van Emde Boas Trees

光吉　健汰

北海道大学工学部 情報エレクトロニクス学科 情報理工学コース 4 年
情報知識ネットワーク研究室

June 12, 2019

Contents

1. 自己紹介
2. van Emde Boas tree とは
3. binary-tree

Contents

1. 自己紹介
2. van Emde Boas tree とは
3. binary-tree

こんにちは

Contents

1. 自己紹介
2. van Emde Boas tree とは
3. binary-tree

van Emde Boas tree とは (1/2)

van Emde Boas tree (以下 vEB 木) は動的集合を扱うデータ構造

動的集合

動的集合とは, 集合に対して後述の各種操作が行えるようなデータ構造

- 今回扱う要素は非負整数とする
- vEB 木が保持しうる要素の集合を全体集合 U とし, その大きさを u とする
- vEB 木が現在保持している集合を V とし, その大きさを n とする

van Emde Boas tree とは (2/2)

van Emde Boas tree (以下 vEB 木) は動的集合を扱うデータ構造

操作

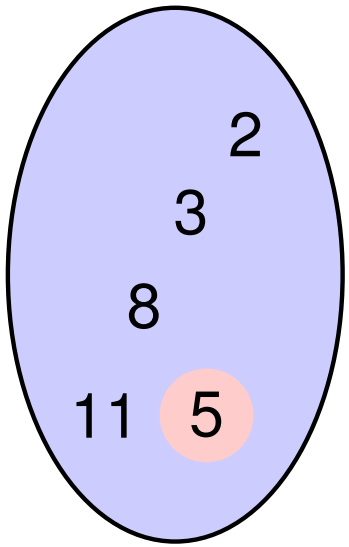
$\textsc{Member}(V, x)$	V に x が存在するかを返す
$\textsc{Min}(V)$	V の要素の最小値を返す
$\textsc{Max}(V)$	V の要素の最大値を返す
$\textsc{Successor}(V, x)$	V の x より大きい最小の要素を返す
$\textsc{Predecessor}(V, x)$	V の x より小さい最大の要素を返す
$\textsc{Insert}(V, x)$	V に x を挿入する
$\textsc{Delete}(V, x)$	V から x を削除する

これらの操作が最悪時間計算量 $O(\log \log u)$ で実行可能

操作 MEMBER(V, x)

- MEMBER(V, x) は, x が集合に存在するかを真偽値で返す.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



- MEMBER$(V, 5)$ = TRUE
- MEMBER$(V, 6)$ = FALSE

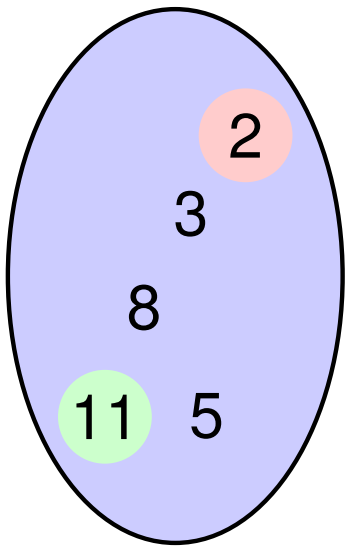
各関数の引数

関数に渡す引数は要素として取りうる値のみとする

操作 Min(V), Max(V)

- Min(V) は, 集合の要素の最小値を返す.
- Max(V) は, 集合の要素の最大値を返す.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

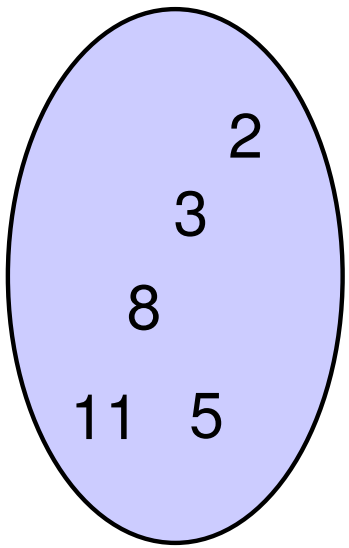


- Min(V) $= 2$
- Max(V) $= 11$

操作 Successor(V, x), Predecessor(V, x)

