van Emde Boas Trees

光吉　健汰

北海道大学工学部 情報エレクトロニクス学科 情報理工学コース 4 年
情報知識ネットワーク研究室

June 30, 2019

Contents

1. 自己紹介
2. van Emde Boas tree とは
3. Binary tree
4. Proto van Emde Boas structures
5. van Emde Boas tree

Contents

1. 自己紹介
2. van Emde Boas tree とは
3. Binary tree
4. Proto van Emde Boas structures
5. van Emde Boas tree

名前	光吉 健汰
出身校	北見市立西小学校 (~4 年)
	札幌市立栄東小学校 (5 年 ~6 年)
	札幌市立栄中学校
	北海道札幌開成高等学校
趣味	ゲーム, 競プロ

Contents

1 自己紹介
2 van Emde Boas tree とは
3 Binary tree
4 Proto van Emde Boas structures
5 van Emde Boas tree

van Emde Boas tree とは (1/2)

van Emde Boas tree (以下 vEB 木) は動的集合を扱うデータ構造

動的集合

動的集合とは, 集合に対して後述の Member(V, x), Insert(V, x), Delete(V, x) が行えるようなデータ構造

- 今回扱う要素は非負整数とする.
- vEB 木が保持しうる要素の集合を全体集合 U とし, その大きさを u とする.
- vEB 木が現在保持している集合を V とし, その大きさを n とする.

van Emde Boas tree とは (2/2)

van Emde Boas tree は以下の操作を行うことができる.

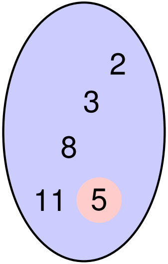
操作

MEMBER(V, x)	: V に x が存在するかを返す.
MIN(V)	: V の要素の最小値を返す.
MAX(V)	: V の要素の最大値を返す.
SUCCESSOR(V, x)	: V の x より大きい最小の要素を返す.
PREDECESSOR(V, x)	: V の x より小さい最大の要素を返す.
INSERT(V, x)	: V に x を挿入する.
DELETE(V, x)	: V から x を削除する.

操作: MEMBER(V, x)

- MEMBER(V, x) は, x が集合 V に存在するかを真偽値で返す.

$V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



- MEMBER$(V, 5)$ = TRUE
- MEMBER$(V, 6)$ = FALSE

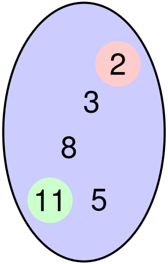
各関数の引数

関数に渡す引数は U の要素のみ

操作: Min(V), Max(V)

- Min(V) は, 集合 V の要素の最小値を返す.
- Max(V) は, 集合 V の要素の最大値を返す.

$$V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$$

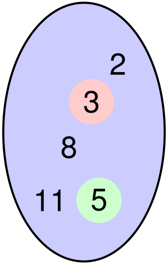


- Min(V) $= 2$
- Max(V) $= 11$

操作: $\textsc{Successor}(V, x)$, $\textsc{Predecessor}(V, x)$

- $\textsc{Successor}(V, x)$ は, 集合 V の x より大きい最小の要素を返す.
- $\textsc{Predecessor}(V, x)$ は, 集合 V の x より小さい最大の要素を返す.

$$V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$$

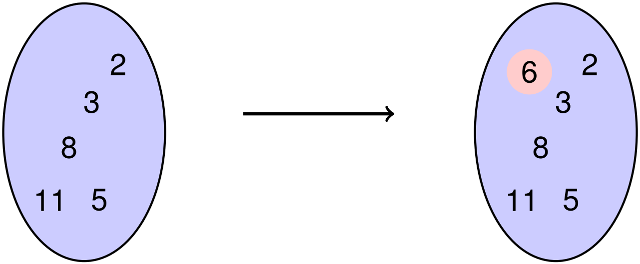


- $\textsc{Successor}(V, 2) = \boxed{3}$
- $\textsc{Predecessor}(V, 7) = \boxed{5}$

操作: INSERT(V, x)

- INSERT(V, x) は, 集合 V に x を挿入する.
  - $V \leftarrow V \cup \{x\}$

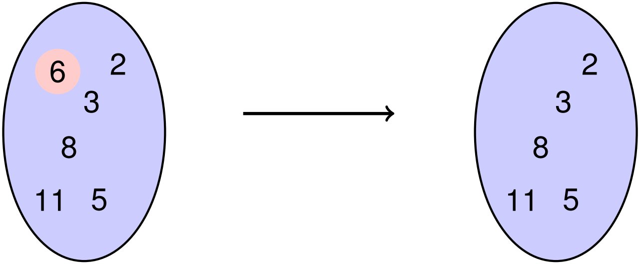
$V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$ $\qquad\qquad$ $V = \{2, 3, 5, \mathbf{6}, 8, 11\}$



操作: DELETE(V, x)

- DELETE(V, x) は, 集合 V から x を削除する.
  - $V \leftarrow V \setminus \{x\}$

$V = \{2, 3, 5, \mathbf{6}, 8, 11\}$ $\qquad$ $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



Contents

1. 自己紹介
2. van Emde Boas tree とは
3. Binary tree
4. Proto van Emde Boas structures
5. van Emde Boas tree

直接アドレス法 (1/2)

動的集合を保持する手段として, 直接アドレス法を考える.

直接アドレス法

要素の値を配列の添字として利用し, データを保持するテクニック

今回のデータ構造ではハッシュ表のような付属データはないので,
各配列の要素には要素を保持しているかを bit で格納する.

0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$$V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$$

直接アドレス法 (2/2)

- Member(V, x), Insert(V, x), Delete(V, x) は,
  配列のランダムアクセスが定数時間なので, 時間計算量 $O(1)$.
- Successor(V, x) は, x の次の値が 1 の要素まで
  最悪 $\Theta(u)$ 回探索する必要があるので, 時間計算量 $O(u)$.
  - Predecessor(V, x), Min(V), Max(V) も同様の処理を行うため,
    時間計算量 $O(u)$.

