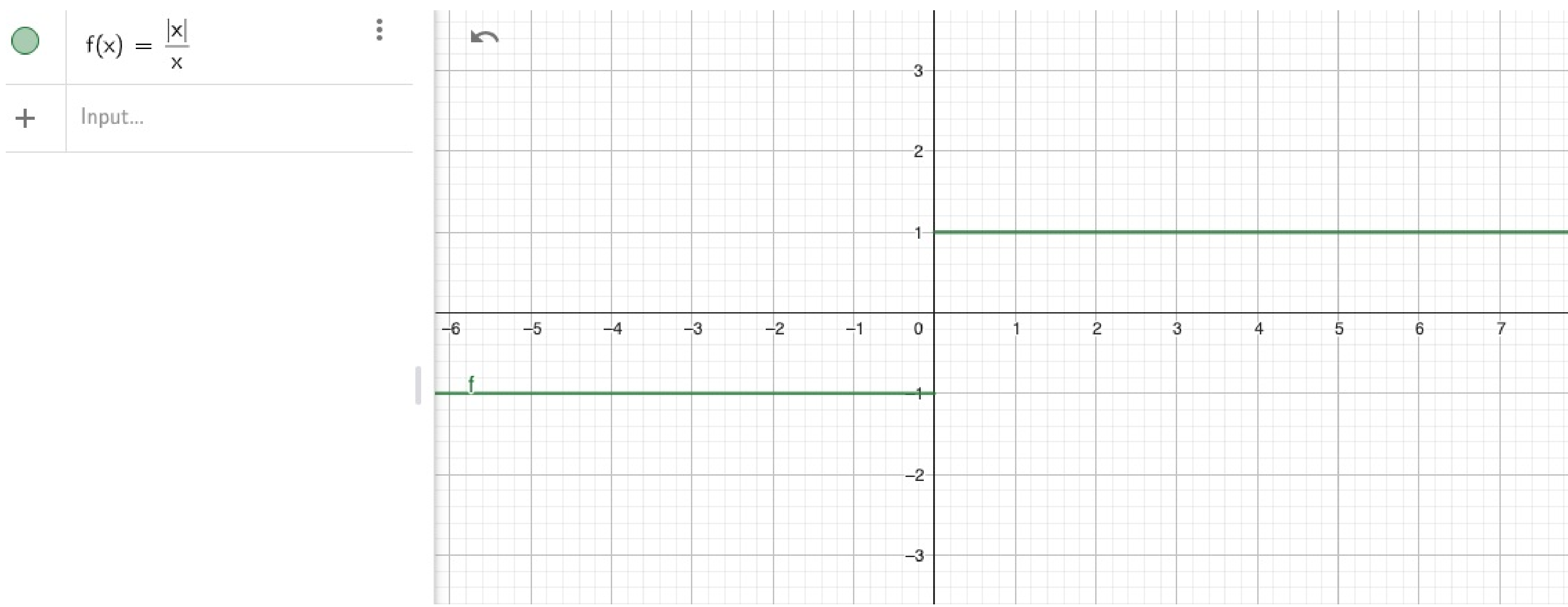
$x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $x_0 \in Acc(D)$

[sia da Dx che da Sx]

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste e vale $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$


f(x) = |x|/x
Input...
f
−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7
3
2
1
−1
−2
−3

# PRIME PROPRIETÀ

**TEOREMA** Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(D)$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste $\Longrightarrow$ è UNICO.

Lo stesso vale per limiti DX o SX.

# PRIME PROPRIETÀ

TEOREMA  Sia $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(D)$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste $\Longrightarrow$ è UNICO.

