物理学中的梯度, 散度与旋度

目录

1 场

如果在一个空间区域中, 某个物理量在其中每一点都取确定值, 就称这个空间区域存在该**物理量的场**. 如果这个物理量是数量或标量, 就称这个场是数量场或**标量场**; 这个物理量若为矢量, 就称这个场是**矢量场**. 例如, 温度场、电势场是标量场, 而电场、磁场是矢量场.

1.1 标量场

对于标量物理量 f , 根据定义其是位置坐标的单值函数:

$$f = f(x, y, z)$$

给定了标量函数 f 的具体形式, 标量 f 在场中的分布就完全确定. 在研究标量场时, 常常还需要知道 f 在场中**各点沿各个方向的变化情况**. f 在场中的变化情况往往有重要的物理意义. 例如, 若 f 是电势, 在场中各点的变化决定了各点的电场强度 $\boldsymbol{E}$. 若 f 是温度, 在各点的变化决定了这些点上热传导进行的方向和速度.

1.2 矢量场

矢量场中各点的矢量 $\boldsymbol{F}$, 是场点 P 的函数, 即 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(P)$, 在直角坐标系中 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$, 坐标表达式写作

$$\boldsymbol{F} = F_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + F_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + F_z(x, y, z)\boldsymbol{k}.$$

其中 F_x, F_y, F_z 为矢量 $\boldsymbol{F}$ 的三个坐标.

在矢量场中, 为直观地表示矢量的分布情况, 引入**矢量线**工具. 在矢量线上面每一点处, 曲线都与该点处的矢量 $\boldsymbol{F}$ 相切. 物理学中, 静电场的电场线、磁场中的磁力线、流速场中的流线都可视为矢量线的实例.

2 数学算符

2.1 Nabla 算子 ∇

Nabla 算子又称为 Del 算子, 向量微分算子, 劈形算子, 哈密尔顿算子, 用 ∇ 表示. 该算子本身并非向量, 其形式化定义为

$$\nabla = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

在直角坐标系中,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

或者写为

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

在 n 维空间中

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{e_i} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$$

∇ 作用于不同类型的量, 得到的新量的类型就不同.

1. ∇f: 直接作用于函数 (包括标量函数和矢量函数) , 意味着求函数 f 的**梯度**. 标量函数的梯度为矢量 (如电势标量函数 ψ 的梯度与电场强度矢量函数 $\boldsymbol{E}$ 的关系:$\boldsymbol{E} = -\nabla\psi$), 矢量函数的梯度为二阶张量.

2. $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$: 与矢量函数点积运算, 得到的是函数 $\boldsymbol{F}$ 的**散度**. 描述的是矢量场内一个点是汇聚点还是发源点, 形象地说, 就是包含该点的一个微小体积元的矢量是向内还是向外.

3. $\nabla \times \boldsymbol{F}$: 与矢量函数叉乘运算, 得到的是函数 $\boldsymbol{F}$ 的**旋度**. 描述了在该点上的旋转.

3 梯度

3.1 方向导数

为了讨论场在空间各点的变化, 首先引入**方向导数**的概念.

方向导数是标量函数 $f(x,y,z)$ 在某点沿任一方向 l 对距离的变化率. l 为场中任意方向, P_1 是这个方向线上给定的一点, P_2 为同一线上邻近的一点. 若极限

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(P_2) - f(P_1)}{\Delta l}$$

存在, 则此极限值记为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_1}$, 称为标量场 $f(x,y,z)$ 在 P_1 处沿 l 方向的**方向导数**. 方向导数是在一个点 P_1 处沿方向 l , 函数 $f(x,y,z)$ 对距离的变化率. 如果方向导数大于 0, 说明函数 f 沿 l 方向是增加的, 反之则是减少.

作为特例, 标量函数的偏导数就是函数沿坐标轴 x,y,z 方向的方向导数.