$Successor(V, 5)$ のときの探索

0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

$$V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$$

二分木構造 (1/3)

$\textsc{Successor}(V, x)$ で必要な探索回数を小さくするために,
配列の各要素を葉とした二分木構造を考える.

二分木

二分木とは, 葉ではない頂点の子が常に 2 個であるような木

木 : 閉路を持たない, 連結なグラフ

根 : 木の頂点のうちの 1 つを定義する

子 : ある頂点について, 隣接する頂点のうち根から遠いもの

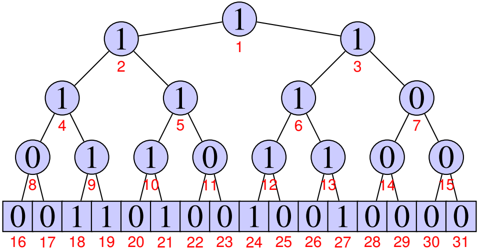
親 : ある頂点について, 隣接する頂点のうち根に近いもの

葉 : 木の頂点のうち, 子を持たないもの

二分木構造 (2/3)

葉ではない各頂点には, 子の値の論理和を格納する.

- ある頂点の値が 1 の場合,
  その頂点の下にある葉の少なくとも 1 つの頂点は値が 1.
- 根から深さ毎に左から配列に詰めて保持することで
  各頂点にランダムアクセスが可能となる.
  - 赤字は格納されている配列の添字



$$V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$$

二分木構造 (3/3)

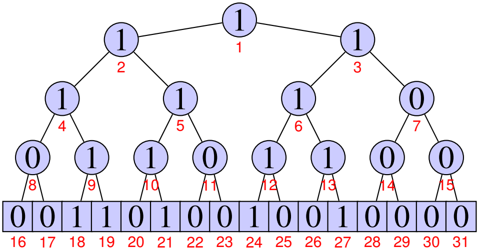
二分木中のある頂点の添字を i とすると,
以下のように他の頂点の添字を求めることができる.

根 : 先頭なので 1

子 : $2 \times i + 1$ と $2 \times i + 2$

親 : $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ (以後 $\frac{r}{m}$ が整数でない場合これを切り捨てた値とする)

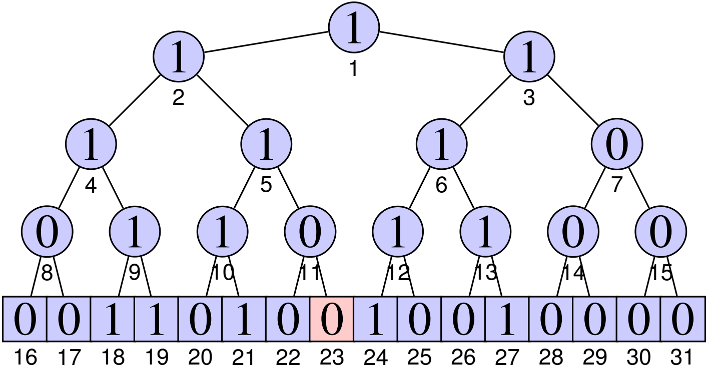
葉 : 集合 U の要素 v に対応する葉の添字は $i + u$



$$V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$$

二分木構造 操作: MEMBER(V, x)

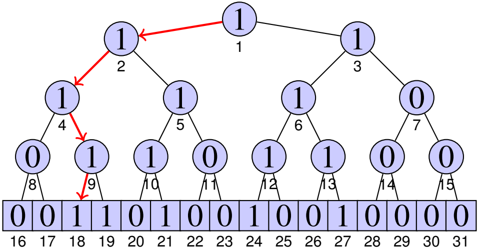
- MEMBER(V, x) は, 対応する葉の値を返す.



MEMBER($V, 7$), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: $\textsc{Min}(V)$, $\textsc{Max}(V)$

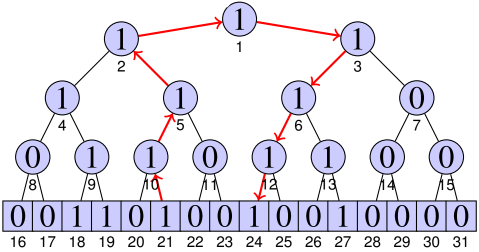
- $\textsc{Min}(V)$ は, 根から左の子が 1 であれば左の子へ, そうでなければ右の子へ降りる操作を再帰的に行う.
  - $\textsc{Max}(V)$ も同様に処理する.



$\textsc{Min}(V), V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: Successor(V, x), Predecessor(V, x)

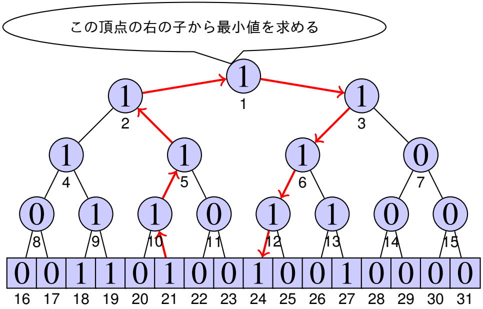
- Successor(V, x) は, x の親から, 直前の頂点が左の子であり, 右の子の値が 1 の頂点になるまで親を辿り, 右の子の最小値を返す.
  - Predecessor(V, x) も同様に処理する.



Successor$(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: $\textsc{Successor}(V, x)$, $\textsc{Predecessor}(V, x)$

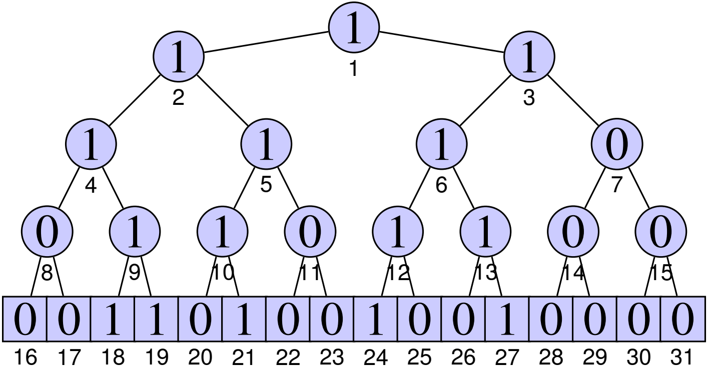
- $\textsc{Successor}(V, x)$ は, x の親から, 直前の頂点が左の子であり, 右の子の値が 1 の頂点になるまで親を辿り, 右の子の最小値を返す.
  - $\textsc{Predecessor}(V, x)$ も同様に処理する.



