

大学物理讲义

冉诗勇

简介

本讲义用于大学物理教学，配合本校所使用的教材赵近芳版《大学物理简明教程》，根据本校教学实际 (64 学时) 对讲授内容进行了取舍和增补.

目录

第 零 章 矢量代数与量纲	1
0.1 矢量代数	1
0.1.1 矢量与标量	1
0.1.2 矢量的加减法	1
0.1.3 矢量的乘积: 点乘和叉乘	2
0.1.4 矢量函数的导数与积分	4
0.2 量纲	4
0.2.1 测量单位	4
0.2.2 量纲	5
第 一 章 质点运动学	7
1.1 参考系 坐标系 物理模型	7
1.1.1 运动的绝对性和相对性	7
1.1.2 参考系	7
1.1.3 坐标系	7
1.1.4 物理模型	7
1.2 位矢 位移 速度 加速度	8
1.2.1 位置矢量 (位矢)	8
1.2.2 位移	8
1.2.3 速度	9
1.2.4 速率	9
1.2.5 加速度	9
1.3 曲线运动的描述	10
1.3.1 一般的平面曲线运动: 切向加速度 法向加速度	10
1.3.2 圆周运动 角速度 角加速度	11
1.4 运动学中的两类问题	13
第 二 章 质点动力学	15
2.1 牛顿运动定律	15

2.1.1	牛顿第一定律	15
2.1.2	牛顿第二定律	15
2.1.3	牛顿第三定律	17
2.1.4	几种常见力	18
2.1.5	牛顿定律的应用	19
2.2	动量定理和动量守恒定律	20
2.2.1	质点的动量定理	20
2.2.2	质点系的动量定理	21
2.2.3	动量守恒定律	22
2.3	功 动能 势能 机械能守恒定律	23
2.3.1	功 功率	23
2.3.2	动能定理	25
2.3.3	质点系的动能定理	26
2.3.4	保守力做功	27
2.3.5	势能	28
2.3.6	功能原理	30
2.3.7	机械能守恒定律	31
2.3.8	能量守恒定律	31
2.4	质点的角动量和角动量守恒定律	32
2.4.1	质点的角动量	32
2.4.2	力矩	33
2.4.3	质点的角动量定理	33
2.4.4	质点的角动量守恒定律	34
第三章	刚体力学基础	35
3.1	刚体 刚体定轴转动的描述	35
3.1.1	刚体	35
3.1.2	刚体的基本运动	35
3.1.3	刚体定轴转动的描述	36
3.2	刚体定轴转动的转动定律	37
3.2.1	刚体定轴转动的转动定律	37
3.2.2	转动惯量	39
3.2.3	转动定律的应用	39
3.3	刚体定轴转动的动能定理	40
3.3.1	转动动能	40
3.3.2	力矩的功	41
3.3.3	刚体定轴转动的动能定理	41
3.4	刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律	42
3.4.1	刚体对轴的角动量	42

3.4.2	刚体定轴转动的角动量定理	42
3.4.3	刚体定轴转动的角动量守恒定律	43
第 四 章	机械振动与机械波	45
4.1	简谐振动的动力学特征	45
4.1.1	弹簧振子模型	45
4.1.2	微振动的简谐近似	46
4.2	简谐振动的运动学	46
4.2.1	简谐振动的运动学方程	46
4.2.2	描述简谐振动的三个重要参量	47
4.2.3	旋转矢量表示法	48
4.3	简谐振动的能量与合成	49
4.3.1	简谐振动的能量	49
4.3.2	同方向、同频率谐振动的合成	50
4.4	机械波的形成和传播	51
4.4.1	波的形成和传播	51
4.4.2	机械波产生的条件	51
4.4.3	横波和纵波	51
4.4.4	波线和波面	52
4.4.5	简谐波	52
4.4.6	描述波动的几个物理量	52
4.5	平面简谐波的波函数	53
4.5.1	平面简谐波的波函数	53
4.5.2	波函数的物理意义	54
4.5.3	波的能量和能量密度	55
4.5.4	波的能流和能流密度	56
4.6	惠更斯原理 波的叠加和干涉	57
4.6.1	惠更斯原理	57
4.6.2	波的叠加原理	57
4.6.3	波的干涉	57
第 五 章	静电场	59
5.1	电场 电场强度	59
5.1.1	电荷	59
5.1.2	库仑定律	59
5.1.3	电场强度	60
5.1.4	电场强度叠加原理	61
5.1.5	电场强度的计算	61
5.1.6	带电体在外电场中所受的作用	62

5.2	电通量 高斯定理	62
5.2.1	电场的图示法 电场线	62
5.2.2	电通量	62
5.2.3	高斯定理	63
5.2.4	高斯定理的应用	64
5.3	静电力的功 电势	65
5.3.1	电场力的功	65
5.3.2	静电场的环路定理	65
5.3.3	电势能	65
5.3.4	电势 电势差	66
5.3.5	电势的计算	66
5.4	静电场中的导体	67
5.4.1	导体的静电平衡	67
5.4.2	导体壳和静电屏蔽	67
第 六 章	稳恒磁场	69
6.1	电流 电动势	69
6.1.1	电流强度	69
6.1.2	电流密度	69
6.1.3	电动势	69
6.2	磁场 磁感应强度	70
6.2.1	基本磁现象	70
6.2.2	磁感应强度	71
6.2.3	磁通量	71
6.2.4	磁场中的高斯定理	72
6.2.5	毕奥-萨伐尔定律	72
6.2.6	毕奥-萨伐尔定律的应用	73
6.3	安培环路定理	74
6.3.1	安培环路定理	74
6.3.2	安培环路定理的应用	74
6.4	磁场对载流导线的作用	74
6.4.1	安培定律	74
6.4.2	无限长两平行载流直导线间的相互作用力	75
6.4.3	磁场对载流线圈的作用	75
6.4.4	磁力的功	76
6.5	磁场对运动电荷的作用	76
6.5.1	洛伦兹力	76
6.5.2	带电粒子在匀强磁场中的运动	77

第七章 变化的电磁场	79
7.1 电磁感应定律	79
7.1.1 法拉第电磁感应定律	79
7.1.2 楞次定律	80
7.2 动生电动势与感生电动势	80
7.2.1 动生电动势	80
7.2.2 感生电动势	81

第 零 章 矢量代数与量纲

0.1 矢量代数

0.1.1 矢量与标量

🔍 **标量** 只有大小, 合成不遵循平行四边形法则的量. 例子: 质量、长度、时间、密度、能量、温度等.

🔍 **矢量** 既有大小, 又有方向, **合成遵循平行四边形法则**的量. 例子: 位移、速度、加速度、力等.

通常手写时用字母上加箭头 (如 \vec{A}) 来表示一个矢量, 印刷中则常用黑体字 (如 \mathbf{A}). 在作图时, 用一个加箭头的线段来代表矢量, 线段的长度正比于矢量的大小, 箭头的方向表示矢量的方向.

以直角坐标系为例, 从坐标原点引出一根线, 箭头指向某点, 这个带箭头的线在数学上就认为是一个矢量. 这根线在三个轴上都有投影, A_x, A_y, A_z , 这些分量各自乘以每个轴方向上的单位矢量再加起来就是直角坐标系中的矢量表示方法.

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$
$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

🔍 **单位矢量** 沿某一方向 (如直角坐标系 x, y, z 轴方向) 的大小为 1 个单位的矢量. 譬如沿 x 方向的单位矢量就写作 \mathbf{i} , 沿 y 方向的单位矢量就写作 \mathbf{j} , 沿 z 方向的单位矢量就写作 \mathbf{k} .

🔍 **基矢** 一组正交的单位矢量, 如 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

0.1.2 矢量的加减法

数字的加减有结合律, 分配律等运算规则, 同样矢量的加减也需要遵循一定的运算规则. 先看矢量的加法.

矢量的加法

矢量加法遵循平行四边形法则或三角形法则.

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$
$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

🔍 **思考** 同类标量物理量一定能代数加减吗?

🔍 **思考** 电流强度 I 是矢量吗? 有限大小的角位移 $\Delta\theta$ 是矢量吗?

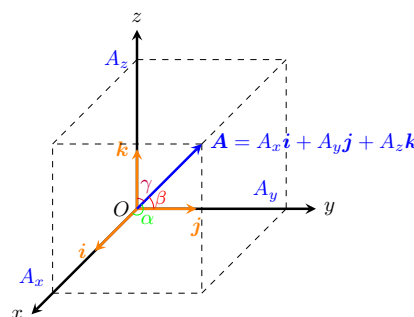


图 0-1 直角坐标系中表示矢量

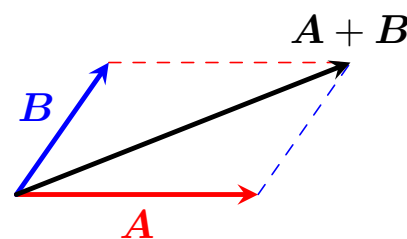


图 0-2 矢量加法的平行四边形法则

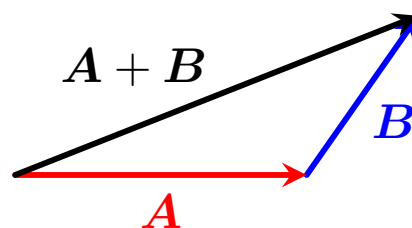


图 0-3 矢量加法的三角形法则

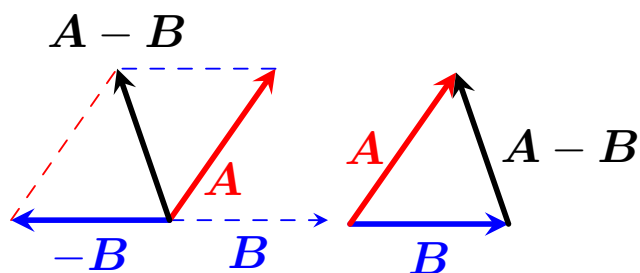


图 0-6 矢量的减法

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

矢量的加法运算满足交换律和结合律.

1) 交换律.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

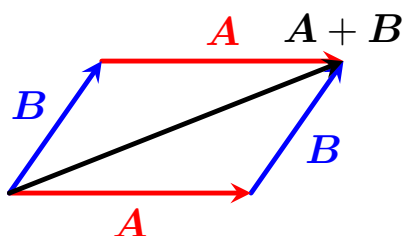


图 0-4 矢量加法的交换律

2) 结合律.

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

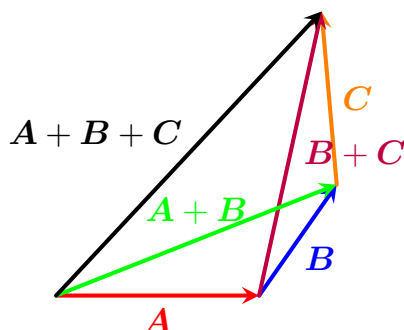


图 0-5 矢量加法的结合律

矢量的减法

再来看矢量的减法. 矢量的减法可视为一个矢量加上负的矢量, 实际上也是加法的合成法则.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

自某点出发画出被减矢量 \mathbf{A} 与减矢量 \mathbf{B} , 由**减矢量矢端引向被减矢量矢端**, 这一矢量即为矢量差 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

0.1.3 矢量的乘积：点乘和叉乘

接下来我们看矢量的乘法. 矢量有两种乘法, 一种是点乘, 又称为点积、标积. 一种叫叉乘, 又称为矢乘、矢积.

点乘

点乘 (标积、点积)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta = AB \cos \theta$$

θ 是 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 夹角. 点积是**标量**.

点乘的正交分量表示

如

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

标积的运算满足交换律和分配律.

1) 交换律.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

2) 分配律.

$$a\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = a\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + a\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

叉乘

接下来我们介绍另一种乘法-叉乘.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \boldsymbol{\tau} = AB \sin \theta \boldsymbol{\tau}$$

θ 是 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 夹角, $\boldsymbol{\tau}$ 是一个单位矢量, 方向垂直于 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 所构成的平面并与两者形成右手螺旋关系. 右手四指由叉乘号前的矢量方向, 沿小于 π 的夹角旋转到叉乘号后的矢量方向时拇指的指向. 积矢量垂直于两叉乘矢量所确定的平面.

叉乘的正交分量表示

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

知识应用 叉乘右手螺旋法则的应用

生活中, 拧紧或卸下螺丝可用此法则. 大拇指指向内 (旋紧) 或者外 (旋松), 右手其余四指旋转方向即为拧螺丝刀的方向.

矢积的运算就要注意了, 它不遵守交换律, 但遵守分配律.

思考 直角坐标系三个基矢标积关系? $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = ?$ $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = ?$

练习 0.1 应用点积的运算规则证明余弦定理 $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \varphi$. 提示: 根据矢量加法法则, 已知 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, 将等式两边分别与 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 、 \mathbf{C} 进行点积运算.

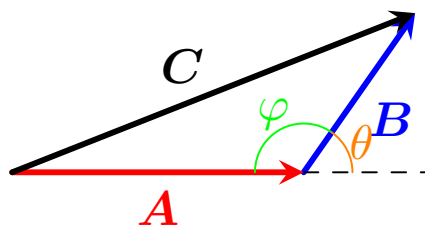


图 0-7 余弦定理图示

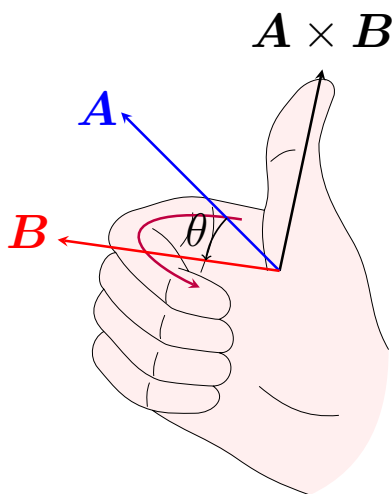


图 0-8 矢量叉乘的右手螺旋法则


思考 直角坐标系三个基矢标积关系? $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = ?$ $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = ?$ $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = ?$


1) **不遵守交换律**(反交换律).

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

2) 遵守分配律.


$$a\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = a\mathbf{A} \times \mathbf{B} + a\mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

 **思考** 矢量的叉乘和点乘有什么用? 大学物理为什么要学这个?

 **例 0.1** $\mathbf{A} = i + 3j - k$, $\mathbf{B} = 4i + j + 3k$, 求 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, $|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$, $\cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

0.1.4 矢量函数的导数与积分

矢量函数的导数

 **矢量函数** 矢量 \mathbf{A} 与变量 t 之间存在一定的关系, 如果当变量 t 取定某个值后, 矢量 \mathbf{A} 有**唯一确定的值** (大小和方向) 与之对应, 则称为 t 的**矢量函数**, 即


$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$$


矢量函数的导数

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

矢量函数导数的正交分量表示

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt} \mathbf{k}$$

 **练习 0.2** $\mathbf{r} = \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k}$, 求 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

 **例 0.2** $\mathbf{r} = 2t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$, 求 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.


矢量函数的积分


矢量函数的积分

$$\mathbf{B}(t) = \int \mathbf{A}(t) dt$$

矢量函数积分的正交分量表示


$$\int \mathbf{A} dt = \left(\int A_x dt \right) \mathbf{i} + \left(\int A_y dt \right) \mathbf{j} + \left(\int A_z dt \right) \mathbf{k}$$

 **练习 0.3** $\mathbf{a} = g\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = (v_0 + gt)\mathbf{k}$, 求 $\int_0^t \mathbf{a} dt$, $\int_0^t \mathbf{v} dt$.

 **例 0.3** $\mathbf{a} = 2t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, 求 $\int_0^t \mathbf{a} dt$.

0.2 量纲

0.2.1 测量单位

 物理是定量科学, 物理量的表示包括数值计算结果和**测量单位**. 用于全世界的科学与工程领域和绝大多数国家日常生活中的单位系统是**国际单位制** (System International, SI), 其中的单位称为国际单位

0.2 量纲

制单位 (SI 单位). 这个系统包含 7 个基本单位

$$\text{m, kg, s, A, K, mol, cd}$$

分别为: 长度、质量、时间、电流、温度、物质的量和发光强度 7 个物理量的单位. 其他常用单位都可由它们推导得出.

有了基本单位, 通过物理量的定义或物理定律就可导出其他物理量的单位. 从基本量导出的量称为**导出量**, 相应的单位称为**导出单位**.

三种基本单位的定义

🔍 1 s

- 最初 (中世纪): 一天时长的 $\frac{1}{86\,400}$ 分之一.
- 目前 (1967 年至今): 铯的一种同位素 ^{133}Cs 原子发出的一个特征频率光波周期的 $9\,192\,631\,770$ 倍 (超精细能级跃迁频率 $\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770\text{ Hz}$).

🔍 1 m

- 最初 (1793 年): 从北极至赤道经过巴黎的子午线长度的一千万分之一.
- 过渡 (1799 年): 国际米原器的长度.
- 过渡 (1983 年): 光在真空中 (真空中光速 $299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) 在 $(1/299\,792\,458\text{ s})$ 内所经过的距离.
- 目前 (2019 年至今): 由真空中光速 $c = 299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 定义.

🔍 1 kg

- 最初 (1793 年): 在冰点下体积为一立方分米的纯水的质量.
- 过渡 (1889 年): 用铂铱合金制造的一个金属圆柱体的质量, 保存在巴黎度量衡局中.
- 目前 (2019 年至今): 由精确的普朗克常量 $h = 6.62607015 \times 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}$ ($\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$)、米和秒所定义.

0.2.2 量纲

🔍 **量纲** 为了辨识某类物理量和区分不同类物理量的方便起见, 人们采用**量纲**这个术语来表示物理量的基本属性. 例如长度、时间、质量显然具有不同的属性, 因此它们具有不同的量纲. **只有量纲式相同的量才能相加、相减或用等式相连.**

- 1) 长度量纲:L
- 2) 时间量纲:T
- 3) 质量量纲:M

🔔 注意物理量与物理单位的正斜体表示. 物理量用斜体, 如 m , 物理单位用正体, 如 kg .

❓ **问题** 为什么要用常数定义米和千克单位?

✎ **练习 0.4** 写出速度、加速度、功等物理量的量纲.

有量纲量和无量纲量

物理量总可以按照其属性分为两类. 一类物理量的大小与度量时所选用的单位有关, 称之为**有量纲量**; 另一类物理量的大小与度量时所选用的单位无关, 则称之为**无量纲量**, 例如角度、两个长度之比、两个时间之比、两个力之比、两个能量之比等.

基本量与导出量 在一个物理问题中, 总可以把与问题有关的物理量分成**基本量** **导出量**两类. **基本量**是指**具有独立量纲**的那些物理量, 它的量纲不能表示其他物理量的量纲的组合; **导出量**则是指其量纲可以表为**基本量量纲的组合**的物理量.

 **思考** 量纲有何用处?

例 0.4 单摆实验中, 细绳质量和形变可忽略不计. 当摆球从铅垂的自然状态沿半径为 l 的圆弧挪动到初始方位角 θ , 然后放开物体将在重力的作用下作周期性摆动. 显然, 单摆的周期 T 只可能与 4 个控制参数有关, 即悬物的质量 m , 细绳的长度 l , 重力加速度 g , 以及初始方位角 θ . 于是便有以下函数关系:

$$T = f(m, l, g, \theta)$$

用量纲分析推算周期 T 与四个参数的关系.

第一章 质点运动学

绿水青山枉自多，华佗无奈小虫何！千村薜荔人遗矢，万户萧疏鬼唱歌。坐地日行八万里，巡天遥看一千河。牛郎欲问瘟神事，一样悲欢逐逝波。

春风杨柳万千条，六亿神州尽舜尧。红雨随心翻作浪，青山着意化为桥。天连五岭银锄落，地动三河铁臂摇。借问瘟君欲何往，纸船明烛照天烧。

毛泽东 (1893–1976) 《送瘟神》

1.1 参考系 坐标系 物理模型

1.1.1 运动的绝对性和相对性

宇宙中的一切物质均处在**永恒不息的运动**之中，运动的这种**普遍性**和**永恒性**称为**运动的绝对性**。

为了描述并确定一个物体的运动，必须选择另一个物体（或另一组物体）作为参考。对于同一物体的运动，由于参考物体的不同，对物体运动的描述也不尽相同，因此物体的运动具有**相对性**。

1.1.2 参考系

参考系 研究物体运动时所参照的物体（或彼此不作相对运动的物体群），称为**参考系**。选取的参考系不同，对物体运动情况的描述不同，这就是运动描述的**相对性**。

参考系的选择对描述物体的运动具有重要意义。

一般说来，研究运动学问题时，只要描述方便，参考系可以随便选择。但是在考虑动力学问题时，需要意识到**一些重要的动力学规律（如牛顿三定律）只对某类特定的参考系（惯性系）成立。**

1.1.3 坐标系

坐标系 为了把物体在各个时刻相对于参考系的位置定量地表示出来，还需要在参考系上选择适当的坐标系。**坐标系**是对参考系的数学表述，为定量地描述物体运动而引入。如直角坐标系，极坐标系和自然坐标系。

1.1.4 物理模型

物理模型 对真实的物理过程 and 对象，根据所讨论的问题的基本要求对其进行理想化的简化，抽象为可以用数学方法描述的**物理模型**。

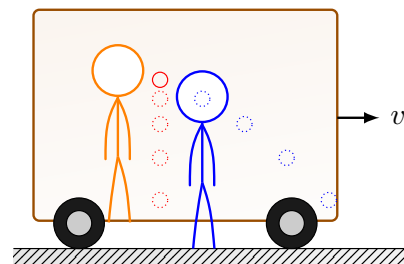


图 1-1 参考系不同，车厢内自由落体小球的运动描述不同

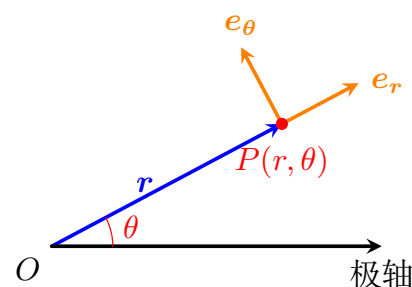


图 1-2 极坐标系

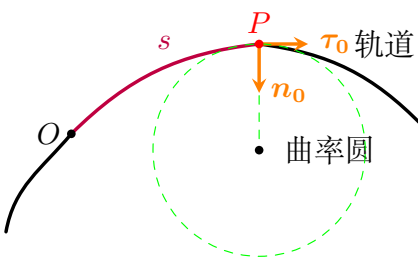


图 1-3 自然坐标系

Q 质点 可忽略形状和大小的物体抽象成**有质量而无形状和大小**的“点”。

可以将物体简化为质点的两种情况

- 1) 物体不变形, 不作转动.
- 2) 物体的尺寸比它的活动范围小很多.

思考 下述运动中哪些运动物体可视为质点? 如果物体不能视为质点怎么办?

地球自转, 公转, 马拉松, 体操, 自由落体运动, 转动

总结 描述物体运动的步骤

- 1) 选择合适的参考系 → 方便确定物体的运动性质
- 2) 建立恰当的坐标系 → 定量地描述物体的运动
- 3) 提出较准确的物理模型 → 确定所提问题最基本的运动规律.

1.2 位矢 位移 速度 加速度

1.2.1 位置矢量 (位矢)

Q 位置矢量 (矢径或位矢)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

矢量的模或者大小表示为

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \cos \beta = \frac{y}{r}, \cos \gamma = \frac{z}{r}$$

Q 质点的运动是质点的空间位置随时间变化的过程. 这时质点的坐标和位矢 \mathbf{r} 都是时间 t 的函数. 表示运动过程的函数式称为**运动方程**, 可以写作

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \xrightarrow{\text{消去 } t} \text{轨道方程}$$

质点在空间的运动路径称为**轨道**. 质点的运动轨道为直线时, 称为**直线运动**. 质点的运动轨道为曲线时, 称为**曲线运动**.

例 1.1 已知质点坐标 $x = (v_0 \cos \theta)t$, $y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$, 求轨道方程.

1.2.2 位移

Q 位移 由初位置指向末位置的有向线段.

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

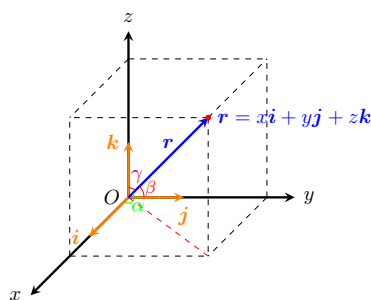


图 1-4 位置矢量

1.2 位矢 位移 速度 加速度

位移的模:

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Δr 与 $\Delta \mathbf{r}$ 的区别

$$\Delta r = |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_1| \quad \text{位矢大小的增量}$$

$$|\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad \text{位移的大小}$$

Δs 与 $\Delta \mathbf{r}$ 的区别

- **位移** $\Delta \mathbf{r}$: **矢量**, 表示质点位置变化的净效果, **与质点运动轨迹无关**, 只与始末点有关.
- **路程** Δs : **标量**, 质点通过的**实际路径长度**, **与质点运动轨迹有关**.
- 一般 $|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta s$, 只有在**单向直线运动**或者 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s$.

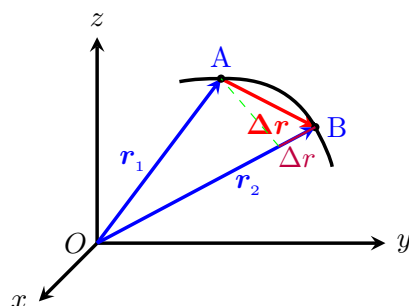


图 1-5 Δr 与 $\Delta \mathbf{r}$ 的区别

1.2.3 速度

Q 平均速度

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Q 瞬时速度 (简称**速度**) $\Delta t \rightarrow 0$ 时平均速度的极限值.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

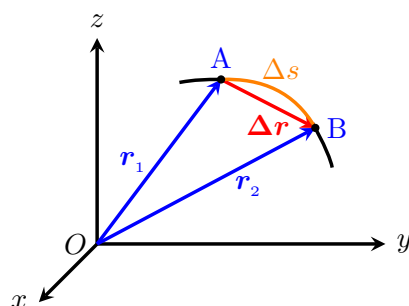


图 1-6 路程与位移的区别

≡ 总结

速度等于**位矢**对**时间**的**一阶导数**.

