

绳子中的张力处处相等吗？

在中学物理的学习中, 绳子是一个经常接触到的东西, 有很多同学会从老师那里学到一些二级结论熟记于心. 譬如: 同一根绳子中的张力处处相等. 这个结论是解题中经常要用到的关系. 张力是指绳子相邻两部分的相互作用力, 与绳子的伸长形变有关, 本质上是弹性力. 现在我们要问, 同一根绳子的张力是否在任何情况下都张力相等? 为什么中学物理教材的绳子总是轻绳, 滑轮总是轻滑轮且与绳子没有摩擦? 本文档对这一问题为各位同学答疑.

1 无滑轮的情况

1.1 轻绳

如图1所示, 取绳中的一小段绳子 AB 作受力分析, 其质量为 Δm , 受到了与两端相邻的绳子部分的张力 T_1, T_2 , 列牛顿第二定律式得到

$$T_1 - T_2 = \Delta m a \quad (1)$$

考虑到绳子是轻绳, Δm 可认为是 0, 上式右边等于 0, 得到 $T_1 = T_2$, 这就是我们熟知的绳中张力处处相等的结论.

1.2 有质量的绳子

如果绳子的质量不可忽略, 则式 (1) 的右边的值的大小可分为两类情况.

如果绳子作匀速运动, $a = 0$, 得到 $T_1 = T_2$, 绳中张力仍然处处相等.

如果绳子作加速运动, $a \neq 0$, 则 $T_1 \neq T_2$, 绳中张力是不等的.

基于上述分析, 我们可以理解中学物理中限定绳子是轻绳的处理是一种简化问题的假定, 可降低问题的复杂度.

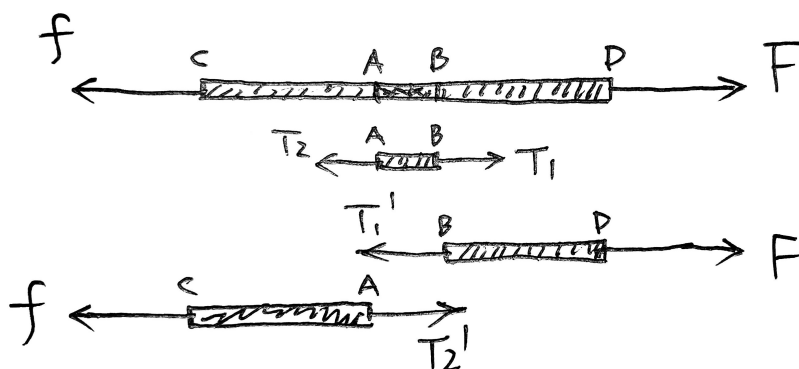


图 1: 绳子张力受力分析.

2 有滑轮的情况

如果有滑轮的情况呢?

2.1 轻滑轮与轻绳间有摩擦的情况

我们考虑轻绳与轻滑轮之间存在摩擦的情况. 如图2所示, 取滑轮上的一小段弧度 $\theta \rightarrow \theta + d\theta$ 对应的长为 $R d\theta$ 的绳元作受力分析, 绳元的质量可忽略不计, 可分别列出切向和法向的平衡方程:

$$(T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} = df = \mu dN \quad (2)$$

$$(T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2} = dN \quad (3)$$

因 $\cos \frac{d\theta}{2} \simeq 1$, $\sin \frac{d\theta}{2} \simeq \frac{d\theta}{2}$, 联立两方程得到 $dT = \mu dN$, $T d\theta = dN$, 进一步得到