DIMOSTRAZIONE  Supponiamo per assurdo

che $\lim_{x_0 \to x_0} f(x) = \ell$  $\ell' = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

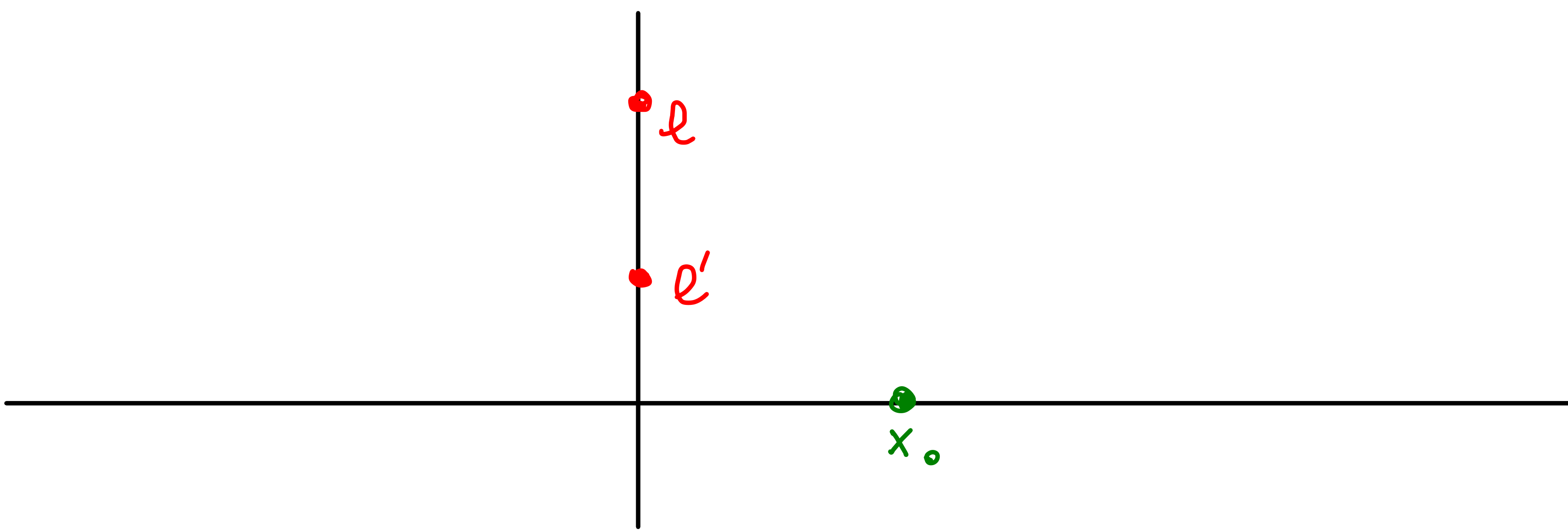
# PRIME PROPRIETÀ

**TEOREMA** Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(D)$.

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ esiste $\Longrightarrow$ è UNICO.

**DIMOSTRAZIONE** Supponiamo per assurdo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \underbrace{\ell \in \mathbb{R} \ni \ell'}_{\text{distinti}} = \lim_{x \to x_0} f(x).$$