$\textsc{Successor}(V, 5), V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: INSERT(V, x)

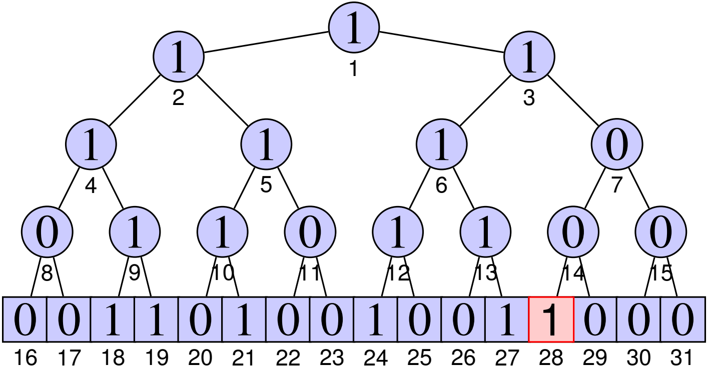
- INSERT(V, x) は, 対応する葉から親の値を 1 にしつつ根まで辿る.



INSERT$(V, 12), V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: INSERT(V, x)

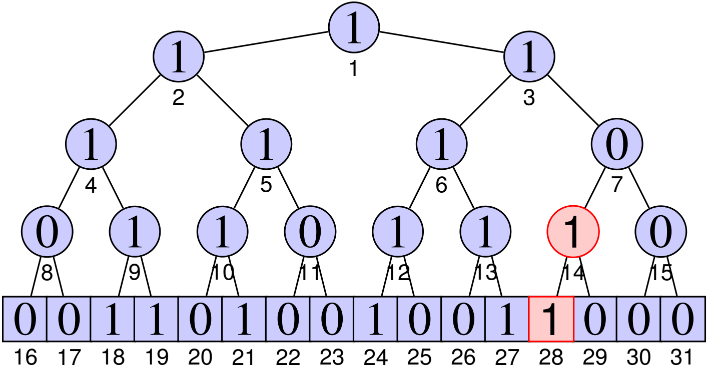
- INSERT(V, x) は, 対応する葉から親の値を 1 にしつつ根まで辿る.



INSERT$(V, 12), V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: Insert(V, x)

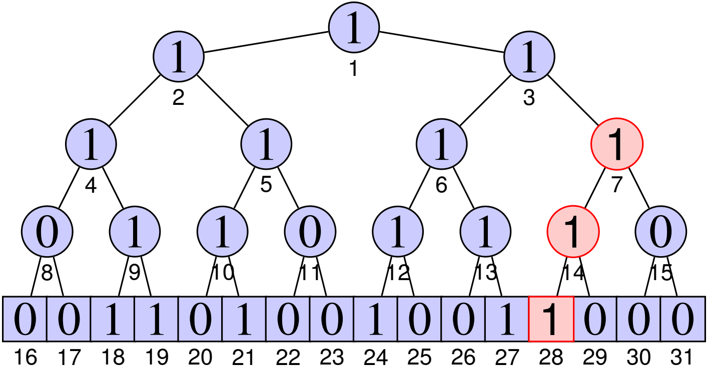
- Insert(V, x) は, 対応する葉から親の値を 1 にしつつ根まで辿る.



Insert$(V, 12)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: Insert(V, x)

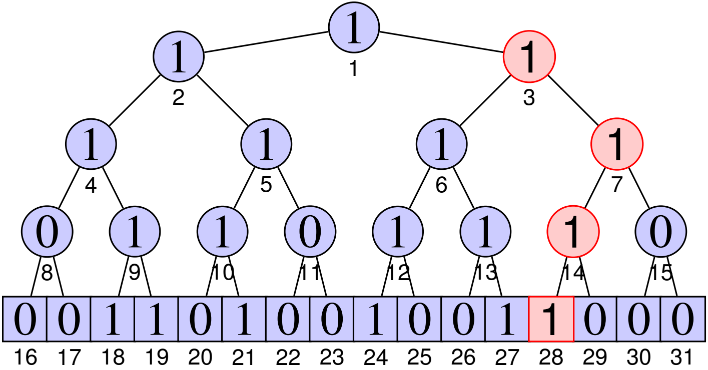
- Insert(V, x) は, 対応する葉から親の値を 1 にしつつ根まで辿る.



Insert($V, 12$), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: INSERT(V, x)

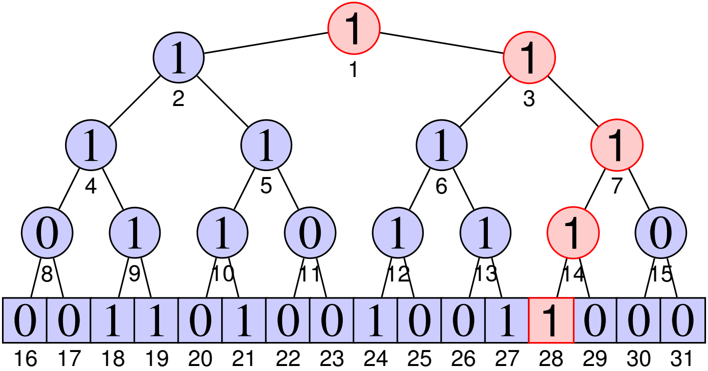
- INSERT(V, x) は, 対応する葉から親の値を 1 にしつつ根まで辿る.



