

# Orientamento Geometrico, A.A. 2024-2025

## *Corso di Laurea Magistrale in Matematica*

Dipartimento di Matematica “F. Enriques”



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

15 maggio 2024

# Perché la geometria/cos'è la geometria?

## Idea

- Non **la** geometria ma **le** geometrie (strumenti diversi=geometrie diverse);
- Partendo da uno spazio topologico e, raffinandolo con ulteriori strutture, possiamo introdurre nuovi oggetti geometrici, che vogliamo studiare.

# Perché la geometria/cos'è la geometria?

## Idea

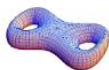
- Non **la** geometria ma **le** geometrie (strumenti diversi=geometrie diverse);
- Partendo da uno spazio topologico e, raffinandolo con ulteriori strutture, possiamo introdurre nuovi oggetti geometrici, che vogliamo studiare.

## Le domande fondamentali

- ① Cos'è un oggetto geometrico?
- ② Cos'è una proprietà geometrica?
- ③ Come identificarle e poi studiarle?

# Cos'è un oggetto geometrico?

Si parte da uno spazio topologico che richiediamo possenga una struttura locale speciale. Tale struttura locale caratterizzerà la nostra geometria.

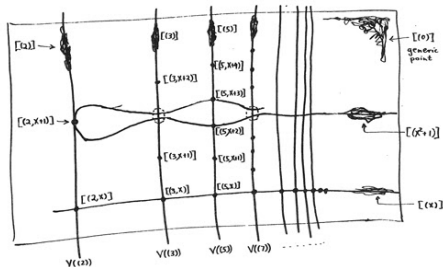


## Cos'è un oggetto geometrico?

Si parte da uno spazio topologico che richiediamo possenga una struttura locale speciale. Tale struttura locale caratterizzerà la nostra geometria.



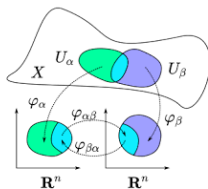
**Localmente**, possiamo richiedere varie strutture:



- aperti di  $\mathbb{R}^n$  (con metrica);
- aperti di  $\mathbb{C}^n$  (con struttura olomorfa e metrica);
- un insieme di ideali primi in un anello commutativo (con un'opportuna topologia).

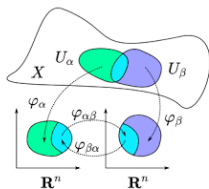
# Cos'è un oggetto geometrico?, II

... ma l'osservazione cruciale è che dal locale dobbiamo passare al **globale**:



# Cos'è un oggetto geometrico?, II

... ma l'osservazione cruciale è che dal locale dobbiamo passare al **globale**:



Cercheremo di capire come trovare invarianti/proprietà della nostra struttura,

Se abbiamo, ad esempio, che (ristretta all'intersezione)

- $\varphi_{\mathcal{M},\beta} \circ \varphi_{\mathcal{M},\alpha}^{-1}$  omeo  $\implies$  var. topologica;
- $\varphi_{\mathcal{M},\beta} \circ \varphi_{\mathcal{M},\alpha}^{-1}$  diffeo  $\implies$  var. differenziabile;
- $\varphi_{\mathcal{M},\beta} \circ \varphi_{\mathcal{M},\alpha}^{-1}$  biolomorfismo  $\implies$  var. complessa;
- fascio strutturale  $\implies$  schema.

## Cos'è un oggetto geometrico?, III

...ma l'osservazione cruciale è che dal locale dobbiamo passare al **globale**.



# Cos'è un oggetto geometrico?, III

...ma l'osservazione cruciale è che dal locale dobbiamo passare al **globale**.

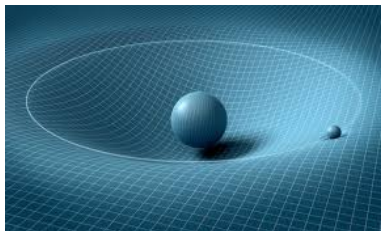
Cercheremo di capire come trovare invarianti/proprietà delle nostre strutture **globali** (per caratterizzare e classificare i vari oggetti della geometria che abbiamo deciso di studiare), una volta imposta la struttura locale.

- per una varietà topologica,  $\pi_n(X)$ ;
- per una varietà differenziabile,  $H_{dR}^*(X)$ ;
- per una varietà complessa,  $H_{dR}^{p,q}(X, \mathbb{C})$ ;
- per una varietà algebrica,  $H_{dR}^*(X, \mathcal{F})$ .

# Relatività e geoemetria

## La nuova intuizione di Einstein

La geometria è intrinsecamente legata anche alla realtà fisica:  
la gravità è la curvatura dello spazio-tempo.

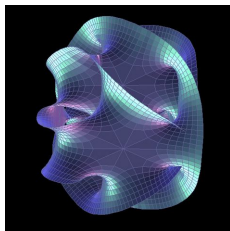


Dobbiamo quindi necessariamente capire/studiare la struttura differenziale e metrica dello spazio-tempo.

# Varietà di Calabi–Yau e stringhe

## Teoria delle stringhe

Per conciliare la gravità con le altre forze fondamentali occorre una nuova geometria.