若函数 $f = f(x,y,z)$ 在点 $P_1\,(x_0,y_0,z_0)$ 处可微; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 l 方向的**方向余弦**, 则函数 f 在点 P_1 处沿 l 方向的方向导数必存在, 在直角坐标系中由如下公式给出

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ 是在点 P_1 处的偏导数.

3.2 梯度的定义

从一点出发, 可以有无穷多个方向导数, 函数沿其中哪个方向变化率最大在物理学中经常是需要探讨的问题. 分析方向导数的公式

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 l 方向的**方向余弦**, 也就是这个方向上的单位矢量 $\boldsymbol{e_l} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$ 的坐标. 如果把公式中的 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ 也视为一个矢量 $\boldsymbol{G}$ 的坐标, 取

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

则公式可以写作 $\boldsymbol{G}$ 与 $\boldsymbol{e_l}$ 的点积

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e_l} = |\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{e_l})$$

该式表明:$\boldsymbol{G}$ 在 l 方向上的投影正好等于函数 f 在该方向上的方向导数. 因此, 当方向 l 与 $\boldsymbol{G}$ 的方向一致时, 方向导数取得最大值, 其值为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\boldsymbol{G}|.$$

可见矢量 $\boldsymbol{G}$ 的方向是函数 f 变化率最大的方向, 其模也是最大变化率的数值.

定义 $\boldsymbol{G}$ 为函数 f 在给定点的**梯度**, 记作 $\mathrm{grad} f$

$$\mathrm{grad} f = \nabla f = \boldsymbol{G}$$

在直角坐标系中

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

总结而言, **梯度**表征了标量场 $f(x, y, z)$ 在空间各点标量函数最大增长的方向, 其大小为该方向上的增长率. 在物理学中, **空间某点物理量 (如电势, 高度) 的梯度大小是在其增长最快的方向上的单位长度的物理量的变化值.** 用数学语言表述, 标量场 $f(x, y, z)$ 在空间某点 P 的梯度是以 f 在点 P 处的偏导数为分量的向量. 作为特例, 对于一元函数, 某点的梯度就是该函数图形切线的斜率.

为帮助理解, 想象自己在爬山, 如果一直在山脚同一高度转圈圈, 那么该情况下高度标量函数的方向导数为 0. 如果是沿盘山公路行走, 方向导数值为正, 高度增加较慢; 但如果是顺着山坡向上攀爬, 则方向导数值比前种情况更大, 高度增加最快, 此时在某处攀爬的方向即为该点处的梯度方向, 其高度变化率即为高度场 (标量场) 的梯度大小.

3.3 梯度的应用实例: 电势与电场强度的关系

设有位于坐标原点的点电荷 q , 在周围空间的任一点 $P(x, y, z)$ 处的电势为

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$. 求电势 φ 的梯度.

解:

$$\nabla\varphi=\nabla\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\nabla r$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|\boldsymbol{r}|,$$

可得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},$$

同理可得 $\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}, \dfrac{\partial r}{\partial z}=\dfrac{z}{r}$, 因此

$$\nabla r=\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{k}=\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{r}_0$$

将 $\nabla r=\boldsymbol{r}_0$ 代入后得到

$$\nabla\varphi=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}_0$$

由于电场强度 $\boldsymbol{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}_0$, 所以

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$$

该式表明:**电场中的电场强度等于电势的负梯度**. 由此可推断电场强度垂直于等势面, 且指向电势降低的方向.

4 散度

4.1 通量

有矢量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=F_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+F_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+F_z(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中函数 F_x,F_y,F_z 都具有一阶连续偏导数, S 是场内的一有向曲面, $\boldsymbol{n}_0$ 是 S 在点 (x,y,z) 处的单位法向矢量, 则

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S$$

定义为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 通过曲面 S 向指定侧的**通量**.

在直角坐标系中, 通量可表述为

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0\,\mathrm{d}S=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S F_x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+F_y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+F_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例如, 物理学中的电场矢量场、磁场矢量场可引入电通量、磁通量等概念描述通过曲面的电场线、磁感应线条数.