- Successor(V, x) は, 集合の要素から x より大きい最小の値を返す.
- Predecessor(V, x) は, 集合の要素から x より小さい最大の値を返す.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



- Successor($V, 2$) $= 3$
- Predecessor($V, 7$) $= 5$

操作 INSERT(V, x)

- INSERT(V, x) は, 集合に x を挿入する.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

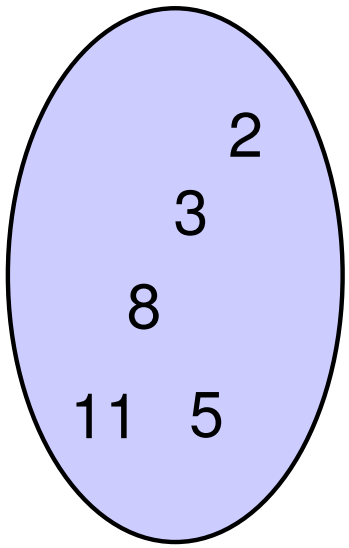
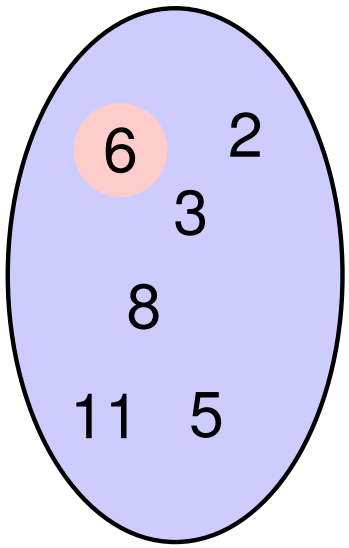


Figure: $V = \{2, 3, 5, \mathbf{6}, 8, 11\}$



操作 DELETE(V, x)

- DELETE(V, x) は, 集合 V から x を削除する.

Figure: $V = \{2, 3, 5, \mathbf{6}, 8, 11\}$

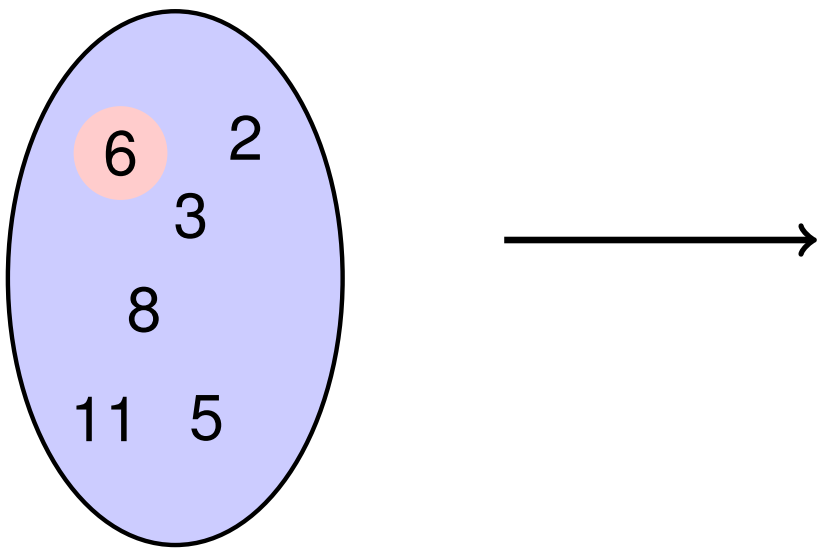
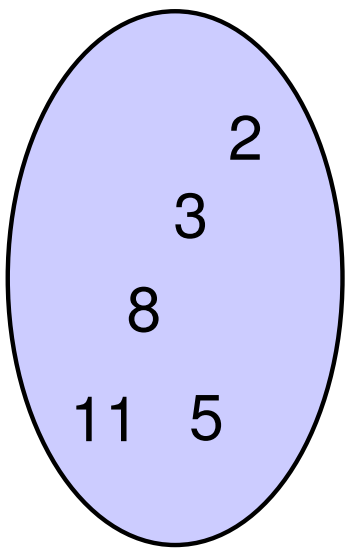


Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



Contents

1. 自己紹介
2. van Emde Boas tree とは
3. binary-tree

直接アドレス法 (1/2)

空間計算量 $O(u)$ で動的集合を保持する手段として, 直接アドレス法を考える.