1.2.4 速率

Q 平均速率

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

平均速率等于路程与运动时间的比值.

Q 瞬时速率 (简称**速率**) $\Delta t \rightarrow 0$ 时平均速率的极限值.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

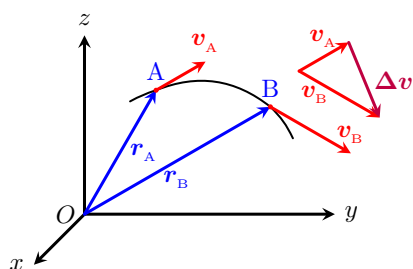
≡ 总结

速率等于**路程**对**时间**的**一阶导数**.

⚙️ 思考 速率和速度有什么不同?

1.2.5 加速度

Q **加速度** 描述质点的速度 (大小和方向) 随时间变化快慢的物理量.

图 1-7 速度变化矢量 Δv

思考 加速度与速度方向是否一定相同? 速度的大小和方向变化与加速度是什么关系? 根据定义, 在速度-时间曲线中, 某一点加速度的大小是该点的什么参数 (以一维运动为例)?

练习 1.1 推导中学所学匀加速直线运动公式 (已知 v_0, x_0, a): $v = v_0 + at$, $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$. 提示: 匀加速直线运动意味着质点位置矢量必然满足 $x(t) = pt^2 + qt + b$ 形式的二次函数关系, 想办法利用已知条件推导出 p, q, b 三个系数.

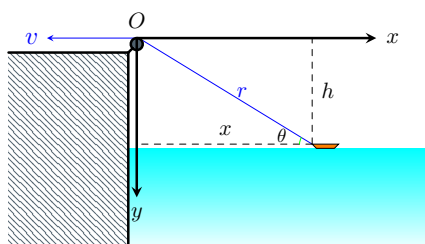


图 1-8

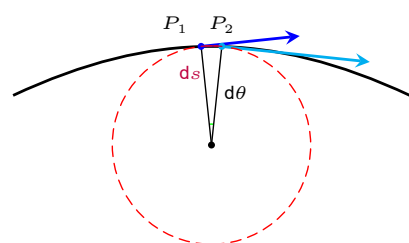


图 1-9 曲率与曲率半径

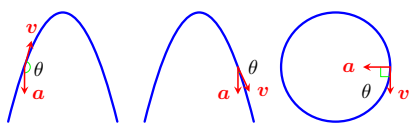


图 1-10 速度与加速度方向不同会导致质点作曲线运动

Q 平均加速度

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Q 瞬时加速度 (简称加速度)

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

≡ 总结

加速度是速度对时间的一阶导数, 或位矢对时间的二阶导数.

例 1.2 如图 1-8 所示, 湖中有一小船, 岸上有人用绳跨定滑轮拉船靠岸, 当人以匀速 v 拉绳, 试求船运动的速度 v' .

分析: 以船为研究对象, 它的运动速度也就是**绳端点的移动速度**, 绳上各点的移动速度是不相同的. 而绳速 v 是指收绳的速率, **绳速与船速是两个不同的概念**, 绳速是绳上各点沿绳运动的快慢, 也就是绳上各点速度在绳方向上的分量.

1.3 曲线运动的描述

从曲线上邻近的两点 P_1, P_2 各引一条切线, 这两条切线间的夹角为 $\Delta\theta$, P_1, P_2 两点间的弧长为 Δs , 则 P_1 点的曲率定义为

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

过曲线上某点作一圆, 若该圆的曲率与曲线在该点的曲率相等, 则称它为该点的**曲率圆**, 而其圆心 O 和半径 ρ 分别称为曲线上该点的曲率中心和曲率半径, 且有

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\theta}$$

1.3.1 一般的平面曲线运动: 切向加速度 法向加速度

质点运动速度方向和加速度方向夹角不为 0 或者 π 时, 质点会进行曲线运动.

≡ 总结

曲线运动中, 加速度方向总是**指向曲线凹侧**, 运动轨迹总是处在加速度和速度矢量包夹的范围之间, 夹角为 $(0, \pi)$.

Q 切向加速度和法向加速度 将加速度沿着质点所在处轨道的切线方向和法线方向进行分解, 这样得到的加速度分量分别叫作**切向加速度**和**法向加速度**.

在自然坐标系中讨论加速度

1.3 曲线运动的描述

$$\Delta v = |\mathbf{v}_2| - |\mathbf{v}_1| = |\Delta \mathbf{v}_\tau|$$

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}_0 + v \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n}_0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}_0 + v \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n}_0 = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$$

注意用**极限**思想思考: 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta\theta \rightarrow 0$, P1 和 P2 点会无限接近, \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 方向无限接近, 此时 $BD \perp AC$, $|BD| = |AB|\Delta\theta = v\Delta\theta$, $\Delta \mathbf{v}_\tau$ 方向是切线方向, $\Delta \mathbf{v}_n$ 方向是与切线垂直的法线方向.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{1}{\rho}$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}_0 = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$$

切向加速度大小: $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ **反映速度大小的变化率**

法向加速度大小: $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ **反映方向的变化率**

例 1.3 以速度 v_0 平抛一小球, 不计空气阻力, 求 t 时刻小球的切向加速度量值 a_τ 、法向加速度量值 a_n .

1.3.2 圆周运动 角速度 角加速度

圆周运动的特点: 轨道的曲率半径处处相等, 速度方向始终在圆周的切线上. 适合在自然坐标系和极坐标系中分析. 在自然坐标系中表示质点的位矢、位移和速度:

$$\mathbf{r} = r(s)$$

$$\text{位移: } d\mathbf{r} = ds \boldsymbol{\tau}_0$$

$$\text{速度: } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\tau}_0 = v \boldsymbol{\tau}_0$$

圆周运动中, 在自然坐标系下:

$$\mathbf{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}_0 = \frac{d^2 s}{dt^2} \boldsymbol{\tau}_0$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}_0 = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}_0$$

总结

自然坐标系描述曲线运动线量与加速度的关系比较方便.

在极坐标系中描述圆周运动, 矢径大小恒定, 只需考虑角位置随时

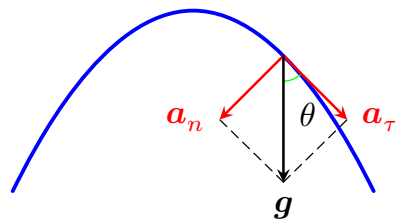


图 1-11 自然坐标系下分解加速度

问题 切向加速度和法向加速度大小与速度是什么关系?

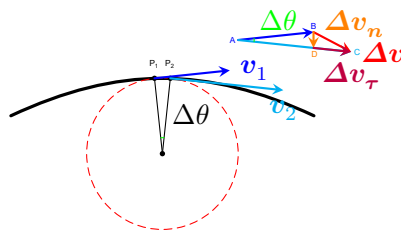
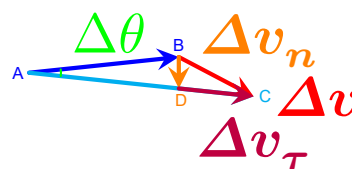


图 1-12 $\Delta \mathbf{v}$ 的分解



思考 下列说法正确与否

- (1) 作曲线运动的物体, 必有切向加速度;
- (2) 作曲线运动的物体, 必有法向加速度;
- (3) 具有加速度的物体, 其速率必随时间改变.

间的变化:

$$\text{角位置: } \theta = \theta(t)$$

$$\text{角位移: } \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\text{角速度: } \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{角加速度: } \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

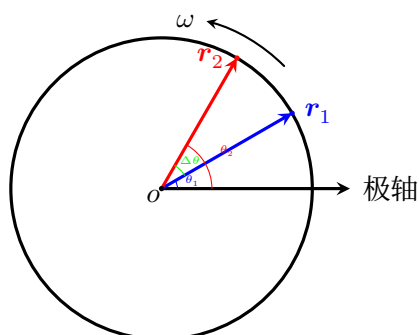


图 1-13 极坐标系描述圆周运动

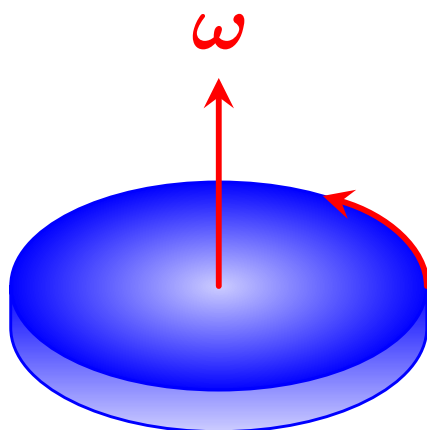


图 1-14 角速度方向, 垂直于转动平面

总结

极坐标系描述圆周运动的角量比较方便.

角速度的方向就是角位移的方向, 如图所示.

当质点作圆周运动时, 半径是常数, 只有角位置是 t 的函数, 这样只需一个坐标即角位置就可以描述质点的位置. 这和质点的直线运动颇有些类似. 因此, 我们也可比照匀变速直线运动的方法建立起描述匀角加速圆周运动的公式, 即在匀角加速圆周运动中有

总结 匀角加速圆周运动运动规律

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

总结 线量和角量之间的关系

$$ds = R d\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

角速度矢量与线速度矢量之间的关系

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

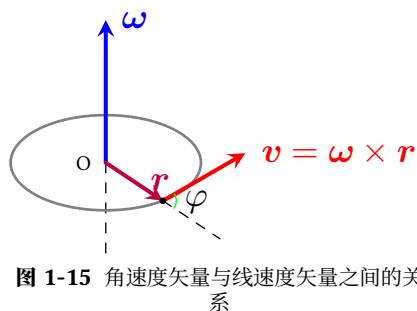


图 1-15 角速度矢量与线速度矢量之间的关系

例 1.4 一小球作匀减速圆周运动, 初始转速 $n = 1500 \text{ r/min}$, 经 $t = 50 \text{ s}$ 后静止. 1) 求角加速度 α 和从开始到静止质点的转数 N ; 2) 求 $t = 25 \text{ s}$ 时质点的角速度 ω ; 3) 设圆半径 $R = 1 \text{ m}$, 求 $t = 25 \text{ s}$ 时质点的速度和加速度.

1.4 运动学中的两类问题

- 1) 由已知的运动方程可以求得质点在任一时刻的速度和加速度.
- 2) 已知质点的加速度以及初始条件, 可求质点速度及其运动方程.


$$\mathbf{r}(t) \xrightleftharpoons[f]{\frac{d}{dt}} \mathbf{v}(t) \xrightleftharpoons[f]{\frac{d}{dt}} \mathbf{a}(t)$$


- 1) $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.
- 2) $a = a(v)$ (以直线情况为例).

$$\begin{aligned} a(v) = \frac{dv}{dt} &\Rightarrow dt = \frac{dv}{a(v)} \\ \Rightarrow \int_0^t dt &= \int_v^{v_0} \frac{dv}{a(v)} \end{aligned}$$

- 3) $a = a(x)$ (以直线情况为例).

$$\begin{aligned} a(x) = \frac{dv}{dt} &= \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow a(x) dx = v dv \\ \int_{x_0}^x a(x) dx &= \int_{v_0}^v v dv \end{aligned}$$

 **例 1.5** 一质点沿半径为 1 m 的圆周运动, 它通过的弧长 s 按 $s = t + 2t^2$ 的规律变化. 问它在 2 s 末的速率、切向加速度和法向加速度各是多少?

 **例 1.6** 一质点沿 x 轴运动 $t = 0$ 时, 质点位于 x_0 , 初速度为 v_0 . (1) 当 $a = kt + c$ 时, 求任意时刻质点的速度及位置; (2) 当 $a = kv$ 时, 求任意时刻质点的速度及位置; (3) 当 $a = kx$ 时, 求任意时刻质点的速度.

分析: 已知加速度是时间、速度或坐标的函数, 求任意时刻质点的速度及位置, 可用积分法计算. 积分时应注意变量的变换以及积分上下限的确定.

第二章 质点动力学

力,形之所以奋也。

《墨经》

第一章讲述了质点机械运动的描述,即用位矢、位移、速度和加速度等物理量来描述质点的运动,并研究了这些描述运动的物理量之间的关系。本章将研究物体的机械运动与物体自身性质、物体和物体之间相互作用的关系,以阐明物体运动状态及其改变的原因。这就是动力学的内容。

英国物理学家牛顿(1642—1727年)在其1687年出版的《自然哲学的数学原理》中提出了机械运动的三条基本定律。这三条定律统称为牛顿运动定律。它们是动力学的基础。以这三个定律为基础的力学体系称为牛顿力学或经典力学。

2.1	牛顿运动定律	15
2.2	动量定理和动量守恒定律	20
2.3	功 动能 势能 机械能守恒定律	23
2.4	质点的角动量和角动量守恒定律	32

2.1 牛顿运动定律

2.1.1 牛顿第一定律

📖 牛顿第一定律

任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态,直到外力迫使它改变运动状态为止。

数学表达: 当 $F = 0$ 时, v 是**恒矢量**

物体的这种运动状态通常称为**惯性运动**。牛顿第一定律又称为**惯性定律**。

🔍 **惯性** 指物体本身要保持运动状态不变的性质。

⚙️ **思考** 地球表面(地面)是惯性参考系吗?

💡 注意

该定律只在惯性系中成立。定义惯性定律成立的参考系为**惯性系**。

📌 总结

力是使物体速度**改变**的原因,而不是维持速度的原因。

2.1.2 牛顿第二定律

📖 牛顿第二定律

动量为 p 的物体,在合外力 F 的作用下,其动量随时间的变化率等于

作用于物体的合外力.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} = m\mathbf{a}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

(宏观低速运动中, m 视为常量, $\frac{dm}{dt} = 0$)

说明

- 1) **瞬时**关系: 有力则有加速度, 力消失则加速度随之消失.
 $a \propto F$, 两者方向一致.
- 2) 牛顿定律只适用于质点.
- 3) 加速度与质量关系. $a \propto \frac{1}{m}$, 表明质量越大, 加速度越小. 也即质量大的物体抵抗运动状态变化的能力强, 即**惯性 (维持原有运动状态的性质) 大**.
- 4) 力的**叠加原理**: 当几个力同时作用于物体时, 其合力所产生的加速度等于每个力单独存在时所产生的加速度的矢量和.

牛顿第二定律在直角坐标系中的分量形式

$$\mathbf{F} = m\frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + m\frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + m\frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$

即

$$\mathbf{F} = ma_x\mathbf{i} + ma_y\mathbf{j} + ma_z\mathbf{k}$$

牛顿第二定律在自然坐标系中的形式

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n) = m\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}_0 + m\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}_0$$

ρ 为 A 处曲线的曲率半径.

$$F_\tau = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$F_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

惯性质量与引力质量

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

牛顿第二定律中的质量也常被称为**惯性质量**, 是物体惯性大小的量度. 体现的是**物体对运动状态改变的抵抗程度**.

万有引力定律的数学形式为

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_r$$

2.1 牛顿运动定律

其中的质量称为**引力质量**,体现的是**物体被引力吸引的倾向**.

种种实验(精度 10^{-12})表明,**惯性质量的大小等于引力质量**.爱因斯坦的广义相对论就建立在惯性质量等于引力质量的假定上,即一个不受引力影响,以恒定加速度运动的参考系(非惯性系)等价于一个受均匀的恒定引力场影响下的惯性系.

非惯性系中应用牛二定律

相对于惯性系作加速运动的参考系是**非惯性系**.在**非惯性系中,牛顿运动定律是不成立的**.

Q 惯性力 在非惯性系中应用牛顿运动定律时,除了考虑物体相互作用引起的力以外,还需附加一个由于非惯性系而引起的力—**惯性力**($F_{\text{惯}}$),在非惯性系中适用牛顿第二定律的表达式为

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{惯}} = m\boldsymbol{a}'$$

式中 \boldsymbol{a}' 为物体相对于非惯性系的加速度.

平移加速参考系中质点所受的惯性力:

$$\boldsymbol{F}_{\text{惯}} = -m\boldsymbol{a}_0$$

式中 \boldsymbol{a}_0 是非惯性系相对于惯性系的加速度.

匀速转动参考系中静止质点所受的惯性力

$$\boldsymbol{F}_{\text{惯}} = -m\boldsymbol{a}_n = m\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_r = m\omega^2 R\boldsymbol{e}_r \quad (\boldsymbol{e}_r \text{ 为位矢 } \boldsymbol{r} \text{ 方向上的单位矢量})$$

2.1.3 牛顿第三定律

📖 牛顿第三定律

两个物体之间作用力 \boldsymbol{F}_{12} 和反作用力 \boldsymbol{F}_{21} ,沿**同一直线,大小相等,方向相反**,分别作用在**两个**物体上.

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$$

🔔 注意 作用力与反作用力特点

- 1) 大小相等、方向相反,总是成对出现,分别作用在**不同**物体上,**同时存在,同时消失**,它们不能相互抵消.
- 2) 是同一性质的力.如果作用力是弹性力,那么反作用力也一定是弹性力;如果作用力是摩擦力,那么一定也有一个性质为摩擦力的反作用力存在.
- 3) 作用力和反作用力区别于平衡力.作用力和反作用力大小相等,方向相反,但作用在**不同**的物体上,不是一对平衡力,因而,讨论力的作用效果时,这两个力不能互相抵消.

⚙️ **思考** 天和实验舱内宇航员可以飘在空中,是因为没有受到地心引力吗?为什么赤道地区的重力加速度值最小?生活中我们经常有离心力的叫法,如何理解离心力?

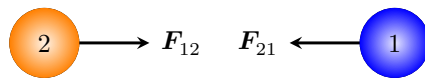


图 2-1 作用力和反作用力

要应用牛顿运动定律求解质点动力学问题, 首先必须能正确分析物体的受力情况. 力学中常见的几种力是万有引力及重力、弹性力、摩擦力.

2.1.4 几种常见力

Q 万有引力 1680 年, 牛顿在开普勒的行星运动三定律基础之上提出了万有引力定律, 具体内容为: 宇宙中任何两个物体之间都存在着相互的吸引力(这种力即称为万有引力), 其中任一物体所受力的大小与两物体质量的乘积成正比, 而与两物体间距离的平方成反比, 引力的方向沿两物体的连线.

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$$

万有引力常数 $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Q 弹性力 发生形变的物体, 由于要恢复原状, 对与它接触的物体产生的作用力. 如压力、张力、拉力、支持力、弹簧的弹力.

物体之间通过接触面或接触点, 在彼此挤压的情况下, 两个物体都会发生形变(这种形变常常十分微小以至于难以观察到), 因而产生对对方的弹力作用. 比如, 桌面压在桌子腿上, 桌子腿因受压缩形变而产生向上的弹力, 支撑着桌面. 例如, 物体搁置在支承面上, 物体与支承面之间因相互挤压也会产生弹力. 这种弹力通常称为**正压力**或**支承力**.

正压力或支承力的**大小取决于相互挤压的程度**, 它们的方向总是**垂直于物体间的接触面**或接触点的公切面而指向对方. 这种力也可称为**法向力**.

对于绳或线, 由于它是柔软的, 它没有抵抗弯曲、扭转的性能, 也不能沿绳(或线)方向受外力的推压, 而只能与相接触的物体沿绳子方向互施拉力. 这种拉力是由于绳发生了形变(通常也十分微小)而产生的. 它的大小取决于绳被拉紧的程度, 它的方向总是沿着绳且指向绳要恢复原状而收缩的方向.

绳产生拉力时, 绳的内部各段之间也有相互的弹力作用, 这种内部的弹力称为**张力**. 如图所示, 忽略绳的质量时或绳子作匀速直线运动或静止时, 绳内各处的张力 T 都相等; 此张力也等于连接体对它的拉力 T_1 和 T_2 以及它对连结体的拉力, 即 T_1 、 T_2 的反作用力(绳子因形变而产生的拉力) T'_1 、 T'_2 .

Q 静摩擦力 两个物体(主要指固体)有一接触面而且相互间有挤压作用, 当沿着这个接触面的方向有**相对运动**或**相对运动趋势**时, 在两者的接触面上就会产生相互作用的摩擦力. 摩擦力产生在直接接触的物体之间, 并以两物体之间是否有相对运动或相对运动趋势为先决条件. 摩擦力的方向沿着两物体接触面的切线方向, 并**与物体相对运动或相对运动趋势的方向相反**.

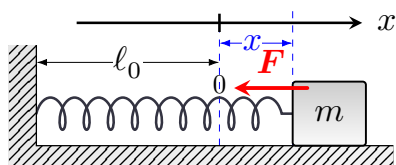


图 2-2 弹力

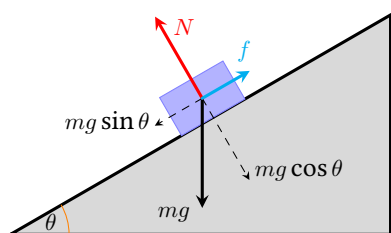


图 2-3 摩擦力和支承力

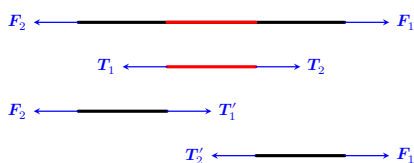


图 2-4 绳子的张力

2.1 牛顿运动定律

静摩擦力的大小随外力的变化而变化.

最大静摩擦力: $f_{\max} = \mu_0 N$, μ_0 : 静摩擦系数

滑动摩擦力 当物体相对于接触面滑动时, 物体所受到接触面对它的阻力. 其方向与滑动方向相反. $f = \mu N$, μ : 滑动摩擦系数

2.1.5 牛顿定律的应用

三个牛顿运动定律是一个整体, 各有侧重, 然而互相紧密联系. 第一运动定律从概念指出了外力, 惯性与运动状态之间的定性关系; 第二运动定律从定量方面描述了运动状态的改变与外力、惯性的关系, 描述了运动状态的改变方面的具体情况; 第三运动定律指出了力的相互作用性. 在解决各种力学问题时, 有时着重使用三者之一或其中两个, 有时往往需要三者联合使用.

在运动学中曾讲过比较常见的需要求解的基本问题有两类, 在动力学中也有这样的两类基本问题.

第一类问题是**已知运动方程**, 求质点的速度、加速度, 求质点所受到的力.

第二类问题是**已知所受到的力**, 以及初始条件, 求质点的加速度、速度、运动方程. 这类问题是**难点和重点**.

这两类问题用到的主要数学工具和运动学中的一样: 在第一类问题中主要是求导 (微分运算), 在第二类问题中主要是积分 (解微分方程).

本章运用牛顿运动定律解决动力学问题的步骤大致如下. 质点动力学基本运动方程:

$$F = ma$$

解题思路

- 1) 选取研究对象.
- 2) 分析受力, 画受力图 (隔离法, 整体法).
- 3) 确定参考系, 分析物体的运动.
- 4) 选取坐标系.
- 5) 列方程求解.

$$\text{直角坐标系: } \sum_i F_{ix} = ma_x; \sum_i F_{iy} = ma_y; \sum_i F_{iz} = ma_z$$

$$\text{自然坐标系: } \sum_i F_{i\tau} = ma_\tau = m \frac{dv}{dt}; \sum_i F_{in} = ma_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

练习 2.1 利用本题结果估算10 m跳台泳池的水有多深才能保证运动员的安全 (假定 $v = 2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度对运动员来说无安全风险, 运动员重50 kg).

例 2.1 质量为 m 的球以初速度 v_0 落入水中, 受到水的阻力 $f = kv^2$ (k 为常量, 等于 $20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$), 假定球的密度等于水的密度, 求球在速度为 v 时的位移.

分析: 本题属第二类动力学问题 (积分问题), 已知质点所受的力和

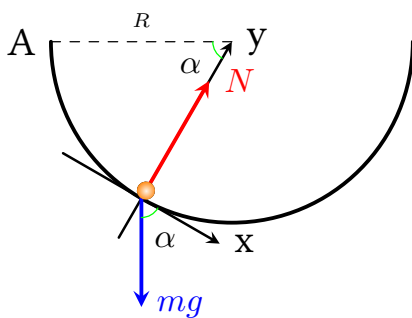


图 2-5

初始条件, 求质点的位移. 选取研究对象—球; 分析受力; 确定参考系 (默认是地面); 选取坐标系; 列方程求解.

例 2.2 质量为 m 的小球最初位于 A 点, 然后沿半径为 R 的光滑圆弧面下滑 (图2-5). 求小球在任一位置时的速度和对圆弧面的作用力.

分析: 已知条件是任一位置的弧长 $s = R\alpha$ 或者角度 α , 可以在自然坐标系中列牛顿方程, 然后将加速度通过链式求导转化为关于弧长或者角度的求导 ($\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt}$, 或者 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$), 分离变量积分求得速度.

例 2.3 质点 m 在 x 轴上运动, 受力为 $f = -\frac{k}{x^2}i$, $x = A$ 时, $v = 0$, 求 $x = A/4$, $v = ?$

分析: 这里是已知位移始末条件, 初速度, 求速度. 可以想办法将加速度 $\frac{dv}{dt}$ 改写为关于位移 x 的求导, 分离变量然后两边积分.

2.2 动量定理和动量守恒定律

2.2.1 质点的动量定理

动量

物体的运动状态不仅取决于速度, 而且与物体的质量有关, 因此引入动量这一物理量.

动量

$$p = mv$$

具有矢量、瞬时和相对性, 是物体机械运动的量度, 是由质点运动状态 (v) 决定的状态量.

思考 如何理解动量的相对性?

动量定理和冲量

$$F = ma \Rightarrow F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt} \Rightarrow dp = F \cdot dt$$

两边积分得

$$\int_{p_0}^p dp = \int_{t_0}^t F \cdot dt$$

动量定理

$$I = \int_{t_0}^t F \cdot dt = p - p_0 = mv - mv_0$$

I 定义为冲量, 单位 $N \cdot s$, 反映力对时间的累积效应.

总结

质点动量定理反映的是力的持续作用和物体机械运动状态变化之间的关系. 该定理表明质点动量的变化取决于力的冲量的大小.