为帮助理解通量表达式中的点积运算, 想象正午的阳光透过楼房 (平顶) 顶部的天窗, 此时透过的光线是最多的, 反映在通量表达式中是光线与天窗面积法向矢量夹角为 0, 点积后的通量值最大. 而如果是楼房侧面的窗户, 尽管也有面积, 但其面积法向矢量与光线的夹角是90° , 点积的结果为 0, 通过该窗户的光通量就为 0.

4.2 散度的定义

设封闭曲面 S 所包围的体积为 ΔV, 则 $\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}/\Delta V$ 就是矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在 ΔV 中**单位体积的平均通量**. 令闭合曲面 S 向其内某点收缩, 若平均通量的极限值存在, 记作

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在该点的**散度**. 散度表征了空间各点矢量场**发散的强弱程度**.

数学上, 可以理解为物理量的闭合**曲面积分**等于物理量的**散度**的**体积分**.

为帮助理解散度的物理含义, 想象漆黑晚上一只萤火虫发出的光, 我们用一只大网罩住它, 不断地缩小网的体积, 你会发现通过单位网面积的光线越来越多, 这些光线都是从网内向网外发出. 当网的体积足够小时, 网住的那个就是光源–萤火虫, 此时萤火虫处的光的散度为正值, 说明此点是光的源头 (正源头). 想象在地球的某处存在一个深潭, 只见周围的水流入深潭, 不

见有水流出, 说明深潭所在的地方就是水的**负**源头 (水汇入此处, 该处是一个水**洞**, 即水的负源头), 此处的水流散度为**负**值. 类似的例子还比如黑洞是光的负源头; 而恒星如太阳则是光的正源头.

简而言之, **散度**是**场点处单位体积的通量**. 如果为 0, 说明此处没有场源; 如果为正值, 说明此处有正场源, 譬如正电荷就是电场的正场源, 场线只会从包围正电荷的微小曲面流出; 如果为负值, 说明此处有负场源, 譬如负电荷就是电场的负场源, 场线只会流入包围负电荷的微小曲面.

4.3 散度的应用: 高斯定理的微分形式

应用散度, 我们可以将物理学中的静电场高斯定理的积分形式

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

改写成散度的表述形式.

对于静电场中的极小体积 $\mathrm{d}V$, 其包含电荷等于该处的电荷体密度与 $\mathrm{d}V$ 的乘积, 即 $\sum\limits_i q_i = \rho\,\mathrm{d}V$, 则

$$\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{\varepsilon_0}$$

进一步得到

$$\frac{\oiint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}V} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

上式的左边即电场的散度, 可写作 $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$, 这样得到**静电场的高斯定理的微分形式**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

该式说明**静电场是有源场**.

类似可写出**磁场的高斯定理的微分形式**

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

该式说明**磁场是无源场**.

5 旋度

5.1 斯托克斯公式

设 L 是分段光滑的空间有向闭合曲线, S 是以 L 为边界的分片光滑的有向曲面, L 的正向与 S 的方向满足右手螺旋法则, 如果函数 $F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)$ 在曲面 S 上具有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z$$

上式称为**斯托克斯公式**, 能把对任意闭合曲线边界的线积分转换为该闭合曲线为界的任意曲面的积分, 反之亦然.

利用两类曲面积分之间的联系, 斯托克斯公式还可写为

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}\mathrm{d}S=\oint_L F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z$$

其中 $\boldsymbol{n}_0=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$, 是有向曲面 S 在点 (x,y,z) 处的单位法向矢量. 公式的证明可参见高等数学教材, 不详细展开.

5.2 环流量

设有矢量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=F_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+F_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+F_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

L 是场内一条分段光滑的有向闭合曲线, $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是该曲线上的一段线元, 在直角坐标系中, 有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$$

所以 $\boldsymbol{F}$ 沿闭合曲线 L 的环路积分

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L \boldsymbol{F}\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k})=\oint_L F_x\,\mathrm{d}x+F_y\,\mathrm{d}y+F_z\,\mathrm{d}z$$

$\oint_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 沿有向闭合曲线 L 的**环流量**.