直接アドレス法

要素の値を配列の添字として利用し, データを保持するテクニック

今回考えているデータ構造では付属データは持たないので,
各配列の要素には要素を保持しているかを bit で格納する.

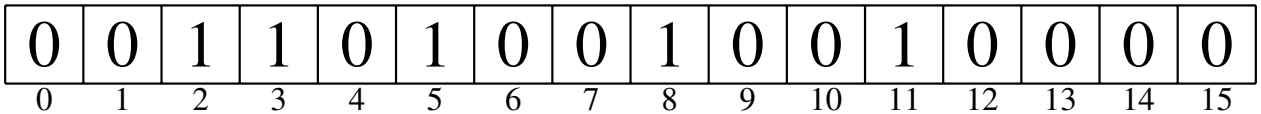


Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

直接アドレス法 (2/2)

空間計算量 $O(u)$ で動的集合を保持する手段として, 直接アドレス法を考える.

- MEMBER(V, x), INSERT(V, x), DELETE(V, x) の処理は, 配列のランダムアクセスが定数時間であるので, 時間計算量 $O(1)$.
- SUCCESSOR(V, x) の処理は, x の次の値から bit が立っている要素まで
  最悪 $\Theta(u)$ 回探索する必要があるので, 時間計算量 $\Theta(u)$.
  - PREDECESSOR(V, x), MIN(V), MAX(V) も同様の処理を行うため, 時間計算量 $\Theta(u)$.

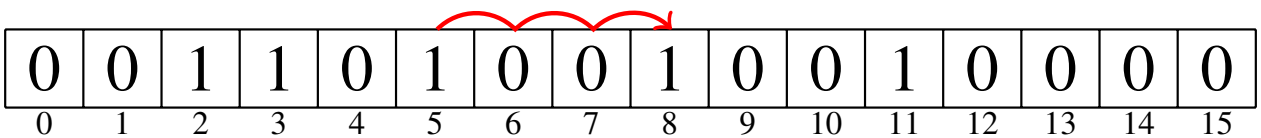


Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 (1/2)

$Successor(V, x)$ で必要な探索回数を小さくするために,
配列の各要素を葉とした二分木構造を考える.

二分木

二分木とは, 葉ではない頂点の子が常に 2 個であるような木

- 木 閉路を持たない, 連結なグラフ
- 根 木の頂点のうちの 1 つに定義する
- 子 ある頂点について, 隣接する頂点のうち根から遠いもの
- 親 ある頂点について, 隣接する頂点のうち根に近いもの
- 葉 木の頂点のうち, 子を持たないもの

二分木構造 (2/2)

$Successor(V, x)$ で必要な探索回数を小さくするために,
配列の各要素を葉とした二分木構造を考える.

- 葉ではない各頂点には, 子の値の論理和を格納する.
- ある頂点の bit が立っている場合,
  その頂点の下にある葉の少なくとも 1 頂点は bit が立っている.
- 各頂点は 2 個の子を持つことから,
  深さ毎に配列で保持することで各頂点にランダムアクセスが可能となる.