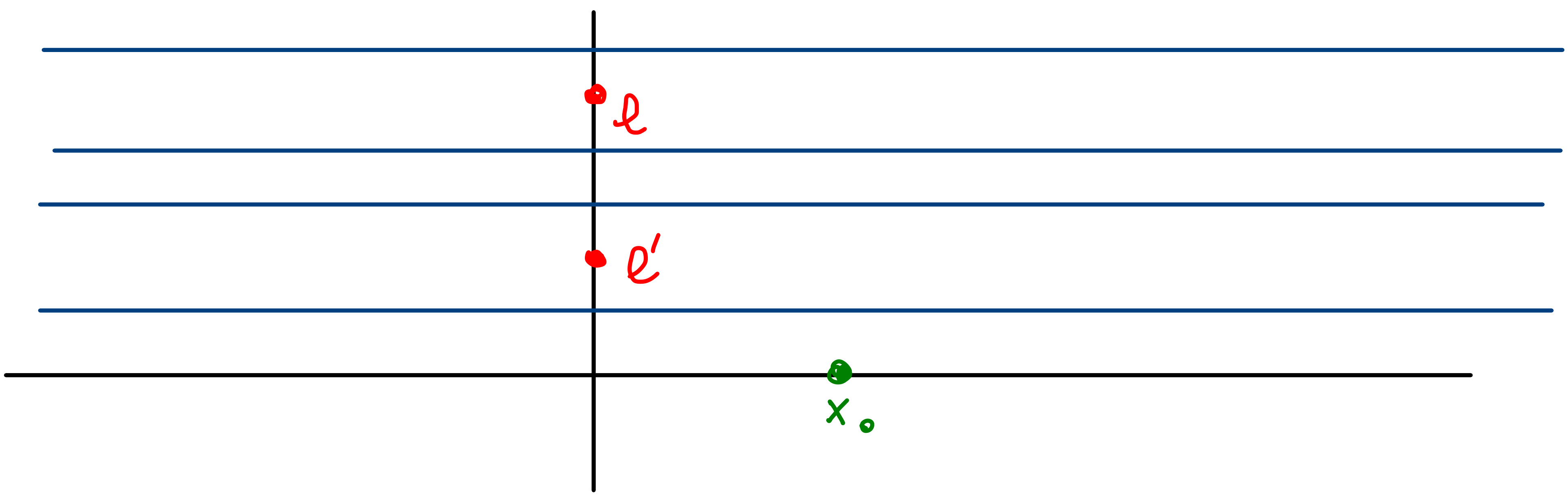
# PRIME PROPRIETÀ

**TEOREMA** Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in Acc(D)$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste $\Longrightarrow$ è UNICO.

**DIMOSTRAZIONE** Supponiamo per assurdo

che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \underbrace{\ell \in \mathbb{R} \ni \ell'}_{\text{distinti}} = \lim_{x \to x_0} f(x)$.



Sia $\varepsilon = \dfrac{\operatorname{dist}(\ell, \ell')}{3}$.

Allora $\exists$ $\delta_1$, $\delta_2$ t.c.

$$\forall \underset{x \neq 0}{x} \in D \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

E

$$\forall \underset{x \neq 0}{x} \in D \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \Rightarrow f(x) \in (\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon)$$

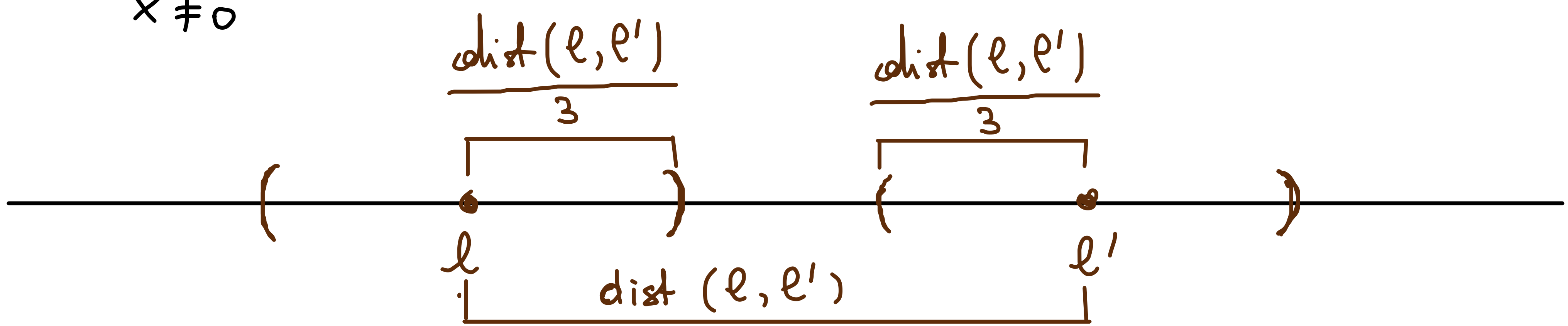
Sia $\varepsilon = \dfrac{\operatorname{dist}(\ell, \ell')}{3}$.

