van Emde Boas Trees

光吉　健汰

北海道大学工学部 情報エレクトロニクス学科 情報理工学コース 4 年
情報知識ネットワーク研究室

June 12, 2019

Contents

Contents

こんにちは

Contents

van Emde Boas tree とは (1/2)

van Emde Boas tree (以下 vEB 木) は動的集合を扱うデータ構造

動的集合

動的集合とは, 集合に対して後述の各種操作が行えるようなデータ構造

- 今回扱う要素は非負整数とする
- vEB 木が保持しうる要素の集合を全体集合 U とし, その大きさを u とする
- vEB 木が現在保持している集合を V とし, その大きさを n とする

van Emde Boas tree とは (2/2)

van Emde Boas tree (以下 vEB 木) は動的集合を扱うデータ構造

操作

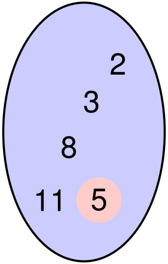
MEMBER(V, x)	V に x が存在するかを返す
MIN(V)	V の要素の最小値を返す
MAX(V)	V の要素の最大値を返す
SUCCESSOR(V, x)	V の x より大きい最小の要素を返す
PREDECESSOR(V, x)	V の x より小さい最大の要素を返す
INSERT(V, x)	V に x を挿入する
DELETE(V, x)	V から x を削除する

これらの操作が最悪時間計算量 $O(\log \log u)$ で実行可能

操作 $\textsc{Member}(V, x)$

- $\textsc{Member}(V, x)$ は, x が集合に存在するかを真偽値で返す.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



- $\textsc{Member}(V, 5) = \text{TRUE}$
- $\textsc{Member}(V, 6) = \text{FALSE}$

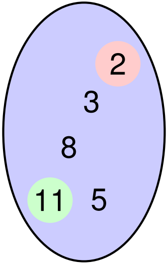
各関数の引数

関数に渡す引数は要素として取りうる値のみとする

操作 $\textsc{Min}(V)$, $\textsc{Max}(V)$

- $\textsc{Min}(V)$ は, 集合の要素の最小値を返す.
- $\textsc{Max}(V)$ は, 集合の要素の最大値を返す.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

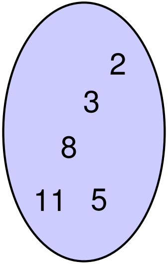


- $\textsc{Min}(V) = 2$
- $\textsc{Max}(V) = 11$

操作 Successor(V, x), Predecessor(V, x)

- Successor(V, x) は, 集合の要素から x より大きい最小の値を返す.
- Predecessor(V, x) は, 集合の要素から x より小さい最大の値を返す.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



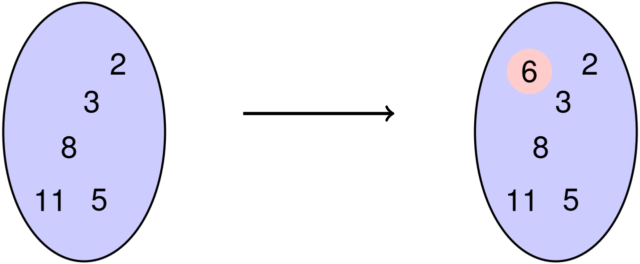
- Successor$(V, 2) = 3$
- Predecessor$(V, 7) = 5$

操作 $\textsc{Insert}(V, x)$

- $\textsc{Insert}(V, x)$ は, 集合に x を挿入する.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

Figure: $V = \{2, 3, 5, \mathbf{6}, 8, 11\}$



操作 Delete(V, x)

- Delete(V, x) は, 集合 V から x を削除する.

Figure: $V = \{2, 3, 5, \mathbf{6}, 8, 11\}$

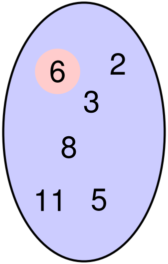
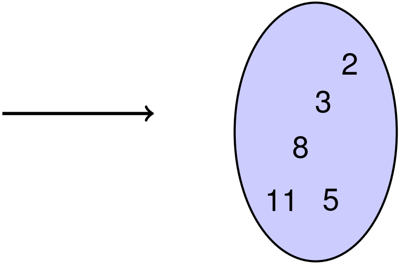


Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



Contents

直接アドレス法 (1/2)

空間計算量 $O(u)$ で動的集合を保持する手段として, 直接アドレス法を考える.