平均冲力

动量定理在碰撞和冲击类问题处理中很实用. 在这类问题中, 作用于物体上的力是时间极短、数值很大且变化很快的力, 这种力称为**冲力**. 冲力大小随时间变化很复杂, 很难把冲力随时间变化的具体关系确定出来, 也就无法用牛顿第二定律判断物体的状态. 但如果能够知道物体在碰撞前后的动量, 便可以根据动量定理, 计算出物体所受冲力的冲量, 如果再能测出物体的碰撞时间, 则可以计算出在碰撞过程中平均冲力 F 的大小, 进而根据平均冲力来估算冲力的最大值.

平均冲力的大小相当于图中矩形的高, 矩形的面积等于冲力曲线与时间轴所围面积.

🔍 平均冲力

$$\bar{F} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t F \cdot dt$$

$$I = \bar{F} \cdot \Delta t$$

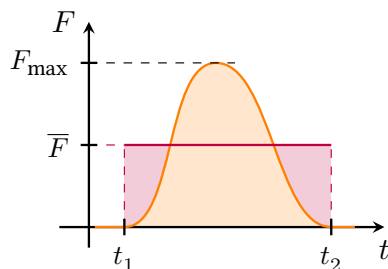


图 2-6 平均冲力示意图

思考 用动量定理和平均冲力解释为什么快递箱可以塞泡沫材料避免快件损坏？为什么标枪运动员要将标枪置于身体后方舒展手臂掷出？成龙电影《A 计划》中有一场成龙从钟楼高处落下摔到地面的实拍剧情片段（非常拼命的做法），非好莱坞那种特效制作，用所学知识解释成龙为什么还能站起来接着完成拍摄？

总结

物体**动量变化一定**的情况下, 作用时间越**长**, 物体受到的**平均冲力越小**; 反之则越大.

例 2.4 质量为 0.2 kg 的小球以 $v_0 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率沿与地面法向成 60° 的方向射向光滑水平地面 (图 2-7), 与地面碰撞后, 以同样大小的速率沿与地面法向成 60° 的方向飞出. 求: (1) 小球得到的冲量; (2) 若撞击时间为 0.01 s , 求地面施于球的平均冲力的大小和方向.

分析: 以小球为研究对象, 建立直角坐标系, 分别在 x 轴和 y 轴方向应用动量定理计算 x 方向的冲量分量 I_x 和 y 轴方向的冲量分量 I_y , 然后合成: $I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$ 并判断方向.

2.2.2 质点系的动量定理

在自然界中甚至在日常生活中都大量存在着这样的力学问题, 即研究的对象不仅仅是一个物体, 而是同时涉及多个相互作用的物体. 研究这类问题的基本方法, 是根据所要解决问题的需要, 把有相互作用的物体组成的总体或物体组称为**系统**, 如果组成系统的物体都可以视为质点, 则称系统为**质点系**.

质点系受力可以分为两类: 一类是系统内部各质点间的相互作用力, 称为**内力**; 另一类是系统外其他物体对系统内质点的作用力, 称为**外力**.

对第 i 个质点应用动量定理可得

$$\int_{t_0}^t (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) dt = m_i \mathbf{v}_i - m_i \mathbf{v}_{i0}$$

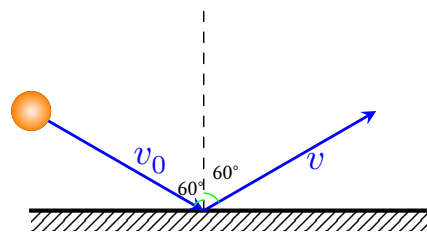


图 2-7

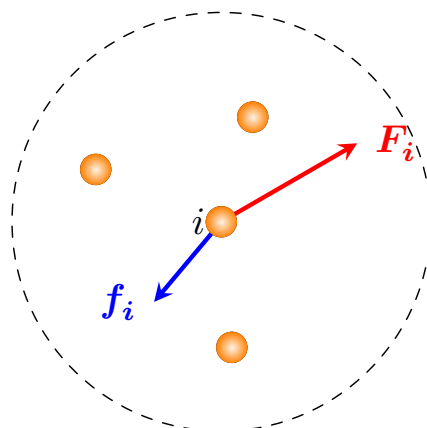


图 2-8 质点系中质点所受内力和外力示意图

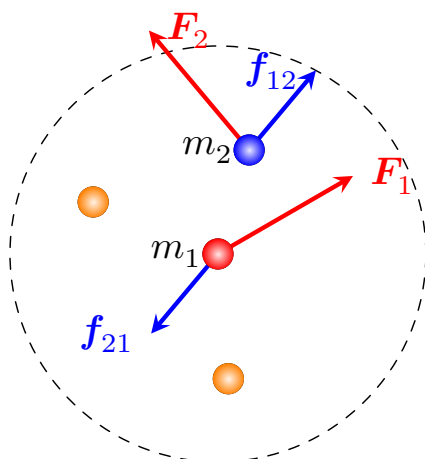


图 2-9 质点系中两个质点所受内力大小相等, 方向相反, 是一对作用力和反作用力

对所有质点分别应用动量定理并加起来得到

$$\int_{t_0}^t (\sum F_i + \sum f_i) dt = \sum m_i v_i - \sum m_i v_{i0}$$

其中 $\sum f_i = 0$, 得到

$$\int_{t_0}^t \sum F_i dt = p - p_0 = \Delta p$$

总结

质点系统所受合外力的冲量等于系统总动量的增量。 **内力不能改变整个系统的总动量。**

2.2.3 动量守恒定律

$$\int_{t_0}^t \sum F_i dt = p - p_0$$

当 $\sum F_i = 0$ 时, 有 $p = p_0$.

动量守恒定律

$$p = \sum m_i v_i = \text{常矢量}$$

动量守恒定律是自然界的一条重要的客观规律, 下面对它的意义和应用作几点说明.

注意

- 1) 系统的总动量守恒并不意味着系统内各个质点的动量不变, 而是指系统动量总和不变. 系统内各质点的动量是可以互相转移的.
- 2) 当外力作用 **远小于** 内力作用时, 可近似认为系统的总动量守恒. (如: 碰撞, 打击等)
- 3) 在同一惯性参考系中, 若系统在某一直角坐标系的某个轴向上满足守恒条件, 则系统在该轴向上动量守恒.
- 4) 动量守恒定律虽然来自研究物质宏观运动规律的牛顿力学, 但近代物理研究表明, 在研究微观粒子的运动规律时, 牛顿运动定律不再适用, 而动量守恒定律仍然适用. 甚至许多基本粒子的发现, 都与动量守恒定律的应用密切相关. 因此, 动量守恒定律是自然界中最普遍、最基本的定律之一.

2.3 功 动能 势能 机械能守恒定律

Q 动量守恒的分量式

$$p_x = \sum m_i v_{ix} = \text{常矢量}$$

$$p_y = \sum m_i v_{iy} = \text{常矢量}$$

$$p_z = \sum m_i v_{iz} = \text{常矢量}$$

碰撞过程的动量守恒

完全弹性碰撞

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$

完全非弹性碰撞

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

$$E_{\text{损}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2$$

例 2.5 一个物体质量为 m_1 ，初速度为 v_1 ，在光滑的水平面上与一个质量为 m_2 的静止的物体发生对心弹性碰撞 (碰撞前后物体运动始终在一条直线上)。求碰后两物体的速度。

例 2.6 水面上有一质量为 M 的木船，开始时静止不动，从岸上以水平速度 v_0 将一质量为 m 的砂袋抛到船上，然后二者一起运动。设运动过程中船受的阻力与速率成正比，比例系数为 k ，砂袋与船的作用时间极短，试求：(1) 砂袋抛到船上后，船和砂袋一起开始运动的速率。(2) 砂袋与木船从开始一起运动直到静止时所走过的距离。

思考 轻线悬挂静止的球受到子弹撞击，将子弹和球视为系统，子弹平射时能否应用动量守恒定律？斜射时能否应用动量守恒定律？

练习 2.2 分析并理解三种情况下的碰撞结果。 $m_1 \gg m_2$, $m_1 \ll m_2$, $m_1 = m_2$ 。

2.3 功 动能 势能 机械能守恒定律

2.3.1 功 功率

功的概念来源于各种机械的“工作”，这类“工作”的共同特点是：都有力的作用，而且物体在力的作用下沿力的方向发生了位移，在力学中就称这个力对物体做了“功”。力的空间积累过程，由功的定义来描述。

恒力的功

质点在恒力 F 作用下，沿直线运动，运动的位移为 Δr ，力与位移的夹角为 θ 。如图所示，则力 F 在这段位移上对物体所作的功为

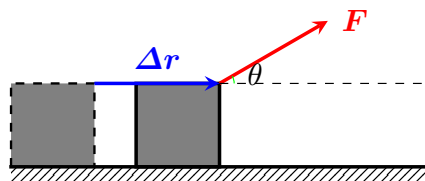


图 2-10 恒力所做的功

$$W = F|\Delta r|\cos\theta = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

总结

恒力的功等于力在位移方向的分量与位移大小的乘积.

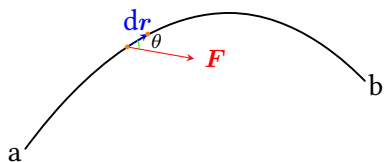


图 2-11 变力做功

变力的功

如图所示, 一质点在变力(大小、方向沿途变化) \boldsymbol{F} 的作用下沿着曲线从始点 a 移动到终点 b . 为了计算此变力在全过程中所做的功, 在曲线上任取一段无限小的路程 ds , 在这微小的路段上, 力 \boldsymbol{F} 可视为恒力, 位移元 $d\boldsymbol{r}$ 的大小可看成与路程相等, 即 $|d\boldsymbol{r}| = ds$, 则 \boldsymbol{F} 在 ds 段所做的元功 dW 为

$$dW = F_\tau |d\boldsymbol{r}| = F |d\boldsymbol{r}| \cos \theta = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

变力沿曲线 l 从 a 到 b 全过程所做的功为

$$W = \int dW = \int_l F |d\boldsymbol{r}| \cos \theta = \int_l \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

总结

变力的功等于质点受的力沿路径的线积分, 或者说等于力对位移的积分.

注意

- 1) 功的单位: J
- 2) 功是标量, 没有方向, 有正负
- 3) 由于功是描述力的空间积累过程的物理量, 因此, 功是过程量, 与受力质点在空间的运动路径有关.
- 4) 又由于用来描述做功路径的位置矢量与惯性参考系的选择有关, 因此, 功是相对量, 同一过程相对于不同的惯性参考系, 功的数值并不相同. (例子: 传送带上物体受到的摩擦力所做功在不同参考系中不同)
- 5) 作用力与反作用力所做的功不一定总是等值反号. 原因是受力双方的位移不一定相等.(例子: 子弹射入墙内受到摩擦力所做功与墙受到的摩擦力所做功.)

直角坐标系中功的计算解析式

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b (F_x \boldsymbol{i} + F_y \boldsymbol{j} + F_z \boldsymbol{k}) \cdot (dx \boldsymbol{i} + dy \boldsymbol{j} + dz \boldsymbol{k}) \\ &= \int_a^b (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \end{aligned}$$

合力的功

质点受 F_1, F_2, \dots, F_n 作用沿路径 L 由 a 运动到 b 时, 合力 F 对质点做的功应为

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_a^b \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_a^b \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r} \\ &= W_1 + W_2 + \dots + W_n \end{aligned}$$

总结

合力的功 等于各分力沿同一路径所做的功的**代数和**.

例 2.7 质量为 2 kg 的质点在力 $F = 12ti$ 的作用下, 从静止出发, 沿 x 轴正向作直线运动. 求前三秒内该力所作的功.

例 2.8 如图2-12所示, 在光滑水平的地面上有一平板车 A, 车上有一质量为 m 的物体 B, 在水平恒力 F 的作用下, 车的位移量为 Δx_A . 在此过程中, B 在车上向后滑动距离 d , 若已知 A、B 间的滑动摩擦系数为 μ , 求 (1) 恒力 F 的功; (2) A 对 B 的滑动摩擦力 f_r 和 B 对 A 的滑动摩擦力 f_r' 的功.

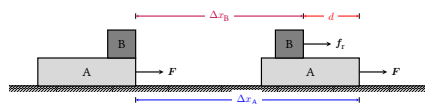


图 2-12

功率

功率是描述力对物体**做功快慢程度**的物理量. 掌握功率的概念在工程技术上十分重要.

功率 力在单位时间内所作的功.

平均功率

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

瞬时功率

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

单位: W 或 J/s, 1 马力 = 746 W

2.3.2 动能定理

前面介绍了如何从力的空间积累概念出发去计算功, 现在要进一步讨论的问题是: 力对物体做功将会引起什么效果, 如何定量地表达这种效果.

假设有一质量为 m 的质点, 在一变化的合外力 F 的作用下, 从起点 a 沿一曲线路径运动到终点 b , 在 a 点和 b 点处质点的运动速率分

思考 对于运动员来说, 其最大功率可视为稳定值, 即功率恒定. 利用功率物理量公式解释: 为什么举重运动员的挺举成绩一般高于抓举成绩? 或者说为什么抓举比挺举费力?

别为 v_1 和 v_2 , 如图2-13所示. 变力 F 在此过程中所作的总功为

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F \cos \theta ds \\ &= \int_a^b F_\tau ds = m \int_a^b a_\tau ds \\ &= m \int_a^b \frac{dv}{dt} ds = m \int_a^b \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} ds \\ &= m \int_{v_1}^{v_2} v dv \\ &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \end{aligned}$$

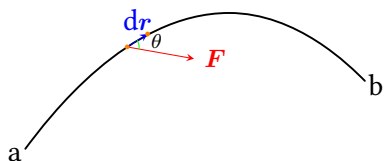


图 2-13

动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

动能定理 合外力对质点所做的功等于质点动能的增量.

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

注意

- 1) 动能是标量, 只有正值; 是状态量, 反映**物体做功的本领**.
- 2) 动能具有**瞬时性**和**相对性**.
- 3) 动量和动能都与质量和速度有关, 都是物体运动的量度, 但适用于不同的范畴. 当物体以机械运动的方式进行运动的传递, 用动量来量度. 物体**动量的改变反映了物体机械运动的转移**. 如果物体运动方式不局限于机械运动, 而是从一种运动形式转化为另一种运动形式, 如机械运动转化为热能, 物体的动能表示**做机械运动的物体转化为其它形式运动的能力**.

例 2.9 一质量为4 kg的物体可沿 Ox 轴无摩擦地滑动, $t = 0$ 时物体静止于原点. 试求下列情况中物体的速度大小:(1) 物体在力 $F = 3 + 2t$ 的作用下运动了3 s;(2) 物体在力 $F = 3 + 2x$ 的作用下运动了3 m.

2.3.3 质点系的动能定理

下面研究质点组成的系统的功与动能变化之间的关系.

一个由 n 个质点组成的质点系, 考察第 i 个质点. 对该质点

$$W_{i外} + W_{i内} = E_{k2i} - E_{k1i}$$

对系统内所有质点求和

$$\sum_{i=1}^n W_{i外} + \sum_{i=1}^n W_{i内} = \sum_{i=1}^n E_{k2i} - \sum_{i=1}^n E_{k1i}$$

$$W_{外} + W_{内} = E_{k2} - E_{k1}$$

质点系动能定理

所有外力对质点系做的功和内力对质点系做的功之和等于质点系总动能的增量。

总结

内力的功与内力的冲量不同，内力的冲量不能改变系统的总动量，但**内力的功却可以改变系统的总动能**。（例子：火药爆炸）

思考 质点系的内力总冲量为 0，那么质点系内力做的功的代数和是否一定为 0？

2.3.4 保守力做功

保守力与非保守力

在介绍功的普遍定义时讲到，功是过程量，在一般情况下，某力所做的功既与做功过程的始、末位置有关，又与做功的具体路径有关。然而，有一些力在做功方面具有一个重要的特点，从同一起点到同一终点所做的功，与做功路径无关。换句话说，在这种力的作用下，从任一起点沿任意闭合路径回到该起点所做的功恒为零。这种力称为**保守力**。在力学中最常见的保守力有重力、弹性力和万有引力。下面分别介绍这三种力的功的计算法，进而介绍在保守力的作用下力学系统中的势能概念。

重力做功

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b -mg\mathbf{k} \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= \int_a^b -mg dz = mg(z_a - z_b) \end{aligned}$$

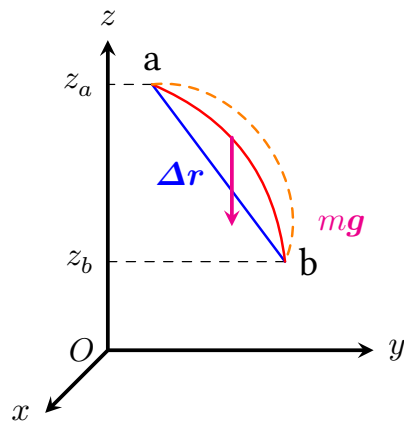


图 2-14 重力做功图示

总结

重力做功仅取决于质点的始、末位置 z_a 和 z_b ，与**质点经过的具体路径无关**。

万有引力做功

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_a}^{r_b} -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r} &= |d\mathbf{r}| \cos(\pi - \theta) = |d\mathbf{r}| \cos \varphi = dr \\ W &= -GMm \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = -GMm \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \end{aligned}$$

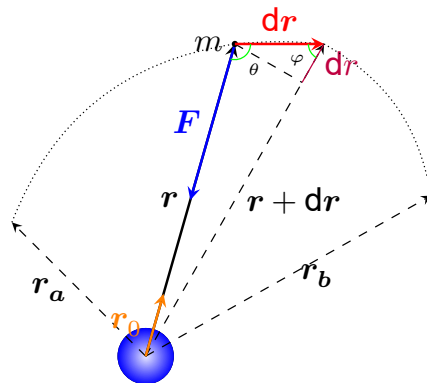


图 2-15 万有引力做功图示

总结

万有引力做功只与质点的始、末位置有关，而**与具体路径无关**。

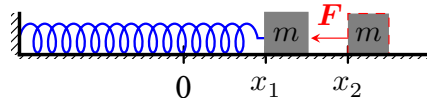


图 2-16 弹性力做功图示

弹性力的功

$$\begin{aligned}
 W &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kx \mathbf{i} \cdot d\mathbf{x} \mathbf{i} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx \\
 &= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2
 \end{aligned}$$

总结

弹性力作功只与弹簧的起始和终止位置有关，而**与弹性变形的过程无关**。

保守力 做功与路径无关，只与始末位置有关的力。

保守力的另一定义 满足

$$\oint_L \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

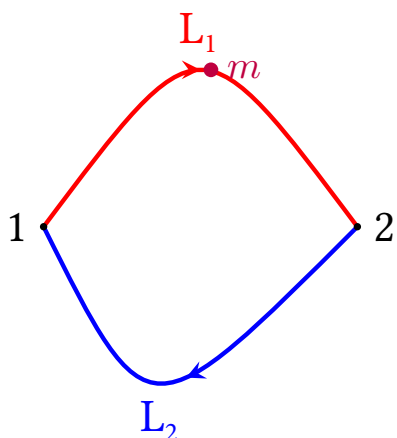


图 2-17 保守力做功与路径无关

的力。

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{1(L_1)}^2 \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{2(L_2)}^1 \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{1(L_1)}^2 \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \int_{1(L_2)}^2 \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

常见的保守力

- 1) 万有引力 (或有心力)
- 2) 弹力 (或位置的单值函数)
- 3) 重力 (或恒力)

常见的非保守力

- 1) 摩擦力
- 2) 爆炸力

2.3.5 势能

高处的重锤落下时能打桩，拉开的弓释放时能射箭，来自太空的大块陨石一旦落入地球将会造成灾难等等。这都说明了在重力、弹性力或万有引力等保守力的作用下，物体由于位置的变化而显示出其做功的本领，而在它们的位置尚未发生变化时，这种本领则以一种能量的形式存在于物体所在的各个位置上。人们将这种与物体的所处位置有关的能量，称为**势能** (或位能)，用 E_p 表示。**势能的概念是以保守力做功为前提而引入的**。三种常见保守力的功都可以用始、末状态的一种**位置函数**之差来表示，**这种位置函数就是势能**。

势能 由物体的**相对位置**所确定的系统能量称为**势能** (E_p)

保守力的功与势能的关系

如果我们用 E_{pa}, E_{pb} 分别表示保守力作用下运动物体在始、末位置 a、b 的势能, 用 $F_{\text{保}}$ 表示保守力, 用 $W_{\text{保}}$ 表示在此过程中保守力所做的功, 则它们之间的普遍关系为

$$W_{\text{保}} = \int_a^b \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} = E_{pa} - E_{pb} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p$$

总结

保守力做功在数值上等于**系统势能增量的负值**.

注意

- 1) 势能是一个系统的属性, 为以保守力形式相互作用的物体系统所共有.
- 2) 保守力的功是指相互作用的一对保守力的功, 而不是一个力的功. (例子: 万有引力做功, 通常将其中一个质点视为不动, 讨论另一个质点所受万有引力的功.)
- 3) 势能是相对量, 相对于势能的零点而言.

$$W_{\text{保}} = \int_a^{\text{势能零点}} \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r} = E_{pa} - 0 = E_{pa}$$

- 4) 势能函数的形式与保守力的性质密切相关, 对应于一种保守力的函数就可引进一种相关的势能函数.
- 5) 当保守力做**正功**时, 系统势能**减少**; 保守力做**负功**时, 系统势能**增加**.

设空间 r_0 点为势能的零点, 则空间任意一点 r 的势能为:

$$E_p(r) = E(r) - E_p(r_0) = \int_r^{r_0} \mathbf{F}_{\text{保}} \cdot d\mathbf{r}$$

总结

空间某点的势能 E_p 在数值上等于**质点从该点移动到势能零点时保守力做的功**.

在许多情况下, 我们关心的并不是某点上势能的数值, 而是某两点之间的势能差. 在同一坐标系中, 任意两点之间的**势能差与势能零点的选取无关**.

势能是标量. 势能的单位与功的单位相同.

根据上述概念, 不难得出三种常见保守力作用系统的势能表达式.

重力势能

$$E_p = \int_h^0 -mg dy = mgh$$

地面 $h = 0$ 处为势能零点

Q 弹性势能

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

弹簧自由端为势能零点

Q 引力势能

$$E_p = -G \frac{Mm}{r}$$

无限远处为势能零点

2.3.6 功能原理

Q 质点系的动能定理

$$W_{\text{外}} + W_{\text{内}} = E_{k2} - E_{k1}$$

其中 $W_{\text{内}} = W_{\text{保内}} + W_{\text{非保内}}$,

$$W_{\text{外}} + W_{\text{保内}} + W_{\text{非保内}} = E_{k2} - E_{k1}$$

因为 $W_{\text{保内}} = -(E_{p2} - E_{p1})$, 所以

$$W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})$$

Q 机械能

$$E = E_k + E_p$$

🎓 质点系的功能原理

$$W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = E_2 - E_1$$

质点系**机械能的增量**等于**所有外力**和**所有非保守内力**所作功的代数和.

📖 说明

- 1) 功能原理给出了一切外力和非保守内力所做的功与系统的机械能之间的传递与转换关系. 外力对系统做**正功**, 使系统的**机械能增加**; 外力对系统做**负功**即系统对外界做正功, 意味着系统的**机械能要减小**.
- 2) 系统内的**非保守力做功** (如系统内的摩擦力做功), 意味着系统内部发生了**机械能与非机械能的其它形式能 (如热能) 的转化**.
- 3) 质点系的功能原理与动能定理物理内容一样, 但前者表示机械能改变与功的关系, 后者表示动能改变与功的关系.

功能原理为解决含有保守力和非保守力的几个物体的相互作用问题提供了方便, 只要根据所研究的对象, 选好系统, 分清外力和内力,

2.3 功 动能 势能 机械能守恒定律

问题就很容易解决.

2.3.7 机械能守恒定律

机械能守恒定律

如果 $W_{\text{外}} = 0, W_{\text{非保内}} = 0$, 则

$$E = E_k + E_p = \text{恒量}$$

当系统只受**保守内力做功**时, 质点系的**总机械能保持不变**.

注意

- 1) 机械能守恒的条件是外力和非保守内力都不对系统做功, 或它们的功的代数和为零. 这里只强调这些力的功为零. 力为零, 功必然为零, 但**功为零, 力未必为零**. 不论这些力是否为零, 只要在某一过程中的任一瞬间这些力的总功为零, 则在此过程中系统的机械能守恒.
- 2) 机械能守恒时, 系统的总机械能保持不变, 但系统的**动能和势能仍可相互转化**. 这种转化是通过系统内的**保守力做功**来实现的.
- 3) 机械能守恒定律虽然教材是从牛顿定律推导而来, 但从根本上讲是一个**实验定律**, 适用范围比牛顿定律要广 (微观领域也适用).

2.3.8 能量守恒定律

能量是物质各种形式运动的普遍量度, 本章所讨论的机械能, 仅仅是物质机械运动形式的能量. 自然界中的物质运动形式是多种多样的, 除机械运动外, 还有热运动、电磁运动、化学运动、原子及原子核内部的运动等, 因此能量也有多种形式.

能量守恒定律

能量既不能消灭, 也不能创生, 只能**从一个物体传递给另一个物体**, 或者**从一种形式转化为其他形式**. 对于一个不与外界交换能量的封闭系统来说, 封闭系统内部, 无论发生何种变化过程, 各种形式的能量均可相互转化, 但系统的总能量不变. 这一普遍规律称为能量守恒定律.

说明

- 1) 能量守恒定律是自然界中具有最大普遍性的定律之一。
- 2) 自然界一切过程无一例外地遵守着这一定律，如果发现有所违反，那常常是因为过程中孕含着还未被认识的新事物。于是人们就按守恒定律要求去寻找和发现新事物。例如：中微子的发现。(20 世纪初 β 衰变的研究中发现实验结果与能量守恒相违背，泡利提出中微子假说，20 年后，科学终于证实了中微子的存在)。
- 3) 凡违背守恒定律的过程不可能实现，由此判断哪些过程是不可能发生的，例如：“永动机”。

思考 淘宝上有一种叫饮水鸟的玩具(自己搜索视频观看),只用一杯水就能让鸟头不断上下运动,这是否是一种永动机?