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta \quad (4)$$

$\theta = 0$ 时, $T = T_1$, 将式 (4) 积分得到

$$\int_{T_1}^T \frac{dT}{T} = \int_0^\theta \mu d\theta \quad (5)$$

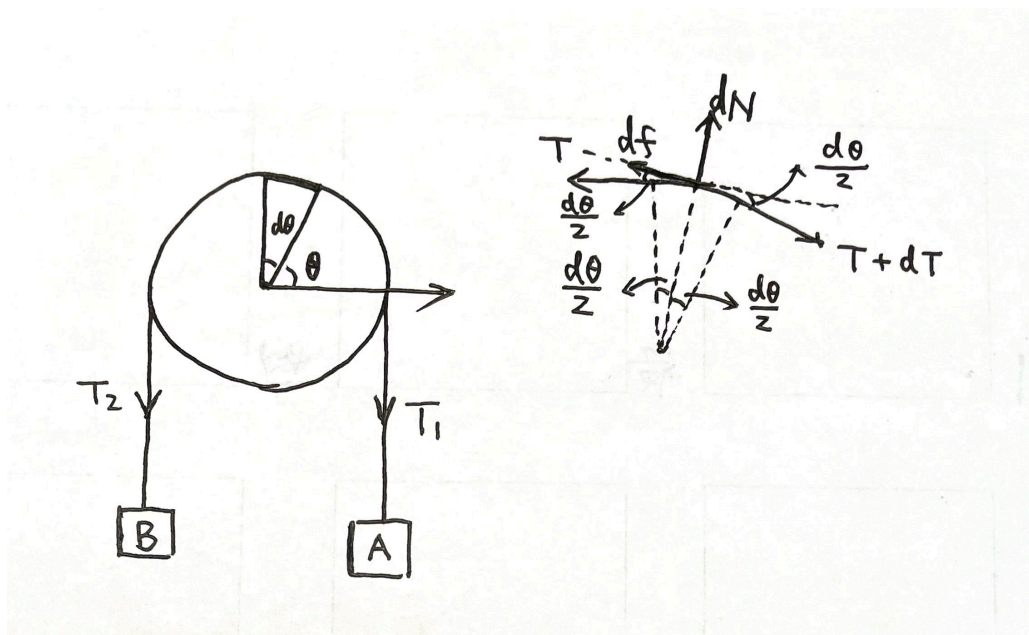


图 2: 滑轮与绳子间有摩擦力时的受力分析

解得 $T(\theta) = T_1 e^{\mu\theta}$. 滑轮左侧 T_2 对应的角度为 π , 代入得到

$$T_2 = T_1 e^{\mu\pi} \quad (6)$$

可以看出, 当滑轮与绳子之间没有摩擦力时, $T_1 = T_2$. **存在摩擦力时, $T_1 \neq T_2$.**

2.2 滑轮与绳子间无摩擦的情况

现在我们考虑滑轮与绳子间没有摩擦力的情况, 分两种情况考虑: 轻滑轮和具有质量的滑轮.

2.2.1 轻滑轮

如图3所示, 滑轮的转动的力矩由滑轮两边的绳子张力提供, 可列出刚体定轴转动定律:

$$T_1 R - T_2 R = J\alpha \quad (7)$$

其中 R 为滑轮半径, J 是其转动惯量, α 是滑轮转动角加速度.

如果滑轮是轻滑轮, 其质量为 0, 则其转动惯量也为 0, 此时上式右边为 0, 得到 $T_1 = T_2$, 绳中张力处处相等.

2.2.2 有质量的滑轮

如果滑轮的质量不可忽略, 可从式 (7) 得出:

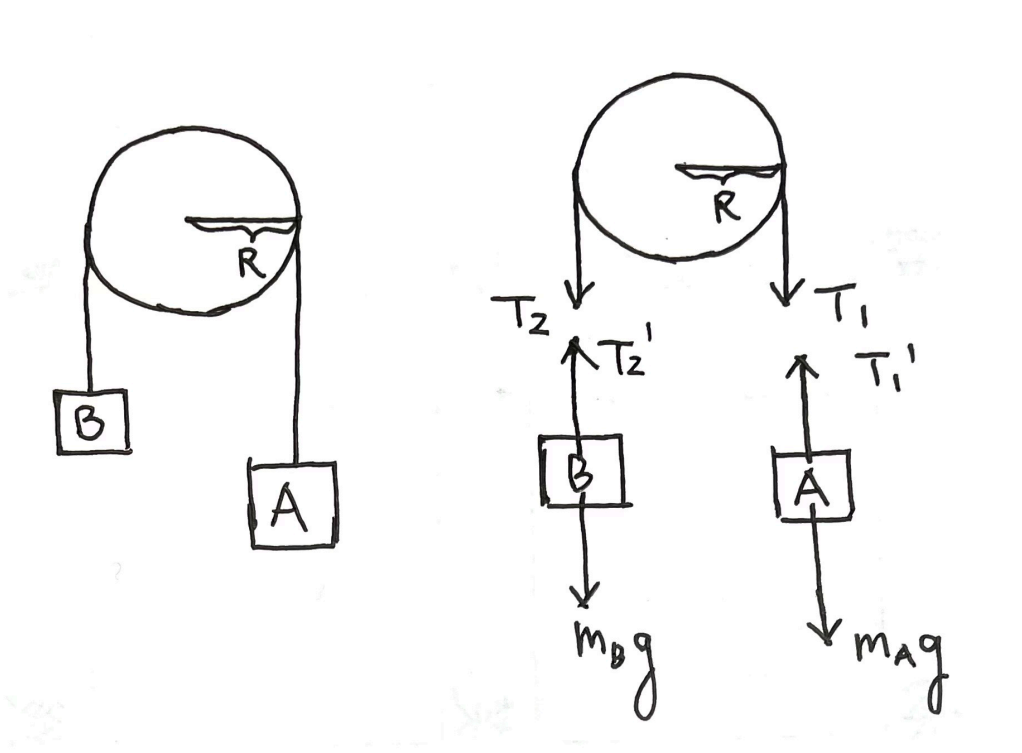


图 3: 有滑轮时两边绳子的张力分析

如果滑轮是匀速转动, $\alpha = 0$, $T_1 = T_2$.

当 $\alpha \neq 0$ 即滑轮加速转动时, $T_1 \neq T_2$, 滑轮两边绳子的张力不等, 张力的差值提供了滑轮转动角加速度所需要的力矩.

3 总结

1. 对于无滑轮情况, 只要绳子作匀速运动, 则绳子中张力处处相等; 但如果绳子具有质量且作加速运动, 则该结论不成立.
2. 对于有滑轮情况, 如果滑轮与绳子间有摩擦力, 则滑轮两边绳子张力不相等.
3. 如果滑轮与绳子间没有摩擦力, 那么只要滑轮作匀速转动, 绳子中张力处处相等. 而如果滑轮具有质量, 则即使没有摩擦力, 只要滑轮转动具有角加速度, 两边的绳子张力必然不等.

现在我们可以回顾中学的教材. 在那里, 绳子和滑轮永远是轻的, 两者之间永远是没有摩擦力的. 为什么作如此设定? 显然是为了降低问题的难度, 突出主要问题.