直接アドレス法

要素の値を配列の添字として利用し, データを保持するテクニック

今回考えているデータ構造では付属データは持たないので,
各配列の要素には要素を保持しているかを bit で格納する.

0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

直接アドレス法 (2/2)

空間計算量 $O(u)$ で動的集合を保持する手段として, 直接アドレス法を考える.

- $\textsc{Member}(V, x)$, $\textsc{Insert}(V, x)$, $\textsc{Delete}(V, x)$ の処理は, 配列のランダムアクセスが定数時間であるので, 時間計算量 $O(1)$.
- $\textsc{Successor}(V, x)$ の処理は, x の次の値から bit が立っている要素まで
  最悪 $\Theta(u)$ 回探索する必要があるので, 時間計算量 $\Theta(u)$.
    - $\textsc{Predecessor}(V, x)$, $\textsc{Min}(V)$, $\textsc{Max}(V)$ も同様の処理を行うため, 時間計算量 $\Theta(u)$.

0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 (1/2)

$Successor(V, x)$ で必要な探索回数を小さくするために,
配列の各要素を葉とした二分木構造を考える.

二分木

二分木とは, 葉ではない頂点の子が常に 2 個であるような木

木 閉路を持たない, 連結なグラフ

根 木の頂点のうちの 1 つに定義する

子 ある頂点について, 隣接する頂点のうち根から遠いもの

親 ある頂点について, 隣接する頂点のうち根に近いもの

葉 木の頂点のうち, 子を持たないもの

$Successor(V, x)$ で必要な探索回数を小さくするために,
配列の各要素を葉とした二分木構造を考える.

- 葉ではない各頂点には, 子の値の論理和を格納する.
- ある頂点の bit が立っている場合,
  その頂点の下にある葉の少なくとも 1 頂点は bit が立っている.
- 根から深さ毎に配列に詰めて保持することで
  各頂点にランダムアクセスが可能となる.

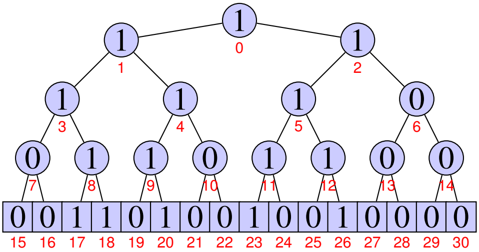


Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 Min(V), Max(V)

- Min(V) は, 根から左の子が 1 であれば左の子へ,
  そうでなければ右の子へ降りる操作を再帰的に行う.
  - Max(V) も同様に処理する.

Algorithm 1 Min(V)

Require:

- *root* 二分木の根
- $v.left$ 頂点 v の左の子 (右は $v.right$)
- $v.parent$ 頂点 v の親
- $v.value$ 頂点 v の値

```
function Min(V)
    v ← root
    if v.value = 0 then
        return NIL
    while v.left ≠ NIL do
        if v.left.value = 1 then
            v ← v.left
        else
            v ← v.right
end function
```

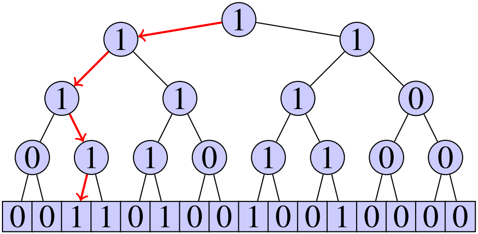


Figure: Min(V), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 $\textsc{Successor}(V, x)$, $\textsc{Predecessor}(V, x)$ (1/2)

- $\textsc{Successor}(V, x)$ は, x の親から, 自身が直前の頂点が左の子かつ右の子の bit が立っている頂点になるまで親を辿り, 右の子の最小値を返す.
  - $\textsc{Predecessor}(V, x)$ も同様に処理する.