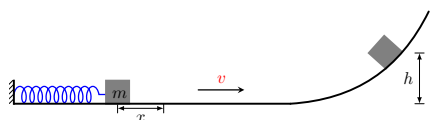


图 2-18

例 2.10 如图2-18所示,在一粗糙的平面上放置着一根劲度 $k = 500 \text{ N/m}$ 的弹簧,现将一质量为 $m = 1 \text{ kg}$ 的滑块与弹簧的一端接触,弹簧的另一端靠着墙壁,用手推动滑块压缩弹簧,当弹簧的压缩量 $x = 0.2 \text{ m}$ 时放手.滑块被弹出并沿一粗糙的弧形路面上行,当到达高度为 $h = 0.5 \text{ m}$ 处时的运动速率为 $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 求滑块在此运动过程中摩擦力所做的功.

分析: 选滑块、弹簧和地球为系统. 外力做功为 0, 滑块与路面之间的摩擦力为非保守内力, 摩擦力的功为 $W_{\text{非保内}}$. 弹性力和重力也是内力, 而且是保守内力, 保守内力所做的功已反映在系统的势能变化中. 以水平面为系统的重力势能零点, 以弹簧无变形状态为系统的弹性势能零点, 运用功能原理解题.

例 2.11 一质量为 m 的质点在指向圆心的平方反比力 $F = -k/r^2$ 的作用下, 作半径为 r 的圆周运动. 求此质点的速度 $v = ?$ 若取距圆心无穷远处为势能零点, 它的机械能 $E = ?$

分析: 自然坐标系下列出法向方向的牛顿方程求解, 指向圆心的平方反比力是保守力, 可引入势能概念, 利用势能和机械能的定义求解.

例 2.12 冲击摆是用来测量子弹速度的装置, 如图所示, 质量为 M 的沙箱, 用长为 L 的绳子悬挂起来. 设质量为 m 、速度为 v_0 的子弹以水平方向射入沙箱并滞留其内. 随后测得沙箱摆起的最大角度为 θ , 试求子弹的速度 v_0 .

分析: 此题可应用动量守恒(子弹射入沙箱瞬间过程)定律和机械能守恒(子弹和沙箱组成系统的摆动过程)联立求解.

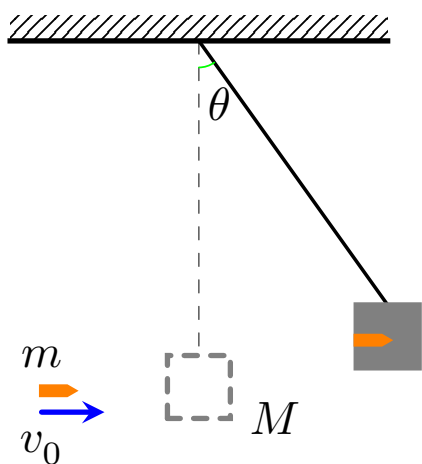


图 2-19 冲击摆

2.4 质点的角动量和角动量守恒定律

2.4.1 质点的角动量

人们在研究物体转动问题(如地球的自转和公转、宇宙中各种天体的运动、微观世界中基本粒子的运动等)时发现, 用线动量 $p = mv$ 去描述这类运动的动力学规律已不够方便也不够确切, 于是引入了一个

2.4 质点的角动量和角动量守恒定律

新的物理量—**角动量**, 并导出了一系列有关转动问题的定理和定律. 这里, 首先讨论其中最基本的一类问题—质点绕一定点运动的问题, 建立质点的角动量概念, 并导出质点的角动量定理和角动量守恒定律. 当物体不能看作质点并绕一固定轴转动时, 其力学规律将在刚体的定轴转动中讨论.

🔗 质点的角动量 质点相对 o 点的角动量

$$L = r \times mv$$

2.4.2 力矩

在讨论质点角动量变化的规律时需要用到力矩的概念, 这里先介绍力矩的普遍定义及其矢量表达式.

🔗 力矩 力 F 对某固定点 o 的力矩

$$M = r \times F$$

有心力对力心的力矩

🔗 有心力 物体所受的力始终**指向 (或背离)** 某一固定点. 则称该力为**有心力**. 该固定点称为**力心**.

≡ 总结

有心力对力心的力矩恒为零.

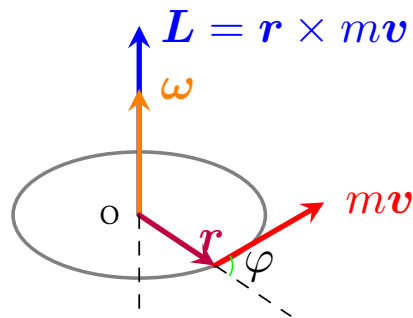


图 2-20 角动量定义图示

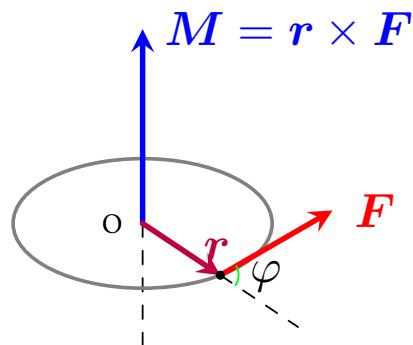


图 2-21 力矩定义图示

2.4.3 质点的角动量定理

根据牛顿定律, 外力会导致质点动量发生变化, 那么, 导致质点的角动量变化的原因是什么? 将角动量关于时间求导得到的物理量就是质点角动量变化的动力学原因.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times mv) = r \times \frac{d(mv)}{dt} + \frac{dr}{dt} \times mv$$

$$\frac{dL}{dt} = r \times F + v \times mv = r \times F$$

📖 质点的角动量定理

作用在质点上的**力矩**等于质点**角动量对时间的变化率**.

$$M = \frac{dL}{dt}$$

类比冲量定义, 定义

🔗 冲量矩

$$\int_{t_0}^t M dt$$

质点的角动量定理的积分形式

$$\int_{t_0}^t M \, dt = L - L_0$$

总结

在 t_0 到 t 时间内作用在质点上合外力矩的冲量矩, 等于这段时间内质点角动量的增量.

2.4.4 质点的角动量守恒定律

质点的角动量守恒定律

若 $M = 0$, 则

$$L = r \times mv = \text{常矢量}$$

若质点所受外力对某固定点的力矩为零, 则质点对该固定点的角动量守恒.

注意

合外力矩 $M = r \times F = 0$ 有可能是 $F = 0$, 也可能是 $F \parallel r$, 如万有引力.

例 2.13 如果质点在 $r = -3.5i + 1.4j$ (m) 的位置时的速度为 $v = -2.5i - 6.3j$ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$). 求此质点对坐标原点的角动量. 已知质点的质量为 4.0 kg .

第三章 刚体力学基础

大风车吱呀吱哟哟地转, 这里的风景呀真好看, 天好看, 地好看, 还有一起快乐的小伙伴, 大风车转啊转悠悠, 快乐的伙伴手牵着手, 牵着我的手, 牵着我的手, 今天的小伙伴, 明天的好朋友, 好朋友!

乔羽 (1927-2022, 《我的祖国》词作者) 《大风车》

3.1 刚体 刚体定轴转动的描述

3.1.1 刚体

通过前面的学习可知, 如果研究物体运动时, 可以忽略物体的大小和形状, 则可把物体视为质点. 但是, 在许多实际问题中, 物体的大小和形状往往不能忽略. 考虑物体大小和形状时, 物体的运动往往是比较复杂的. 本章仅考虑其中较为简单的情况, 即物体在力作用下所产生的形变很小, 对所研究的问题没有影响. 这时, 可以只考虑物体的大小和形状, 而忽略物体的形变, 这样的物体称为**刚体**. 刚体是我们引入的又一个理想物理模型.

由于刚体是有大小和形状的, 因此研究刚体运动时, 应把刚体视为许多质点组成的质点系; 而且由于刚体是没有形变的物体, 所以可以将刚体视为一个特殊的质点系——**系统内部各质点间没有相对运动**. 刚体的这一特点是以后研究刚体运动所必须随时考虑的, 也是研究刚体运动的基本方法.

🔍 刚体 在任何情况下形状和大小都保持不变的物体.

总结

刚体是实际物体 (固体) 的一种抽象, 是一种理想的力学模型.

3.1.2 刚体的基本运动

刚体的运动形式有平动、转动以及二者的结合.

🔍 在运动过程中, 若刚体内部任意两质元间的连线在各个时刻的位置都和初始时刻的位置保持**平行**, 这样的运动称为**刚体的平动**.

总结

- 1) 刚体平动时各质元位移、速度、加速度均相同.
- 2) 刚体质心的运动代表了刚体平动时各个质元的运动.

3.1	刚体 刚体定轴转动的描述	35
3.2	刚体定轴转动的转动定律	37
3.3	刚体定轴转动的动能定理	40
3.4	刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律	42

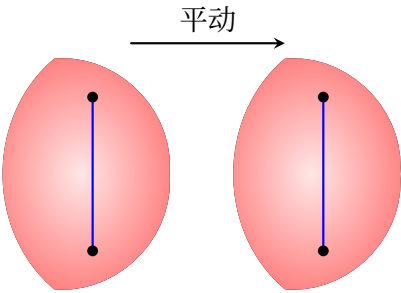


图 3-1 刚体的平动

Q 刚体的转动 各个质元都绕同一直线作圆周运动, 这样的运动称作**刚体的转动**.

这条直线称为**转轴** (这根轴可在刚体之内, 也可在刚体之外).

Q 刚体的非定轴转动 在刚体转动过程中, 若**转轴的方向或位置随时间变化**, 这样的运动称为**刚体的非定轴转动**. 该转轴称为**转动瞬轴**.

Q 刚体的定轴转动 若转轴固定不动, 即**既不改变方向又不发生平移**, 这样的转动称为**刚体的定轴转动**. 该转轴称为**固定轴**.

3.1.3 刚体定轴转动的描述

Q 角位移

在刚体上任取一个**转动平面**(与轴垂直的平面), 以该转动平面与转轴的交点为原点, 在该平面内作一射线作为参考方向 (或称**极轴**).

转动平面上任一质元对原点的位矢 r 与极轴的夹角称为**角位置** θ .

刚体在一段时间内转过的角度 (末时刻与初始时刻的角位置之差) $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ 称为**角位移**.

Q 角速度 在时刻 t 到 $t + \Delta t$ 时间内的角位移 $\Delta\theta$ 与 Δt 之比称为刚体的**平均角速度**, 用 $\bar{\omega}$ 表示:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

瞬时角速度 (**角速度**):

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

单位: $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Q 角加速度 在时刻 t 到 $t + \Delta t$ 时间内的角速度改变量 $\Delta\omega$ 与 Δt 之比称为刚体的**平均角加速度**, 用 $\bar{\alpha}$ 表示:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

瞬时角加速度 (**角加速度**):

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

单位: $\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$

刚体的**定轴转动**与质点的**直线运动**相似, 只要在描写质点直线运动各物理量 (位移、速度、加速度) 前加一个“角”字, 就成了描述刚体定轴转动的各相应物理量, 两者的运动学关系亦**完全相似**:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

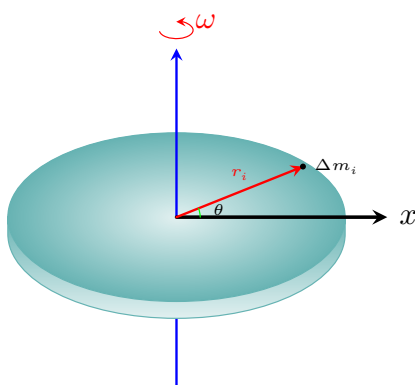


图 3-2 刚体定轴转动的角量描述

3.2 刚体定轴转动的转动定律

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t \alpha \, dt$$
$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \omega \, dt$$

角量与线量的关系

刚体定轴转动的角速度和角加速度确定后, 刚体内任一质元的速度和加速度也就可以完全确定. 若刚体上某质元 i 到转轴的距离为 r_i , 则该质元的线速度为

$$v_i = \omega r_i$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$a_{i\tau} = \alpha r_i$$

$$a_{in} = \omega^2 r_i$$

总结

刚体定轴转动的特征: 所有质元**角量相同**; **线量各不相同**, 并**正比于距轴的距离** r .

3.2 刚体定轴转动的转动定律

力是改变质点运动状态的原因, 力的瞬时作用效果可以通过牛顿第二定律反映. 本节研究引起刚体转动状态变化的原因—力矩—以及反映力矩瞬时作用效果的刚体定轴转动定律. 另外, 还将介绍一个与质点质量相对应的物理量——转动惯量.

3.2.1 刚体定轴转动的转动定律

如果作用力的方向与转轴**平行**或者力线的延长线与转轴相交, 该力对转轴的力矩为 0, 也就是说只有力的作用线**在转动平面内的且不与转动轴相交**的力对转轴产生力矩, 对转动有贡献. 因此, 研究刚体定轴转动时, 只需考虑外力在转动平面内的分量对转轴的力矩.

考虑刚体绕定轴 z 转动. 在刚体上任取一质元 Δm_i , 它绕 z 轴作圆周运动的半径为 r_i , 设它所受的合外力在转动平面内的分量为 F_i .

刚体内其他质元对 Δm_i 作用的合内力在转动平面内的分量为 f_i . 它们与矢径 r_i 的夹角分别为 φ_i 和 θ_i .

设刚体绕轴转动的角速度和角加速度分别为 ω 和 α .

列质元 Δm_i 的法向牛二方程:

$$-(F_i \cos \varphi_i + f_i \cos \theta_i) = \Delta m_i a_{in} = \Delta m_i r_i \omega^2$$

法向力与质元位矢方向在同一条线上, 对转动无贡献, 这里不考虑.

问题 力的瞬时效果是使质点产生加速度, 与此类似, 力矩作用刚体的瞬时效果是产生角加速度, 具体关系式如何? 与惯性质量类似的概念是什么物理量?

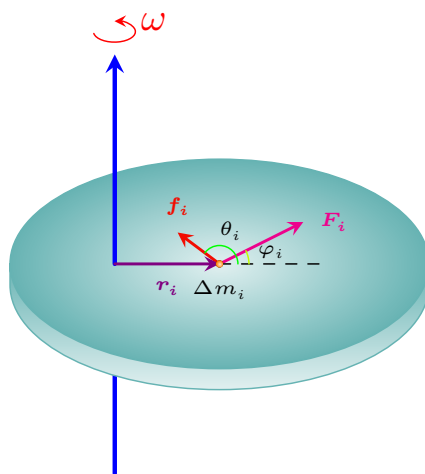


图 3-3 刚体上任一质元 Δm_i 所受外力和内力示意图

列质元 Δm_i 的切向牛顿方程:

$$F_i \sin \varphi_i + f_i \sin \theta_i = \Delta m_i a_{i\tau} = \Delta m_i r_i \alpha$$

将切向方程的两边各乘以 r_i , 可得

$$F_i r_i \sin \varphi_i + f_i r_i \sin \theta_i = \Delta m_i r_i^2 \alpha$$

上式对刚体所有质元求和, 并考虑到各质元角加速度相同, 有

$$\overbrace{\sum F_i r_i \sin \varphi_i}^{\text{外力对转轴的力矩}} + \underbrace{\sum f_i r_i \sin \theta_i}_{\text{内力对转轴的力矩,}=0} = (\sum \Delta m_i r_i^2) \alpha$$

刚体内各质元之间的作用力与反作用力的力矩和一定为 0. 因为作用力与反作用力对轴的力臂相等, 而作用力与反作用力等值反向, 所以它们对轴的力矩大小相等, 方向相反. 令

$$M = \sum F_i r_i \sin \varphi_i \quad (\text{合外力矩})$$

令

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

则 J 与刚体的运动及所受的外力无关, 仅由各质元相对于转轴的分布所决定, 称 J 为刚体绕轴转动的**转动惯量**.

刚体定轴转动的转动定律

刚体绕固定轴转动时, 作用于刚体上的合外力矩等于刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积. 或者说, 绕定轴转动的刚体的角加速度与作用于刚体上的合外力矩成正比, 与刚体的转动惯量成反比.

$$M = J\alpha$$

注意

- 1) J 和 M 均对于同一转轴而言.
- 2) 此转动定律只适用于惯性系.
- 3) 因为力矩和角加速度在定轴转动中只有转轴的正反两个方向, 在实际使用转动定律时, 通常用**标量**形式.

$$M = J\alpha$$

3.2.2 转动惯量

转动惯量的物理意义

反映刚体转动惯性的量度.

$$J = \sum \Delta m_i r_i^2$$

转动惯量 刚体的转动惯量就是组成刚体的各质元的质量与其到转轴的距離的平方的乘积之和.

- 单个质点:

$$J = mr^2$$

- 质点系:

$$J = \sum m_i r_i^2$$

- 质点连续分布的刚体:

$$J = \int_m r^2 dm$$

总结

- 1) 质量分布离轴越远, 转动惯量越大.
- 2) 质量分布均匀的物体, 其对中心轴的转动惯量最小.

例 3.1 求质量为 m , 长为 L 的均匀细棒的转动惯量: 1) 转轴通过棒的中心并与棒垂直 (图3-4); 2) 转轴通过棒一端并与棒垂直 (图3-5).

分析: 对于质量连续分布的刚体, 计算转动惯量的关键: 正确选取微元, 注意公式中 r 为 dm 到转轴的距离, 不是到坐标原点的距离.

- 对于线状分布刚体: $dm = \lambda dx$ (λ : 线质量密度, 即单位长度刚体的质量)
- 对于面状分布刚体: $dm = \sigma dS$ (σ : 面质量密度)
- 对于体状分布刚体: $dm = \rho dV$ (ρ : 体质量密度)

将 dS 、 dV 进一步用 dr 或者 dx, dy, dz 等积分变量表示出来, 注意上下限. 如此将转动惯量计算化为积分问题.

3.2.3 转动定律的应用

刚体转动定律的应用与质点运动中牛顿定律的应用也完全相似. 解决问题的基本类型为: (1) 已知受力矩情况, 求解刚体转动状态; (2) 已知转动状态变化情况, 求解所受力矩. 应用转动定律解决问题的基本思路、基本步骤, 以及需要注意的问题也与牛顿定律基本相似. 另外, 对于定轴转动的刚体, 由于描述其转动状态各物理量方向仅有两种可能, 在计算过程中一般都写其标量形式, 而用值的正负反映该量的方向. 因而, 转动定律在具体使用时, 也一般写其标量形式, 式中各量的方向与

思考 一个外径和质量相同的实心圆柱与空心圆筒, 若受力和力矩一样, 谁转动得快些呢?

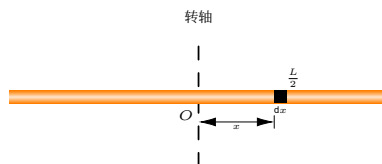


图 3-4 转轴通过棒的中心

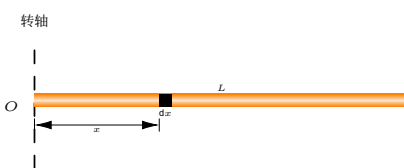


图 3-5 转轴通过棒的一端

练习 3.1 推导质量 m , 半径 R 的均质圆盘绕过圆心且垂直圆盘平面的轴转动的转动惯量.

正方向相同则为正, 否则为负.

■ 解题思路

$$M = J\alpha$$

- 1) 选物体.
- 2) 看运动: 按运动特点选取转动正方向.
- 3) 查受力: 画隔离体受力图.
- 4) 列方程: 建立坐标系; 列出转动的动力学方程; 一般还会涉及与牛二定律的结合解题; 注意角加速度和线加速度之间的关系. 原则: 转动用转动定律; 平动用牛顿定律; 列出平动量与转动量的关系.

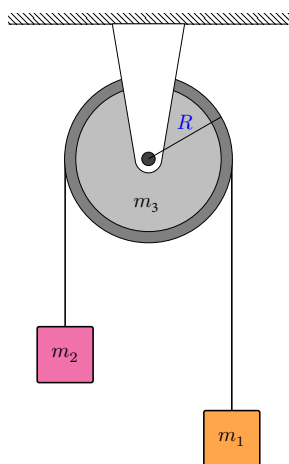


图 3-6

练习 3.2 如图3-7, 一个质量为 M 、半径为 R 的定滑轮 (当作均匀圆盘) 上面绕有细绳, 绳的一端固定在滑轮边上, 另一端挂一质量为 m 的物体而下垂. 忽略轴处摩擦, 求物体 m 由静止下落高度 h 时的速度和此时滑轮的角速度.

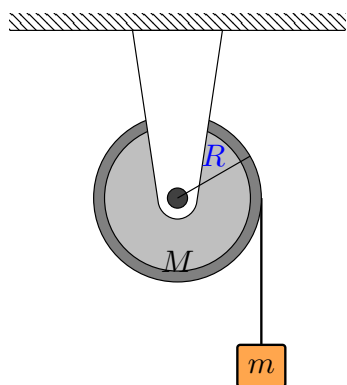


图 3-7

例 3.2 质量为 m_1 和 m_2 的两物体 ($m_1 < m_2$), 通过一定滑轮用绳相连, 已知绳与滑轮间无相对滑动, 且定滑轮是半径为 R 、质量为 m_3 的均质圆盘, 如图3-6所示, 忽略轴的摩擦. 求物体的加速度、滑轮的角加速度和绳中的张力. (绳轻且不可伸长)

例 3.3 转动着的飞轮的转动惯量为 J , 在 $t = 0$ 时角速度为 ω_0 , 此后飞轮经历制动过程, 阻力矩 M 的大小与角速度 ω 的平方成正比, 比例系数为 k (k 为大于零的常数), 当 $\omega = \frac{1}{3}\omega_0$ 时, 飞轮的角加速度是多少? 从开始制动到现在经历的时间是多少?

3.3 刚体定轴转动的动能定理

3.3.1 转动动能

与力的持续作用效果相对应, 力矩也存在持续作用效果. 类似地, 力矩的持续作用效果也分为两个方面. 力矩在空间上的累积作用效果和力矩在时间上的累积作用效果. 本节主要介绍与力矩空间累积作用效果相关的物理量, 即力矩的功、刚体的转动动能, 以及反映二者之间关系的转动动能定理.

定义 刚体绕定轴转动时的动能, 称为**转动动能**.

设刚体以角速度 ω 绕定轴转动, 其中每一质元都在各自转动平面内以角速度 ω 作圆周运动. 设第 i 个质元质量为 Δm_i , 离轴的距离为 r_i , 它的线速度为 $v_i = r_i\omega$, 则 i 质元的动能, $\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i (r_i\omega)^2$, 整个刚体的转动动能为:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

3.3 刚体定轴转动的动能定理

3.3.2 力矩的功

设在转动平面内的外力 F_i 作用于 P 点, 经 dt 时间后 P 点沿一周轨道移动 ds_i 弧长, 半径 r_i 扫过 $d\theta$ 角, 并有 $|dr_i| = ds_i = r_i d\theta$.

$$dW_i = F_i \cos \alpha_i ds_i = F_i \cos \alpha_i r_i d\theta$$

当 $d\theta \rightarrow 0$ 时, $\alpha_i + \varphi_i = \frac{\pi}{2}$, 因此

$$dW_i = F_i \cos \alpha_i r_i d\theta = F_i r_i \sin \varphi_i d\theta = M_i d\theta$$

对 i 求和, 得

$$dW = (\sum M_i) d\theta = M d\theta$$

M : 作用于刚体上外力矩大小之和

当刚体在力矩 M 作用下由 θ_1 转到 θ_2 时, 力矩的功为

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

总结

力矩做的功是力矩对角空间的累积效应, 与质点动力学中的功的本质意义完全相同. 对于刚体的定轴转动, 所有作用力的角位移相同, 线位移不一定相同, 因此用力矩计算做功更方便.

力矩的功率为

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

3.3.3 刚体定轴转动的动能定理

$$M = J\alpha = J\alpha = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = J\omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

分离变量并积分, 又考虑到 $\theta = \theta_1$ 时, $\omega = \omega_1$, 所以

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega$$

刚体定轴转动的动能定理

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$$

合外力矩对定轴转动刚体所做的功等于刚体转动动能的增量.

转动动能定理在刚体定轴转动中的地位与动能定理在质点运动中的地位是相当的. 二者所包含的物理量及物理量之间的关系都是一一

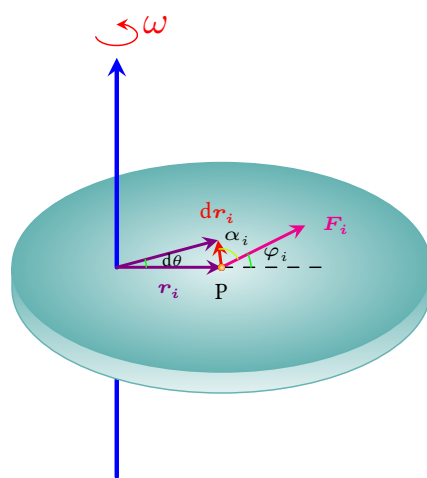


图 3-8 力矩对刚体做功图示

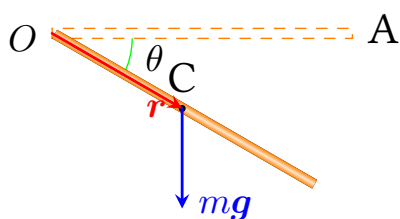


图 3-9

对应的.

例 3.4 一根质量为 m , 长为 l 的均匀细棒 OA, 可绕固定点 O 在竖直平面内转动 (图3-9). 今使棒从水平位置开始自由下摆, 求棒摆到与水平位置成 30° 角时, 中心点 C 和端点 A 的速度.

分析: 本题可用定轴转动动能定理求解, 重力产生的力矩所做的功等于细棒刚体的转动动能增量. 重力做功只与始末位置有关, 等于势能增量的负值, 本题也可计算细棒重心 (在棒的中点位置) 位置的变化得到重力势能的变化, 从而计算得到重力所做的功.