Allora $\exists\ \delta_1, \delta_2$ t.c.

$$\forall \underset{x \neq 0}{x} \in D \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \Rightarrow f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$$

E

$$\forall \underset{x \neq 0}{x} \in D \cap (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \Rightarrow f(x) \in (\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon)$$



**TEOREMA** Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione monotona, dove $I$ è un intervallo $[I=(a,b), I=(a,+\infty), I=(-\infty,b)]$

① Se $I=(a,b)$ (o ogni altra possibile combinazione di parentesi)

ed $f$ è CRESCENTE / DECRESCENTE allora:

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_I f$ (CRESCENTE) / $\sup_I f$ (DECRESCENTE)

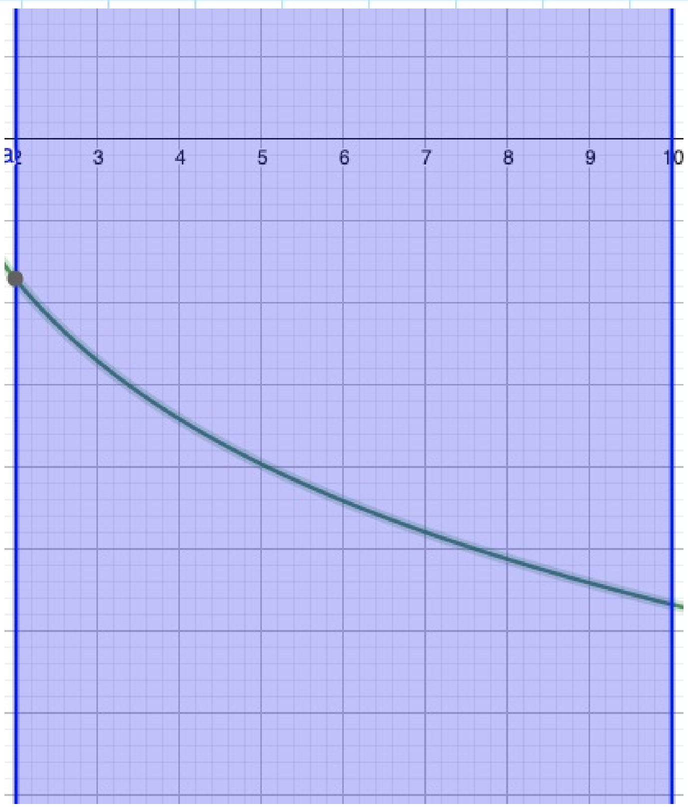
$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_I f$ (CRESCENTE) / $\inf_I f$ (DECRESCENTE)

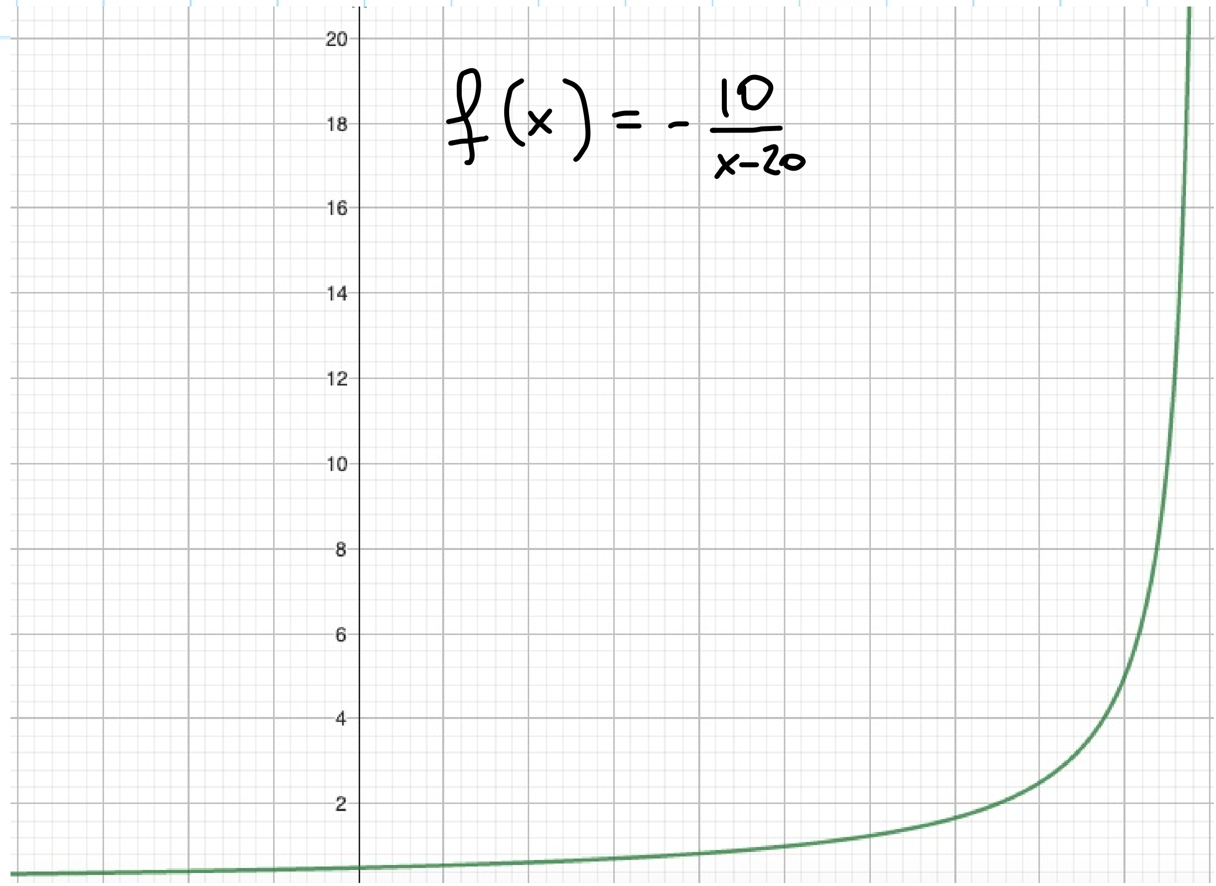
① Se $I=(a,b)$ (o ogni altra possibile combinazione di parentesi)

