van Emde Boas Trees

光吉　健汰

北海道大学工学部 情報エレクトロニクス学科 情報理工学コース 4 年
情報知識ネットワーク研究室

June 13, 2019

Contents

Contents

こんにちは

Contents

van Emde Boas tree とは (1/2)

van Emde Boas tree (以下 vEB 木) は動的集合を扱うデータ構造

動的集合

動的集合とは, 集合に対して後述の各種操作が行えるようなデータ構造

- 今回扱う要素は非負整数とする
- vEB 木が保持しうる要素の集合を全体集合 U とし, その大きさを u とする
- vEB 木が現在保持している集合を V とし, その大きさを n とする

van Emde Boas tree とは (2/2)

van Emde Boas tree (以下 vEB 木) は動的集合を扱うデータ構造

操作

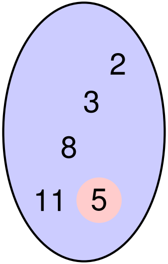
$\textsc{Member}(V, x)$	V に x が存在するかを返す
$\textsc{Min}(V)$	V の要素の最小値を返す
$\textsc{Max}(V)$	V の要素の最大値を返す
$\textsc{Successor}(V, x)$	V の x より大きい最小の要素を返す
$\textsc{Predecessor}(V, x)$	V の x より小さい最大の要素を返す
$\textsc{Insert}(V, x)$	V に x を挿入する
$\textsc{Delete}(V, x)$	V から x を削除する

これらの操作が最悪時間計算量 $O(\log\log u)$ で実行可能

操作 MEMBER(V, x)

- MEMBER(V, x) は, x が集合 V に存在するかを真偽値で返す.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



- MEMBER$(V, 5)$ = TRUE
- MEMBER$(V, 6)$ = FALSE

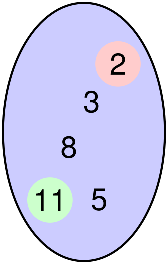
各関数の引数

関数に渡す引数は要素として取りうる値のみとする

操作 $\textsc{Min}(V)$, $\textsc{Max}(V)$

- $\textsc{Min}(V)$ は, 集合 V の要素の最小値を返す.
- $\textsc{Max}(V)$ は, 集合 V の要素の最大値を返す.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

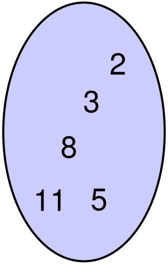


- $\textsc{Min}(V) = 2$
- $\textsc{Max}(V) = 11$

操作 Successor(V, x), Predecessor(V, x)

- Successor(V, x) は, 集合 V の要素から x より大きい最小の値を返す.
- Predecessor(V, x) は, 集合 V の要素から x より小さい最大の値を返す.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$



- Successor$(V, 2) = 3$
- Predecessor$(V, 7) = 5$

操作 Insert(V, x)

- Insert(V, x) は, 集合 V に x を挿入する.

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

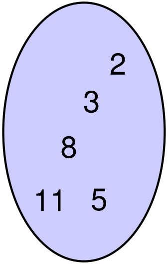
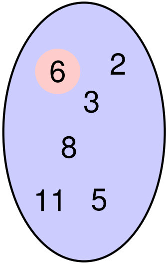


Figure: $V = \{2, 3, 5, \mathbf{6}, 8, 11\}$



操作 Delete(V, x)

- Delete(V, x) は, 集合 V から x を削除する.

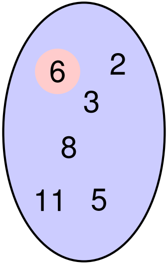


Figure: $V = \{2, 3, 5, \mathbf{6}, 8, 11\}$

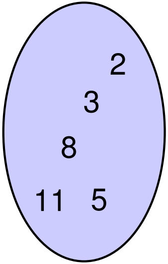


Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

Contents

直接アドレス法 (1/2)

空間計算量 $O(u)$ で動的集合を保持する手段として, 直接アドレス法を考える.

直接アドレス法

要素の値を配列の添字として利用し, データを保持するテクニック

今回考えているデータ構造では付属データは持たないので,
各配列の要素には要素を保持しているかを bit で格納する.

0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

直接アドレス法 (2/2)

空間計算量 $O(u)$ で動的集合を保持する手段として, 直接アドレス法を考える.