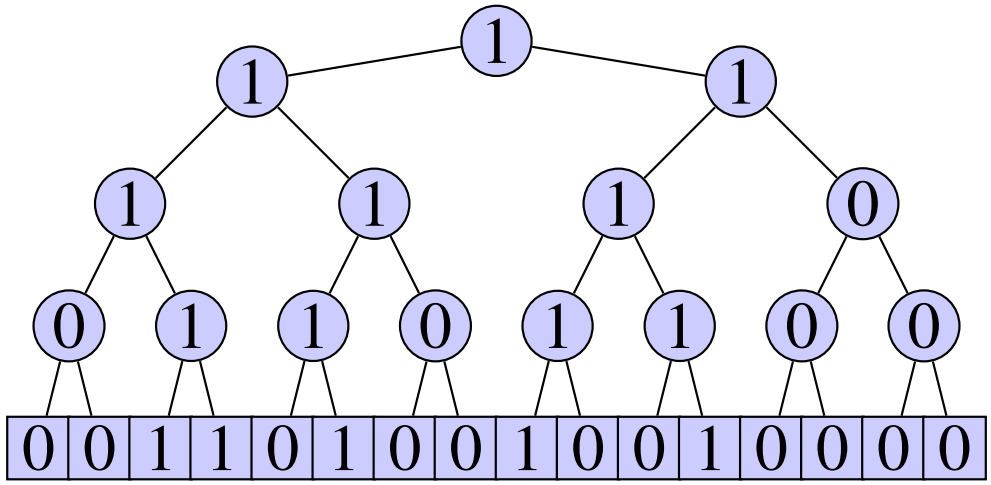


Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 Min(V), Max(V)

- Min(V) は, 根から左の子が 1 であれば左の子へ,
  そうでなければ右の子へ降りる操作を再帰的に行う.
  - Max(V) も同様に処理する.

Algorithm 1 Min(V)

Require:
$root$ 二分木の根
$v.left$ 頂点 v の左の子 (右は $v.right$)
$v.parent$ 頂点 v の親
$v.value$ 頂点 v の値

```
 1: function Min(V)
 2:     v ← root
 3:     if v.value = 0 then
 4:         return NIL
 5:     while v.left ≠ NIL do
 6:         if v.left.value = 1 then
 7:             v ← v.left
 8:         else
 9:             v ← v.right
10: end function
```

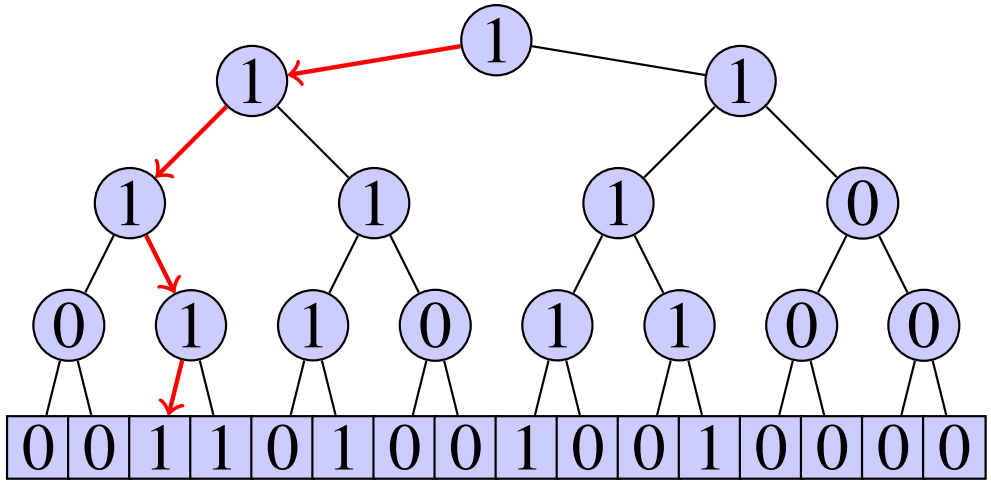


Figure: Min(V), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 SUCCESSOR(V, x), PREDECESSOR(V, x) (1/2)

- SUCCESSOR(V, x) は, x の親から, 自身が直前の頂点が左の子かつ右の子の bit が立っている頂点になるまで親を辿り, 右の子の最小値を返す.
  - PREDECESSOR(V, x) も同様に処理する.

