简谐振动动力学方程的求解

目录

1　二阶线性齐次微分方程的通解

以弹簧振子为例, 其动力学方程是二阶线性齐次微分方程, 根据课程推导有:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0\quad(\text{弹簧振子:}\omega^2=\frac{k}{m})\tag{1}$$

根据微分方程理论, 如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是该方程的两个**线性无关**(两个解比值不为常数) 的特解, 则

$$x=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)\tag{2}$$

就是该微分方程的**通解**.

那么接下来的事情是如何求得两个特解以及确定常数 C_1, C_2.

2　特征方程

当 r 为常数时, 指数函数 $x=\mathrm{e}^{rt}$ 与它的各阶导数都只相差一个常数因子. 利用指数函数的这一性质, 我们可以用 $x=\mathrm{e}^{rt}$ 函数尝试求解微分方程, 看能否取得合适的常数 r 满足方程式 (1).

利用该函数可得:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=r^2\mathrm{e}^{rt}\tag{3}$$

代入到式 (1), 得:

$$(r^2+\omega^2)\mathrm{e}^{rt}=0. \tag{4}$$

因为 $\mathrm{e}^{rt}\neq 0$, 所以

$$r^2+\omega^2=0. \tag{5}$$

可见, 只要 r 满足式 (5), 函数 $x=\mathrm{e}^{rt}$ 就是微分方程的解, 我们把式 (5) 称为微分方程 (1) 的**特征方程**.

很明显, 特征方程有两个共轭复数解

$$r_1=\omega i, r_2=-\omega i \tag{6}$$

因此式 (1) 的两个特解为

$$x_1=\mathrm{e}^{\omega ti}, x_2=\mathrm{e}^{-\omega ti}, \tag{7}$$

根据式 (2), 方程的通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{\omega ti}+C_2\mathrm{e}^{-\omega ti} \tag{8}$$

3 欧拉公式的应用

可以用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{9}$$

将 $x_1=\mathrm{e}^{\omega ti}$ 和 $x_2=\mathrm{e}^{-\omega ti}$ 改写为

$$\begin{aligned} x_1&=\mathrm{e}^{\omega ti}=\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)\\ x_2&=\mathrm{e}^{-\omega ti}=\cos(\omega t)-i\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{10}$$

上述两式联立得到

$$\begin{aligned} x_1'&=\frac{x_1+x_2}{2}=\cos(\omega t)\\ x_2'&=\frac{x_1-x_2}{2i}=\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{11}$$

x_1', x_2' 也是微分方程的**两个线性无关的特解**, 因此根据式 (2), 方程 (1) 的通解为

$$x(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t). \tag{12}$$

应用简谐振动的初始条件, 即 $t=0$ 时, $x=x_0$, $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$, 可以推得:

$$C_1=x_0, C_2=v_0/\omega. \tag{13}$$

因此所求的通解为:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \tag{14}$$

其中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \tan \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

完毕.