3.4 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

3.4.1 刚体对轴的角动量

本节主要研究力矩在时间上的累积作用效果. 这部分内容可类比质点运动中的动量定理和动量守恒定律. 本节将由刚体定轴转动定律出发, 讨论力矩作用一段时间所引起的效果, 定义两个新的物理量—冲量矩、角动量, 并讨论二者之间的关系, 从而得出角动量定理以及角动量守恒定律.

刚体对转轴的角动量就是刚体上各质元的角动量之和. 设质元 P 的质量为 Δm_i , 其到轴的距离为 r_i , 转动的角速度为 ω , 则该质元对其圆周运动的圆心的角动量大小为:

$$L_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L = \sum_i L_i = \sum_i (\Delta m_i r_i^2 \omega) = \sum_i (\Delta m_i r_i^2) \omega = J \omega$$

Q 刚体对某定轴的角动量 刚体对某定轴的角动量等于刚体对该轴的转动惯量与角速度的乘积. 方向沿该转动轴, 并与转动的角速度方向相同.

$$L = J \omega$$

3.4.2 刚体定轴转动的角动量定理

$$M = J \alpha = J \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

刚体定轴转动的角动量定理

定轴转动的刚体所受的**合外力矩**等于此时刚体**角动量对时间的变化率**.

$$M = \frac{dL}{dt}$$

3.4 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

3.4.3 刚体定轴转动的角动量守恒定律

$t = t_0$ 时, $\omega = \omega_0$, $L = L_0$, 如

$$M = 0 \Rightarrow J\omega = J_0\omega_0$$

刚体定轴转动的角动量守恒定律

若外力对某轴的**力矩之和为零**, 则该刚体**对同一轴的角动量守恒**.

$$J\omega = J_0\omega_0$$

角动量守恒的定律两种情况

- 1) **转动惯量保持不变**的单个刚体 ω 不变. (例子: 陀螺仪)
- 2) **转动惯量可变**的非刚体 J 增大, ω 减小; J 减小, ω 增大. (例子: 花样滑冰)

应用角动量守恒定律求解问题的基本步骤

- 1) 选择系统, 进行受力分析, 判断守恒条件, 角动量守恒的条件是**系统受合外力矩为零**, 这与动量守恒条件 (合外力为 0) 有所区别.
- 2) 根据题意选择转动的正方向. 角动量守恒虽然是矢量表达式, 但由于我们一般仅涉及刚体定轴转动问题, 矢量的方向仅有两种可能性, 所以确定矢量的正方向即可, 而不必建立坐标系.
- 3) 依据题意写角动量守恒的方程. 方程中各矢量方向与正方向相同者为正值, 否则为负值. 另外, 方程中各量应是相对于同一参考系的, 这点与动量守恒定律相同.
- 4) 解方程, 讨论.

例 3.5 一长为 l 质量为 M 的匀质细杆, 可绕水平光滑轴 O 在竖直面内转动, 如图 3-12 所示. 细杆由水平位置静止释放, 试求:

- 1) 开始转动时的角加速度;
- 2) 杆达到竖直位置的角速度;
- 3) 杆转至竖直位置时, 恰有一质量为 m 的泥巴水平打在杆的端点并粘住, 且系统立即静止, 则该泥巴与该杆碰撞前的速度 $v_0 = ?$

思考 分析轻线挂着的箱子和子弹组成的系统 (图 3-10), 以及杆与子弹组成的系统 (图 3-11) 的动量、角动量和机械能是否守恒?

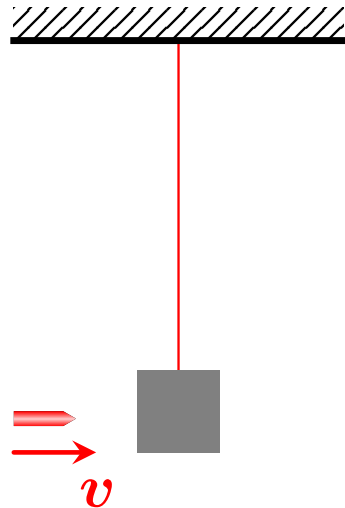


图 3-10 轻线摆-子弹系统



图 3-11 杆-子弹系统

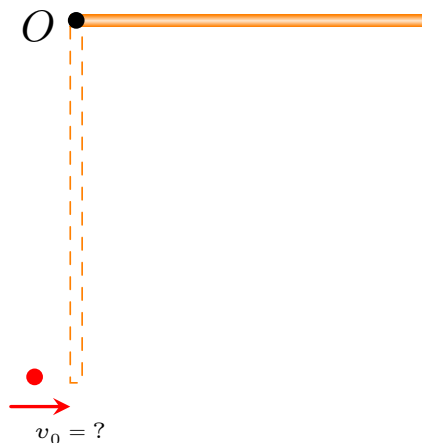


图 3-12

第四章 机械振动与机械波

洛阳有僧房中磬子，日夜辄自鸣。僧以为怪，惧而成疾。求术士百方禁之，终不能已。曹绍夔素与僧善。夔来问疾，僧具以告。俄击斋钟，磬复作声。绍夔笑曰：“明日设盛饌，余当为除之。”僧虽不信绍夔言，冀或有效，乃力致饌以待。绍夔食乞，出怀中错，鏝磬数处而去，其响遂绝。僧问所以，绍夔曰：“此磬与钟律合，故击彼应此。”僧大喜，其疾便愈。

唐·韦绚《刘宾客嘉话录》

物质运动的形式是多种多样的，本章研究另一种常见的机械运动——机械振动和以及其在空间的传播——机械波。机械振动和机械波是存在于自然界中的普遍现象，也是物质运动的基本形式。在科学研究领域内，振动和波动的理论是声学、光学、无线电技术及近代物理学等学科的基础。

4.1 简谐振动的动力学特征

机械振动 物体在某固定位置附近的往复运动。

广义振动 任何一个物理量在某一量值附近随时间作周期性变化。

机械振动中最简单的形式是简谐振动。可以证明，自然界各种复杂的振动都可以表示为简谐振动的合成，所以研究简谐振动是分析和理解一切复杂振动的基础。本节以弹簧振子为例，研究简谐振动的动力学特征、运动学特征，重点介绍简谐振动的振动表达式。

简谐振动 一个做往复运动的物体，偏离平衡位置的位移 x (或角位移 θ) 随时间 t 按余弦 (或正弦) 规律变化的振动。

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

4.1.1 弹簧振子模型

弹簧振子 轻弹簧的一端固定，另一端系一质量为 m 的小滑块，若该系统在振动过程中形变弹簧作用于物体的力总是满足胡克定律，这样的系统称为**弹簧振子**。

$$F = -kx \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

4.1	简谐振动的动力学特征	45
4.2	简谐振动的运动学	46
4.3	简谐振动的能量与合成	49
4.4	机械波的形成和传播	51
4.5	平面简谐波的波函数	53
4.6	惠更斯原理 波的叠加和干涉	57

令 $\frac{k}{m} = \omega^2$, 得到动力学方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

谐振子系统 如某力学系统的动力学方程可归结为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

的形式, 且其中 ω 仅决定于振动系统本身的性质, 则该系统的运动即为简谐振动. 能满足该式的系统, 又可称为**谐振子系统**.

总结 判断是否简谐振动的三种等价表述

1) 受力:

$$F = -kx$$

2) 动力学方程:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

3) 动力学方程的解即运动学方程:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

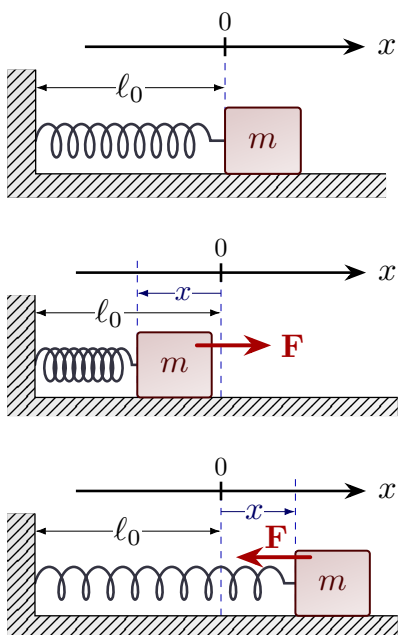


图 4-1 置于光滑桌面上的弹簧振子以及受力分析. 振子受力满足胡克定律 $F = -kx$

4.1.2 微振动的简谐近似

单摆 一端固定且不可伸长的细线与可视为质点的物体相连, 当它在竖直平面内作小角度 ($\theta \leq 5^\circ$) 摆动时, 该系统称为**单摆**.

摆球重力对端点的力矩 (阻力矩, 需要加负号)

$$M = -mgl \sin \theta \approx -mgl\theta$$

应用定轴转动定律 $M = J\alpha$, 得到

$$-mgl\theta = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad (\omega^2 = \frac{g}{l})$$

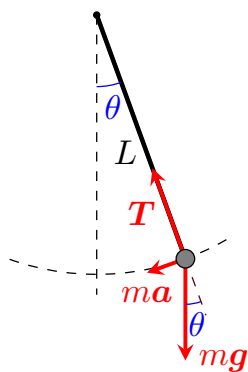


图 4-2 单摆

总结

单摆的小角度摆动是简谐振动.

4.2 简谐振动的运动学

4.2.1 简谐振动的运动学方程

解简谐振动动力学微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

思考 如何解该微分方程?

4.2 简谐振动的运动学

得到简谐振动的运动学方程

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

总结

简谐振动的运动规律可用余弦或正弦函数表示.

4.2.2 描述简谐振动的三个重要参量

从简谐振动的运动学方程可看出, 描述简谐振动的物理量包括振幅、周期和频率、相位和相位差.

Q 振幅 A 物体偏离平衡位置的最大位移 (或角位移) 的**绝对值**, 是描述**振动强弱**的物理量.

Q 周期、频率、圆频率 **周期**: 做简谐运动的物体完成**一次全振动**所经历的时间, 用 T 表示, 单位s.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

频率: **单位时间**内物体所作的全振动的**次数**, 用 f 表示, 单位Hz.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

圆频率 (角频率): 2π s内物体所作的全振动的**次数**, 用 ω 表示, 单位Hz. **思考** 为什么要引入相位的概念来描述物体的运动状态?

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

简谐振动的**周期**和**频率**由系统的本身 (如**弹簧劲度系数**和**振子质量**) 所决定的, 所以又称为**固有周期**和**固有频率**.

当振幅一定时, 描述简谐振动物体运动状态的物理量—位移、速度和加速度—均由三角函数的角量 $(\omega t + \varphi_0)$ 决定.

Q 相位和初相位

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

相位: 振动运动状态由 $(\omega t + \varphi_0)$ 确定. $(\omega t + \varphi_0)$ 称为**相位**. 单位rad.

初相位: $t = 0$ 时, $(\omega t + \varphi_0) = \varphi_0$, 称为**初相位**.

相位差: 两振动相位之差.

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

当 $\Delta\varphi = 2k\pi$ 时, 两振动步调一致, 称**同相**.

当 $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$ 时, 两振动步调相反, 称**反相**.

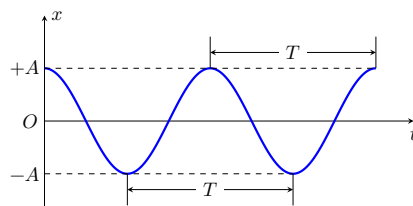


图 4-3 周期

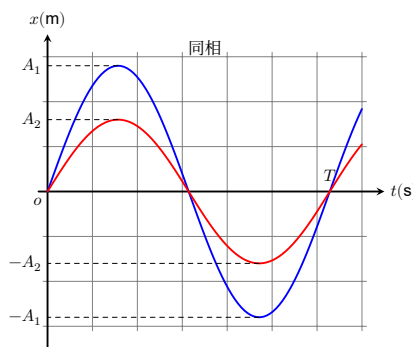


图 4-4 同相

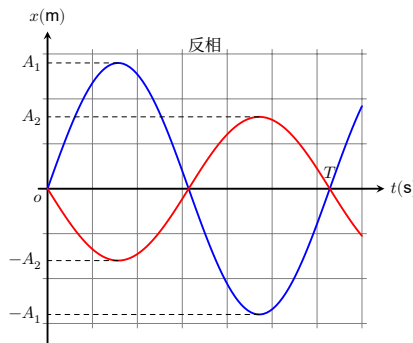


图 4-5 反相

怎样由初始条件 x_0, v_0 确定初相位 φ_0 和振幅 A

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A \cos \varphi_0 \\ -\frac{v_0}{\omega} &= A \sin \varphi_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right), A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

例 4.1 一个理想的弹簧振子，弹簧的劲度系数 $k = 0.72 \text{ N/m}$ ，振子的质量为 0.02 kg ， $t = 0$ 时，振子在 $x_0 = 0.05 \text{ m}$ 处，初速度 $v_0 = 0.30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，且沿 x 轴正向运动，求：1) 振子的运动方程；2) 振子在 $t = \pi/4 \text{ s}$ 时的速度和加速度。

分析：本题由初始条件 x_0, v_0 确定初相位 φ_0 在 $[-\pi, \pi)$ 范围内有**两个解**，但只有一个解是符合的，怎么判断？需要**通过 $t = 0$ 时质点的速度 v_0 的正负判断**，此处是正向运动，应当是正值，这样排除掉不符合的解。

4.2.3 旋转矢量表示法

简谐振动除了用振动表达式和振动曲线描述以外，还可以用旋转矢量来描述，这种方法可直观地反映简谐振动的运动规律。

旋转矢量 从坐标原点 O (平衡位置) 画一矢量 A ，使它的模等于简谐振动的振幅 A ，并令 $t = 0$ 时 A 与 x 轴的夹角等于简谐振动的初相位 φ_0 ，然后使 A 以等于角频率 ω 的角速度在平面上绕 O 点作逆时针转动，这样作出的矢量称为**旋转矢量**。

旋转矢量 A 任一时刻在 x 轴上的投影

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

速度矢量在 x 轴上的投影可用于描述简谐振动振子的速度：

$$\omega A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

旋转矢量表示法最大的优点是**形象直观**，通过旋转矢量图，可以把一个**非匀速运动的简谐振动**转换成**匀速的转动**来描述，使得问题得以简化。它不仅将简谐振动中最难理解的相位用角度表示出来，还将相位随时间变化的线性和周期性也清楚地描述出来了。

旋转矢量图与简谐振动的对应关系为：

- 1) 简谐振动的振幅对应于旋转矢量 A 的长度 (参考圆的半径)；
- 2) 简谐振动的角频率 ω 对应于旋转矢量 A 作逆时针转动时的角速度；
- 3) 简谐振动的初相位 φ_0 对应于零时刻旋转矢量 A 与 x 轴间的夹角；
- 4) 简谐振动的相位 $\varphi = \omega t + \varphi_0$ 对应于 t 时刻旋转矢量 A 与 x 轴正向之间的夹角；

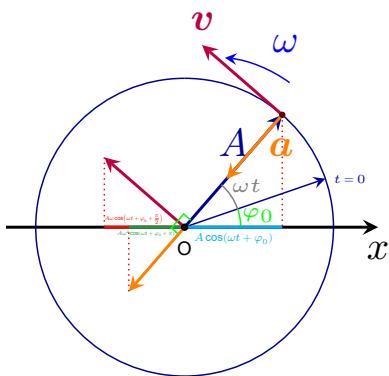


图 4-6 旋转矢量法用于描述简谐振动

4.3 简谐振动的能量与合成

5) 相位差 $\Delta\varphi$ 对应于不同时刻两旋转矢量间的夹角.

必须强调, **旋转矢量本身并不作简谐振动**, 我们只是用矢量 \mathbf{A} 的末端在 x 轴上的**投影**来形象地展开一个简谐振动.

例 4.2 已知简谐振动的位移-时间曲线如图4-7, 写出振动方程.

分析:对于这类问题, 一般可以用定义法和旋转矢量法解. 一般而言, 旋转矢量法的解答更直观, 更简洁. 需要注意的是: φ_0 通过 $t = 0$ 时的坐标推断, 在 $[-\pi, \pi)$ 范围内有**两个解**. 但只有一个解是符合振动曲线的, 怎么判断? 需要通过 $t = 0$ 时质点的速度 v 的正负判断, 也就是**该点的斜率**, 必然有一个解是不合要求的.

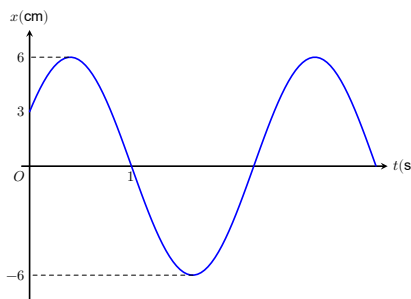


图 4-7

4.3 简谐振动的能量与合成

4.3.1 简谐振动的能量

作简谐振动的系统, 由于物体运动而具有动能, 由于弹簧形变而具有弹性势能, 本节仍以水平放置的弹簧振子为例, 讨论简谐振动系统的能量特征.

设物体的质量为 m , 以平衡位置为坐标原点, 则物体的振动表达式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

弹簧振子动能:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

物体往复运动时, 弹簧会产生形变, 系统具有相应的弹性势能, 如果取平衡位置 (也是弹簧原长时自由端所在处) 为势能零点, 则简谐振动系统的势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

总能量:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$$

动能和势能在一个周期内的平均值为

$$\overline{E_k} = \frac{1}{T} \int_0^T E_k(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{1}{4}kA^2$$

同理有

$$\overline{E_p} = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{2}E$$

总结

动能和势能在一个周期内的平均值**相等**, 且均等于总能量的**一半**.

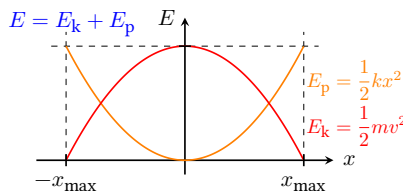


图 4-8 简谐振动的能量守恒

例 4.3 质量为 0.10 kg 的物体, 以振幅 0.01 m 作简谐振动, 其最大加速度为 $4.0\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, 求: (1) 振动的周期; (2) 通过平衡位置时的动能; (3) 总能量; (4) 物体在何处其动能和势能相等?

4.3.2 同方向、同频率谐振动的合成

在前面的讨论中研究的都是一个质点参与一种简谐振动的情况. 而在实际问题中, 经常会遇到一个质点同时参与了几个振动. 如舰船中的钟摆, 在船体发生颠簸时, 就同时参与了两种振动, 一个是钟摆自己的摆动, 另一个是钟随船的振动. 这时质点的振动是几个单独振动合成的结果, 称为合振动; 相对而言, 那几个单独的振动称为分振动.

简谐振动是最简单也是最基本的振动形式, 任何一个复杂振动都可以看成是多个简谐振动的叠加结果, 因而, 一个复杂振动也可以分解为若干个简谐振动. 本节介绍沿同一直线、相同频率的两个简谐振动的合成.

设质点同时参与两个同方向同频率的简谐振动

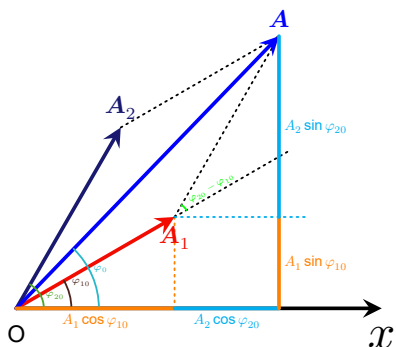


图 4-9 旋转矢量法分析简谐振动合成

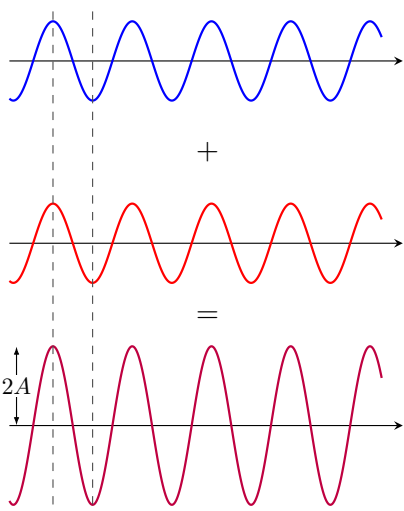


图 4-10 相位差为 0, 振幅最大

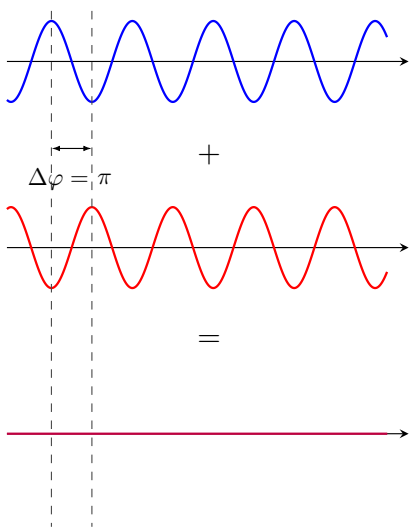


图 4-11 相位差为 π , 振幅最小

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

质点合位移

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10}) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20}) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10})}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{10} + A_2 \sin \varphi_{20}}{A_1 \cos \varphi_{10} + A_2 \cos \varphi_{20}}$$

相位差对合振幅的影响

1) $\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时

$$A = A_1 + A_2$$

合成振幅**最大**.

2) $\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时

$$A = |A_1 - A_2|$$

合成振幅**最小**.

3) 一般情况下

$$|A_1 - A_2| < A < |A_1 + A_2|$$

4.4 机械波的形成和传播

例 4.4 两谐振动的振动方程分别为

$$x_1 = 5 \cos(8t + \frac{\pi}{3}) \text{cm}$$

$$x_2 = 3 \cos(8t - \frac{2\pi}{3}) \text{cm}$$

求它们的合振动.

4.4 机械波的形成和传播

振动在空间的传播就形成了波动. 波动也是一种常见的物质运动形式, 例如绳子上的波、空气中的声波和水的表面波等, 它们都是机械振动在弹性介质中传播形成的, 这类波称为机械波. 波动并不限于机械波, 无线电波、光波、X 射线等也是一种波动, 这类波是交变电磁场在空间中的传播形成的, 统称电磁波. 机械波和电磁波尽管在本质上是不同的, 但是它们都具有波动的共同特征, 即具有一定的传播速度, 且都伴随着能量的传播, 都能产生反射、折射、干涉、衍射等现象, 而且具有相似的数学表述形式. 本节以机械波为例, 研究机械波的形成、波的表达式及其所具有的能量, 介绍惠更斯原理, 并用惠更斯原理解释波的衍射等现象.

4.4.1 波的形成和传播

波 振动在空间中的扩散和传播.

如果该振动是机械振动, 则波称为**机械波**.

以机械波为例, 当**弹性介质**中一处发生振动时, 此处的振动就引起附近介质的振动, 附近介质的振动又引起更远处介质的振动, 这样振动就在介质中传播开来, 从而形成机械波.

4.4.2 机械波产生的条件

机械波产生的条件

- 1) 波源;
- 2) 弹性介质.

弹性波 如果波动中使介质各部分振动的回复力是弹性力, 则称为**弹性波**.

简谐波 如果波源是**简谐振动**且介质是**理想介质** (各向同性均匀无限大) 各部分振动的回复力是**弹性力**, 则称为**简谐波**.

4.4.3 横波和纵波

机械振动在弹性介质 (固体、液体和气体) 内的传播过程, 其实质是因为在弹性介质内各质元间通过弹性力相互作用, 当介质中某一质元因受外界扰动而离开其平衡位置, 其邻近质元将对它施加弹性回复力, 使它回到平衡位置, 并在平衡位置附近作振动. 同时, 该质元的邻近质元也受到其所作用的弹性力, 使邻近质元也在自己的平衡位置附

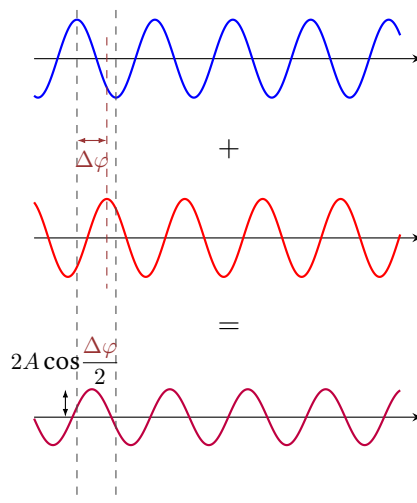


图 4-12 一般情况

问题 波的物理本质? 产生条件? 怎样传播? 传播速度与什么有关系? 为什么隔墙能听到声波?

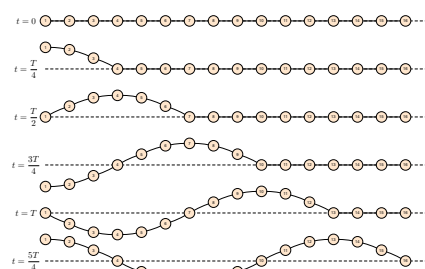


图 4-13 横波产生图示

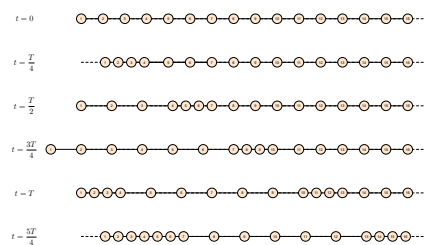


图 4-14 纵波产生图示

思考 人声的波源? 超声波清洗机的波源? 外太空中宇航员能否直接喊话沟通? 科幻电影里外太空爆炸巨大的音响效果是否真实?

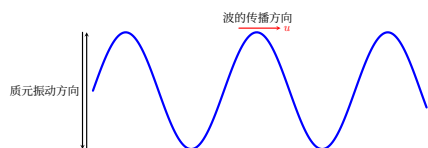


图 4-15 横波

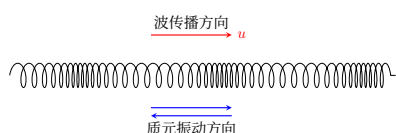


图 4-16 纵波

问题 如何形象地描述波的形状和传播方向?