- MEMBER(V, x), INSERT(V, x), DELETE(V, x) の処理は, 配列のランダムアクセスが定数時間であるので, 時間計算量 $O(1)$.
- SUCCESSOR(V, x) の処理は, x の次の値から bit が立っている要素まで
  最悪 $\Theta(u)$ 回探索する必要があるので, 時間計算量 (u).
  - PREDECESSOR(V, x), MIN(V), MAX(V) も同様の処理を行うため, 時間計算量 (u).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0

Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 (1/3)

SUCCESSOR(V, x) で必要な探索回数を小さくするために,
配列の各要素を葉とした二分木構造を考える.

二分木

二分木とは, 葉ではない頂点の子が常に 2 個であるような木

木 閉路を持たない, 連結なグラフ

根 木の頂点のうちの 1 つに定義する

子 ある頂点について, 隣接する頂点のうち根から遠いもの

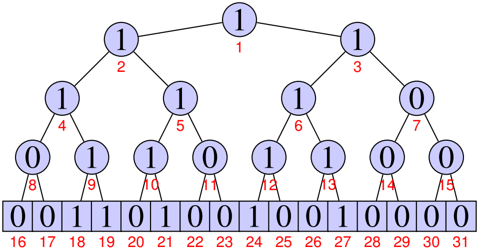
親 ある頂点について, 隣接する頂点のうち根に近いもの

葉 木の頂点のうち, 子を持たないもの

二分木構造 (2/3)

SUCCESSOR(V, x) で必要な探索回数を小さくするために,
配列の各要素を葉とした二分木構造を考える.

- 葉ではない各頂点には, 子の値の論理和を格納する.
- ある頂点の bit が立っている場合,
  その頂点の下にある葉の少なくとも 1 頂点は bit が立っている.
- 根から深さ毎に配列に詰めて保持することで
  各頂点にランダムアクセスが可能となる.
  - 赤字は格納されている配列の添字 (後述の操作のために 1-*indexed* とする)

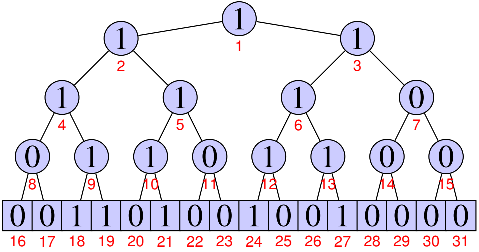


二分木構造 (3/3)

SUCCESSOR(V, x) で必要な探索回数を小さくするために，
配列の各要素を葉とした二分木構造を考える．

二分木中のある頂点の添字を i とすると以下のように他の頂点の添字を求めることができる．

- 根　先頭なので 1
- 子　$2 \times i + 1$ と $2 \times i + 2$
- 親　$\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ (以後 $\frac{r}{m}$ が整数，でない場合これを切り捨てた値とする)
- 葉　v に対応する葉の添字は $i + u$



二分木構造 操作 $\textsc{Min}(V)$, $\textsc{Max}(V)$

- $\textsc{Min}(V)$ は, 根から左の子が 1 であれば左の子へ, そうでなければ右の子へ降りる操作を再帰的に行う.
  - $\textsc{Max}(V)$ も同様に処理する.

Algorithm 1 $\textsc{Min}(V)$

Require:
V := 二分木を格納した配列
u := 全体集合の大きさ

```
function Min(V)
    i ← 1
    while i < u do
        if V[2 × i + 1] = 1 then
            i ← 2 × i + 1
        else if V[2 × i + 2] = 1 then
            i ← 2 × i + 2
        else
            return NIL
        end if
    return i − u
end function
```

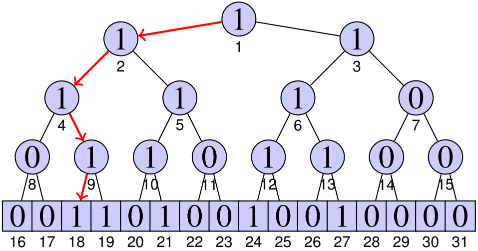


Figure: $\textsc{Min}(V)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 Successor(V, x), Predecessor(V, x) (1/2)

- Successor(V, x) は, x の親から, 自身が直前の頂点が左の子かつ右の子の bit が立っている頂点になるまで親を辿り, 右の子の最小値を返す.
  - Predecessor(V, x) も同様に処理する.