INSERT($V, 12$), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: Insert(V, x)

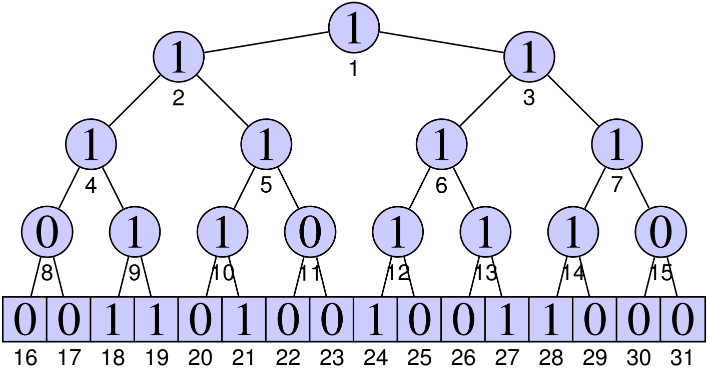
- Insert(V, x) は, 対応する葉から親の値を 1 にしつつ根まで辿る.



Insert(V, 12), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作: DELETE(V, x)

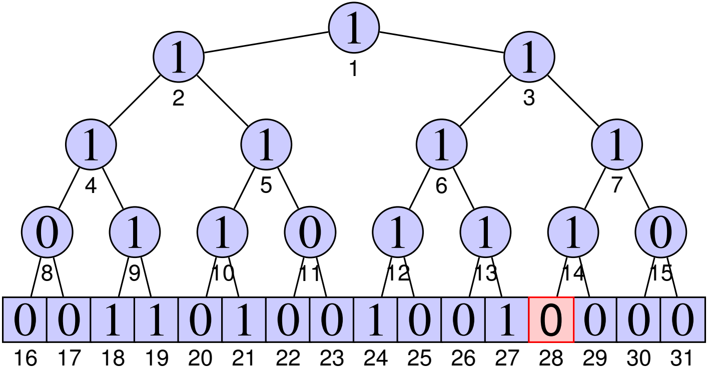
- DELETE(V, x) は, 対応する葉の値を 0 にした後, 以下の操作を行いながら根まで辿る.
  - 子が両方 0 ならば, 自身の値を 0 にし, 親の頂点に遷移する.



DELETE$(V, 12)$, $V = \{2, 3, 5, 6, 8, 11, 12\}$

二分木構造 操作: DELETE(V, x)

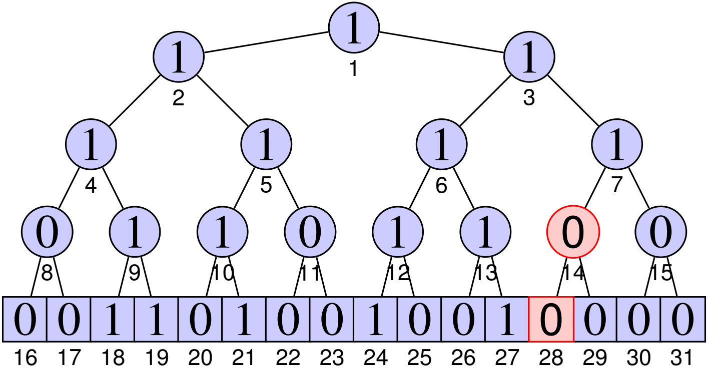
- DELETE(V, x) は, 対応する葉の値を 0 にした後, 以下の操作を行いながら根まで辿る.
  - 子が両方 0 ならば, 自身の値を 0 にし, 親の頂点に遷移する.



DELETE$(V, 12)$, $V = \{2, 3, 5, 6, 8, 11, 12\}$

二分木構造 操作: DELETE(V, x)

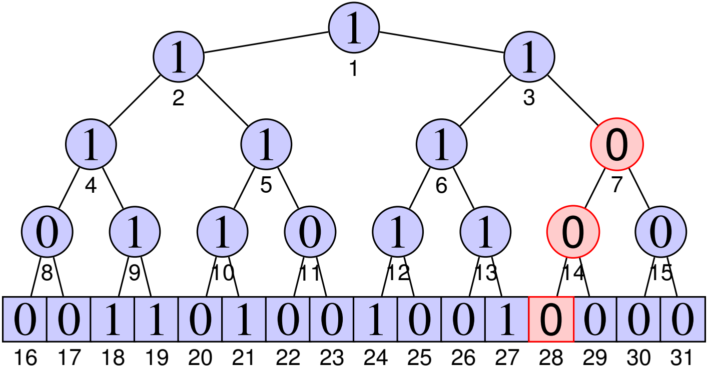
- DELETE(V, x) は, 対応する葉の値を 0 にした後, 以下の操作を行いながら根まで辿る.
    - 子が両方 0 ならば, 自身の値を 0 にし, 親の頂点に遷移する.



DELETE(V, 12), $V = \{2, 3, 5, 6, 8, 11, 12\}$

二分木構造 操作: DELETE(V, x)

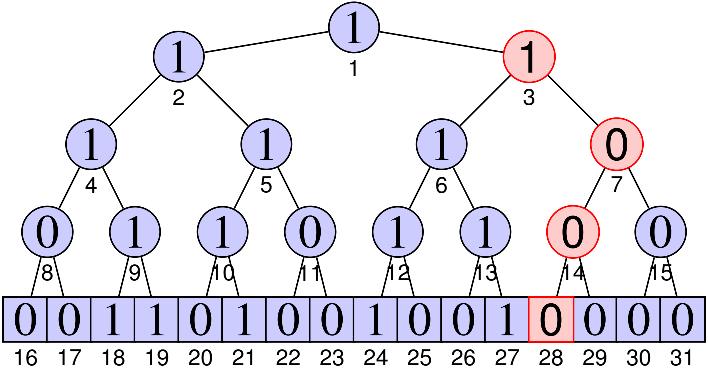
- DELETE(V, x) は, 対応する葉の値を 0 にした後, 以下の操作を行いながら根まで辿る.
  - 子が両方 0 ならば, 自身の値を 0 にし, 親の頂点に遷移する.