ed $f$ è CRESCENTE / DECRESCENTE allora:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_I f \quad / \quad \sup_I f$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_I f \quad / \quad \inf_I f$$



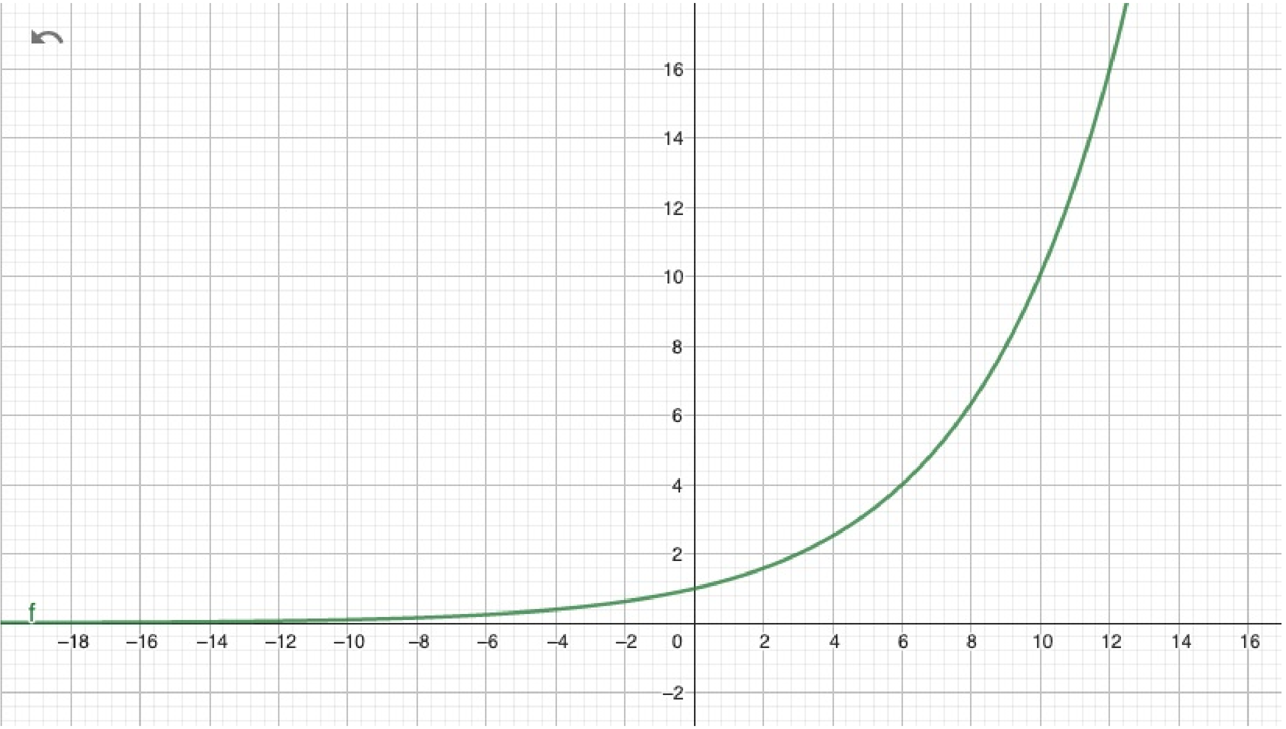



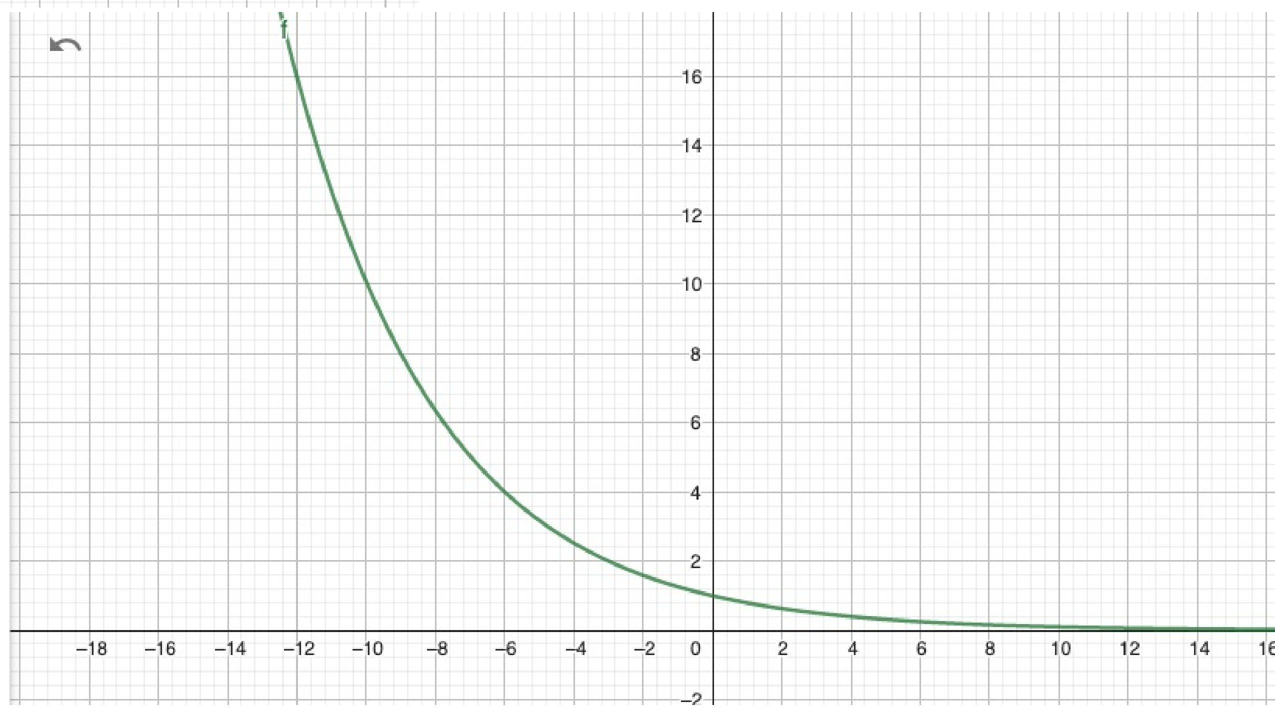
(2) Se $I = (a, +\infty)$ ed $f$ è CRESCENTE / DECRESCENTE allora