Algorithm 2 SUCCESSOR(V, x)

```
prev ← x の頂点
v ← prev.parent
while v ≠ root do
    if v.value = 1 and
v.left = prev and v.right.value = 1 then
        return
MIN(v.right を根とした二分木)
    else
        prev = v
        v = v.parent
return NIL
```

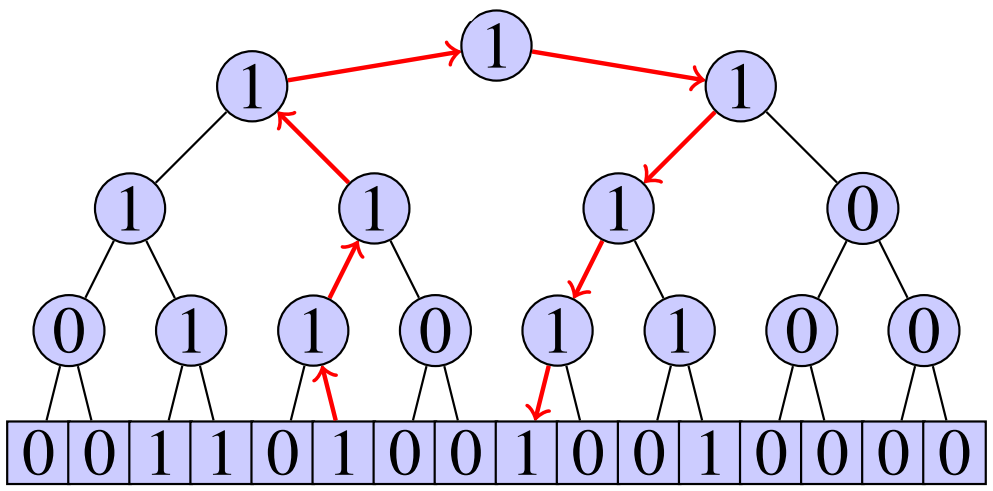


Figure:
SUCCESSOR$(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 SUCCESSOR(V, x), PREDECESSOR(V, x) (2/2)

- SUCCESSOR(V, x) は, x の親から, 自身が直前の頂点が左の子かつ右の子の bit が立っている頂点になるまで親を辿り, 右の子の最小値を返す.
  - PREDECESSOR(V, x) も同様に処理する.

Algorithm 3 SUCCESSOR(V, x)

```
prev ← x の頂点
v ← prev.parent
while v ≠ root do
    if v.value = 1 and
v.left = prev and v.right.value = 1 then
        return
MIN(v.right を根とした二分木)
    else
        prev = v
        v = v.parent
return NIL
```

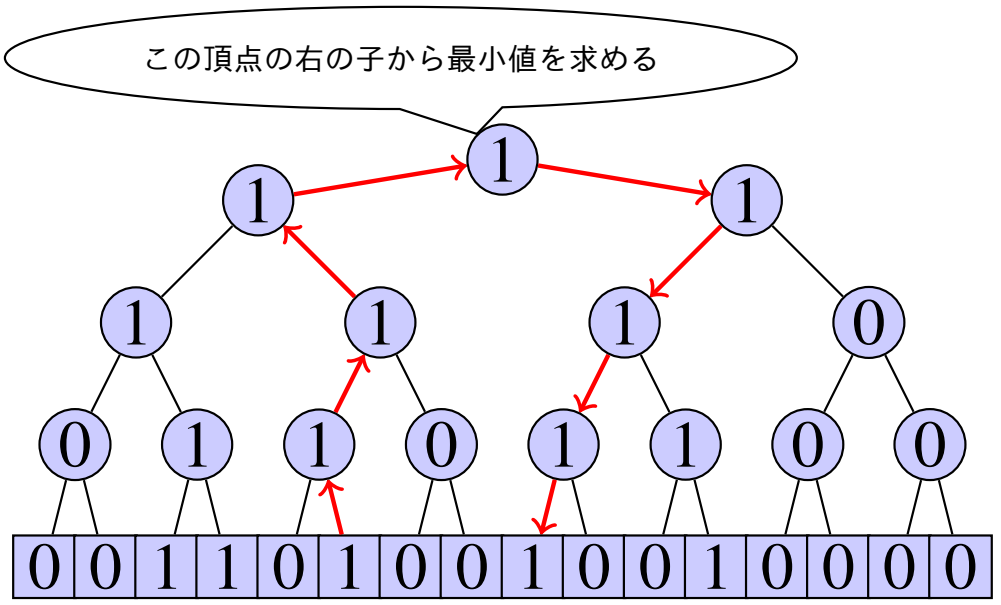


Figure:
SUCCESSOR$(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 MEMBER(V, x)

- MEMBER(V, x) は, 対応する葉の値を返す.
  - INSERT(V, x), DELETE(V, x) も同様に処理する.