DELETE($V, 12$), $V = \{2, 3, 5, 6, 8, 11, 12\}$

二分木構造 操作: DELETE(V, x)

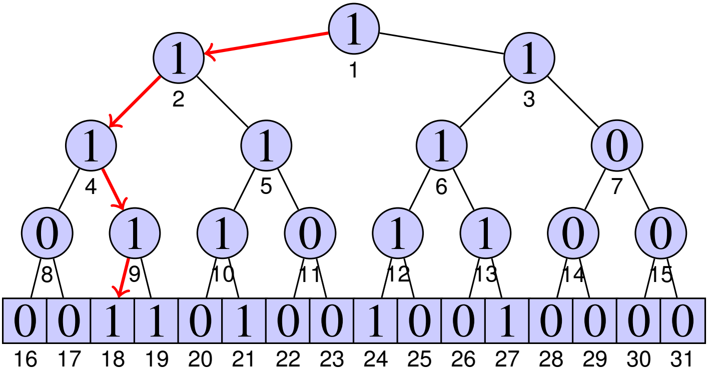
- DELETE(V, x) は, 対応する葉の値を 0 にした後,
  以下の操作を行いながら根まで辿る.
  - 子が両方 0 ならば, 自身の値を 0 にし, 親の頂点に遷移する.



DELETE($V, 12$), $V = \{2, 3, 5, 6, 8, 11, 12\}$

二分木構造 計算量 (1/4)

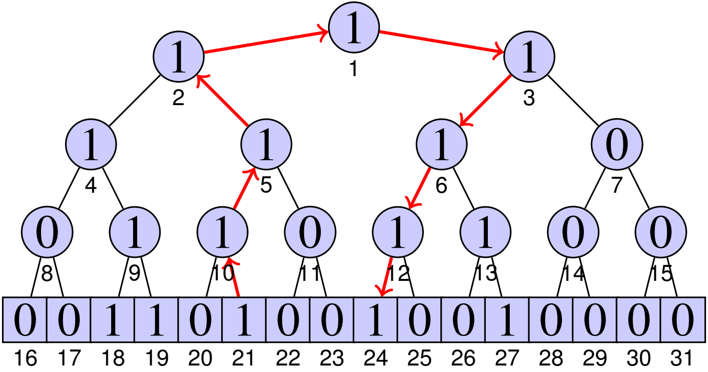
- $\textsc{Min}(V)$, $\textsc{Max}(V)$ では, 根から最小値となる葉まで頂点を探索するので, 時間計算量は $\Theta(\log u)$.



$\textsc{Min}(V)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 計算量 (2/4)

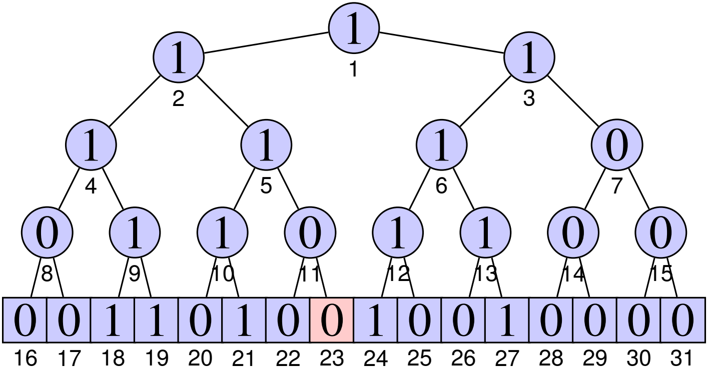
- Successor(V, x), Predecessor(V, x) では, 葉から最悪根まで辿り, その後, Min(V) (または Max(V)) と同様の処理を行うことから, 時間計算量は $O(\log u)$.



Successor$(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 計算量 (3/4)

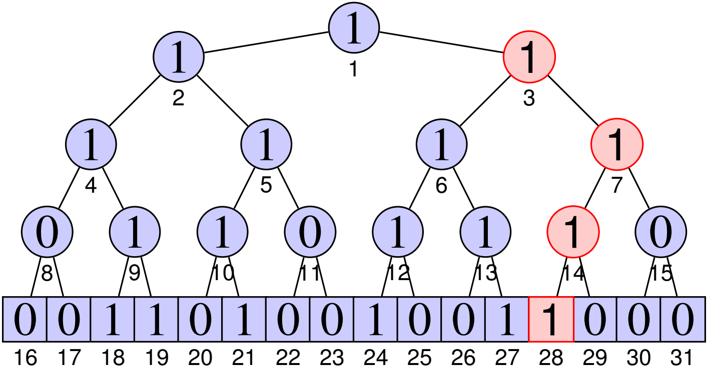
- MEMBER(V, x) では, 対応する葉にアクセスし, 値を取得する, もしくは更新するので, 時間計算量は $O(1)$.



MEMBER$(V, 7), V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 計算量 (4/4)

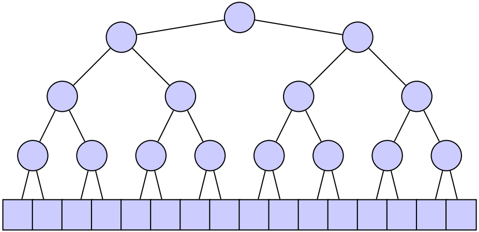
- INSERT(V, x), DELETE(V, x) では,
  葉から根まで辿る処理を行うので, 時間計算量は $\Theta(\log u)$.



INSERT$(V, 12)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

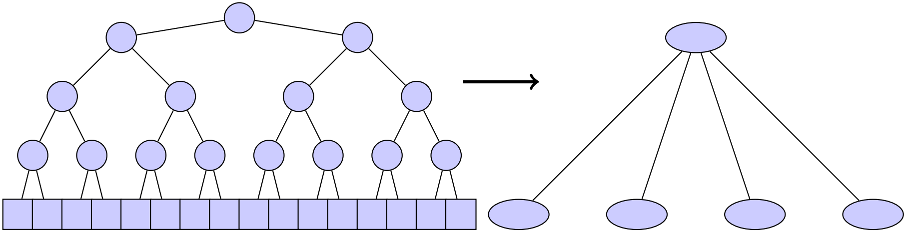
二分木構造 高速化 (1/2)

二分木構造では, 各種操作の時間計算量が $O(\log u)$ となる.