Algorithm 2 $\textsc{Successor}(V, x)$

$prev \leftarrow x$ の頂点
$v \leftarrow prev.parent$
while $v \neq root$ **do**
  if $v.value = 1$ *and* $v.left = prev$ *and* $v.right.value = 1$ **then**
    return $\textsc{Min}(v.right$ を根とした二分木$)$
  else
    $prev = v$
    $v = v.parent$
return NIL

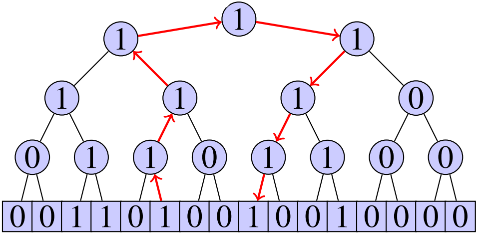


Figure:
$\textsc{Successor}(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 $\textsc{Successor}(V, x)$, $\textsc{Predecessor}(V, x)$ (2/2)

- $\textsc{Successor}(V, x)$ は, x の親から, 自身が直前の頂点が左の子かつ右の子の bit が立っている頂点になるまで親を辿り, 右の子の最小値を返す.
  - $\textsc{Predecessor}(V, x)$ も同様に処理する.

Algorithm 3 $\textsc{Successor}(V, x)$

$prev \leftarrow x$ の頂点
$v \leftarrow prev.parent$
while $v \neq root$ **do**
  if $v.value = 1$ *and* $v.left = prev$ *and* $v.right.value = 1$ **then**
    return $\textsc{Min}(v.right$ を根とした二分木$)$
  else
    $prev = v$
    $v = v.parent$
return NIL

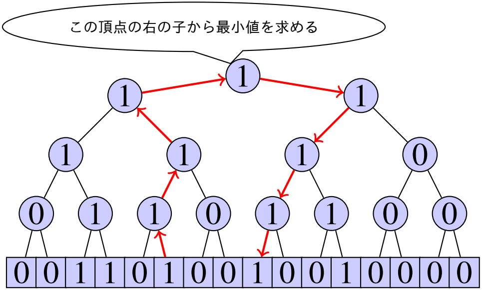


Figure:
$\textsc{Successor}(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 Member(V, x)

- Member(V, x) は, 対応する葉の値を返す.
  - Insert(V, x), Delete(V, x) も同様に処理する.

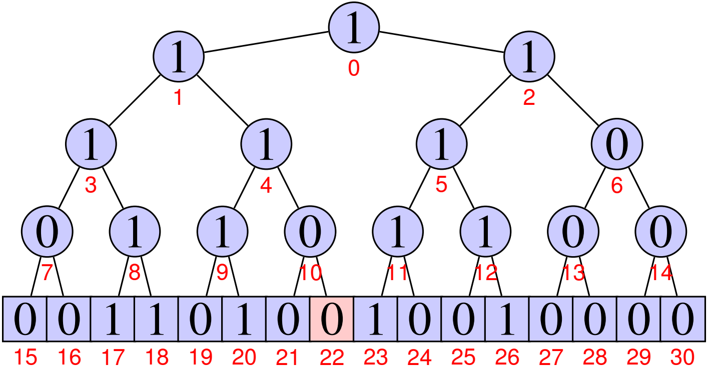


Figure: Member$(V, 7)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 計算量 (1/3)

- $\textsc{Min}(V)$, $\textsc{Max}(V)$ では, 根から最小値となる葉まで頂点を探索するので, 時間計算量は $\Theta(\log u)$ となる.

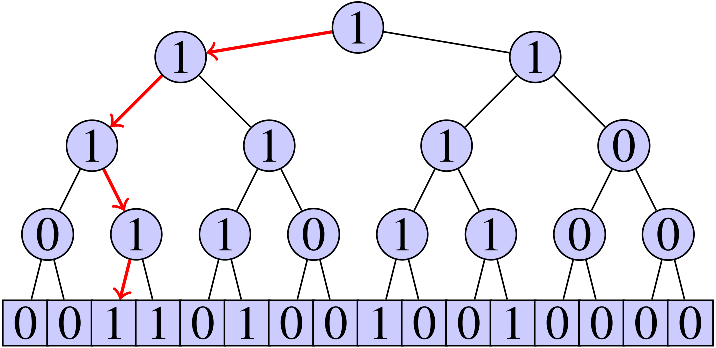


Figure: $\textsc{Min}(V)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 計算量 (2/3)

- $\textsc{Successor}(V, x)$, $\textsc{Predecessor}(V, x)$ では, 葉から最悪根まで辿り, $\textsc{Min}(V')$ (または $\textsc{Max}(V')$) を行うことから, 時間計算量は $O(\log u)$ となる.