Algorithm 2 Successor(V, x)

```
function Successor(V, x)
    i ← (x + u)/2
    prev ← x + u
    while v ≠ root do
        if V[i] = 1 and prev ≠ ODD
            and V[2 × i + 2] = 1        then
            Min(V) と同様の処理
        else
            prev = v
            v = v.parent
        end if
    return NIL
end function
```

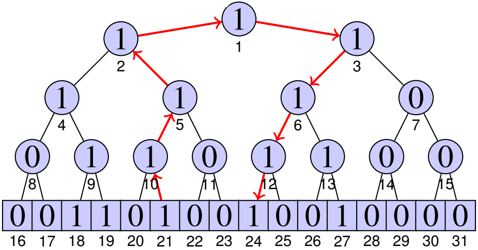


Figure: Successor$(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 $\textsc{Successor}(V, x)$, $\textsc{Predecessor}(V, x)$ (2/2)

- $\textsc{Successor}(V, x)$ は, x の親から, 自身が直前の頂点が左の子かつ右の子の bit が立っている頂点になるまで親を辿り, 右の子の最小値を返す.
  - $\textsc{Predecessor}(V, x)$ も同様に処理する.

Algorithm 3 $\textsc{Successor}(V, x)$

function $\textsc{Successor}(V, x)$
  $i \leftarrow (x + u)/2$
  $prev \leftarrow x + u$
  while $v \neq root$ **do**
    if $V[i] = 1$ *and* $prev \neq$ ODD *and* $V[2 \times i + 2] = 1$ **then**
      $\textsc{Min}(V)$ と同様の処理
    else
      $prev = v$
      $v = v.parent$
    end if
  return NIL
end function

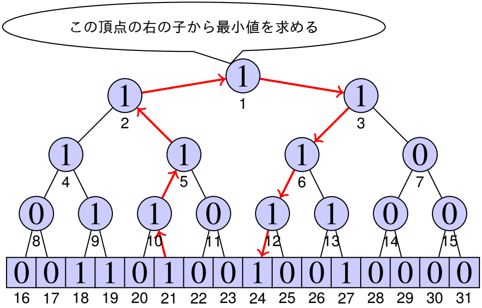


Figure: $\textsc{Successor}(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 操作 MEMBER(V, x)

- MEMBER(V, x) は, 対応する葉の値を返す.

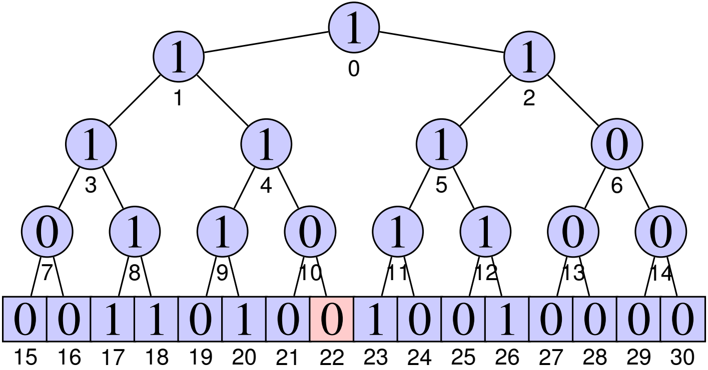


Figure: MEMBER$(V, 7)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

- $\textsc{Min}(V)$, $\textsc{Max}(V)$ では, 根から最小値となる葉まで頂点を探索するので, 時間計算量は $\Theta(\log u)$ となる.

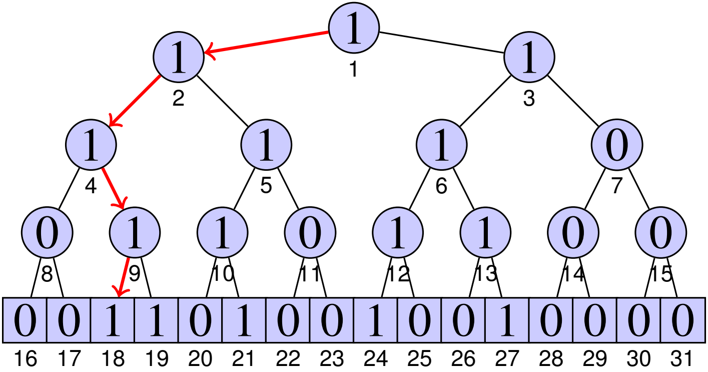


Figure: $\textsc{Min}(V)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 計算量 (2/3)

- Successor(V, x), Predecessor(V, x) では, 葉から最悪根まで辿り, Min(V') (または Max(V')) を行うことから, 時間計算量は $O(\log u)$ となる.