二分木構造 高速化 (2/2)

二分木構造では, 各種操作の時間計算量が $O(\log u)$ となる.
$\longrightarrow$ 時間計算量が木の高さに依存している.
頂点あたりの子を増やし, 木の高さを小さくする.



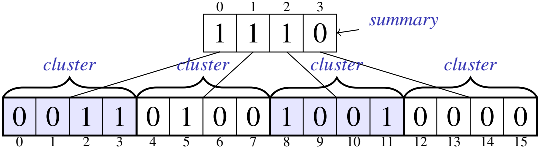
平方分割木

葉の数を $\sqrt{u}$ 個 とした平方分割木 (仮称) を考える.

平方分割木

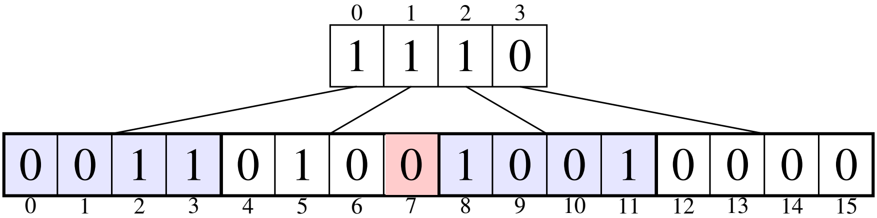
平方分割木とは, 葉を $\sqrt{u}$ 個持ち, 高さが 2 の,
以下のような特徴を持つデータ構造である.

- 要素の全体集合の大きさ u を $u = 2^{2k}$(k は非負整数) とする.
- 配列を $\sqrt{u}$ 個に分割し, それぞれを *cluster* とする.
- *cluster* は大きさが $\sqrt{u}$ の配列であり, 対応する葉の値をそれぞれ保持する.
- 根は大きさ $\sqrt{u}$ の配列を持ち (これを *summary* とする) , それぞれの要素は各 *cluster* の要素の論理和を保持する.



平方分割木構造 操作: Member(V, x)

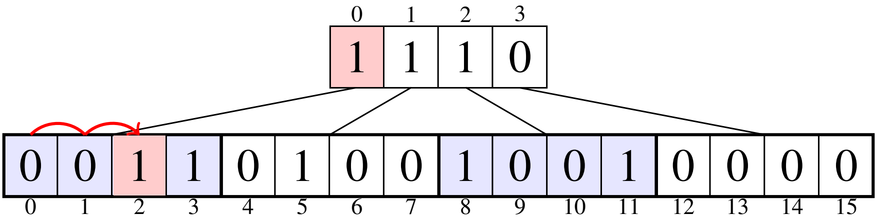
- Member(V, x) は, 対応する配列の要素の値を返す.



Member$(V, 7)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

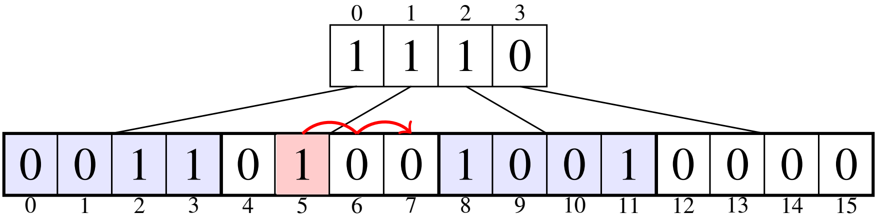
平方分割木構造 操作: $\textsc{Min}(V)$, $\textsc{Max}(V)$

- $\textsc{Min}(V)$ は, *summary* で値が 1 の左端の要素を探し, 対応する *cluster* で最小値を左端から探す.
  - $\textsc{Max}(V)$ も同様に処理する.



$\textsc{Min}(V), V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

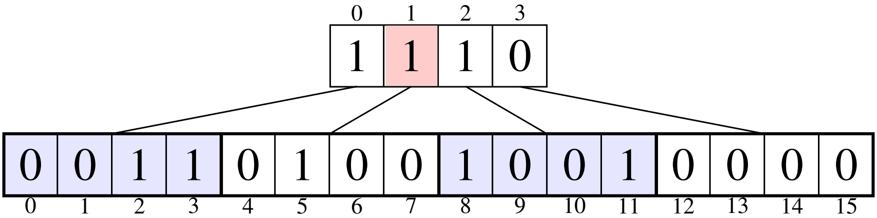
- Successor(V, x) は, x の $cluster$ 内で x より左の要素を探索し, もしなければ, $summary$ で $\frac{x}{\sqrt{u}}$ より右で 1 である要素を探す. その後, 1 の値である $cluster$ 内の最小値を返す.
  - Predecessor(V, x) も同様に処理する.



Successor(V, x), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

平方分割木構造 操作: $\textsc{Successor}(V, x)$, $\textsc{Predecessor}(V, x)$

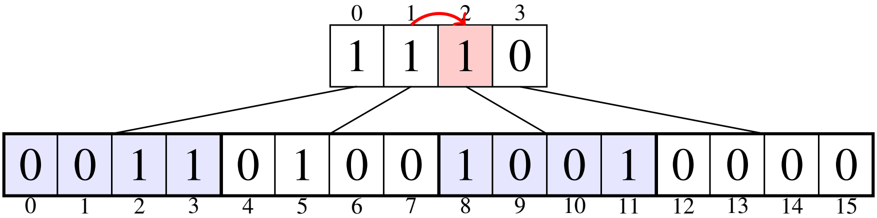
- $\textsc{Successor}(V, x)$ は, x の *cluster* 内で x より左の要素を探索し, もしなければ, *summary* で $\frac{x}{\sqrt{u}}$ より右で 1 である要素を探す. その後, 1 の値である *cluster* 内の最小値を返す.
    - $\textsc{Predecessor}(V, x)$ も同様に処理する.



