什么样的力是保守力?

从一个简单的实例开始. 考虑力 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ 做功, 我们研究该力从坐标原点 (0.0)(A) 沿 y 轴到 $(0, 1)$(C) 路径 (AC 路径), 以及从原点开始沿 $y = x$ 直线到 $(1, 1)$(B) 然后再沿 x 轴负方向到 C 点的折线路径 (ABC) 的做功.

如果质点运动路径是 AC, 则该力做功为

$$W = \int_0^0 F_x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 F_y \,\mathrm{d}y = \int_0^1 y \,\mathrm{d}y = 0.5\,\mathrm{J}$$

如果质点运动路径是满足 $y = x$ 函数关系的 AB 路线, 再由 B 到 C($y = 1$) 路线, 则该力做功为

$$\begin{aligned} W = W_{AB} + W_{BC} &= (\int_0^1 F_x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 F_y \,\mathrm{d}y) + (\int_1^0 F_x \,\mathrm{d}x + \int_1^1 F_y \,\mathrm{d}y) \\ &= (\int_0^1 x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 y \,\mathrm{d}y) + (\int_1^0 x \,\mathrm{d}x + \int_1^1 y \,\mathrm{d}y) \\ &= (0.5 + 0.5) + (-0.5 + 0) \\ &= 0.5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

可以验证, 如果是其他路径, 只要始末位置为 A、C 两点, 该力做功与路径无关, 也就是说该力是保守力.

推广本例, 有如下结论: 只要该力各方向的分力是该**方向变量的单值函数**, 那么该力就是保守力. 即该力满足:

$$\boldsymbol{F} = f(x)\boldsymbol{i} + g(y)\boldsymbol{j} + h(z)\boldsymbol{k}$$

形式.

实例:

$$\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$$

是保守力.

反例 (教材第 33 页例题):

$$\boldsymbol{F} = (y^2 - x^2)\boldsymbol{i} + 3xy\boldsymbol{j}$$

就不是保守力, 因为 F_x 是 x, y 两个变量的函数, 不是 x 的单值函数,F_y 也是如此.

严谨地从数学上判断一个力是否是保守力的标准需要用到数学上的旋度概念, 即

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\boldsymbol{k} = 0 \tag{1}$$

用数学术语, $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 称为力 $\boldsymbol{F}$ 的**旋度**.

因此, 判断力是否为保守力的充分必要条件是: 该力的旋度为 0, 即 $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$.