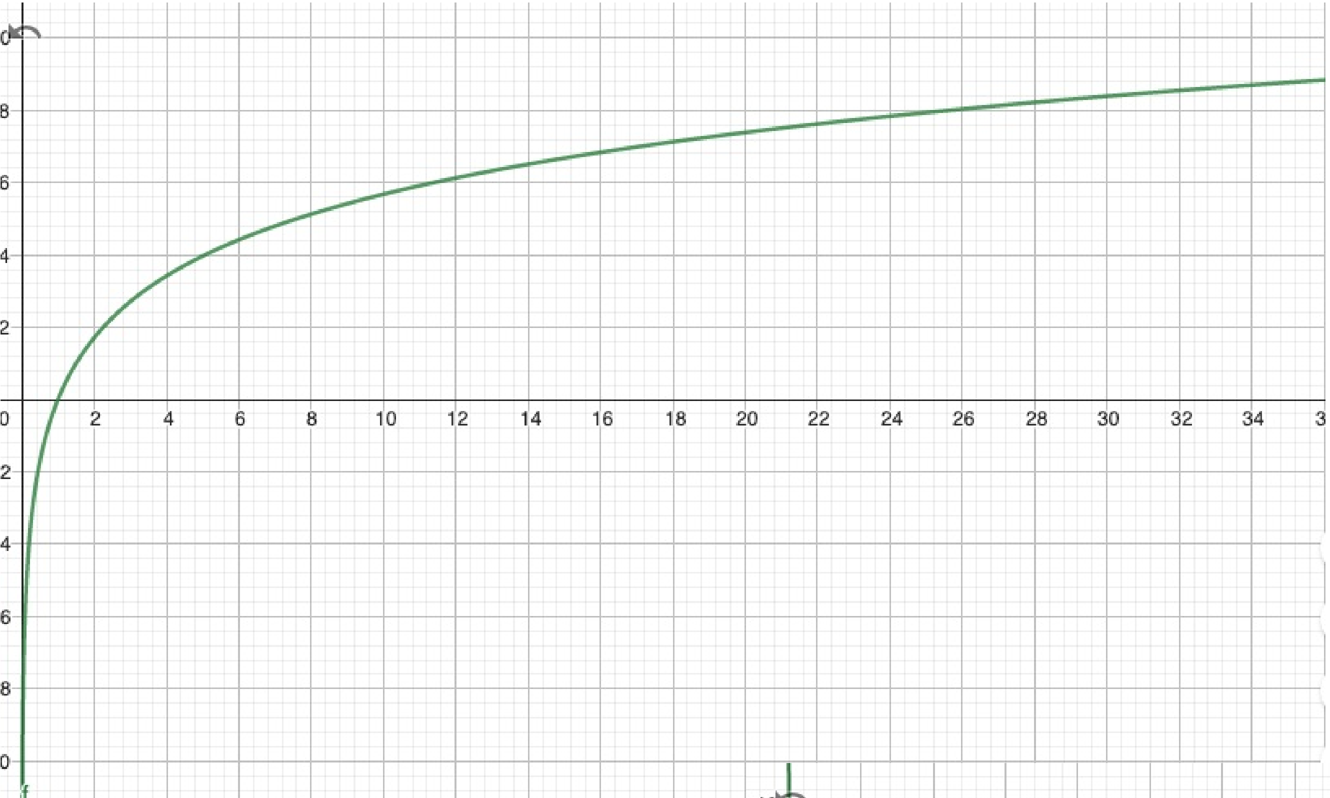
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \begin{array}{l} \inf_I f \\ \sup_I f \end{array} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{array}{l} \sup_I f \\ \inf_I f \end{array}$$

(3) Se $I = (-\infty, b)$ ed $f$ è CRESCENTE / DECRESCENTE allora

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \begin{array}{l} \sup_I f \\ \inf_I f \end{array} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{array}{l} \inf_I f \\ \sup_I f \end{array}$$


f
16
14
12
10
8
6
4
2
−2
−18 −16 −14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14 16


f
16
14
12
10
8
6
4
2
−2
−18 −16 −14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14 16


0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
f


10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
−2
−4
−6
−8
−10