$\textsc{Successor}(V, x)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

平方分割木構造 操作: $\textsc{Successor}(V, x)$, $\textsc{Predecessor}(V, x)$

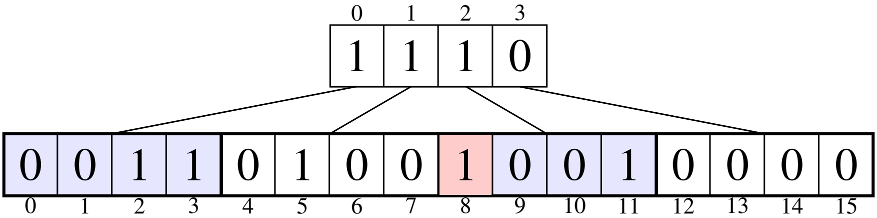
- $\textsc{Successor}(V, x)$ は, x の *cluster* 内で x より左の要素を探索し, もしなければ, *summary* で $\frac{x}{\sqrt{u}}$ より右で 1 である要素を探す. その後, 1 の値である *cluster* 内の最小値を返す.
  - $\textsc{Predecessor}(V, x)$ も同様に処理する.



$\textsc{Successor}(V, x), V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

平方分割木構造 操作: $\textsc{Successor}(V,x)$, $\textsc{Predecessor}(V,x)$

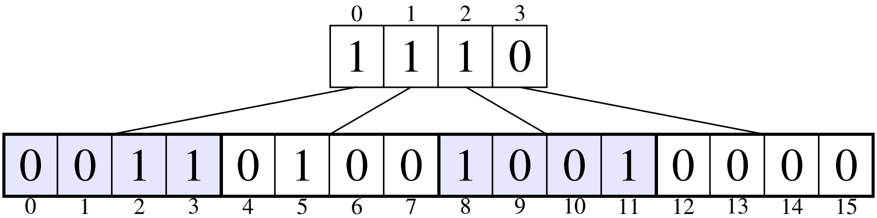
- $\textsc{Successor}(V,x)$ は, x の *cluster* 内で x より左の要素を探索し, もしなければ, *summary* で $\frac{x}{\sqrt{u}}$ より右で 1 である要素を探す. その後, 1 の値である *cluster* 内の最小値を返す.
  - $\textsc{Predecessor}(V,x)$ も同様に処理する.



$\textsc{Successor}(V,x)$, $V = \{2,3,5,8,11\}$

平方分割木構造 操作: Insert(V, x)

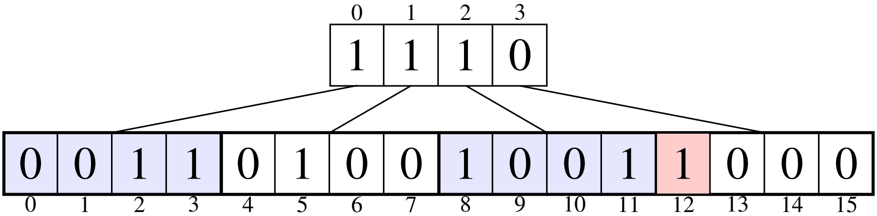
- Insert(V, x) は, 対応する *summary*, *cluster* の要素を 1 にする.



Insert(V, 12), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

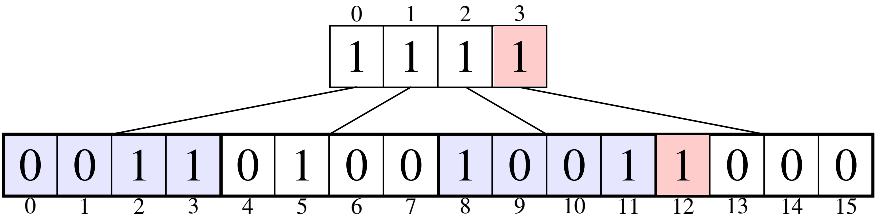
平方分割木構造 操作: Insert(V, x)

- Insert(V, x) は, 対応する *summary*, *cluster* の要素を 1 にする.



Insert(V, 12), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

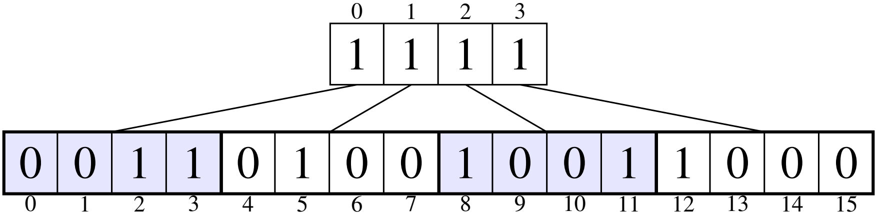
- Insert(V, x) は, 対応する *summary*, *cluster* の要素を 1 にする.



Insert(V, 12), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

平方分割木構造 操作: $\textsc{Delete}(V, x)$

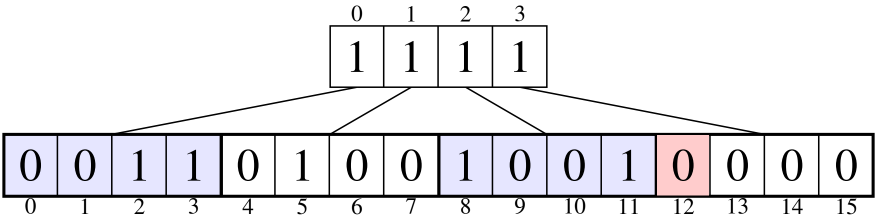
- $\textsc{Delete}(V, x)$ は 対応する *cluster* の要素の値を 0 にし, *cluster* の全要素が 0 ならば, *summary* の要素を 0 にする.



$\textsc{Delete}(V, 12), V = \{2, 3, 5, 8, 11, 12\}$

平方分割木構造 操作: DELETE(V, x)

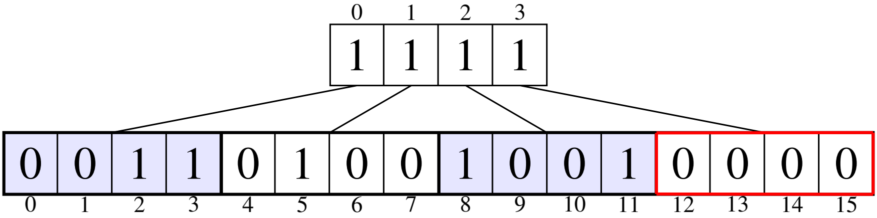
- DELETE(V, x) は 対応する *cluster* の要素の値を 0 にし, *cluster* の全要素が 0 ならば, *summary* の要素を 0 にする.