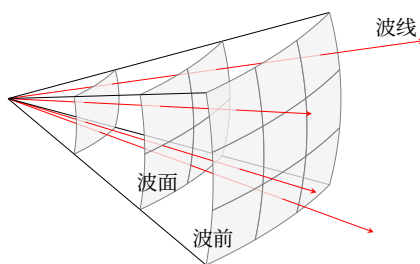


图 4-17 波线、波面和波前图示

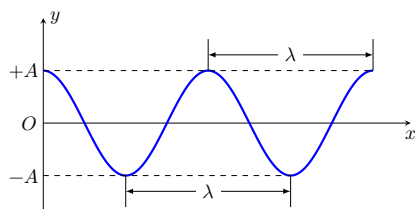


图 4-18 波长

近振动起来. 以此类推, 当弹性介质中的一部分发生振动时, 由于各部分之间的弹性力相互作用, 振动就由近及远地传播开去, 形成波动.

根据质元振动方向和波传播方向的关系, 可将波分为横波和纵波.

横波 质点的振动方向与波的传播方向垂直的波.

横波传播时, 传播介质会发生切向的形变 (切变), 固体能承受一定的切变, 因此横波能在固体中传播. 而液体和气体不能承受切变, 所以横波不能在液体和气体中传播 (针对机械波).

纵波 质点振动方向和波的传播方向平行的波.

产生纵波时, 物体各部分不断压缩、膨胀, 也就是说物体不断改变着体积, 气体、液体、固体都会发生体积的变化, 因此纵波在固体、气体和液体中都能传播.

4.4.4 波线和波面

波线、波面、波前

波线: 代表波的传播方向的射线.

波面: 振动传播时相位相同的点所组成的面.

波前: 波传播过程中, 某一时刻最前面的波面 (只有一个).

4.4.5 简谐波

简谐波 如果波的图象是正弦或余弦曲线, 这样的波叫简谐波.

如果波源是简谐振动且介质是理想介质 (各向同性均匀无限大) 各部分振动的回复力是弹性力, 则称为简谐波.

简谐波特点

介质中有简谐波传播时, 介质中的质点都在做简谐运动.

4.4.6 描述波动的几个物理量

波长 在波动中, 振动相位总是相同的两个相邻质点 (振动相位差为 2π) 之间的距离, 叫做波长. 通常用 λ 表示. 等价描述: 某个振动状态在一个周期内传播的距离.

波长含义

反映了波在空间上的周期性.

波的周期和频率 波向前传播一个波长所需要的时间或者一个完整波形通过波线上的某固定点所需的时间称为波的周期, 用 T 表示. 反映了波在时间上的周期性.

波的频率表示单位时间内波动所传播的完整波的数目或者单位时间内通过介质中某固定点完整波的数目. 用 f 表示.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

4.5 平面简谐波的波函数

Q 波速 在波动过程中, 某一**振动状态(即振动相位)**在单位时间内所传播的距离叫做**波速**. 波速又称**相速度**(相位传播速度).

说明

- 波速的大小取决于**介质的性质**, 在不同介质中波速是不同的.
- 波速虽然由介质决定, 但波的频率是波源振动的频率, 却**与介质无关**.

不同介质中的波速

固体:

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} (G: \text{切变模量}) \quad u_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}} (E: \text{弹性模量})$$

同一固体中, 一般 $E > G$.

弦中: $u_{\perp} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ (T : 弦的张力, μ : 弦的线密度)

液体和气体: $u_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ (K : 容变弹性模量)

波速, 周期, 频率, 波长关系

$$u = \frac{\lambda}{T}, \quad u = \lambda f$$

思考 一些影视中经常会有耳朵贴在铁轨上能听到远处的火车压过铁轨传来的声音情节, 其中有什么物理机制?

思考 为什么人吸入氦气后说话会变声?

问题 一般我们已知波源(或传播方向上某个质点)的振动方程, 如何以此推断波的传播方向上各个不同位置的质点的振动方程(波函数)?

4.5 平面简谐波的波函数

4.5.1 平面简谐波的波函数

设有一平面简谐波, 在理想介质中沿 x 轴正向传播, x 轴即为某一波线, 在此波线上任取一点为坐标原点, 并在原点振动相位为零时开始计时, 则原点的振动方程为 $y_0 = A \cos \omega t$.

设波沿 x 轴正方向传播(图4-19), 波速为 u , 任意取一点距原点 x 的 P 点, 那么 P 点振动状态**落后于**原点. 落后的时长为: $\Delta t = \frac{x}{u}$. 也就是说当原点的振动传播到距离原点 x 的点 P 时, P 点将以同样的振幅、频率重复原点的振动, 只是**在相位上滞后** $\Delta \varphi = \omega \Delta t = \frac{\omega}{u} x = \frac{2\pi}{\lambda} x$.

或者说, $t - \Delta t = t - \frac{x}{u}$ 时刻 P 点的振动状态与 t 时刻时原点的振动状态完全相同. 这样, 为描述 P 点的振动状态, 只需**将原点的振动方程中的 t 变量替换为 $t - \frac{x}{u}$** 就得到了 P 点的振动方程, 即:

$$y = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

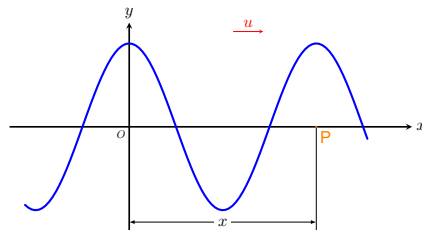


图 4-19

总结 沿 x 轴正向传播的平面简谐波的波函数

$$y = A \cos \omega(t - \frac{x}{u})$$

如果原点的初相位不为零,

$$y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

总结 沿 x 轴负向传播的平面简谐波的波函数

$$y = A \cos[\omega(t - \frac{-x}{u}) + \varphi_0] = A \cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

平面简谐波波函数的其它形式

$$y = A \cos[\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi_0] = A \cos[\omega t - kx + \varphi_0] \quad (\text{沿 } +x)$$

$$y = A \cos[\omega t + 2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi_0] = A \cos[\omega t + kx + \varphi_0] \quad (\text{沿 } -x)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{波数})$$

4.5.2 波函数的物理意义

- 1) 如果给定 $x = x_0$, 则位移 y 仅是**时间 t 的函数**, 波函数蜕化为

$$y(t) = A \cos[\omega(t - \frac{x_0}{u}) + \varphi_0]$$

即 $x = x_0$ 处质点的**振动方程**.

- 2) 如果 $t = t_0$ 为给定值, 则位移 y 只是**坐标 x 的函数**, 波函数变为

$$y(x) = A \cos[\omega(t_0 - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

即 t 时刻波线上各个质点的位移, 也即该时刻的**波形方程**.

- 3) 如果 t, x 都在变化, **波函数**描述波动中**任一质点的运动规律**:

$$y(t, x) = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

t 时刻的波形方程

$$y(x) = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$t + \Delta t$ 时刻 $x + u\Delta t$ 位置的波形方程

$$y(x + u\Delta t) = A \cos[\omega(t + \Delta t - \frac{x + u\Delta t}{u}) + \varphi_0] = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

说明 t 时刻处于 x 位置的质元的振动状态与 $t + \Delta t$ 时刻 $x + u\Delta t$ 位置的质元的振动状态相同. 也即 x 位置质元的振动状态经 Δt

4.5 平面简谐波的波函数

时间传播到了 $x + u\Delta t$ 位置.

总结

波是波形的传播, 是振动状态的传播.

例 4.5 已知波函数为 $y = 0.1 \cos \frac{\pi}{10}(25t - x)$, 其中 x, y 的单位为 m, t 的单位为 s, 求: (1) 振幅、波长、周期、波速; (2) 距原点为 8 m 和 10 m 两点处质点振动的相位差; (3) 波线上某质点在时间间隔 0.2 s 内的相位差.

例 4.6 一平面简谐横波以 $u = 400 \text{ m/s}$ 的波速在均匀介质中沿 x 轴正向传播. 位于坐标原点的质点的振动周期为 0.01 s, 振幅为 0.1 m, 取原点处质点经过平衡位置且向正方向运动时作为计时起点. (1) 写出波函数; (2) 写出距原点为 2 m 处的质点 P 的振动方程; (3) 画出 $t = 0.005 \text{ s}$ 和 $t = 0.0075 \text{ s}$ 时的波形图.

分析: 建立波函数的步骤:

- 1) 写出坐标原点 O 处的振动表达式.
- 2) 判断波的传播方向上任意一点与原点距离, 得到该点振动状态滞后或超前的时长为 $\frac{|x|}{u}$ (x 为某处质点坐标).
- 3) 将原点处的振动方程的 t 变量替换为 $t - \frac{x}{u}$ (x 轴正向传播方向) 或者 $t + \frac{x}{u}$ (x 轴负向传播方向)

4.5.3 波的能量和能量密度

设有一平面简谐波在密度为 ρ 的弹性介质中沿 x 轴正向传播, 设其波函数为 $y = A \cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$, 在坐标为 x 处取一**体积元**为 dV , 其质量为 $dm = \rho dV$, 视该体积元为质点, 当波传播到该体积元时, 其**振动速度**为

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

质元的动能

$$dE_k = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

该处质元因为形变也具有弹性势能, 可以证明

$$dE_p = \frac{1}{2} \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

因此质元的机械能

$$dE = \rho dV A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

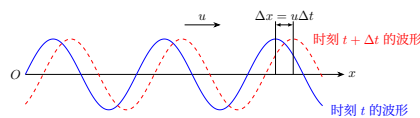


图 4-20 波是波形的传播

思考 振动曲线与波形曲线有何区别? 通过振动曲线和波形曲线 (譬如已知 $t = 0$ 时刻的波形曲线) 判断振动的初相位方法有何不同?

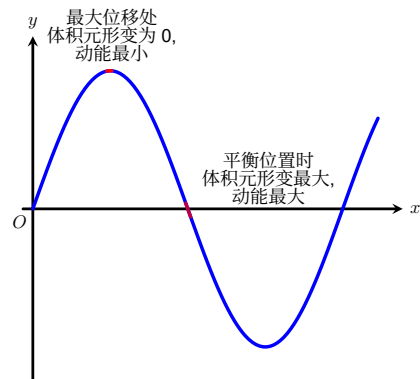


图 4-21 简谐波的弹性势能和动能同步变化

≡ 总结

介质中任一体积元的总能量随时间作周期性变化, 说明其与相邻介质有能量交换, 所以波动过程也是**能量传播**的过程.

📖 波动能量与谐振动能量的比较

谐振动: 总能量守恒; 动能和势能**反相**变化

波动: 总能量**不**守恒 (受到了质元前后两侧质元弹性力的作用, 从前面质元吸收能量, 向后面质元放出能量, 前后两质元对该质元的弹性力作用效果不同, 能量收支不平衡); 动能和势能**同步**变化

上述推导结果中波动的能量与质元体积 dV 有关, 为描述能量的分布情况, 需要将体积因素排除掉. 因此引入新的物理量——能量密度.

🔗 **能量密度** 单位体积介质中所具有的波的能量.

$$w = \frac{dE}{dV} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

🔗 **平均能量密度** 能量密度在一个周期内的平均值.

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho A^2 \omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0] dt = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2$$

≡ 总结

平均能量密度与波振幅的平方、角频率的平方及介质密度成**正比**.

4.5.4 波的能流和能流密度

波在介质中的传播过程伴随着能量的传播或者流动. 为分析能量传播过程的特点, 引入新的物理量——能流 (类比水流, 电流).

🔗 **能流** 单位时间内通过某一截面的能量. 又称为波通过该截面的**功率**.

通过面积 ΔS 的能流 $p = wu\Delta S$

平均能流 (波的功率)

$$\bar{p} = \bar{w}u\Delta S$$

平均能流与截面的面积有正比关系, 为描述单位面积的能流, 需要将面积因素排除掉, 因此引入新的物理量——**能流密度**.

🔗 **波强 (能流密度)** 与波的传播方向垂直的单位面积的平均能流称为**能流密度**或波的强度, 简称**波强**.

$$I = \bar{w}u \quad (\text{单位 W/m}^2)$$

⚙️ **思考** 描述声音的强度有分贝这一术语, 分贝值与波强值有什么关系?

简谐波的波强

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u$$

4.6 惠更斯原理 波的叠加和干涉

4.6.1 惠更斯原理

任一质元的振动只能直接影响相邻质元的振动，波源并不能跨越一段距离直接带动远处的质元，波前（波阵面）是如何不断向前推进的？如何解释波能绕过障碍物传播？为解释上述问题，荷兰物理学家惠更斯于 1690 年提出了惠更斯原理。

惠更斯原理 介质中波阵面（**波前**）上的各点，都可以看作是发射子波的波源，其后任一时刻这些子波的**包络面**（与所有子波波前相切的曲面）就是新的波阵面。

4.6.2 波的叠加原理

前面讨论的是一列波在介质中的传播情况，下面我们要研究的是波动中常见而重要的另一类问题，即有几列波同时在一介质中传播并相遇时，介质中各质元的运动将遵守什么规律？有哪些现象产生？

现象：两个探照灯所发出的光束交叉后仍然按原来方向传播；我们可以分辨交响乐中不同乐器发出的声音。

波的叠加原理（波的独立性原理）

- 1) 几列波在传播中相遇时，可以**保持各自的特性**（频率、波长、振幅、振动方向等）同时通过同一媒质，好像没有遇到其他波一样。
- 2) 在相遇的区域内，任一点的振动，为各列波单独存在时在该点产生的振动的**合成振动**。

4.6.3 波的干涉

波的干涉 两列波若频率相同、振动方向相同、在相遇点的相位相同或**相位差恒定**，则在合成波场中会出现某些点的振动始终加强，另一些点的振动始终减弱（或完全抵消）的现象。

相干条件：（1）频率相同；（2）相位差恒定；（3）振动方向相同。满足相干条件的波源称为**相干波源**。

能叠加产生干涉现象的波称为**相干波**。

设 S_1 和 S_2 为两相干波源，它们的振动方程分别为

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{10})$$

$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{20})$$

传播到 P 点引起的振动方程分别为

$$y_1 = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda} + \varphi_{10}\right)$$

$$y_2 = A_2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda} + \varphi_{20}\right)$$

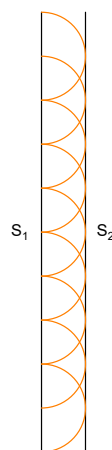


图 4-22 平面波惠更斯原理图示

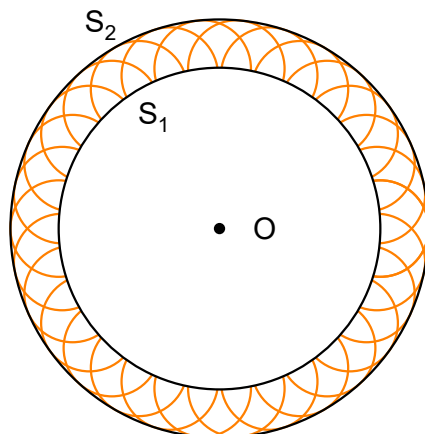


图 4-23 球面波惠更斯原理图示

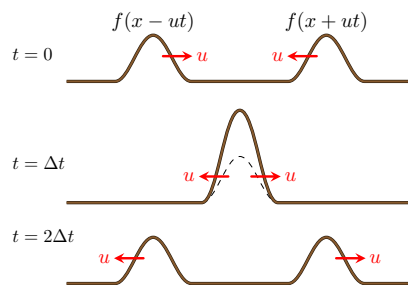


图 4-24 波的独立性和叠加原理

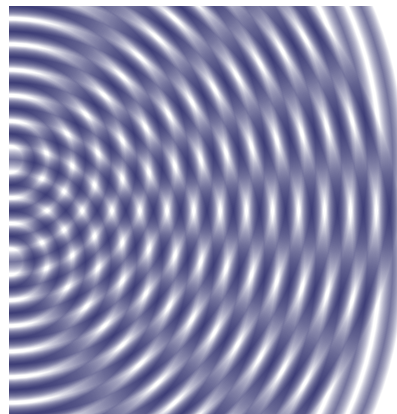


图 4-25 波的干涉

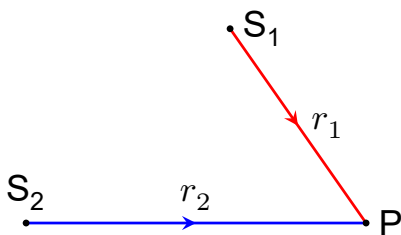


图 4-26

则由同方向、同频率谐振动合成公式，有

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中

$$\tan \varphi_0 = \frac{A_1 \sin(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \sin(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}{A_1 \cos(\varphi_{10} - \frac{2\pi r_1}{\lambda}) + A_2 \cos(\varphi_{20} - \frac{2\pi r_2}{\lambda})}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi$$

因

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 u$$

故

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi$$

分振动的相位差

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \quad (r_2 - r_1 : \text{波程差})$$

总结

1) 合振幅仅由波程差 $r_2 - r_1$ 决定，相位仅由位置决定，故这是一个稳定的叠加图样。

2) 干涉相长与干涉相消的条件：

干涉加强（干涉相长）：

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

合成振幅**最大**。

干涉减弱（干涉相消）：

$$\Delta\varphi = (\varphi_{20} - \varphi_{10}) - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

合成振幅**最小**。

例 4.7 B、C 为同一介质中的两个相干波源，相距 30 m，它们产生的相干波频率为 100 Hz，波速 $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，且振幅都相同。已知 B 点为波峰时，C 点恰为波谷。求 BC 连线上因干涉而静止的各点的位置。

第五章 静电场

这时，耳机中突然响起了一个飞行员的声音：“发现目标！电弧 1 号机方向约三分之一处！”

我和张彬都浑身一震，立刻伏到舷窗上向后望去。就这样，他时隔三十年，我时隔十三年，再次见到了决定我们一生的球状闪电。那个球状闪电呈橘红色，拖着一条不太长的尾迹，在夜空中沿一条变幻的曲线飘行着，从那飘行的轨迹看，它完全不受高空强风的影响，似乎与我们的世界不发生任何关系。

刘慈欣 (1963–) 《球状闪电》

5.1 电场 电场强度

5.1.1 电荷

🔍 **电荷** 使物质之间产生电相互作用的一种属性。

正电荷：丝绸摩擦过的**玻璃棒**所带的电荷。

负电荷：毛皮摩擦过的**橡胶棒**所带的电荷。

🔍 **静电力** 静止电荷之间的相互作用力。规律：同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引。

🔍 **电量** 物体带电荷量的多少。电荷的电量与其运动状态无关 (**电荷的相对论不变性**)。

🔍 **电荷的量子化** 电子是自然界具有**最小电荷** $-e$ 的粒子，所有带电体都是**电子电荷绝对值的整数倍**。

$$q = ne \quad n \text{ 为整数}$$

一个电子所带电荷量的绝对值，称为**元电荷**，记为 e ，单位库仑 (C)。

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$$

📖 电荷守恒定律

一个与外界**没有电荷交换**的系统，电荷的**代数和**保持不变。

5.1.2 库仑定律

🔍 **点电荷** 在研究带电体间的相互作用时，如果带电体本身的线度**远小于**它们之间的距离，或者带电体本身的大小对所讨论的问题**影响甚小**，可把带电体视为一几何点，并称它为**点电荷**。

5.1	电场 电场强度	59
5.2	电通量 高斯定理 . . .	62
5.3	静电力 功 电势 . . .	65
5.4	静电场中的导体	67

说明

- 1) 点电荷是实际带电体在一定条件下的抽象, 是为了简化某些问题的讨论而引进的一个**理想化的模型**.
- 2) 点电荷本身的线度**不一定很小**, 它所带的电量**也不一定很小(可以很大)**. 点电荷这个概念与力学中的“质点”类似.
- 3) 在多数情况下, 带电体不能视为点电荷, 但可以将带电体视为**很多点电荷组成的集合**, 然后利用微积分的方法和点电荷的结论研究一般带电体的相关问题.

库仑定律

真空中两个静止点电荷之间的相互作用力 (**静电力**), 与它们的**电荷量的乘积成正比**, 与它们的距离的**二次方成反比**, 作用力的方向在它们的连线上.

$$\boldsymbol{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \boldsymbol{r}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \boldsymbol{r}_0$$

k 为**静电力常量**

方向: 在两点电荷的连线上, 同种电荷相斥, 异种电荷相吸.

适用范围: 真空; 点电荷

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

真空介电常量 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^{-2}/\text{N} \cdot \text{m}^2$

思考 当 $r \rightarrow 0$ 时, 库仑定律计算得到静电力无穷大, 哪里出了问题?

问题 两个带电体之间没有直接接触, 它们之间的相互作用怎么实现的?

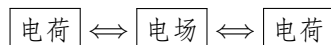
5.1.3 电场强度

历史上的两种观点

- 1) **超距作用**——无需物质传递, 作用速度无穷大, 瞬间即达.
- 2) **近距作用**——必须由物质传递, 以有限速度传递.

法拉第天才地引入了场的概念.

场



场是物质, 也具有质量、动量、能量等性质.

静电场 相对于观察者为**静止**的带电体周围存在的电场.

静电场对外界有何作用?

- 1) 处于电场中的任何带电体都**受到电场所作用的力**. 这种力叫做**电场力**.
- 2) 当带电体在电场中移动时, 电场所作用的力将对带电体**做功**.

问题 如何定量地描述电场的强弱?

用**试验电荷**(小电量, **点电荷**, 用 q_0 表示, 为方便起见, 通常用正电荷) 测量电场强弱.

$\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}$ 与 q_0 **无关**, 反映了 q_0 所在位置的电场的性质.

5.1 电场 电场强度

Q 电场强度 静电场中某点的**场强**在数值上等于**单位正电荷**受到的**电场力**, 方向与**正**电荷在该点所受电场力**方向相同**.

$$E = \frac{F}{q_0} \quad (\text{N/C})$$

5.1.4 电场强度叠加原理

推理:电场力是力的一种, 满足矢量合成法则即力的叠加原理, 电场强度是力矢量与一个标量 (q_0) 的函数关系, 是一个矢量, 也应该满足叠加原理.

由力的叠加原理, 试探电荷 q_0 受到的总静电力

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n$$

两边除以 q_0 , 得到

$$\frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_0} + \frac{\mathbf{F}_2}{q_0} + \cdots + \frac{\mathbf{F}_n}{q_0}$$

📖 电场强度叠加原理

电场中某点的电场强度为各个点电荷单独在该点产生的电场强度的矢量和, 满足**平行四边形法则**.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots + \mathbf{E}_n$$

5.1.5 电场强度的计算

1. 点电荷的电场强度:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0$$

2. 点电荷系的电场强度:

根据电场强度叠加原理

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_0$$

3. 电荷连续分布的带电体的电场:

$$\mathbf{E} = \int_V d\mathbf{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}_0$$

体: $dq = \rho dV$ 面: $dq = \sigma dS$ 线: $dq = \lambda dl$

例 5.1 两个等值异号的点电荷 $+q$ 和 $-q$ 组成的点电荷系, 当它们之间的距离比起所讨论问题中涉及的距离 l 小得多时, 这一对点电荷系称为**电偶极子**. 由负电荷 $-q$ 指向正电荷 $+q$ 的矢径 l 称为电偶极子的轴. ql 为**电偶极矩**, 简称**电矩**, 用 p 表示, 即 $p = ql$. 试计算电偶极子

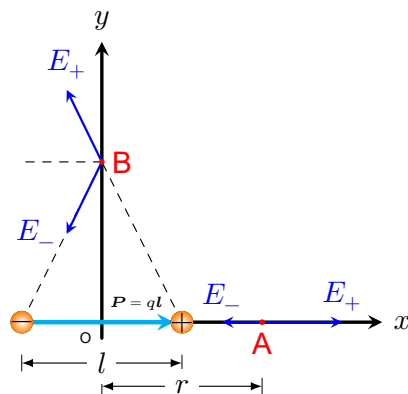


图 5-1 电偶极子

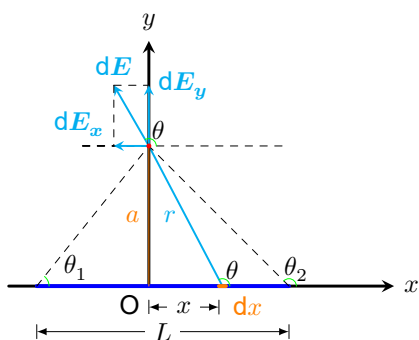


图 5-2 均匀带电直线的电场

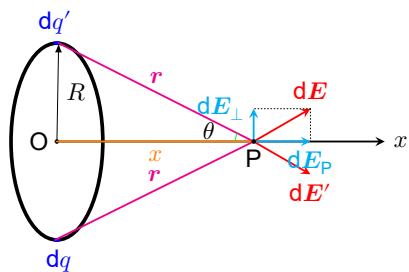


图 5-3 均匀带电圆环

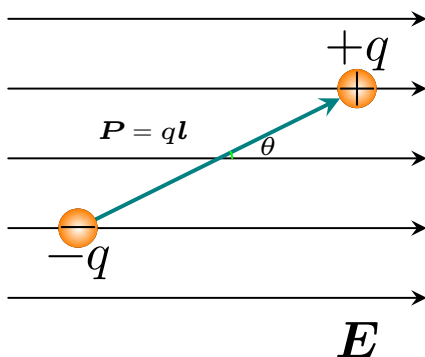


图 5-4

问题 静电场不是实体物质, 看不见, 摸不着, 如何形象地描述?

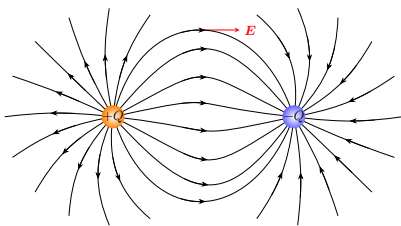


图 5-5 电场线

轴线延长线上的一点 A 和轴的中垂面上的一点 B 的电场强度 (图5-1).

例 5.2 真空中有一均匀带电直线, 长为 L , 总电量为 q , 试求距直线上距离为 a 的 P 点的电场强度 (图5-2).

