任意闭合曲面的高斯定理推导

目录

1 数学背景: 立体角

如图1所示, 在球坐标系中, 任意球面的极小面积 $\mathrm{d}S$ 根据图形推导有

$$\mathrm{d}S = (r\,\mathrm{d}\theta)(r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi) \quad = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

很明显, r 越大, $\mathrm{d}S$ 也越大, 消除掉球半径的因素, 定义**立体角**为表面积与半径平方的比值

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

立体角的直观理解是: 空间的任意一块面积投影到半径为 1 的球面上的面积. 为帮助理解, 想象一个手电筒从球心射向半径为 1 的球面 (形成一个光斑), 和半径大于 1 的球面 (另一个比较大的光斑), 虽然两个光斑的面积是不一样的, 但是两个光斑的立体角都是相同的.

对于球面, 立体角为

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_S \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

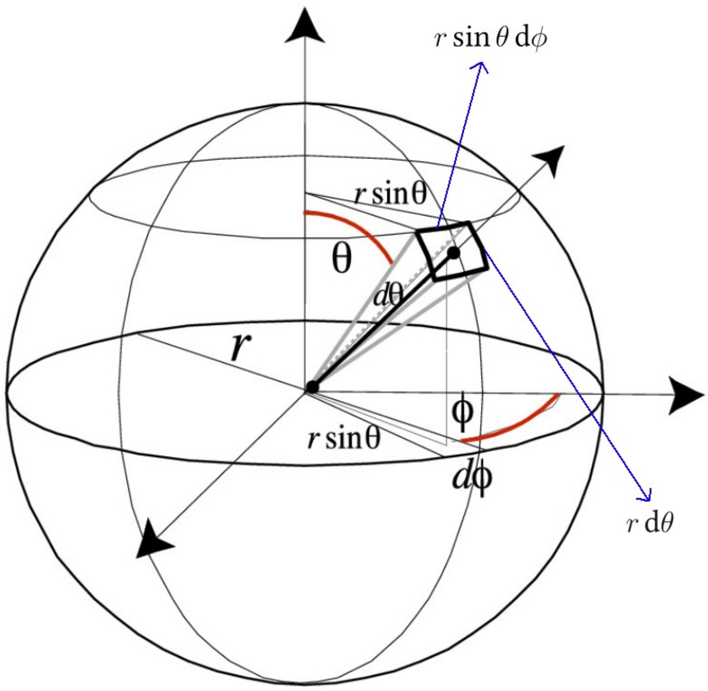

图 1

或者简单通过球的表面积 $4\pi r^2$ 与半径平方 r^2 的比值计算

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

2 任意闭合曲面的高斯定理的推导

现在我们研究正的点电荷通过任意的闭合曲面 S 的电通量, 如图2所示. 那么通过该曲面的电通量根据定义有

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2} \tag{1}$$

在上式中,$\boldsymbol{e}_r$ 是单位方向矢量, $\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 就是图2中所示的 $\mathrm{d}S_\perp$.

根据上一节我们对立体角的数学介绍, 不难发现 $\mathrm{d}S_\perp$ 在单位半径的球面上的投影面积 $\mathrm{d}S'_\perp$ 即为立体角 $\mathrm{d}\Omega$, 即

$$\frac{\boldsymbol{e}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2} = \frac{\mathrm{d}S'_\perp}{1^2} = \mathrm{d}\Omega.$$

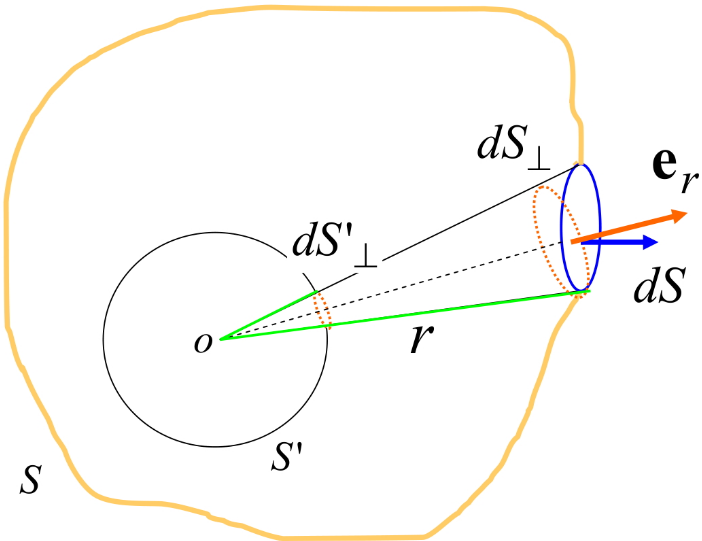

图 2

代入到式 (1) 中, 得到

$$\begin{aligned}\Phi = \oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\boldsymbol{e}_r\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2}\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi\\ &= \frac{q}{\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{2}$$

此即为高斯定理, 对任意闭合曲面也成立. 如果曲面内包含有多个点电荷, 显然把等式右边变为点电荷电量的代数和后同样成立.

再让我们考虑点电荷在任意闭合曲面的外部的情况.

想象一个处于闭合曲面左侧的手电筒射出光线, 可以预期左半部分的球面是光线穿入, 光通量为负, 右半部分的球面是光线穿出, 光通量为正. 另外左半曲面位置的光强要比右半曲面位置的光强要大; 但左半曲面的光斑大小要小于右半曲面的光斑大小. 基于我们上述关于立体角的数学介绍, 可以推断左侧光斑和右侧光斑在以手电筒为球心, 半径为 1 的球面上的投影面积都是一样 (但左侧光斑和右侧光斑的投影后的面积方向是相反的) 的, 也即左侧光斑和右侧光斑的立体角大小 (但是一负一正) 是相等的. 这样通过曲面的光通量一负一正抵消后等于 0.

同样的道理, 将手电筒换为处在曲面左侧的点电荷, 其电场强度虽然在左半曲面较大, 但电场线通过的面积较小; 右半曲面的电场强度较小, 但电场线通过的面积较大. 左侧面积和右侧面积的对以电荷为球心的球面的立体角大小都是相等的, 这样造成的效果就是电通量一负一正抵消为 0. 即:**处在曲面外部的电荷对电通量的贡献为 0**.

顺便说一下, 高斯定理本质上是一个数学定理. 是在向量分析中描述向量场通过闭合曲面的流动 (即各种通量, 如光通量, 电通量, 磁通量) 与曲面内部的向量场 (如电场, 磁场) 的表现的

联系的定理．这里的高斯就是数学教材里面那个哪里都有我 (高斯分布, 高斯最小二乘法, ⋯) 的高斯．高斯本人在物理学上还有其它贡献．19 世纪 30 年代，高斯发明了磁强计．他辞去了天文台的工作，而转向物理的研究．他与威廉·韦伯（1804 − 1891）(韦伯是磁通量的单位) 在电磁学领域共同工作．所以磁感应强度的单位以高斯命名．(磁感应强度标准单位为特斯拉，一个特斯拉等于 10000 高斯．如此的换算关系显然对伟大的高斯不公平．)