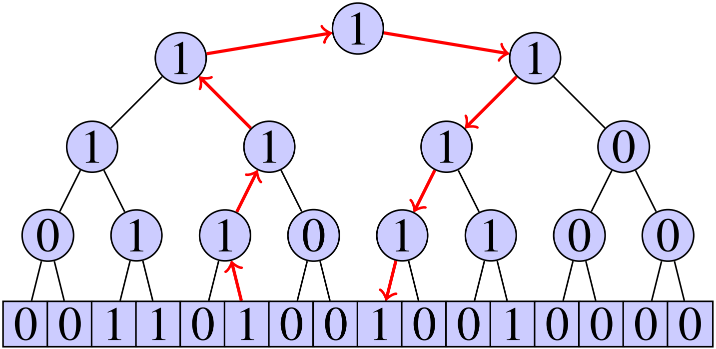


Figure: $\textsc{Successor}(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 計算量 (3/3)

- MEMBER(V, x), INSERT(V, x), DELETE(V, x) では,
対応する葉にアクセスし, 値を取得する,
もしくは更新するので, 時間計算量は $O(1)$ となる.

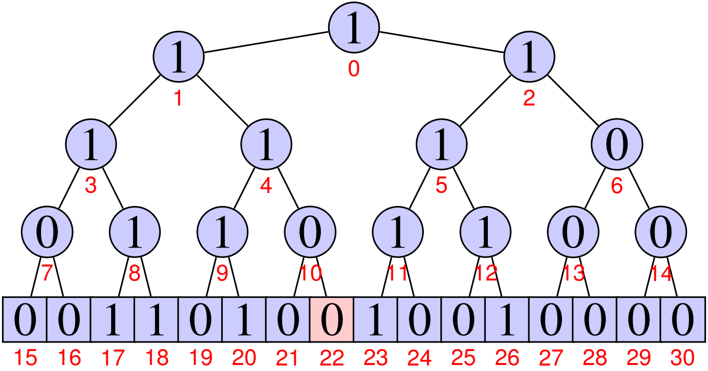
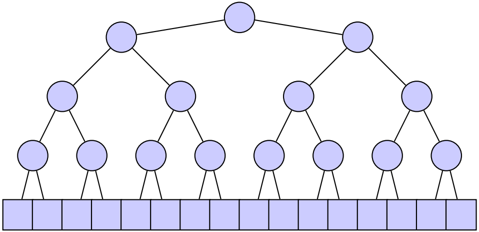


Figure: MEMBER$(V, 7)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

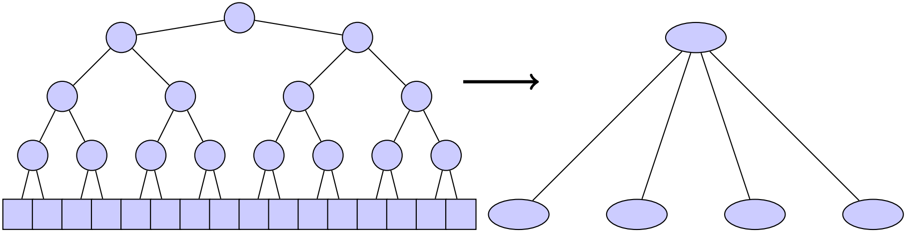
二分木構造 高速化 (1/2)

二分木構造では, 時間計算量が $O(logu)$ となる.



二分木構造 高速化 (2/2)

二分木構造では, 時間計算量が $O(logu)$ となる.
→ 木の高さに時間計算量は依存している.
頂点あたりの子を増やし, 木の高さを小さくする.



平方分割木

木の高さを $\log \log u$ とした平方分割木 を考える.

平方分割木

平方分割木とは, 葉を $\sqrt{u}$ 個持ち, 全てが根と隣接する,
以下のような特徴を持つデータ構造である.

- 要素の全体集合の大きさ u を $u = 2^{2k} (k \in \mathbb{Z}^+)$ とする.
- 配列を $\sqrt{u}$ 個に分割し, それぞれを *cluster* とする.
- 根は大きさ $\sqrt{u}$ の配列を持ち (これを *summary* とする) ,
  それぞれの要素は各 *cluster* の要素の論理和を保持する.

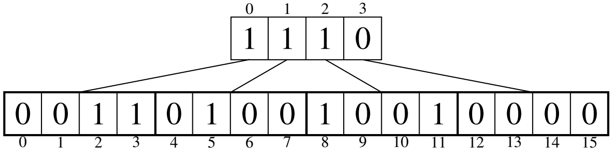


Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$