分析: 叠加法求解场强. 步骤:

- 1) 根据带电体的形状合理选取电荷元 dq , dq **不一定需要是点电荷**, 可以选择大一些的电荷元如圆环、薄球壳电荷元, 以减小积分的计算量.
- 2) 选择合适的坐标系.
- 3) 利用**对称性**分析, 判断各电荷元在场中产生的场强 dE 的方向是否一致, 如果**一致, 直接积分**得到 $E = \int dE$; 如果**不一致**, 则将 dE 投影到坐标轴方向, 先求出**场强分量式**(E_x, E_y, E_z) 的代数和, 再根据矢量合成法则求出合场强.

例 5.3 真空中一均匀带电圆环, 环半径为 R , 带电量为 q (图5-3), 试计算圆环轴上任一点 P 的电场强度.

5.1.6 带电体在外电场中所受的作用

如何计算带电体在电场中所受的作用

- 1) 把带电体划分为许多电荷元.
- 2) 计算每个电荷元所受的作用力.
- 3) 用积分求带电体所受的合力和合力矩.

例 5.4 计算电偶极子 $p = ql$ 在均匀外电场 E 中所受的合力和合力矩 (图5-4).

5.2 电通量 高斯定理

5.2.1 电场的图示法 电场线

电场线用来形象地描述电场. 在电场中描绘一系列的曲线, 使这些曲线上每一点的切线方向都与该点电场强度 E 的方向一致, 这些曲线叫**电场线**.

- 1) 电场方向: 切线方向.
- 2) 电场强度: 电场线的密度.

5.2.2 电通量

通过电场中任一给定面的电场线数称为通过该面的**电通量**, 用符号 Φ_e 表示.

$$\Phi_e = ES$$

$$\Phi_e = ES' = ES \cos \theta = E \cdot S$$

5.2 电通量 高斯定理

矢量面积

$$\mathbf{S} = S\mathbf{n}_0 \quad (\mathbf{n}_0 : S \text{ 法线方向单位矢量})$$

计算非均匀电场中通过任一曲面 S 的电通量时, 要把该曲面划分为无限多个面元. 一个无限小的面元 $d\mathbf{S}$ 的法线 \mathbf{n} 与电场强度 \mathbf{E} 的夹角为 θ , 如图5-7所示.

通过面元 $d\mathbf{S}$ 的电通量

$$d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

通过面 S 的总电通量

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

为闭合曲面时

$$\Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

说明

- 1) 从曲面**穿出**的电场线, 电通量为**正值**; 反之, 电通量为**负值**;
- 2) 电通量的正负取决于 $d\mathbf{S}$ 的方向的选取. 对于有限曲面, 常规定**顺着电场线**方向的曲面法向为**正法线**方向; 对于闭合曲面, 规定**外法线**方向为**正法线**方向.
- 3) 与曲面**相切**或**未穿过**曲面的电场线, 对通量**无**贡献.

例 5.5 图中虚线为一立方形的闭合面, 边长为 a . 空间电场强度分布为 $E_x = bx, E_y = 0, E_z = 0$, b 为正常数. 求通过该闭合面的电通量.

5.2.3 高斯定理

通过 $d\mathbf{S}$ 的电通量

$$d\Phi_e = E \cos 0 dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS$$

通过整个闭合球面的电通量

$$\Phi_e = \oint_S d\Phi_e = \oint_S \frac{q dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

通过包围点电荷 q 的任意闭合曲面的电通量仍为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{q dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

通过**不包围**电荷的闭合曲面的电通量为**零**.

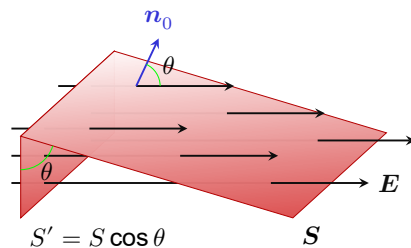


图 5-6 矢量面积

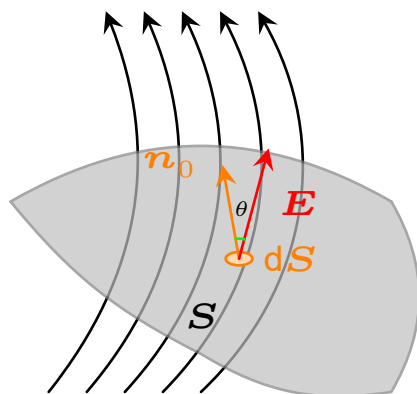


图 5-7

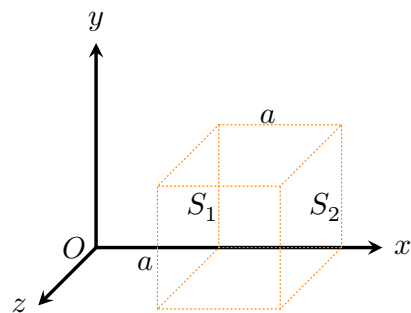


图 5-8

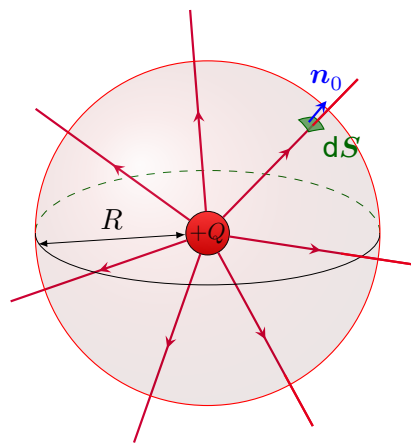


图 5-9

高斯定理

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

由电场的叠加原理, S 面内外所有电荷共同产生的电场通过真空中的静电场中任一闭合面的**电通量**等于包围在该闭合面内的**电荷代数**和的 ε_0 分之一, 而**与闭合面外的电荷无关**.

说明

- 1) 高斯面上各点的**电场强度** \mathbf{E} 是所有在场的电荷**共同**产生. 高斯定理中的**电通量**只与高斯**面内**的电荷有关.
- 2) 高斯面内的电量为零, 并不说明高斯面内部一定没有自由电荷, 只能说明通过高斯面的**电通量为零**, 面内的**净自由电荷为0**, 但高斯面上各点的**电场强度不一定为零**.

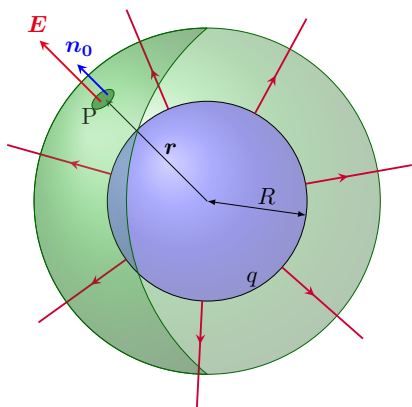


图 5-10

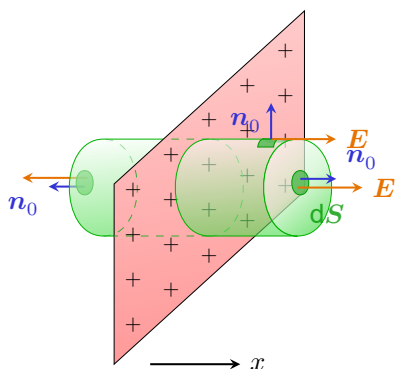


图 5-11

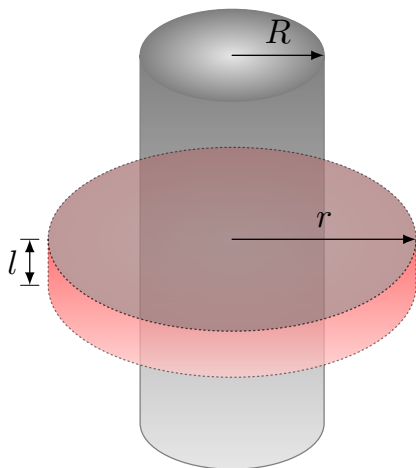


图 5-12

5.2.4 高斯定理的应用

对于某些具有特殊对称性的带电体, 利用高斯定理可以方便地求出电场分布.

- 1) 分析场源的**对称性** (常见的是球、面、轴对称性);
 - **球对称性**: 点电荷, 均匀带电**球面**, 均匀带电**球壳**, 均匀带电**球体**等
 - **轴对称性**: 无限长均匀带电直线, 无限长均匀**带电圆柱面**, 无限长均匀**带电圆柱体**等
 - **面对称性**: 无限大均匀带电**平面**, 无限大均匀带电**平板**等.
- 2) 选取一个合适的高斯面, 使得或者在该高斯面的某一部分表面上的 \mathbf{E} 值为**常数**, 或者使某一部分表面上的 \mathbf{E} 与它们的**法线方向处处垂直**;
- 3) 由高斯定理求 \mathbf{E} .

例 5.6 如图 5-10 所示, 求均匀带电球面的电场分布. 已知球面半径为 R , 带电量为 q .

分析: 由于电荷分布是球对称的, 可判断出空间电场强度分布必然是**球对称**的, 即与球心距离相等的球面上各点的**电场强度大小相等**, 方向沿半径呈辐射状.

例 5.7 一面电荷密度为 σ 的无限大带电平面 (图 5-11), 求平面外侧电场强度分布.

例 5.8 试求半径为 R , 电荷面密度为 σ 的无限长均匀带电圆柱面的电场强度 (图 5-12).

分析: 如图所示, 由于电荷分布的轴对称性, 可以确定带电圆柱面产生的电场也具有**轴对称性**, 即离圆柱面**轴线垂直距离相等**的各点电场强度大小相等, 方向都垂直于圆柱面. 取过场点的一同轴圆柱面为

5.3 静电力的功 电势

高斯面，圆柱面高为 l ，底面半径为 $r(r > R)$ ，则通过高斯面底面的电通量为零而通过高斯面侧面的电通量为 $2\pi r l E$ 。

5.3 静电力的功 电势

5.3.1 电场力的功

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 E \cos(\pi - \theta) dl = q_0 E dl \cos \varphi$$

因

$$dl \cos \varphi = dr$$

$$W_{ab} = \int_a^b dW = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

总结

在点电荷 q 的电场中，电场力对 q_0 做的功只取决于移动路径的起点 a 和终点 b 的位置，而**与路径无关**。

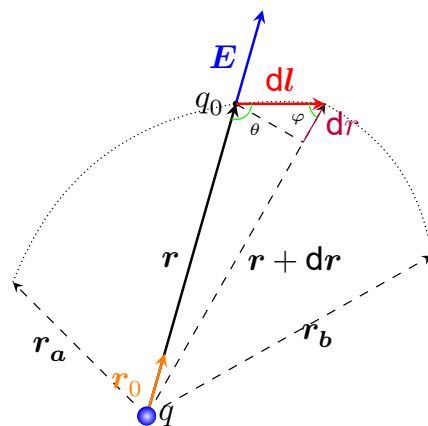


图 5-13 电场力做功

5.3.2 静电场的环路定理

电场力在整个闭合路径 $abcd$ 上做功

$$\begin{aligned} W &= \oint_l q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{abc} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{cda} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{abc} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{adc} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

静电场的环路定理

在静电场中，电场强度 \mathbf{E} 的环流恒等于零。即静电场力是保守力，静电场是**保守场**。

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

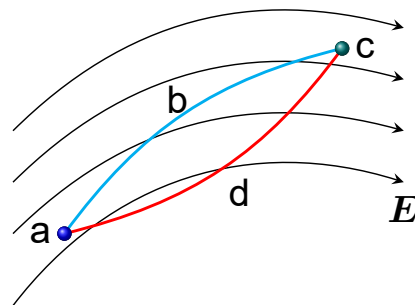



图 5-14 静电场的环路定理

5.3.3 电势能

任何保守力场都可以引入势能概念。静电场力是保守力，可以引入电势能的概念，即认为试验电荷 q_0 在静电场中某一位置具有一定的电势能 E_p 。

电场力做功：

$$W_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{pa} - E_{pb} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p$$


 **电势能:** 规定 b 点的电势能为 0, 则

$$E_{pa} = W_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$


对于有限大小带电体, 通常定义 $E_{p\infty} = 0$, 电场中某点电势能为

$$E_{pa} = \int_a^\infty q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

5.3.4 电势 电势差

 电势能依赖于空间位置 (a) 与电荷的电量 (q_0), 为了仅仅描述电场能量的性质, 可以引入**电势**:

$$U = \frac{E_{pa}}{q_0} = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{单位: V})$$

 静电场中任意两点 a 和 b 电势之差称为 a 、 b 两点的**电势差**, 也称为**电压**.

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_b^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

电场力做功

$$W = q_0(U_a - U_b)$$

电势叠加原理

由若干带电体组成的带电系统在电场中某点的电势等于每个带电体单独存在是在该点电势的代数和.

5.3.5 电势的计算

1) 点电荷电场的电势:

选取无穷远处为电势零点时, 电场中任一点 a 的电势

$$U_a = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

2) 点电荷系电场的电势:

根据电场强度叠加原理

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_i^2} \mathbf{r}_{i0}$$

可得, 在取 $U_\infty = 0$ 时, 电场中任意一点 a 的电势

$$U_a = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^\infty \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_i^2} \mathbf{r}_{i0} \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

3) 连续电荷分布带电体的电势: 总电场在 a 点的电势

$$U_a = \int_V dU = \int_V \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

5.4 静电场中的导体

☞ **例 5.9** 求电偶极子电场中任一点的电势 (图5-15). 电偶极子的电矩 $p = ql$.

☞ **例 5.10** 求均匀带电球面的电场中电势的分布 (图5-16). 设球面半径为 R , 总电量为 q .

☞ **例 5.11** 如图5-17所示, 半径分别为 R_A 和 R_B 的两个同心均匀带电球面 A 和 B, 内球面 A 带电 $+q$, 外球面 B 带电 $-q$, 求 A、B 两球面的电势差.

分析: 可用电势差定义式计算, 或者利用电势叠加原理计算.

☞ **例 5.12** 求电荷线密度为 λ 的无限长带电直线电场中任一点的电势.

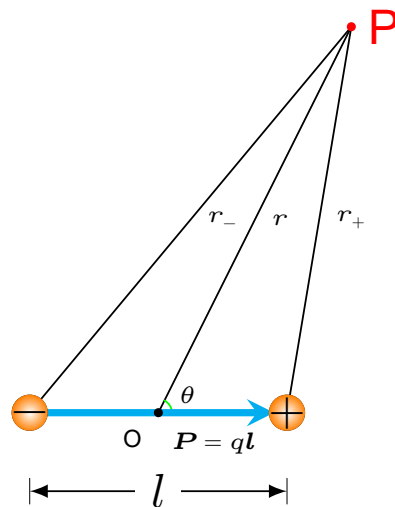


图 5-15

5.4 静电场中的导体

5.4.1 导体的静电平衡

金属导体的电结构: 晶格与自由电子. 无外场: 热运动, 显示电中性.

静电感应: 加入外电场时, 自由电子在电场力作用下定向运动, 形成感应电荷.

静电平衡: 感应电荷产生附加电场, 与外电场抵消. 导体的内部和表面都没有电荷作任何宏观定向运动的状态. 导体**内部**任一点的电场强度为**零**.

$$E = E_0 + E' = 0$$

导体在静电平衡时,

- 1) 导体是**等势体**, 导体表面是**等势面**. 导体内部任意两点电势差为**零**.

证明:

$$U_{AB} = U_A - U_B = \int_A^B \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$U_A = U_B$$

□

- 2) 导体表面上任一点的电场强度方向与该处表面垂直. 大小与该处电荷的面密度成正比.

- 3) 导体**内部**处处**没有净电荷**存在. 净电荷只能分布于导体的表面.

5.4.2 导体壳和静电屏蔽

当导体壳腔内没有其他带电体时, 在静电平衡条件下, 导体壳内表面处处没有电荷. 电荷**只分布在导体壳的外表面上**, 而且**空腔内没有**电场, 或者说, 空腔内的电势处处相等.

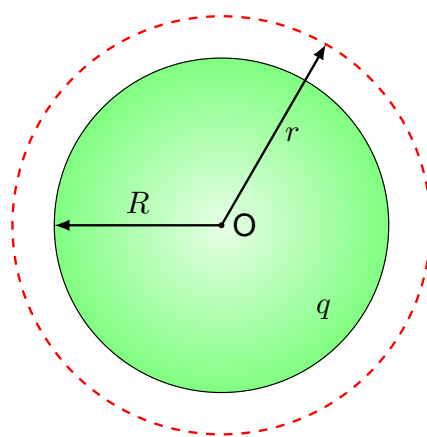


图 5-16

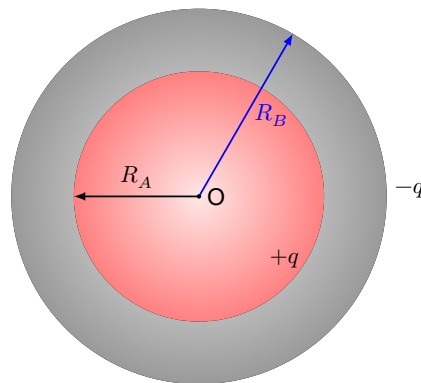


图 5-17

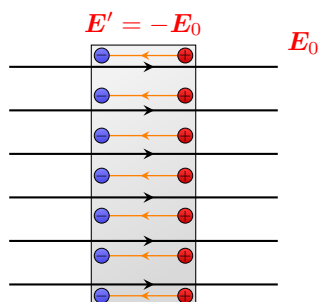


图 5-18 外电场 E_0 作用下, 导体内部正负电荷分离产生附加电场 E' , 与外电场抵消

证明:

$$\oint E \cdot dl = \int_{\text{空腔部分}} E_{\text{空腔}} \cdot dl + \int_{\text{导体内}} E_i \cdot dl$$

因

$$\int_{\text{导体内}} E_i \cdot dl = 0$$

根据环路定理, $E_{\text{空腔}} = 0$. □

腔内有带电体时, 导体内表面所带电荷与空腔内带电体的电荷等量异号.

证明: 由高斯定理:

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = 0$$

□

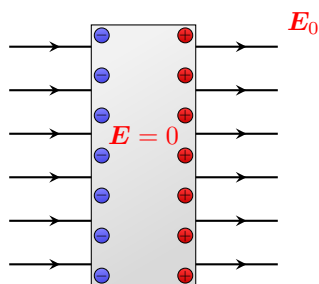


图 5-19 导体达到静电平衡时, 内部电场 $E = 0$

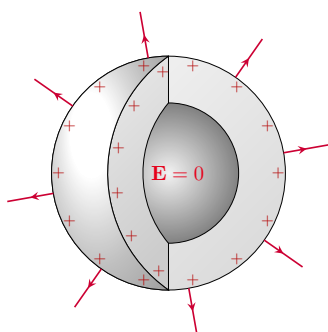


图 5-20 导体壳腔内没有其他带电体时, 导体内部电场强度为零

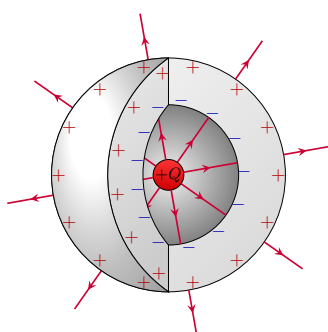


图 5-21 导体壳腔内有其他带电体时, 导体内表面所带电荷与空腔内带电体的电荷等量异号

第六章 稳恒磁场

周昭王末年(公元前 977 年左右), 夜清, 五色光贯紫微。其年, 王南巡不返。

战国《竹书纪年》

6.1 电流 电动势

6.1.1 电流强度

Q 电流强度 通过导体横截面的电量 Q 跟通过这些电量所用时间 Δt 的比值叫做**电流强度**, 简称**电流**. 该物理量表示电流的**强弱程度**.

$$I = \frac{Q}{\Delta t}$$

- **单位:** 安培 (A) $1\text{ A}=1\text{ C/s}$
- **方向:** 正电荷定向移动的方向
- 电流是**标量**

电流的微观表达式

$$I = nqSv \quad (\text{类比: 能流, 水流})$$

6.1.2 电流密度

Q 电流密度

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \mathbf{n} \quad (\text{A/m}^2)$$

电流密度矢量 \mathbf{j} 的方向沿该点电场 \mathbf{E} 的方向, 大小等于通过**与该点电场强度方向垂直**的单位面积的电流强度.

电流与电流密度关系

$$I = \int_S \mathbf{j} \cos \theta dS = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

Q 稳恒电流 电流分布不随时间变化的电流, $\frac{dq}{dt} = \text{常量}$.

Q 稳恒电场 维持稳恒电流所需的电场, 其分布不随时间变化.

6.1.3 电动势

Q 电源 能够提供**非静电力**维持电势差的装置.

6.1	电流 电动势	69
6.2	磁场 磁感应强度 . . .	70
6.3	安培环路定理	74
6.4	磁场对载流导线的作用	74
6.5	磁场对运动电荷的作用	76

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \mathbf{n} \quad \text{A/m}^2, \mathbf{n} \text{ 是 } dS_{\perp} \text{ 法线方向单位矢量}$$
$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = j dS \cos \theta = j dS_{\perp}$$

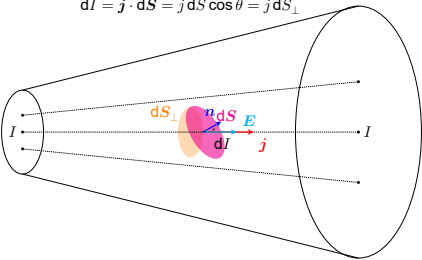


图 6-1

思考 稳恒电场与静电场有何区别?

问题 怎样产生**持续**的电流?

外电路：电荷从高电势向低电势运动。

内电路：非静电力做功（或电荷克服静电力做功），电荷从低电势向高电势运动。

非静电力场强 作用在单位正电荷上的非静电力称为**非静电力场强**，记作 E_k 。

$$E_k = \frac{F_k}{q}$$

电动势 非静电力把1C的正电荷在电源内从负极移到正极所做的功。方向：电源内部电势升高的方向。单位：V。

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} E_k \cdot dl \quad \text{或} \quad \varepsilon = \oint E_k \cdot dl$$

由于电源外部 $E_k = 0$ ，所以电源**电动势**又可定义为把单位正电荷绕**闭合回路**一周时，电源中**非静电力**（化学电源：与离子溶解和沉积相关的化学力；发电机：磁场对运动电荷的作用力—洛伦兹力）所做的功。

物理意义：反映电源把其他形式的能转化为电能本领的大小。

说明

- 1) 电动势是**标量**，可以有正负。规定电动势的**正向**是由**负极**通过电源**内部**到**正极**的方向，即从低电势处指向高电势处。
- 2) 电动势反映电源本身**固有**的性质，与外电路是否接通无关。
- 3) 提供非静电力的装置称**电源**，相当于一个电泵，像水泵一样保证电荷能循环流动。电源是一种能源，能不断地将其他形式的能量转化为电能。不同种类的电源形成非静电力的过程不同。
- 4) 注意与**电势差**概念区别开来。电动势表达式中，电源**内部非静电力**做功，表示非静电力将单位正电荷从**负极**经电源**内部**移到**正极**所做的功，反映**电源**的特性。而电势差则表示**静电力**把单位正电荷从电场中某一点经**任意**路径移到另一点所做的功，反映**电场**的特性。

6.2 磁场 磁感应强度

6.2.1 基本磁现象

- 1) 磁铁具有磁性，能吸引铁、钴、镍等物质。
- 2) 磁铁具有磁极，分磁北极 N 和磁南极 S。
- 3) 磁极之间存在相互作用，同性相斥，异性相吸。
- 4) 磁极不能单独存在。

1820 年 4 月，丹麦物理学家奥斯特（1770–1851, H.C.Oersted）发现了小磁针在通电导线周围受到磁力作用而发生偏转。——**电流对磁极有力的作用**。

1820 年安培（1775–1836）发现：放在磁体附近的载流导线或线

6.2 磁场 磁感应强度

圈会受到力的作用而发生运动。——**磁极对电流有力的作用。**

电流与电流之间存在相互作用。

总结

磁现象与电荷运动有着密切的关系。运动电荷既能产生磁效应，也能受磁力的作用。磁力是**运动电荷之间相互作用**的表现。

1821年，安培提出了关于物质磁性的本质假说：**一切磁现象的根源是电流。**

1) 磁性物质的分子中存在**分子电流**，每个分子电流相当于一**基元磁体**。

2) 物质的磁性取决于**内部分子电流**对外界磁效应的总和。

6.2.2 磁感应强度

磁场的传递者是磁场，磁场与电场一样是客观存在的非实体**物质**。

运动电荷（电流或磁铁） \longleftrightarrow 磁场 \longleftrightarrow 运动电荷（电流或磁铁）

磁场对外的重要表现

- 1) 磁场对进入场中的运动电荷或载流导体有**磁力**的作用；
- 2) 载流导体在磁场中移动时，磁场的作用力将对载流导体**做功**，表明磁场**具有能量**。

磁感应强度 引入**磁感应强度** B 矢量来描述磁场的强弱和方向。方向与小磁针 N 极在该处指向一致。**三种定义方式：**

- B 的方向垂直于**正电荷**所受最大磁力的方向与电荷运动方向组成的平面，满足右手螺旋关系，即 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 。 $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}$ 时，电荷所受磁力最大， B 的大小 $B = F_{\max}/qv$ 。
- B 的方向垂直于**电流元**所受最大磁力的方向与电流元方向组成的平面，满足右手螺旋关系，即 $d\boldsymbol{F} = I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$ 。 $d\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{B}$ 时，电流元所受磁力最大， B 的大小 $B = dF_{\max}/I d\boldsymbol{l}$ 。
- B 的方向垂直于**线圈**所受最大力矩的方向与磁矩方向组成的平面，满足右手螺旋关系，即 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}_m \times \boldsymbol{B}$ 。 $\boldsymbol{P}_m \perp \boldsymbol{B}$ 时，线圈所受力矩最大 (M_{\max})， B 的大小等于单位磁矩所受的最大力矩，即 $B = M_{\max}/P_m$ 。

磁场的叠加原理

若干个电流附近的磁场的磁感应强度是由这几个电流**分别独立存在**时产生的磁场在该处的磁感应强度**叠加**而成的。

6.2.3 磁通量

磁感线 为形象描绘磁场的空间分布而人为绘制出的一系列曲

问题 永磁铁中没有像电路里的那种电流，如何理解磁效应的本质是电流？

思考 为什么永磁铁经过高温处理后磁性减弱或消失？

问题 载流导线之间、磁铁之间或者载流导线与磁铁之间通过什么传递相互作用？

问题 如何描述磁场的强弱？

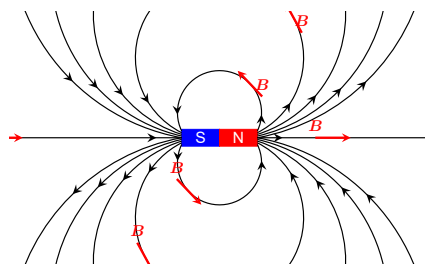


图 6-2 磁感线

线.