5.3 旋度的定义

设有矢量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + F_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + F_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

则矢量

$$(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\boldsymbol{k}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的**旋度**, 记为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$(有些数学教材还用 $\mathrm{curl}\boldsymbol{F}$ 的表述方法, 含义都一样的). 利用哈密尔顿算子, 可将旋度写作:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

在斯托克斯公式中, 有向曲面 S 在点 (x,y,z) 处的单位法向矢量为

$$\boldsymbol{n}_0 = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$$

则

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_0 = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_0 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

这样, 斯托克斯公式可写为下面的积分形式

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_0 \,\mathrm{d}S = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S\boldsymbol{n}_0$. 该式说明物理量的闭合**曲线**积分等于物理量的**旋度**的以闭合曲线为边界的**曲面**积分. 顺便提一下, 我们在力学章节中学过保守力的特点就是力沿闭合曲线的积分为 0, 那么怎么判断一个力是否是保守力呢? 有了上面的结论, 就可以得到保守力的判断标准:**只要**

力的旋度为 0, 那么该力就是保守力. 同样, 只要矢量场 (如静电场, 是电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 表示的场) 的旋度为 0(根据斯托克斯公式, 等价于环路积分为 0, 如静电场的环流定理), 那么该场就是保守场.

设想将闭合曲线缩小到其场内某一点附近, 那么以闭合曲线 L 为界的面积 ΔS 逐渐减小, $\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 也逐渐减小, 则

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

为**单位面积平均环流**, 应用斯托克斯公式, 可得

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}=\frac{\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta S}=\nabla\times\boldsymbol{F}$$

可以看出, 矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在场点 (x,y,z) 的单位面积上的环流即为该点的**旋度**, 旋度表征了矢量在某点附近各方向上**环流强弱的程度**. 简而言之, **旋度**是**场点处单位面积的环量**.

5.4 旋度的应用: 安培环路定理的微分形式

物理学中稳恒磁场的安培环路定理写作

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum_i I_i$$

应用旋度的定义, 可以将之改写为

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mu_0\sum_i I_i$$

上式右边 $\mu_0\sum\limits_i I_i=\mu_0\iint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{j}$ 是场点处的**电流密度**. 安培环路定理简化为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}$$

该式即为**稳恒磁场中的安培环路定理的微分形式**.

类似可写出**静电场中的安培环路定理的微分形式**, 即

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \quad (\text{如果是包含}\textbf{涡旋电场}(\text{感生电场})\text{ 的环流量, 则该式为:}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t})$$

上式表明, **静电场的旋度为 0, 是无旋场**. 与之对比, 磁场的旋度不为 0, **磁场是有旋场**.

为帮助理解旋度的含义, 可以对比发源于青藏高原的长江水, 很明显是有源头的 (有源场),

并且能让船只 “千里江陵一日还”(无旋场); 而如果是大海中某处的漩涡水流, 其水流线闭合, 无从溯源 (无源场), 船只在里面会不断打转 (有旋场).

6 总结

梯度、散度和旋度在电磁学中是非常有用的概念. 要理解静电场有源无旋, 磁场无源有旋的特性, 必须要准确理解数学中散度和旋度的定义. **数学中的向量对应到物理学就是矢量**. **场的散度为 0 说明是无源场, 旋度为 0 说明是无旋场**.

基于上面的介绍, 现在我们可以重新理解物理电磁学三章中学到的高斯定理和安培环路定理.

1. 静电场的高斯定理说明静电场是**有源场**.
2. 静电场的环路定理说明静电场是**无旋场**.
3. 磁场的高斯定理说明磁场是**无源场**.
4. 稳恒磁场的安培环路定理说明磁场是**有旋场**.