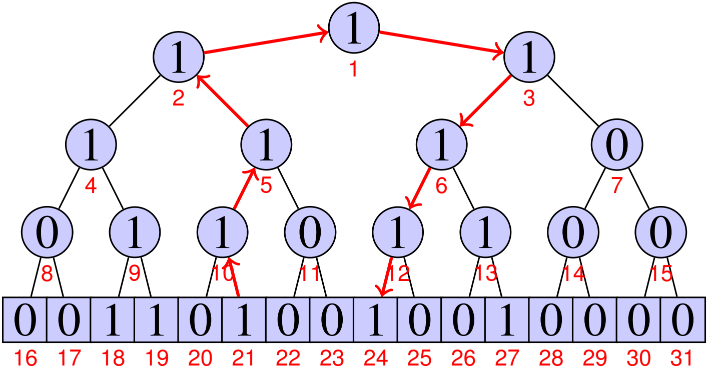


Figure: Successor$(V, 5)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

二分木構造 計算量 (3/3)

- MEMBER(V, x), INSERT(V, x), DELETE(V, x) では,
  対応する葉にアクセスし, 値を取得する,
  もしくは更新するので, 時間計算量は $O(1)$ となる.

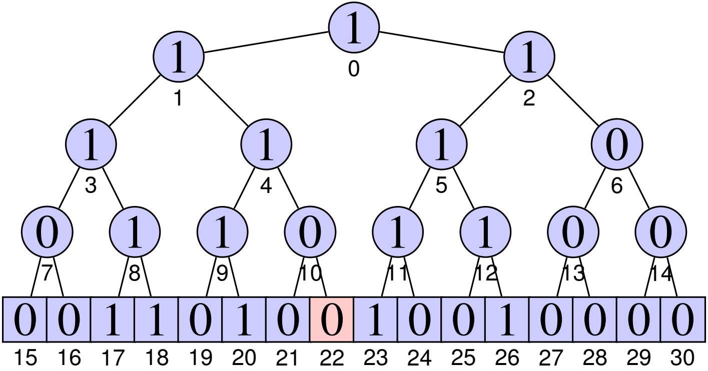
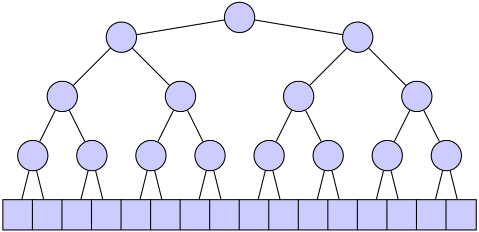


Figure: MEMBER$(V, 7)$, $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$

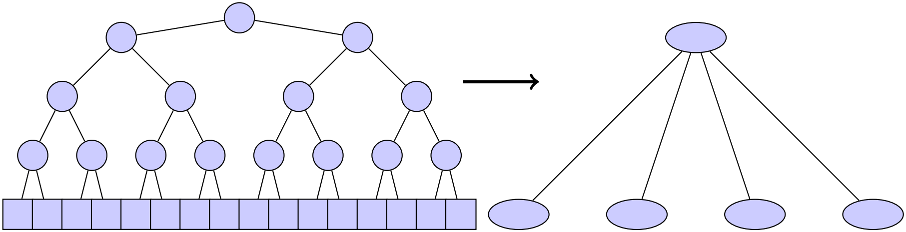
二分木構造 高速化 (1/2)

二分木構造では, 時間計算量が $O(\log u)$ となる.



二分木構造 高速化 (2/2)

二分木構造では, 時間計算量が $O(\log u)$ となる.
$\rightarrow$ 木の高さに時間計算量は依存している.
頂点あたりの子を増やし, 木の高さを小さくする.



平方分割木

根の子の数を $\sqrt{u}$ 個 とした平方分割木 (仮称) を考える.

平方分割木

平方分割木とは, 葉を $\sqrt{u}$ 個持ち, 全てが根と隣接する,
以下のような特徴を持つデータ構造である.

- 要素の全体集合の大きさ u を $u = 2^{2k} (k \in \mathbb{Z}^+)$ とする.
- 配列を $\sqrt{u}$ 個に分割し, それぞれを *cluster* とする.
- 根は大きさ $\sqrt{u}$ の配列を持ち (これを *summary* とする) , それぞれの要素は各 *cluster* の要素の論理和を保持する.

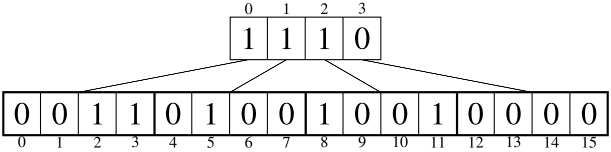


Figure: $V = \{2, 3, 5, 8, 11\}$