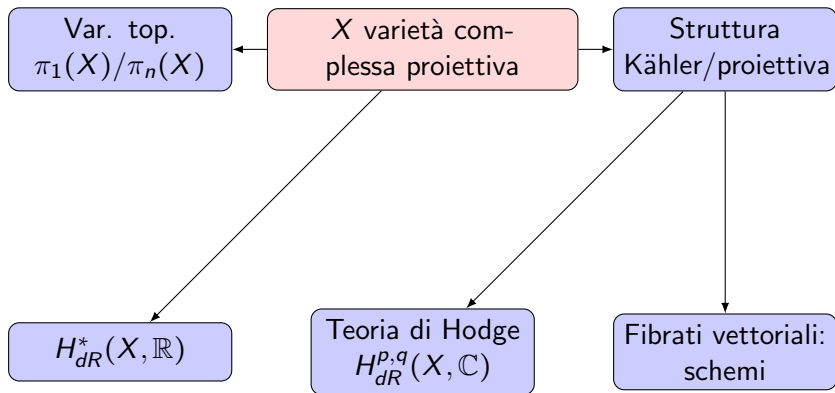


**Varietà di Calabi-Yau:** varietà complesse che vivono in spazi proiettivi con speciali proprietà metriche.

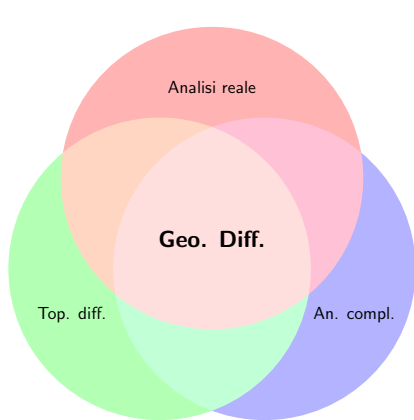
Servono:  $4 + 6 = 10$  dimensioni reali (le 6 dimensioni reali sono in realtà 3 complesse).

# Come studio proprietà geometriche?

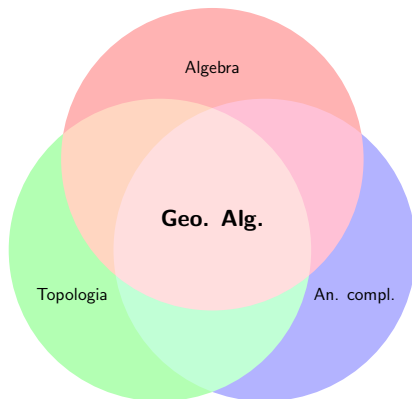
Ad una varietà possiamo associare invarianti algebrici più facili da calcolare:



# Strumenti diversi=geometrie diverse



Orientamento geo. diff.



Orientamento geo. algebrica  
(complessa)

# Primo semestre

- Geometria Algebrica Proiettiva
- Geometria degli Schemi
- Geometria Differenziale
- Topologia algebrica
- Varietà complesse
- Geometria Superiore 2

# Secondo semestre

- Geometria Complessa
- Geometria Riemaniana
- Geometria Superiore 1
- Gruppi di Lie
- Superfici algebriche
- Topologia differenziale

# Corsi da tenere in considerazione

- Geometria 5 (mutuato dalla triennale)
- Algebra commutativa
- Teoria delle Categorie
- Analisi complessa
- Analisi reale
- Dall'orientamento analitico: equazioni alle derivate parziali, elementi di analisi funzionale.



# Orientamento differenziale: una proposta

- Geometria Differenziale;
- Geometria Riemaniana;
- Gruppi di Lie;
- Topologia algebrica;
- Topologia differenziale.

# Orientamento differenziale: una proposta

- Geometria Differenziale;
- Geometria Riemaniana;
- Gruppi di Lie;
- Topologia algebrica;
- Topologia differenziale.

A cui affiancare:

- Analisi reale e complessa;
- Equazioni alle derivate parziali, elementi di analisi funzionale.

# Orientamento algebrico: una proposta

Corsi di natura generale:

- Geometria Algebrica Proiettiva;
- Geometria degli Schemi;
- Geometria Superiore 1;
- Varietà complesse;
- Topologia algebrica;
- Geometria Superiore 2.

# Orientamento algebrico: una proposta

Corsi di natura generale:

- Geometria Algebrica Proiettiva;
- Geometria degli Schemi;
- Geometria Superiore 1;
- Varietà complesse;
- Topologia algebrica;
- Geometria Superiore 2.

Corsi che studiano/classificano classi di esempi:

- Geometria complessa (il caso delle curve);
- Superfici Algebriche (il caso delle superfici).

# Orientamento algebrico: una proposta

Corsi di natura generale:

- Geometria Algebrica Proiettiva;
- Geometria degli Schemi;
- Geometria Superiore 1;
- Varietà complesse;
- Topologia algebrica;
- Geometria Superiore 2.

Corsi che studiano/classificano classi di esempi:

- Geometria complessa (il caso delle curve);
- Superfici Algebriche (il caso delle superfici).

A cui affiancare:

- Analisi complessa;
- Algebra commutativa.

# Oltre i corsi

- Algant Pizza Seminar;
- Seminario di geometria algebrica;
- Seminario di geometria aritmetica;
- Gruppi di lavoro organizzati ogni semestre dai diversi gruppi di ricerca;
- Interazione diretta coi ricercatori del dipartimento (esplorare nuovi argomenti, avviamento alla ricerca);
- Preparazione della tesi di laurea.