- 1) 磁感应线上各点**切线**方向就是该点的**磁感应强度的方向**.
- 2) 用磁感应线的**疏密程度**表示**磁感应强度的大小**.

磁感应线性质

- 1) 磁感应线是围绕电流的一组**闭合曲线**, 没有起点, 没有终点. 磁场是**涡旋场**.
- 2) 磁感应线是连续的, **不会相交**.
- 3) 磁感应线的方向和电流方向满足**右手螺旋法则**.

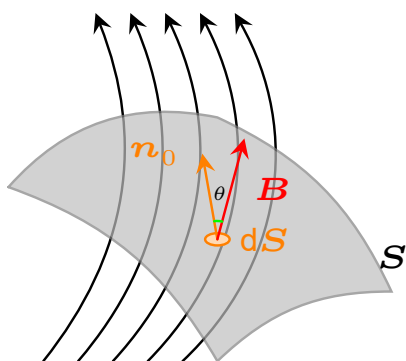


图 6-3 磁通量

问题 对于静电场有高斯定理, 反映了电通量与场源电荷之间的关系, 体现了静电场的有源性. 那么对于磁场, 与磁通量相关的高斯定理如何表示? 存在磁荷吗?

问题 怎么求电流产生的磁场?

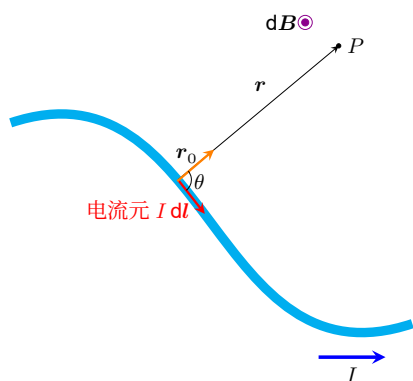


图 6-4 毕奥-萨伐尔定律

磁通量 通过磁场中某一曲面的磁感应线条数.

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

单位: 韦伯, Wb, $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$

6.2.4 磁场中的高斯定理

磁场中的高斯定理

由于磁感线是**无头无尾**的闭合曲线, 所以穿过任意闭合曲面的总磁通量必为**零**.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这表明:

- 1) 磁感线是无头无尾的闭合曲线 (磁场是**涡旋场**);
- 2) 磁场是**无源场**, 磁场无磁单极 (**无磁荷**) 存在.

6.2.5 毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律

$$d\mathbf{B} = k \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

真空中的毕奥-萨伐尔定律

真空中的毕奥-萨伐尔定律可表达为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

真空中的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$

由叠加原理得知, 任意形状的载流导线在给定点产生的磁场, 等于各段电流元在该点产生的磁场的矢量和

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

说明

- 1) 毕奥-萨伐尔定律只对线电流元的空间适用, 即电流通过的横截面的线度**远小于**其到待求场点的距离, 故不存在 $r \rightarrow 0$, $dB \rightarrow \infty$ 的情况.
- 2) 毕奥-萨伐尔定律是在大量实验结果的基础上概括总结出来的结果, 由于电流元不能单独存在, 无法由实验直接证实, 只能连同叠加原理一起由实验间接证明.
- 3) 毕奥-萨伐尔定律是一个**实验定律**, 是在稳恒电流的情况下总结出来的, 适用条件是**稳恒电流**.

$$I = nqvS$$

电流元的带电粒子数 $dN = nS dl$

每个运动带电粒子激发的磁场 (**运动电荷产生的磁场**)

$$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \sin(\mathbf{v}, \mathbf{r})}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

6.2.6 毕奥-萨伐尔定律的应用

- 1) 根据载流导体的**对称性**建立坐标系.
- 2) 将载流导体分割成无限多个**小电流元**, 根据毕奥-萨伐尔定律写出某一电流元 $I d\mathbf{l}$ 在 P 点产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

$$dB_x = dB \cos \theta, dB_y = dB \sin \theta,$$

- 3) 分析 B 的对称性.
- 4) 将所有电流元在 P 点产生的磁感应强度求和:

$$B_x = \int dB \cos \theta, B_y = \int dB \sin \theta$$

例 6.1 如图6-6所示, 求载流直线 I 在距离直线为 a 的 P 点的磁感应强度.

例 6.2 如图6-7所示, 求圆形电流轴线上的磁场.

例 6.3 长直电流与圆电流的组合——求下各图中 O 点的 B (图6-9).

问题 电流本质是电荷的流动, 电流元产生的磁场本质上也应是运动电荷产生磁场的叠加. 那么每一个运动电荷单独产生的磁场的计算公式?

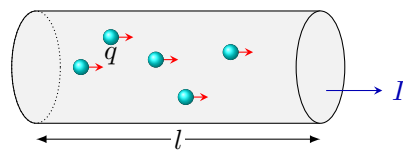


图 6-5

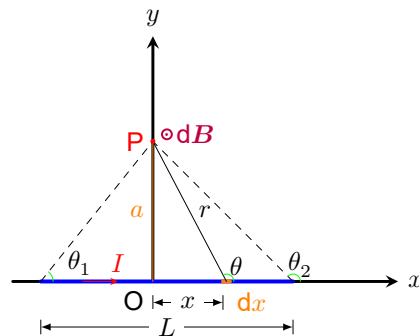


图 6-6

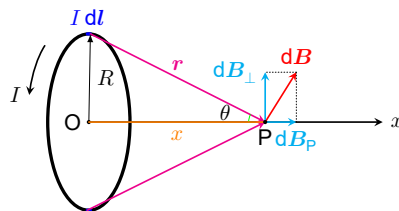


图 6-7

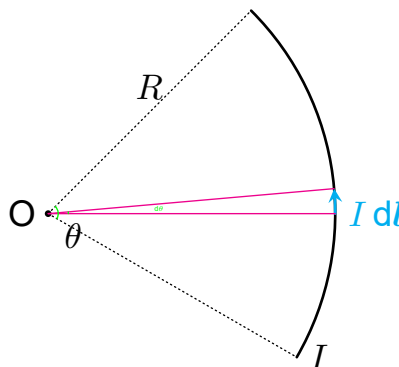


图 6-8 载流圆弧导线

练习 6.1 推导半径为 R , 弧角为 θ 的圆弧电流 I 在圆心处的磁感应强度 (图6-8).

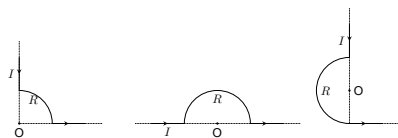


图 6-9

问题 静电场中 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 那么在稳恒磁场中, $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = ?$

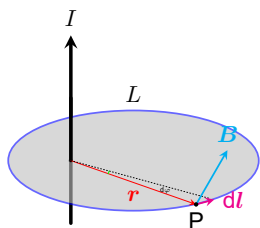


图 6-10

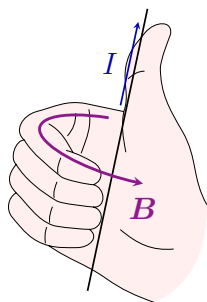


图 6-11 右手螺旋定则确定电流正负

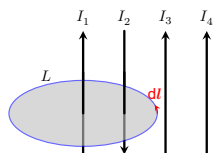


图 6-12

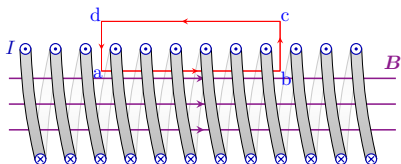


图 6-13 长直载流螺线管

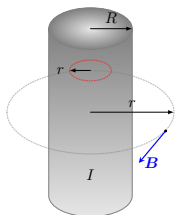


图 6-14 无限长载流圆柱导体

6.3 安培环路定理

6.3.1 安培环路定理

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l}_\perp + d\mathbf{l}_\parallel) = 0 + \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\varphi$$

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\varphi = \mu_0 I$$

± 号取决于积分回路**绕行方向**与**电流元方向**的关系, 规定满足**右手螺旋**关系为**正**.

安培环路定理

在真空中的稳恒电流磁场中, 磁感应强度 \mathbf{B} 沿任意闭合曲线 L 的线积分 (也称 \mathbf{B} 矢量的**环流**), 等于穿过这个闭合曲线的所有电流强度 (即穿过以闭合曲线为边界的任意曲面的电流强度) 的代数和的 μ_0 倍.

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I_i$$

说明

- 1) 电流正、负号的规定: **右手螺旋定则**
- 2) 磁场的回路积分与回路形状无关, 只依赖于回路所包围的电流.
- 3) \mathbf{B} 的环流不为零, 说明磁场是非保守场, 是**涡旋场**.

6.3.2 安培环路定理的应用

- 1) 分析磁场分布的**对称性** (方向、大小).
- 2) 选择适当的安培环路:
 - 环路应该通过场点,
 - 环路的各部分或 $\parallel \mathbf{B}$, 或 $\perp \mathbf{B}$,
 - 环路上待求的场强**只有一个值** (可以提到积分号外面).
- 3) 正确计算回路包围的传导电流的代数和.
- 4) 利用安培环路定理求出该点磁感应强度的大小, 其方向在分析磁场对称性时可以判断.

例 6.4 求长直载流螺线管内的磁场分布 (图6-13).

例 6.5 求无限长载流圆柱导体内外磁场的分布 (图6-14).

6.4 磁场对载流导线的作用

6.4.1 安培定律

安培定律

位于磁场中某点处的电流元 $I d\mathbf{l}$ 将受到磁场的作用力 $d\mathbf{F}$. $d\mathbf{F}$ 的大小

6.4 磁场对载流导线的作用

与电流强度 I , 电流元的长度 dl , 磁感应强度 B 的大小及 $I dl$ 与 B 的夹角 θ 的正弦成正比.

$$dF = I dl \times B$$

给定载流导线在磁场中所受到的安培力

$$F = \int_L dF = \int_L I dl \times B$$

对长为 l 的通有电流 I 的载流直导线, 其所受安培力大小

$$F = IBl \sin \theta$$

6.4.2 无限长两平行载流直导线间的相互作用力

$$dF_{12} = B_1 I_2 dl_2 \sin \theta = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a} I_2 dl_2 \sin \theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl_2$$

载流导线 2, 1 每单位长度所受安培力

$$\frac{dF_{12}}{dl_2} = \frac{dF_{21}}{dl_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

安培 放在真空中的两条无限长平行直导线, 各通有相等的稳恒电流, 当两导线相距1m, 每一导线每米长度上受力为 2×10^{-7} N时, 各导线中的电流强度为1 A.

例 6.6 载有电流 I_1 的长直导线旁边有一与长直导线垂直的共面导线, 载有电流 I_2 . 其长度为 l , 近端与长直导线的距离为 d , 如图6-17所示. 求 I_1 作用在 l 上的力.

6.4.3 磁场对载流线圈的作用

对于载流线圈, 通常采用磁矩来表征载流线圈的本身属性. 设载流线圈所围面积为 ΔS , 线圈中电流为 I , 则该载流线圈的**磁矩**定义为

$$P_m = I \Delta S n_0$$

均匀磁场对载流线圈的作用

da 受力

$$F_1 = BIl_1 \sin(\pi - \theta) = BIl_1 \sin \theta$$

bc 受力:

$$F'_1 = BIl_1 \sin \theta$$

两者大小相等, 方向相反, 合力为 0.

ab 和 cd 都与磁场垂直, 所受力的大小相等, 方向相反, 但不在同

问题 静电场对带电体有静电力作用, 由库仑定律描述. 那么, 磁场对载流导线也应有磁力作用. 磁力的大小和方向? 相应的定律?

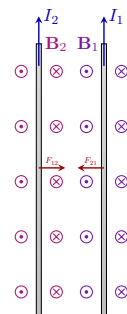


图 6-15



图 6-16

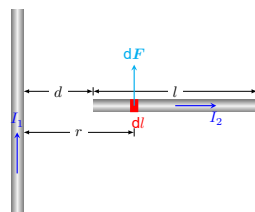


图 6-17

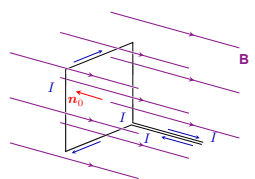


图 6-18 磁矩

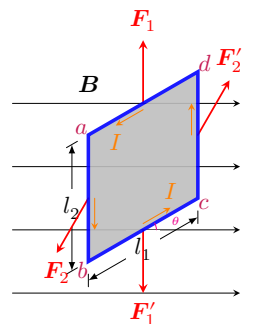


图 6-19

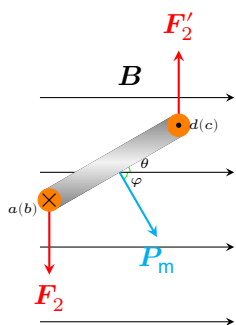


图 6-20

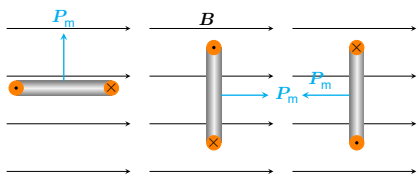


图 6-21

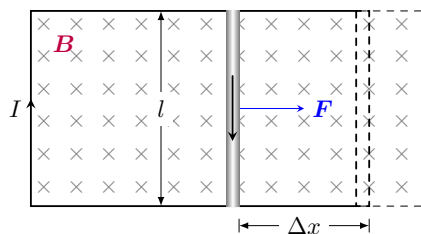


图 6-22

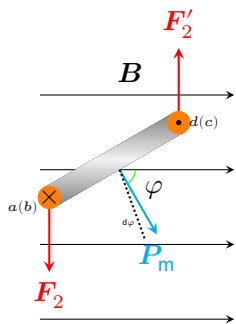


图 6-23

问题 磁场对载流导线有磁力作用, 而电流的微观物理机制是电荷的定向流动. 宏观上的磁力在微观上应该对应于对这些运动电荷作用的磁力叠加. 那么, 磁场对单个运动电荷的磁力的方向和大小公式描述如何?

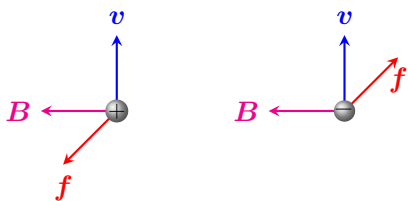


图 6-24 洛伦兹力

一直线上, 形成一力偶, 力矩和:

$$M = F_2 \frac{l_1}{2} \cos \theta + F'_2 \frac{l_1}{2} \cos \theta = BIl_1 l_2 \cos \theta = BIS \cos \theta = BIS \sin \varphi$$

如果线圈有 N 匝, 则

$$M = NBIS \sin \varphi = P_m B \sin \varphi \quad (\text{线圈磁矩 } P_m = NIS)$$

矢量表达式

$$M = P_m \times B$$

- $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $P_m \perp B$, $M_{\max} = P_m B$.
- $\varphi = 0$, $P_m \parallel B$, $M = 0$, 处于稳定平衡态. 磁场的方向可定义为使线圈磁矩处于稳定平衡位置时的磁矩的方向.
- $\varphi = \pi$, $P_m \parallel B$, $M = 0$, 但处于非稳定平衡态, 微扰后会达到稳定平衡位置.

6.4.4 磁力的功

1. 载流导线在磁场中运动时磁力所做的功

$$W = F \Delta x = BIl \Delta x = BI \Delta S = I \Delta \Phi_m$$

总结

当载流导线在磁场中运动时, 如果电流保持不变, 磁力所做的功等于**电流强度**乘以通过回路所环绕的面积内**磁通量**的增量.

2. 载流线圈在磁场中转动时磁力矩所做的功

设线圈转过极小的角度 $d\varphi$ (图6-23), 在此过程中, 磁力矩做负功:

$$dW = -M d\varphi = -BIS \sin \varphi d\varphi = BIS d(\cos \varphi) = I d(BS \cos \varphi) = I d\Phi_m$$

$$W = \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} I d\Phi_m = I \Delta \Phi_m$$

总结

一个任意的闭合回路在磁场中改变位置或改变形状时, 如果维持线圈上电流不变, 则磁力或磁力矩所做的功为 $W = I \Delta \Phi_m$.

6.5 磁场对运动电荷的作用

6.5.1 洛伦兹力

$$\left. \begin{aligned} dF &= BI dl \sin \theta \\ I &= nqvS \end{aligned} \right\} \Rightarrow dF = nqvSB dl \sin \theta$$

6.5 磁场对运动电荷的作用

电流元中**带电粒子数** $dN = nS dl$

磁场对运动电荷作用的力称为**洛伦兹力**, 单个运动电荷受力大小

$$f = \frac{dF}{dN} = qvB \sin \theta$$

矢量表达式: $f = qv \times B$

6.5.2 带电粒子在匀强磁场中的运动

$$f = qv \times B = m \frac{dv}{dt}$$

1. v 与 B 平行或反平行

$$f = qv \times B = 0$$

带电粒子仍作匀速直线运动, 不受磁场的影响.

2. v 与 B 垂直

$$f = qv \times B$$

在垂直于 B 的平面内作匀速圆周运动

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

回转半径:

$$R = \frac{mv}{qB}$$

回转周期

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

3. v 与 B 夹角 θ

$$v_{\perp} = v \sin \theta; v_{\parallel} = v \cos \theta$$

螺旋线半径

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

螺旋周期

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

螺距

$$h = v_{\parallel} T = v \cos \theta T = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}$$

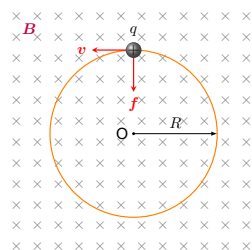


图 6-25 v 与 B 垂直时带电粒子作圆周运动

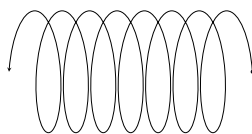


图 6-26 螺旋线运动

第 七 章 变化的电磁场

天之道，损有余而补不足。

老子《道德经》

7.1 电磁感应定律

7.1 电磁感应定律 79

7.1.1 法拉第电磁感应定律

7.2 动生电动势与感生电
动势 80

1820 年，奥斯特发现电流磁效应“电生磁”。基于对称性考虑：既然电能产生磁，那么磁是否能产生电呢？答案是肯定的。

法拉第经过十年的努力，发现了**磁生电**的方法。

“**磁生电**”现象称为**电磁感应**现象。电磁感应中产生的电流称为**感应电流**，相应的电动势称为**感应电动势**。

🔑 法拉第电磁感应定律

1831 年，法拉第归纳出“**磁生电**”的规律：只要穿过闭合导体回路的**磁通量**发生变化，不管这种变化是由于什么原因所引起的，回路中就会出现**感应电流**。

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

回路中磁场线的方向与规定的绕行正方向满足**右手螺旋关系**，穿过回路所围面积的磁通量为**正值**，反之则为负值。 $\varepsilon > 0$ ，说明 ε 的方向与绕行方向相同。

回路中的感应电流

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt}$$

通过截面的感应电量

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} d\Phi_m = \frac{1}{R} (\Phi_{m1} - \Phi_{m2})$$

≡ 总结

在一段时间内通过导线任一截面的电量与这段时间内导线所包围的面积**的磁通量的变化量成正比**，而与磁通量变化的快慢无关。

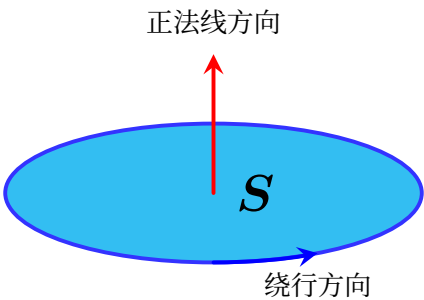


图 7-1 磁场线与绕行方向满足右手螺旋关系，如磁场线方向与图所示正法线方向相同，则穿过该面积的磁通量为正

N 匝线圈中总的感应电动势

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d\Psi_m}{dt} \quad (\text{磁链 } \Psi_m = N\Phi_m)$$

7.1.2 楞次定律

楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场去**反抗**引起感应电流的**磁通量的变化**。或者表述为：感应电流产生的效果总是**反抗引起电磁感应的原因**（如反抗相对运动、磁场变化、闭合回路面积改变等）。

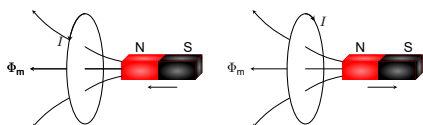


图 7-2 楞次定律图示

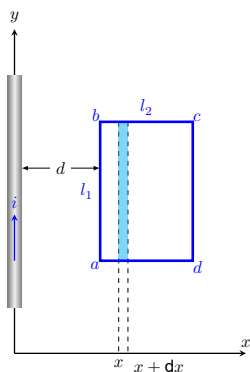


图 7-3

问题 导线切割磁感线造成回路面积变化，产生感应电动势。非静电力的来源？大小？

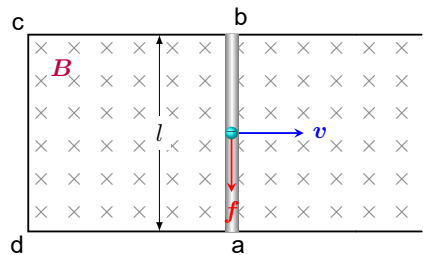


图 7-4 动生电动势

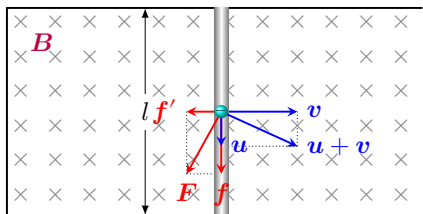


图 7-5 电子受力分析

例 7.1 一根无限长的直导线载有交流电流 $i = I_0 \sin(\omega t)$ 。旁边有一共面矩形线圈 abcd，如图7-3所示。 $ab = l_1, bc = l_2$, ab 与直导线平行且相距为 d 。求线圈中的感应电动势。

7.2 动生电动势与感生电动势

由法拉第电磁感应定律分析，只要磁通量改变，就能感应出电动势。磁通量与磁场和回路面积两个因素有关，那么可以有两种路线改变磁通量：改变回路面积；改变磁场。

动生电动势 磁场不变，回路或其一部分在磁场中有相对磁场的运动而产生的感应电动势。

感生电动势 回路不动，因磁场随时间变化而产生的感应电动势。

7.2.1 动生电动势

电子受到的洛伦兹力 $\mathbf{f} = (-e)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

将这段导线视为电源，那么非静电力为洛伦兹力，**非静电场强**定义为

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{f}}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$\text{动生电动势 } \varepsilon = \int_a^b \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l}$$

$$\text{在整个导线 } L \text{ 中产生的动生电动势: } \varepsilon = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

电子受到的总洛伦兹力

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{B} = -e\mathbf{u} \times \mathbf{B} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

总洛伦兹力功率

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{f} + \mathbf{f}') \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v} = evBu - euBv = 0 \end{aligned}$$

总结

总的洛伦兹力的功率为零, 即**总的洛伦兹力仍然不做功**. 外力克服洛伦兹力的一个分量所做的功的功率等于通过洛伦兹力的另一个分量对电子的定向运动做正功的功率.

例 7.2 如图7-6所示, 长度为 L 的铜棒在磁感应强度为 B 的均匀磁场中以角速度 ω 绕过 O 点的轴沿逆时针方向转动. 求: (1) 棒中感应电动势的大小和方向, (2) 直径为 L 的半圆导体 \widehat{OCA} 以同样的角速度 ω 绕 O 轴转动时, 导体 \widehat{OCA} 上的感应电动势.

分析: 感应电动势与是否是导体回路无关, 因此可以虚构回路及绕行方向后计算磁通量以及其变化率; 或者利用电动势定义式求解.

7.2.2 感生电动势

感生电场 麦克斯韦假设变化的磁场在其周围空间激发出一种新的涡旋状电场, 不管其周围空间有无导体, 也不管周围空间有否介质还是真空, 并称其为**感生电场 (涡旋电场)**. **非静电力**是感生电场对电荷的作用力. 感生电场是否存在只取决于**有无磁场变化**, 与**是否存在导体及是否存在闭合电路无关**.

感生电动势:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \\ \Phi_m &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon = \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

法拉第电磁感应定律的积分形式

$$\oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

静电场与感生电场异同

相同点: 这两种电场都对电荷有作用. **不同点:**

	静电场	感生电场
起源	静止电荷激发	变化磁场激发
场线	始于正电荷, 止于负电荷	无头无尾, 闭合曲线
性质	有源场: $\oint_S \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$	无源场: $\oint_S \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{S} = 0$
	无旋场: $\oint_L \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = 0$	有旋场: $\oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$

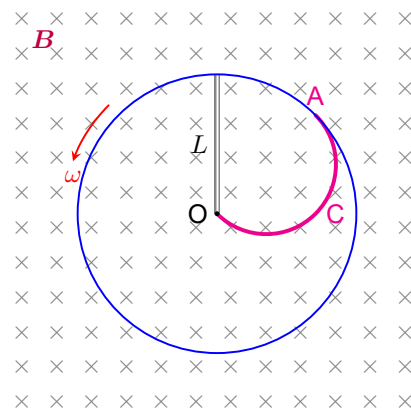


图 7-6

问题 假设磁感强度变化 (增强), 放在磁场中的金属环产生感应电动势、感应电流. 如果是木环, 也会有感应电动势, 但没有感应电流 (因为是非导体). 导体中的自由电荷是在什么力的驱动下运动呢? 非静电力是什么力?

思考 生活中, 电磁炉的工作原理就是基于感生电场产生的涡流. 为什么电磁炉的锅不能是陶瓷的? 机场安检人员所用的金属检测仪的工作原理是怎样的?