DELETE($V, 12$), $V = \{2, 3, 5, 8, 11, 12\}$

平方分割木構造 操作: DELETE(V, x)

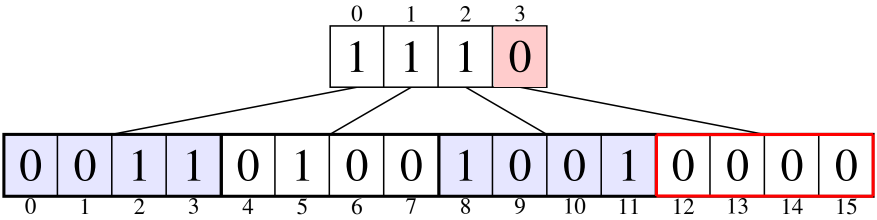
- DELETE(V, x) は 対応する *cluster* の要素の値を 0 にし, *cluster* の全要素が 0 ならば, *summary* の要素を 0 にする.



DELETE$(V, 12), V = \{2, 3, 5, 8, 11, 12\}$

平方分割木構造 操作: DELETE(V, x)

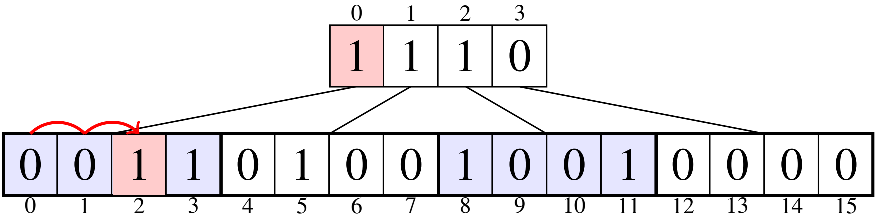
- DELETE(V, x) は 対応する *cluster* の要素の値を 0 にし, *cluster* の全要素が 0 ならば, *summary* の要素を 0 にする.



DELETE$(V, 12)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11, 12\}$

平方分割木構造: 計算量 (1/4)

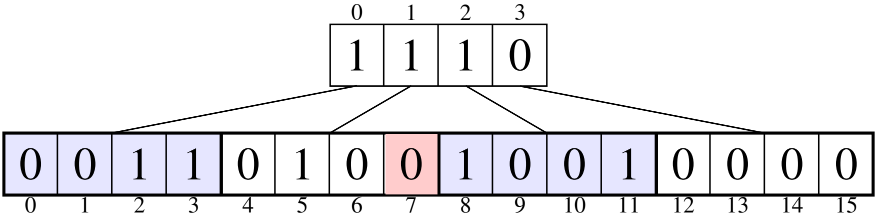
- Min(V), Max(V) では, *summary* と *cluster* を線形探索するので, 時間計算量は $O(\sqrt{u})$ となる.
- Successor(V, x), Predecessor(V, x) も Min(V) と同様に時間計算量は $O(\sqrt{u})$ となる.



Min(V), $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

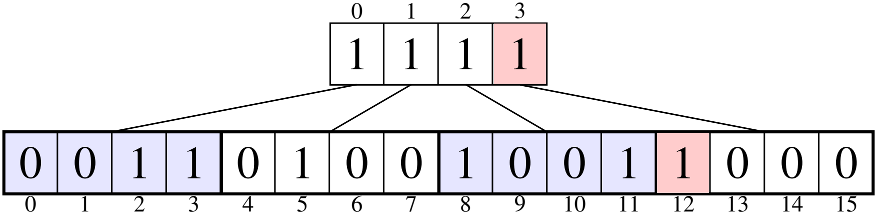
平方分割木構造: 計算量 (2/4)

- $\textsc{Member}(V, x)$ では, 二分木構造と同様に, 時間計算量は $O(1)$ となる.



$\textsc{Member}(V, 7), V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

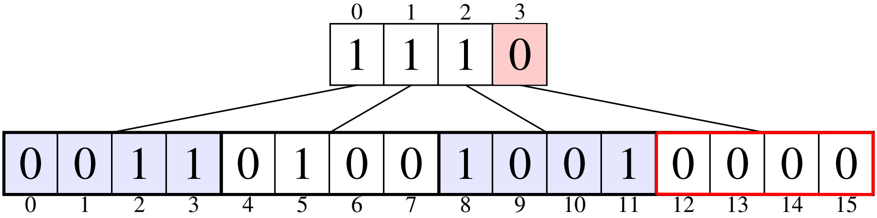
- Insert(V, x) では, 対応する *cluster*, *summary* の要素を更新すればよいので, 時間計算量は $O(1)$ となる.



Insert$(V, 12)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

平方分割木構造: 計算量 (4/4)

- $\textsc{Delete}(V, x)$ では, 対応する *cluster* を線形探索するので, 時間計算量は $O(\sqrt{u})$ となる.



$\textsc{Delete}(V, 12), V = \{2, 3, 5, 8, 11, 12\}$

前半のまとめ

- vEB 木を定義した.
- 二分木構造で各種操作の時間計算量は下表となった.
- 平方分割木によって二分木構造の木の高さを小さくしたが, 一部操作の最悪時間計算量が $O(\sqrt{u})$ と悪化
  - *summary*, *cluster* の線形探索がボトルネック

	二分木	平方分割木
MIN(V)	$\Theta(\log u)$	$O(\sqrt{u})$
MAX(V)	$\Theta(\log u)$	$O(\sqrt{u})$
MEMBER(V, x)	$O(1)$	$O(1)$
SUCCESSOR(V, x)	$O(\log u)$	$O(\sqrt{u})$
PREDECESSOR(V, x)	$O(\log u)$	$O(\sqrt{u})$
INSERT(V, x)	$O(\log u)$	$O(1)$
DELETE(V, x)	$O(\log u)$	$O(\sqrt{u})$