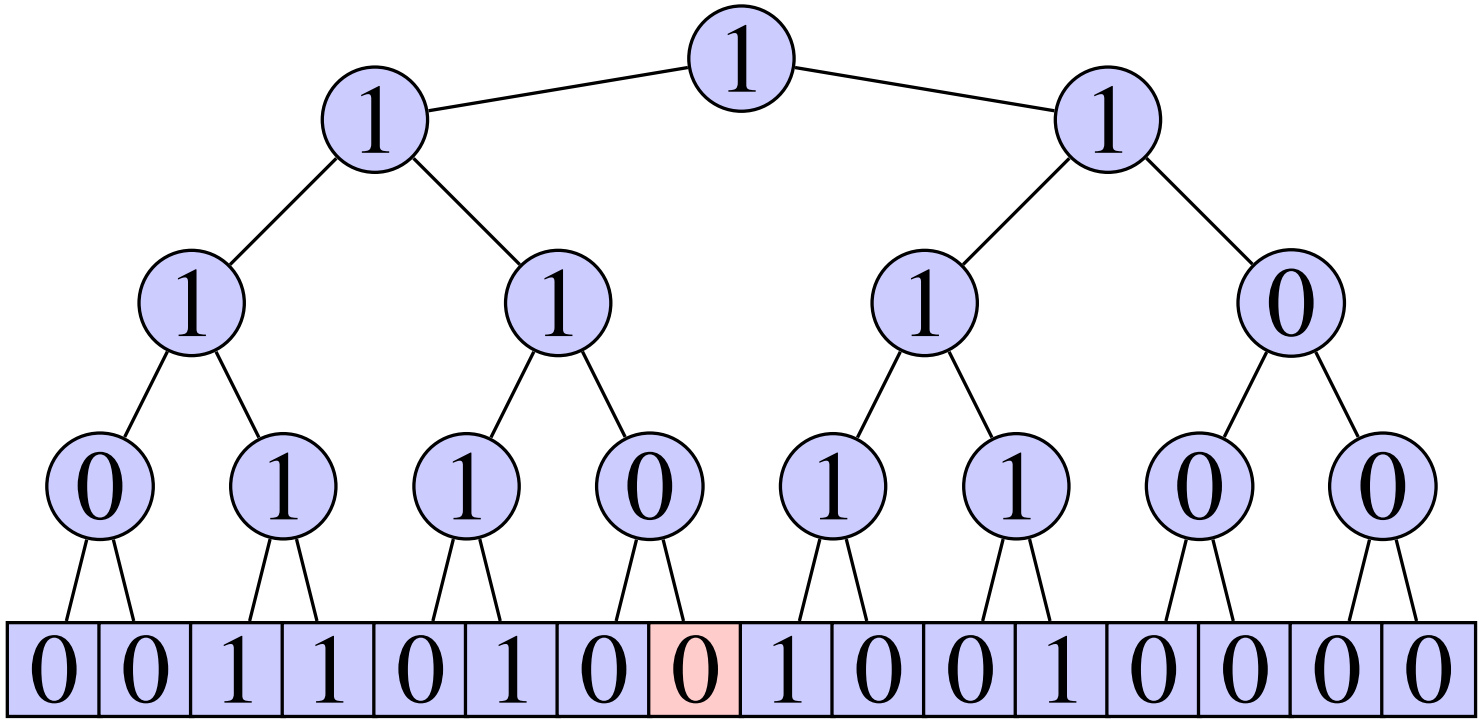


Figure: MEMBER$(V, 7)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$